

قاعدة السلسلة :

$$\begin{array}{c} \text{ص} \leftarrow \text{ع} \leftarrow \text{س} \\ \leftarrow \\ \frac{\text{ع}}{\text{س}} \times \frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \end{array}$$

امثلة :

(١) اذا كانت $\text{ص} = \text{ع} - 3$ ، $\text{ع} = 3\text{س} + 1$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ احسب

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

الحل :

(٢) اذا كانت $\text{ص} = 2\text{ع} + 3$ ، $\text{ع} = 2\text{س} + 7$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ احسب

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

الحل :

(٣) اذا كانت $\text{ص} = 2\text{ل} - 2$ ، $\text{ل} = 4\text{س} + 2$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ احسب

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

الحل :

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} \times \frac{\text{ل}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

$$(2\text{ل} - 2) \times (4\text{س} + 2) =$$

$$(2\text{ل} - 2) \times (4\text{س} + 2) =$$

(٤) اذا كانت $\text{ص} = \text{ع} - 2$ ، $\text{ع} = 5 + 2\text{س}$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ احسب

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

الحل :

واجب

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} - 2 \geq 2 + \text{س} \text{ ، } 2 - \text{س} \geq 1 \\ \text{س} \geq 1 \text{ ، } \text{س} \geq 3 \\ \text{س} - 5 \geq 7 \end{array} \right\} = (\text{س}) \text{ و } [\text{س}]$$

(٣٤) اذا كان

احسب $\text{وه} (\text{س})$ وقيم (س) التي يكون $\text{وه} (\text{س})$ عندها غير موجودة مع ذكر السبب

مشتقة الاقترانات الدائرية :

مشتقة	الاقتران
جتاس	جاس
-جتاس	جتاس
قاس ^٢	ظاس
-قاس ^٢	ظتاس
قاسظاس	قاس
-قاسظتاس	قتاس

ملاحظة :

عند الاشتقاق نضرب في مشتقة الزاوية

سؤال ؟

احسب مشتقة كلا مما يلي :

(١) $\text{ص} = \text{جاس} + \text{ظتاس}$

(٢) $\text{وه} = \text{ظاس} + \text{ظتاس}$

(٣) $\text{ص} = \text{س}^\circ \text{ظاس}$

(٤) $\text{ص} = \text{س}^3 \text{قاس}$

(٥) $\text{ص} = \frac{\text{جاس}}{2 + \text{جتاس}}$

(٦) $\text{ص} = 5\text{جتاس}^2$ ، احسب المشتقة الثانية

سؤال ؟

اذا كانت $\text{ص} = \text{بجاس} + \text{جاس}$ ، اثبت ان :

$$(\text{ص})' = 2\text{ص} + 2\text{ب}$$

قاعدة :

$$ص = (قوس) \text{ قوة}$$

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص} (القوة) (نفس القوس) \text{ القوة}^{-1} (مشتقة ما داخل القوس)$$

امثلت :

$$(1) \text{ اذا كانت } ص = (٧س^٢ - ٩س + ٩)^{١٢}, \text{ احسب } \frac{ص}{ص}$$

الحل :

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص} (١٢) (٧س^٢ - ٩س + ٩)^{١١} (٤س - ٩)$$

$$(2) \text{ اذا كانت } ص = (س^٢ + ٢س + ١)^٨, \text{ احسب } \frac{ص}{ص}$$

الحل :

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص} (٨) (س^٢ + ٢س + ١)^٧ (٢س + ٢)$$

$$(3) \text{ اذا كان } و = (س^٣ + ٣)^٣, \text{ احسب } و (س)$$

الحل :

$$(4) \text{ اذا كانت } ص = جا^٨ س, \text{ احسب } \frac{ص}{ص}$$

الحل :

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص} (٨) (جا س)^٧ (س)$$

$$(5) \text{ اذا كانت } ص = جا^٩ س^٢, \text{ احسب } \frac{ص}{ص}$$

الحل :

$$(6) \text{ اذا كانت } ص = ظا^٣ س^٥ + ٦قا^٢ س^٩, \text{ احسب } \frac{ص}{ص}$$

الحل :

$$(5) \text{ اذا كانت } ص = و^٢ + ٤و, \text{ س} = و^٤ + ٦و, \text{ احسب } \frac{ص}{ص}$$

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص}$$

الحل :

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص} \times \frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص}$$

$$\frac{٤ + و^٢}{٦ + و^٣} = \frac{١}{٦ + و^٣} \times (٤ + و^٢) =$$

$$(6) \text{ اذا كانت } ص = ٣جا س^٣, \text{ س} = ٣جا س^٣, \text{ احسب } \frac{ص}{ص}$$

الحل :

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص} \times \frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص}$$

$$= -٣جا س^٣ = -٣جا س^٣$$

$$(7) \text{ اذا كانت } ص = و^٢ - ٣و^٣ + ٨و, \text{ س} = و^٤ + ٢و^٢, \text{ احسب } \frac{ص}{ص}$$

$$\text{احسب } \frac{ص}{ص} \text{ عندما } و = ١$$

الحل :

$$(8) \text{ اذا كانت } ص = و^٢ + ٤و, \text{ س} = و^٣ - ٢و, \text{ احسب } \frac{ص}{ص}$$

$$\text{احسب } \frac{ص}{ص}$$

الحل :

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص} \times \frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص}$$

$$\frac{٤ + و^٢}{٣ - و^٢} = \frac{١}{٣ - و^٢} \times (٤ + و^٢) =$$

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص} \times \frac{(٢)(٤ + و^٢) - (٢)(٣ - و^٢)}{(٣ - و^٢)^٢} = \frac{ص}{ص}$$

$$= \frac{١٤ - و^٤}{(٣ - و^٢)^٢} = \frac{١}{٣ - و^٢} \times \frac{٨ - و^٤ - ٦ - و^٤}{(٣ - و^٢)^٢} =$$

$$(9) \text{ اذا كانت } ص = جا ه, \text{ س} = جا ه, \text{ احسب } \frac{ص}{ص}$$

الحل :

(١٢) اذا كانت ص = ظا^٢س ، اثبت ان :

$$\frac{ص^٢}{س} = ٢(ص + ١)(ص + ١)$$

البرهان :

$$\frac{ص}{س} = ٢ظا٢س$$

$$\frac{ص^٢}{س} = ٢ظا٢س \times ٢ظا٢س = ٤ظا٤س$$

$$= ٤(ظا٢س + ١)(ظا٢س + ١)$$

$$= ٤(ظا٢س + ١)(ظا٢س + ١)$$

$$= ٤(ص + ١)(ص + ١)$$

(١٣) اذا كانت ص = جا^٩(ظا^٣س) ، احسب $\frac{ص}{س}$

الحل :

(٧) اذا كانت ص = س^٢جتا^٣س ، احسب $\frac{ص}{س}$

الحل :

$$\frac{ص}{س} = س^٢ \times \frac{١}{س} \times \frac{١}{س} \times \frac{١}{س} = \frac{ص}{س}$$

$$= \frac{١}{س} \times \frac{١}{س} \times \frac{١}{س} = \frac{١}{س^٣}$$

(٨) احسب النهايات التالية :

(أ) $\lim_{س \rightarrow ٩} \frac{جا٣(س) - (٩س + ٩هـ)}{هـ}$

الحل :

$$= مشتقة جا٣س = ٣جا٢س \times ٩ = ٢٧جا٢س$$

(ب) $\lim_{س \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{٤جتا٢س - \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3} - س}$

الحل :

$$= مشتقة ٤جتا٢س = ٨جتا٢س \times ٢س = ١٦جتا٢س$$

$$= ٨جتا٢س \times ٢س = ١٦جتا٢س$$

$$= \frac{١٦جتا٢س}{٢} = ٨جتا٢س$$

(٩) اذا كانت ص = ظا^٣س + ١ ، اثبت ان : ص = قا^٣س

البرهان :

$$ص = ٣ظا٢س + ١$$

$$= ٣(١ + ظا٢س) = ٣قا٢س + ٣$$

(١٠) اذا كانت ص = (قا^٣س) ، اثبت ان : ص = (ص)

$$ص = (ص) = (ص)$$

البرهان :

مشتقة الجذر التربيعي : $\frac{مشتقة ما داخل الجذر}{٢ \times الجذر نفسه}$

امثلة :

(١) اذا كانت ص = $\sqrt[٥]{٦س + ٨جا٣س + ٩}$ ، احسب $\frac{ص}{س}$

الحل :

$$\frac{٥ \times (٦س + ٨جا٣س + ٩)^{\frac{٤}{٥}}}{٢ \times \sqrt[٥]{٦س + ٨جا٣س + ٩}}$$

واجب

(١١) اذا كانت ص = جا^٣س ، اثبت ان :

$$ص = ٦ + ١٢جا٢س = ٠$$

الحل :

$$(2) \text{ اذا كانت } v = \sqrt{6s^2 + 8} \text{ طاس } + 9, \text{ احسب } \frac{v}{s}$$

الحل :

$$(3) \text{ اذا كانت } v = 8 + \sqrt{2} = 8 + \sqrt{2} \text{ طاس } + 2, \text{ احسب } \frac{v}{s}$$

$$\frac{v}{s}$$

الحل :

$$(2) \text{ اذا كان } v \text{ (س) } = 6 + \sqrt{2} \text{ طاس } + 2, \text{ هـ } = 4 \text{ جا } \frac{\pi}{4} \text{ س}$$

$$\text{احسب } (v \circ h) \text{ (س) عندما } s = \frac{\pi}{8}$$

الحل :

$$v = 8 + s + 6$$

$$h = 8 \text{ جا } \frac{\pi}{4} \text{ س} \times \text{جا } \frac{\pi}{4} \text{ س} \times 2 = 2 \times 6 = 12 \text{ جا } \frac{\pi}{4} \text{ س}$$

$$(v \circ h) \text{ (س) } = \left(\frac{\pi}{8} \right) \text{ هـ} \times \left(\left(\frac{\pi}{8} \right) \text{ هـ} \right) \text{ هـ} \times \left(\frac{\pi}{8} \right) \text{ هـ}$$

$$= (2) \text{ هـ} \times (6 \text{ جا } \frac{\pi}{4} \text{ س} \text{ جا } \frac{\pi}{4} \text{ س})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 16 \times 22 =$$

$$176 = 8 \times 22 = \frac{16}{2} \times 22 =$$

$$(3) \text{ اذا كان } \text{---} \text{ (س) } = s^3 + 2s^2 + 3s^2, \text{ هـ } = 2$$

$$\text{هـ (س) } = 2s^2 + s^2 + 3s^2, \text{ احسب ما يلي :}$$

$$(أ) (v \circ h) \text{ (1)} \quad (ب) (v \circ h) \text{ (1)}$$

$$(ج) (v \circ h) \text{ (1)} \quad (د) (v \circ h) \text{ (1)}$$

$$(هـ) (v \circ h) \text{ (1)}$$

الحل :

$$(4) \text{ اذا كانت } v = \sqrt{2} \text{ طاس } + \sqrt{2} \text{ قاس } + 2, \text{ احسب } \frac{v}{s}$$

$$\frac{v}{s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \text{ طاس } + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \text{ قاس } + 2 \times \sqrt{2} \text{ طاس } + \sqrt{2} \text{ قاس}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \text{ طاس } + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \text{ قاس} =$$

$$(5) \text{ اذا كانت } v \text{ (س) } = 4, \text{ هـ } = 2 \text{ (س) } = 5, \text{ احسب مشتقة}$$

$$(8 \text{ س} \sqrt{v \text{ (س)}}) \text{ عندما } s = 2$$

الحل :

$$8 \text{ س} \times \frac{v \text{ (س)}}{\sqrt{2}} = 8 \times \sqrt{v} + \frac{5 \times 2 \times 8}{2 \times 2} = 8 \times \sqrt{v} + 36 = 8 \times 2 + \frac{5 \times 2 \times 8}{2 \times 2}$$

قاعدة :

اذا كان v ، h قابلين للاشتقاق ، فان :

$$(v \circ h) \text{ (س) } = (h \text{ (س)}) \text{ هـ} \times (v \text{ (س)}) \text{ هـ}$$

$$(h \circ v) \text{ (س) } = (v \text{ (س)}) \text{ هـ} \times (h \text{ (س)}) \text{ هـ}$$

امثلة :

$$(1) \text{ اذا كان } v = 3s^2 + 5s, \text{ هـ } = s^2 - 2s$$

احسب ما يلي :

$$(أ) (v \circ h) \text{ (1)} \quad (ب) (h \circ v) \text{ (1)}$$

$$(ج) (v \circ h) \text{ (2)} \quad (د) (h \circ v) \text{ (1)}$$

(٨) اذا كانت $٧ + ٨س + ٦س^٢ = (١ + ٣س)$ و

احسب ٢ و

الحل :

(٤) اذا كان $٥ > ٣س + ٤س^٢$ ، $٥ < ٧ + ٢س^٣$ و

$٥ = ٢س + ٤س^٢$ ، احسب (٥) و

الحل :

$٥ > ٣س + ٤س^٢$ ، $٥ < ٧ + ٢س^٣$ و

$٥ = ٢س + ٤س^٢$ ، احسب (٥) و

$(٥) = (٥) \times (٥) = (٥) \times (٥)$ و

$٤٨ = ٨ \times ٦ = (٥ - ٢) \times (٥) \times (٥) = (٥) \times (٥)$ و

(٩) اذا كانت $٦س + ٢س^٢ = (٢س + ٤س)$ و

احسب (٩) بحيث $٥ \in (٩)$ و

الحل :

(٥) اذا كان $١ > ٣س + ٦س^٢$ ، $١ < ٨س + ٥س^٢$ و

$١ = ٦س + ٨س^٢$ ، احسب (٥) و

الحل :

واجب

(١٠) اذا كانت $٧ = (٨)$ ، $١٢ = (٨)$ ، وكانت

$٢ = ص$ و $(٣س)^٢$ ، احسب $\frac{ص}{س}$ عندما $٢ = ص$

الاشتقاق الضمني :

هو عملية اشتقاق متغير بدلالة متغير اخر ويستخدم عند وجود علاقات ضمنية مثلا :

(١) $٢ = (ص)$: (ص لها قوة)

(٢) (س) مرتبطة في (ص)

$٢ص$ ، $\frac{ص}{س}$ ، $٣س \times \sqrt{ص}$

(٣) الزاوية تكون (ص) مثلا جاص ، جاس ص ، ...

الخطوات :

(١) اشتق الطرفين ضمنا بحيث كل ما نشق (ص) نضع

بعدها $\frac{ص}{س}$

(٢) تجميع $\frac{ص}{س}$ في طرف

(٣) اخذ $\frac{ص}{س}$ عامل مشترك

(٤) القسمة على معامل $\frac{ص}{س}$

(٦) اذا كانت $٨ = (١)$ ، $٩ = (٣)$ ، وكانت

$١ = ص$ و $(٢س + ٣س^٢)$ ، احسب $\frac{ص}{س}$ عندما

$١ = ص$

الحل :

(٧) اذا كانت $٨س + ٥س^٢ = (١ + ٢س)$ و

احسب (٥) و

الحل :

نشق الطرفين $٨س + ٥س^٢ = (١ + ٢س)$ و

نضع $٢ = ٤ = ٥ = ١ + ٢س$ و $٢ = ٤$

$١٤ = \frac{٢٨}{٢} = (٥) \times ٨ + ٢ \times ١٠ = (٥)$ و

امثلت :

$$(1) \text{ اذا كانت } 3\sqrt{s} - 6 = 9s^2 + 6\sqrt{s}, \text{ اوجد } \frac{ds}{s}$$

الحل :

$$(2) \text{ اذا كانت } 2\sqrt{s} = 3s^2 + 8\sqrt{s}, \text{ احسب } \frac{ds}{s}$$

الحل :

$$2\sqrt{s} = 3s^2 + 8\sqrt{s} \Rightarrow \frac{ds}{s} = \frac{3s^2 + 8\sqrt{s}}{2\sqrt{s}}$$

$$2\sqrt{s} = 3s^2 + 8\sqrt{s} \Rightarrow \frac{ds}{s} = \frac{3s^2 + 8\sqrt{s}}{2\sqrt{s}}$$

$$\frac{ds}{s} = \frac{3s^2 + 8\sqrt{s}}{2\sqrt{s}} = \frac{3s^2}{2\sqrt{s}} + \frac{8\sqrt{s}}{2\sqrt{s}}$$

$$\frac{ds}{s} = \frac{3s^2}{2\sqrt{s}} + 4 = \frac{3s^{3/2}}{2} + 4$$

$$(3) \text{ اذا كانت } 3s^3 + 3\sqrt{s} = 7s^3 - 5, \text{ احسب } \frac{ds}{s}$$

$$\text{احسب } \frac{ds}{s} \text{ عند } (2, 4)$$

الحل :

$$(4) \text{ اذا كانت } \sqrt{s} = (s^2 + 4)\sqrt{s}, \text{ احسب } \frac{ds}{s}$$

الحل :

$$(5) \text{ اذا كانت } \frac{3}{s} + \frac{5}{s^2} = 6s^2 + 2, \text{ احسب } \frac{ds}{s}$$

الحل :

$$3s^{-2} + 5s^{-3} = 6s^2 + 2$$

$$-6\sqrt{s} - 5s^{-2} = 6s^2 + 2$$

$$-6\sqrt{s} - 5s^{-2} = 6s^2 + 2$$

$$\frac{-6\sqrt{s} - 5s^{-2}}{-6\sqrt{s} - 5s^{-2}} = \frac{(6s^2 + 2)}{-6\sqrt{s} - 5s^{-2}}$$

واجب

$$(6) \text{ اذا كانت } 3s^2 + 6\sqrt{s} = 5s^2, \text{ احسب } \frac{ds}{s}$$

$$\text{احسب } \frac{ds}{s}$$

$$(7) \text{ اذا كانت } 2s^2 + 2\sqrt{s} = 1, \text{ اثبت ان :}$$

$$2s^2 + 2\sqrt{s} = 1 \Rightarrow \frac{ds}{s} = \frac{2s^2 + 2\sqrt{s}}{2s^2 + 2\sqrt{s}}$$

الحل :

واجب

$$(8) \text{ اذا كانت } s = \sqrt{s}, \text{ اثبت ان :}$$

$$s = \sqrt{s} \Rightarrow \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\sqrt{s}}$$

$$(9) \text{ اذا كانت } s = \sqrt{s}, \text{ اثبت ان :}$$

$$\frac{ds}{s} = \frac{1}{2\sqrt{s}}$$

$$(10) \text{ اذا كانت } s = \sqrt{s} + 4, \text{ اثبت ان :}$$

$$2\sqrt{s} + 2 = 4 \Rightarrow \frac{ds}{s} = \frac{2}{2\sqrt{s}}$$

$$(11) \text{ اذا كانت } 2h - 2 = \frac{h}{2} + 10, \text{ اوجد } \frac{dh}{h}$$

الحل :

$$2h - 2 = \frac{h}{2} + 10 \Rightarrow \frac{dh}{h} = \frac{2h - 2}{2h}$$

$$2h - 2 = \frac{h}{2} + 10 \Rightarrow \frac{dh}{h} = \frac{2h - 2}{2h}$$

$$2h - 2 = \frac{h}{2} + 10 \Rightarrow \frac{dh}{h} = \frac{2h - 2}{2h}$$

وزاري

١٤) اذا كانت $s = \sqrt{v^2 + 1}$ ، $v = (0) = 0$ ،

$$\text{اوجد } \frac{ds}{dv} \text{ عند } v = 2$$

الحل :

$$s = \sqrt{v^2 + 1} \Rightarrow \frac{ds}{dv} = \frac{v}{\sqrt{v^2 + 1}}$$

$$\frac{ds}{dv} = \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{(0) = 4} = \frac{1}{4} \quad \left| \frac{ds}{dv} \right|_{v=2}$$

معدل التغير :

ملاحظات :

١) معدل التغير في (ص) بالنسبة الى (س) هو نفسه

المشتقة $\frac{ds}{dv}$ ، فمثلا معدل التغير في المساحة (م)

بالنسبة للمحيط (ن) هو $\frac{ds}{dv}$ وهكذا ...

٢) كلمة عندما نستخدمها بعد الاشتقاق

امثلة :

١) اوجد معدل التغير في مساحة المربع بالنسبة الى محيطه عندما يكون طول ضلع المربع يساوي (٨) سم

الحل :

مساحة المربع = (الضلع)² أي $s = m^2$

لكن المحيط $l = 4s \Rightarrow s = \frac{l}{4}$

$$\therefore s = \left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{l^2}{16}$$

$$\text{المطلوب : } \frac{ds}{dl} = \frac{2l}{16} = \frac{l}{8} = 2 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \times 2 = \frac{1}{8}$$

$$\frac{ds}{dl} = \frac{32}{8} = 4 \quad \text{عندما } s = 8 \text{ فان } l = 32$$

$$\frac{ds}{dv} = \frac{v}{\sqrt{v^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{ds}{dv} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{ds}{dv} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

١٢) اذا كانت $s = \sqrt{v^2 + 4}$ ، $v = 2$ ،

احسب $\frac{ds}{dv}$

الحل :

$$\frac{ds}{dv} = \frac{v}{\sqrt{v^2 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

سؤال ؟

اذا كان $s = \sqrt{v^2 + 1}$ ، اوجد $\frac{ds}{dv}$

عند (٣،٢)

وزاري

١٣) اذا كانت $s = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ، فجد $\frac{ds}{dv}$

عند $(1, \frac{\pi}{4})$

الحل :

$$\frac{ds}{dv} = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{ds}{dv} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{ds}{dv} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{ds}{dv} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{ds}{dv} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 = \frac{1 \times \frac{\pi}{4} \times 1}{1 \times \frac{\pi}{4} \times 1 - 1} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{0}$$

وزاري

واجب

٥) صفيحة معدنية مستطيلة الشكل تتمدد بانتظام بحيث يبقى طولها يساوي (٣) امثال عرضها ، اوجد معدل التغير في مساحتها بالنسبة الى طولها عندما يكون طولها (١٥) سم

اثباتات هامة :

(١) اذا كان $و = (س)$ ، اثبت ان :
 $و \text{ (س)} = \text{رفص}$ ، حيث (ج) ثابت

البرهان :

$$و \text{ (س)} = \frac{و(ع) - و(س)}{ع - س}$$

$$= \frac{ج - ج}{ع - س} = \text{رفص}$$
 وهو المطلوب

(٢) اذا كان $و = (س)$ ، اثبت ان :
 $و \text{ (س)} = \text{ج} \times \text{ل} \text{ (س)}$

البرهان :

$$و \text{ (س)} = \frac{و(ع) - و(س)}{ع - س}$$

$$= \frac{\text{ج} \text{ل} (ع) - \text{ج} \text{ل} (س)}{ع - س}$$

$$= \frac{\text{ل} (ع) - \text{ل} (س)}{ع - س} \times \text{ج} \text{ل} \text{ (س)}$$
 وهو المطلوب

(٣) اذا كان $و = (س)$ ، اثبت ان :
 $و \text{ (س)} = \text{ل} \text{ (س)} + \text{م} \text{ (س)}$

البرهان :

$$و \text{ (س)} = \frac{و(ع) - و(س)}{ع - س}$$

$$= \frac{\text{ل} (ع) + \text{م} (ع) - \text{ل} (س) - \text{م} (س)}{ع - س}$$

$$= \frac{\text{ل} (ع) - \text{ل} (س) + \text{م} (ع) - \text{م} (س)}{ع - س}$$

$$= \frac{\text{ل} (ع) - \text{ل} (س)}{ع - س} + \frac{\text{م} (ع) - \text{م} (س)}{ع - س}$$

$$= \text{ل} \text{ (س)} + \text{م} \text{ (س)}$$
 وهو المطلوب

(٢) متوازي مستطيلات ارتفاعه مثلا طوله وعرضه ثلث ارتفاعه ، اوجد معدل تغير حجمه بالنسبة الى ارتفاعه عندما يكون الارتفاع يساوي (٦) سم

الحل :

$$\text{الحجم} = \text{الطول} \times \text{العرض} \times \text{الارتفاع}$$

$$ع = س \times ص \times ع$$

$$\text{من السؤال : } ع = ٢س \Leftarrow س = \frac{ع}{٢} ، ص = \frac{١}{٣} ع$$

$$\therefore ع = \frac{ع}{٢} \times \frac{١}{٣} ع \times ع = \frac{١}{٦} ع^٣$$

$$\text{المطلوب : } \frac{٢}{٦} ع^٣ = \frac{٢س}{ع}$$

$$\text{عندما } ع = ٦ \Leftarrow \frac{٢س}{ع} = \frac{٢}{٦} \times ٣٦ = ١٨$$

(٣) ما معدل التغير في حجم مكعب بالنسبة لمساحة سطحه عندما يكون طول ضلعه (١٠) سم

الحل :

$$ع = س^٣ \Leftarrow \frac{٢}{٤} ع = ٢س^٢$$

$$٢ = ٢س^٢ \Leftarrow \frac{٢}{٤} ع = ٢س^٢$$

$$\text{باستخدام قاعدة السلسلة : } \frac{٢}{٤} \frac{دع}{دس} = \frac{٢}{٤} ع$$

$$\Leftarrow \frac{٢}{٤} ع = \frac{١}{٢} \times ٢س^٢$$

$$\frac{٢}{٤} ع = \frac{٢ \times ٣}{١٠ \times ١٢} = \frac{٢}{١٠} \frac{دع}{دس}$$

(٤) اسطوانة دائرية قائمة حجمها ثابت ، اوجد معدل التغير في ارتفاعها بالنسبة الى طول نصف قطر قاعدتها

الحل :

$$ع = \pi \text{نوه}^٢ \Leftarrow \text{بقسمة الطرفين على } \pi \text{نوه}^٢$$

$$ع = \frac{ع}{\pi \text{نوه}^٢} \Leftarrow \frac{دع}{دس} = \frac{ع}{\pi^٢ \text{نوه}^٢} \times ٢ -$$

$$\frac{دع}{دس} = \frac{ع}{\pi^٢ \text{نوه}^٤} \times ٢ - \frac{٢\pi \text{نوه}^٢}{\pi^٢ \text{نوه}^٤} = \frac{٢ - ٢\pi}{\pi^٢ \text{نوه}^٤}$$

(٤) اذا كان $و (س) = س^٧$ ، اثبت ان :
 $و (س) = س^٧ \times س^{١-٧}$ ، حيث (٧) عدد طبيعي
 (صحيح موجب)

البرهان :

$$و (س) = و (ع) - و (س) = \frac{و (ع) - و (س)}{س - ع}$$

$$= \frac{ع^٧ - س^٧}{س - ع}$$

$$= \frac{ع(ع^{٦-١} + ع^{٦-٢}س + ع^{٦-٣}س^٢ + \dots + س^{٦-٣}ع + س^{٦-٢}س + س^{٦-١}س^٢ + \dots + س^٦)}{س - ع}$$

عوض مكان $(ع) = س$ \Leftarrow

$$= س^{٦-١} + س^{٦-٢}س + س^{٦-٣}س^٢ + \dots + س^{٦-٣}ع + س^{٦-٢}س + س^{٦-١}س^٢ + \dots + س^٦ = س^{٦-١} + س^{٦-١} + س^{٦-١} + \dots + س^{٦-١} = س^{٦-١} \times س = و (س) وهو المطلوب$$

(٥) اذا كان $ص = س^{\frac{٢}{٣}}$ ، اثبت ان : $ص = \frac{س^{\frac{٢}{٣}}}{س^{\frac{٢}{٣}}}$

البرهان :

$ص = س^{\frac{٢}{٣}}$ برفع طرفي العلاقة للقوة (٧)

$ص^٧ = س^{\frac{٢}{٣} \times ٧}$ بالاشتقاق الضمني \Leftarrow

$$٧ص^{٦} = \frac{٢ص}{س} \times س^{\frac{٢}{٣} \times ٧}$$

$$\Leftarrow \frac{٢ص}{س} = \frac{٢ص^{\frac{٢}{٣} \times ٧}}{س^{\frac{٢}{٣} \times ٧}} \text{ لكن } ص = س^{\frac{٢}{٣}}$$

$$\Leftarrow \frac{٢ص}{س} = \frac{٢ص^{\frac{٢}{٣} \times ٧}}{س^{\frac{٢}{٣} \times ٧}}$$

$$= \frac{٢}{س} \times س^{\frac{٢}{٣} \times ٧} = \frac{٢}{س} \times س^{\frac{٢}{٣} \times ٧}$$

$$\Leftarrow \frac{٢ص}{س} = \frac{٢ص^{\frac{٢}{٣} \times ٧}}{س^{\frac{٢}{٣} \times ٧}} \text{ وهو المطلوب}$$

(٦) اذا كان $و (س) = جاس$ ، اثبت ان :
 $و (س) = جاس$

البرهان :

$$و (س) = و (ع) - و (س) = \frac{و (ع) - و (س)}{س - ع}$$

$$= \frac{جاس - جاس}{س - ع} = \frac{جاس - جاس}{س - ع}$$

$$= \frac{جاس - جاس}{س - ع} \times \frac{س + ع}{س + ع} = \frac{جاس(س + ع) - جاس(س + ع)}{س^٢ - ع^٢}$$

$$= \frac{١}{س^٢ - ع^٢} \times (جاس(س + ع) - جاس(س + ع)) \text{ وهو المطلوب}$$

(٧) اذا كان $و (س) = جاس$ ، برهن ان :
 $و (س) = -جاس$

البرهان :

$$و (س) = و (ع) - و (س) = \frac{و (ع) - و (س)}{س - ع}$$

$$= \frac{جاس - جاس}{س - ع} = \frac{جاس(س + ع) - جاس(س + ع)}{س^٢ - ع^٢}$$

$$= \frac{١}{س^٢ - ع^٢} \times (جاس(س + ع) - جاس(س + ع)) \text{ وهو المطلوب}$$

(٨) اذا كان $و (س) = قاس$ ، برهن ان :
 $و (س) = قاس^٢$

البرهان :

$$و (س) = \frac{جاس}{جاس}$$

$$و (س) = \frac{جاس(جاس) - جاس(جاس)}{جاس^٢}$$

$$= \frac{جاس^٢ - جاس^٢}{جاس^٢} = \frac{١}{جاس^٢} \text{ وهو المطلوب}$$

(٩) اذا كان $و (س) = قاس$ ، اثبت ان :
 $و (س) = قاس^٢$

البرهان :

$$و (س) = قاس = \frac{١}{جاس}$$

$$و (س) = \frac{١ - ١ \times جاس}{جاس} = \frac{١ - جاس}{جاس}$$

$و (س) = قاس^٢$ وهو المطلوب

$$= 1 - 2 \text{ جتاس جاس}$$

$$\text{لكن : } (2 \text{ جتاس} + \text{جتاس}) = (2 \text{ جتاس} + \text{جتاس})$$

$$= \text{جتاس}^2 + 2 \text{ جتاس جتاس} + \text{جتاس}^2$$

$$= 1 + 2 \text{ جتاس جتاس}$$

$$\therefore (2 \text{ جتاس} + \text{جتاس}) = 1 + 2 \text{ جتاس جتاس}$$

$$= 1 - 2 \text{ جتاس جتاس} + 1 + 2 \text{ جتاس جتاس}$$

$$= 1 + 1 = 2 \text{ وهو المطلوب}$$

(3) اذا كان $(2 \text{ جتاس} + \text{جتاس}) = 2 \text{ جتاس} + \text{جتاس}$ ، اثبت ان :

$$0 = (2 \text{ جتاس} - \text{جتاس})$$

البرهان :

$$0 = (2 \text{ جتاس} - \text{جتاس}) = 2 \text{ جتاس} - \text{جتاس}$$

$$\leftarrow 2 \text{ جتاس} - \text{جتاس} = 0 \text{ وهو المطلوب}$$

(4) اذا كان $2 \text{ جتاس} = 2 \text{ جتاس} + \text{جتاس}$ ، اثبت ان :

$$0 = 2 \text{ جتاس} + \frac{2 \text{ جتاس}^2}{3} + \frac{2 \text{ جتاس}^2}{3} + 2 \text{ جتاس} + \frac{2 \text{ جتاس}^2}{3}$$

البرهان :

$$\frac{2 \text{ جتاس}^2}{3} = \frac{2 \text{ جتاس}^2}{3} + 2 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس}$$

$$\frac{2 \text{ جتاس}^2}{3} = \frac{2 \text{ جتاس}^2}{3} + 2 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس}$$

$$= 4 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس}$$

$$= 4 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس}$$

$$\frac{2 \text{ جتاس}^2}{3} = 4 \text{ جتاس} + \frac{2 \text{ جتاس}^2}{3} + 2 \text{ جتاس}$$

$$= 4 \text{ جتاس} - \frac{2 \text{ جتاس}^2}{3} + 2 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس}$$

$$\leftarrow 2 \text{ جتاس} + \frac{2 \text{ جتاس}^2}{3} = 4 \text{ جتاس} - \frac{2 \text{ جتاس}^2}{3} + 2 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس}$$

$$\therefore 2 \text{ جتاس} + \frac{2 \text{ جتاس}^2}{3} = 4 \text{ جتاس} + \frac{2 \text{ جتاس}^2}{3} + 2 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس}$$

$$\leftarrow 2 \text{ جتاس} + \frac{2 \text{ جتاس}^2}{3} = 4 \text{ جتاس} + \frac{2 \text{ جتاس}^2}{3} + 2 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس}$$

(1) اذا كان $v = (2 \text{ جتاس})^2$ ، اثبت ان :

$$\frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} = \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} \times (2 \text{ جتاس})^2 \times (2 \text{ جتاس})^2$$

البرهان :

$$\text{ليكن } (2 \text{ جتاس}) = \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} \leftarrow \text{جتاس} = (2 \text{ جتاس})$$

$$\text{وينتج ان } v = \text{جتاس} \leftarrow \text{جتاس} = \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} \times (2 \text{ جتاس})^2$$

$$\text{باستخدام قاعدة السلسلة : } \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} \times \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} = \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}}$$

$$\leftarrow \text{جتاس} \times (2 \text{ جتاس})^2 \times (2 \text{ جتاس})^2$$

$$\leftarrow \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} = (2 \text{ جتاس})^2 \times (2 \text{ جتاس})^2 \text{ وهو المطلوب}$$

اسئلة الالاثبات :

(1) اذا كان $\frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} = \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} + \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}}$ ، اثبت ان : $\frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} = 1$

البرهان :

$$\frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} = \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} + \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}}$$

$$\frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} = \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} + \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} + \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}}$$

$$\text{نشقق ضمناً : } \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} + \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} = \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} + \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} + \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}}$$

بتجميع الحدود التي تحتوي على $\frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}}$ في طرف

$$\frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} - \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} = \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} - \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}}$$

$$\frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} - \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} = \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} - \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}}$$

$$\leftarrow \frac{2 \text{ جتاس}}{2 \text{ جتاس}} = 1 \text{ وهو المطلوب}$$

(2) اذا كان $(2 \text{ جتاس} + \text{جتاس}) = 2 \text{ جتاس} + \text{جتاس}$ ، اثبت ان :

$$2 = (2 \text{ جتاس}) + (2 \text{ جتاس})$$

البرهان :

$$0 = (2 \text{ جتاس} + \text{جتاس}) - (2 \text{ جتاس} + \text{جتاس})$$

$$0 = (2 \text{ جتاس}) - (2 \text{ جتاس})$$

$$0 = (2 \text{ جتاس}) - (2 \text{ جتاس})$$

$$= 2 \text{ جتاس} - 2 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس} + 2 \text{ جتاس}$$

البرهان :

$$\text{ص} = \frac{\text{س جتاس} - \text{جتاس}}{\text{س}} = \frac{\text{س جتاس} - \text{جتاس}}{\text{س}}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{س جتاس} - \text{جتاس}}{\text{س}} - \frac{\text{س جتاس} - \text{جتاس}}{\text{س}} = \frac{\text{س جتاس} - \text{جتاس} - \text{س جتاس} + \text{جتاس}}{\text{س}}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{س جتاس} - \text{جتاس} - \text{س جتاس} + \text{جتاس}}{\text{س}} = \frac{\text{س جتاس} - \text{س جتاس} - \text{جتاس} + \text{جتاس}}{\text{س}} = \frac{0}{\text{س}} = 0 \quad (1)$$

$$\text{ص} = \frac{\text{س جتاس} - \text{جتاس}}{\text{س}} = \frac{\text{س جتاس} - \text{جتاس}}{\text{س}} \quad (2)$$

$$\text{ص} = \text{جتاس} \quad (3)$$

$$\text{جمع (3) + (2) + (1)} \Rightarrow$$

$$\text{ص} = \text{ص} + \text{ص} + \text{ص}$$

$$0 = \text{جتاس} - \frac{\text{س جتاس}}{\text{س}} + \frac{\text{س جتاس}}{\text{س}} - \frac{\text{س جتاس}}{\text{س}} + \frac{\text{س جتاس}}{\text{س}} + \frac{\text{س جتاس}}{\text{س}} = 0$$

(8) إذا كان $\sqrt{1 + 2\text{س}} = \text{ص}$ ، أثبت ان :

$$0 = \frac{1}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}^2}{\text{س}}$$

البرهان :

$$\frac{1}{\text{ص}} = \frac{2}{1 + \sqrt{2\text{س}}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

$$\frac{1}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}^2}{\text{س}} = \frac{1}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}^2}{\text{س}} = 0 \quad \text{وهو المطلوب}$$

(9) إذا كان $\text{س} = (1 - 2)^6$ ، أثبت ان :

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}^2}{1 - 2}$$

البرهان :

$$\text{س} = (1 - 2)^6 \Leftrightarrow 1 = 6 \times \text{ص} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} (1 - 2)^5$$

$$\frac{1}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} (1 - 2)^5$$

$$\frac{\text{ص}}{1 - 2} = \text{ص} (1 - 2)^5 \Leftrightarrow \text{ص} = \text{ص} (1 - 2)^5$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}^2}{1 - 2} \quad \text{وهو المطلوب}$$

(5) إذا كان $\text{س} + \text{ص} + \text{جتاس} = 0$ ، أثبت ان :

$$\frac{\text{ص}^2}{\text{س}} = \frac{\text{جتاس}}{(1 + \text{جتاس})^3}$$

البرهان :

$$0 = \frac{\text{ص}}{\text{س}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{\text{ص}}{\text{س}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{\text{ص}}{\text{س}} (1 + \text{جتاس})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س} + \text{جتاس}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{ص}^2}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} (1 - \text{جتاس}) \times (1 - \text{جتاس}) - \frac{\text{ص}}{\text{س}} (1 + \text{جتاس})$$

$$= \frac{\text{ص}}{\text{س}} \frac{1 - \text{جتاس}}{(1 + \text{جتاس})^2} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \frac{1 - \text{جتاس}}{(1 + \text{جتاس})^2}$$

$$= \frac{\text{جتاس}}{(1 + \text{جتاس})^3} \quad \text{وهو المطلوب}$$

وزاري

(6) إذا كان $\text{ص} = 2\text{س}$ ، أثبت ان :

$$\frac{\text{ص}^2}{\text{س}} = 8\text{ص} + 4\text{ص} = 0$$

البرهان :

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{2\text{س}}{\text{س}} = 2$$

$$\frac{\text{ص}^2}{\text{س}} = \frac{2\text{س}^2}{\text{س}} = 2\text{س} = 2 \times 2\text{س} = 4\text{س}$$

$$= 4\text{س} + 4\text{س} = 8\text{ص}$$

$$= 4\text{س} + 4\text{س} = 8\text{ص}$$

$$= 4\text{س} + 4\text{س} = 8\text{ص}$$

$$= 8\text{ص} - 8\text{ص} = 0$$

$$\therefore \frac{\text{ص}^2}{\text{س}} = 8\text{ص} + 4\text{ص} = 0 \quad \text{وهو المطلوب}$$

وزاري

(7) إذا كان $\text{ص} = \frac{\text{جتاس}}{\text{س}}$ ، حيث $\text{س} \neq 0$ ، أثبت ان :

$$\text{ص} + \text{ص} + \text{ص} = 0$$

$$\leftarrow \text{قاس} \frac{S}{S} + \text{جاس} =$$

$$\frac{1}{\text{جاس}} \times - \text{جاس} + \text{جاس} = - \text{جاس} + \text{جاس} = 0$$

وهو المطلوب

(١٤) اذا كان $ص^2 = س^2 - س^3$ ، اثبت ان :

$$ص = \frac{S}{S} \times \frac{S}{S} + \frac{S}{S} + س^3 = 1$$

البرهان :

$$ص^2 = س^2 - س^3 \text{ نشتق ضمنا}$$

$$2ص = \frac{S}{S} - 3س^2$$

$$2 = \frac{S}{S} \times \frac{S}{S} + \frac{S}{S} - 2 = \frac{S}{S} - 2$$

$$2 = \frac{S}{S} + \frac{S}{S} + س^3 = 2 \div 2 = 1$$

$$ص = \frac{S}{S} + \frac{S}{S} + س^3 = 1 \text{ وهو المطلوب}$$

(١٥) اذا كان $ص = \frac{\text{جاس}}{\text{جاس} - 1}$ ، اثبت ان :

$$\frac{2}{S} = \frac{S}{S} - 1$$

البرهان :

$$\frac{S}{S} = \frac{(2 - \text{جاس})(\text{جاس} - 1) - (\text{جاس} - 1)(2 - \text{جاس})}{(2 - \text{جاس})}$$

$$= \frac{2 - \text{جاس} + 2\text{جاس} - \text{جاس}^2 + 2 - \text{جاس} + \text{جاس}^2 - 2}{(2 - \text{جاس})}$$

$$= \frac{2 - \text{جاس} + 2\text{جاس} - \text{جاس}^2 + 2 - \text{جاس} + \text{جاس}^2 - 2}{(2 - \text{جاس})}$$

$$= \frac{2 - \text{جاس} + 2\text{جاس} - \text{جاس}^2 + 2 - \text{جاس} + \text{جاس}^2 - 2}{(2 - \text{جاس})}$$

$$\leftarrow \frac{S}{S} = \frac{2}{S} - 1 \text{ وهو المطلوب}$$

(١٦) اذا كان $ص^2 = (س + 1)$ ، اثبت ان :

$$(س + 1) \frac{S}{S} = \frac{S}{S} \times \left(1 - \frac{S}{S}\right)$$

البرهان :

$$ص^2 = (س + 1) \text{ نشتق ضمنا}$$

(١٠) اذا كان $ص = \text{ظاس} + \frac{1}{\text{ظاس}^3}$ ، اثبت ان :

$$\frac{S}{S} = \frac{S}{S} + \frac{S}{S}$$

البرهان :

$$\frac{S}{S} = \text{قاس} + \text{ظاس}^2 + \text{قاس}^2$$

$$= \text{قاس}^2 (1 + \text{ظاس}^2) = \text{قاس}^2 \times \text{قاس}^2 = \text{قاس}^4$$

وزاري

(١١) اذا كان $ص = س \text{ظاس}$ ، اثبت ان :

$$\frac{S}{S} = \frac{S}{S} + 2\text{قاس}^2 + 2\text{قاس}^2$$

البرهان :

$$ص = س \text{ظاس}$$

$$\leftarrow \frac{S}{S} = \text{ظاس} + س \text{قاس}^2$$

$$\leftarrow \frac{S}{S} = \text{قاس}^2 + \text{قاس}^2 + س \times 2\text{قاس}^2 = \text{ظاس}$$

$$= 2\text{قاس}^2 + س \text{ظاس} = \text{قاس}^2$$

$$\leftarrow \frac{S}{S} = 2\text{قاس}^2 + 2\text{قاس}^2 = \frac{S}{S} \text{ وهو المطلوب}$$

(١٢) اذا كان $ص = \frac{1}{س + 2}$ ، $س \neq 2$ ، اثبت ان :

$$2ص + (س + 2)ص = 0$$

البرهان :

$$ص = \frac{1}{س + 2} \leftarrow \frac{1}{س + 2} = \frac{1}{س + 2}$$

$$ص = \frac{2}{س + 2} = \frac{2}{س + 2}$$

$$\leftarrow 2ص + (س + 2)ص = 0$$

$$= \frac{2}{س + 2} \times (س + 2) + \frac{1 - 2}{س + 2} = 0$$

$$= \frac{2 - 2}{س + 2} = 0 \text{ وهو المطلوب}$$

(١٣) اذا كان $ص = \text{جاس}$ ، اثبت ان :

$$\text{قاس} \frac{S}{S} + \text{جاس} = 0$$

البرهان :

$$\frac{S}{S} = \frac{S}{S} - 2\text{جاس} = -\text{جاس}$$

(١٩) اذا كان $s^2 = 2s + 2$ ، اثبت ان :

$$\frac{1}{3(s-1)} = \frac{s^2}{2s}$$

البرهان :

$$\frac{2s}{2s} = \frac{2s}{2s} + s \leftarrow \frac{2s}{2s} = \frac{2s}{2s} + s$$

$$\frac{2s}{2s} - s = \frac{2s}{2s} = s \leftarrow$$

$$\frac{s}{s-1} = \frac{2s}{2s} \leftarrow (s-1) \frac{2s}{2s} = s \leftarrow$$

$$\frac{s \times \left(\frac{2s-1}{2s} \right) - (s-1)}{2(s-1)} = \frac{2s}{2s} \leftarrow$$

$$\frac{\frac{s}{s-1} \times s + (s-1)}{2(s-1)} = \frac{2s}{2s}$$

$$\frac{2s + 2(s-1)}{2(s-1)} = \frac{2s}{2(s-1)} + (s-1) = \frac{2s}{2(s-1)}$$

$$\frac{2s + 2s - 2}{2(s-1)} = \frac{2s + 2s - 2}{2(s-1)} \leftarrow$$

$$\frac{1}{3(s-1)} = \text{وهو المطلوب}$$

(٢٠) اذا كان $\frac{7}{5+s^2} = 2s$ ، اثبت ان :

$$0 = \frac{7s}{2s} + 2s$$

البرهان :

$$\text{نشتق ضمناً : } \frac{7s}{2s} = \frac{7s \times 7 - 2(s^2+5)}{2(s^2+5)}$$

$$\frac{1}{2s} \times \frac{49s - 2(s^2+5)}{2(s^2+5)} = \frac{7s}{2s} \leftarrow$$

$$\frac{7}{2s} = \frac{49s - 2(s^2+5)}{2(s^2+5)} \leftarrow \frac{7}{2s} = \frac{49s - 2(s^2+5)}{2(s^2+5)}$$

$$\frac{1}{2s} \times \frac{49s - 2(s^2+5)}{2(s^2+5)} = \frac{7s}{2s}$$

$$\frac{3s^3 - 2s^2 - 1}{7} = \frac{2s^3 - 2s^2 - 1}{14} = \frac{1}{2s} \times \frac{49s - 2(s^2+5)}{2(s^2+5)}$$

$$\frac{7s}{2s} + 2s = \text{المطلوب : } 3s^3 - 2s^2 - 1 = 0$$

$$3s^3 - 2s^2 - 1 = 0$$

$$3s^3 - 2s^2 - 1 = 0 \text{ وهو المطلوب}$$

$$\leftarrow \frac{7s}{2s} = \frac{7s}{2s} + s = \frac{7s}{2s} + s$$

$$\frac{7s}{2s} - s = \frac{7s}{2s} = s \leftarrow$$

$$\frac{7s}{2s} = \frac{7s}{2s} + s \leftarrow$$

$$\frac{7s}{2s} - s = \frac{7s}{2s} = s \leftarrow$$

$$\therefore \frac{7s}{2s} = (s+1) \text{ نشتق ضمناً}$$

$$\frac{7s}{2s} \times \frac{7s}{2s} = \frac{7s}{2s} (s+1) + \frac{7s}{2s}$$

$$\leftarrow \frac{7s}{2s} - \frac{7s}{2s} \times \frac{7s}{2s} = \frac{7s}{2s} (s+1)$$

$$\frac{7s}{2s} \left(1 - \frac{7s}{2s} \right) = \text{وهو المطلوب}$$

(١٧) اذا كان $s^2 = 2s + 2$ ، اثبت ان :

$$\frac{2s}{2s} = \frac{2s}{2s} + s = \frac{2s}{2s} + s$$

البرهان :

$$\frac{2s}{2s} = \frac{2s}{2s} + s$$

$$2s = (2s+1) + s = 2s + 1 + s$$

$$\frac{2s}{2s} = \frac{2s}{2s} + s$$

$$2s = (2s+1) + s$$

$$2s = (2s+1) + s$$

$$2s = (2s+1) + s \text{ وهو المطلوب}$$

(١٨) اذا كان $s^2 = 2s + 2$ ، اثبت ان :

$$s^2 + 2s + 2 = 2s + 2 + 2s = 4s + 2$$

البرهان :

نشتق ضمناً :

$$s^2 + 2s + 2 = 2s + 2 + 2s = 4s + 2$$

نشتق ضمناً مرة اخرى :

$$s^2 + 2s + 2 = 2s + 2 + 2s = 4s + 2$$

$$s^2 + 2s + 2 = 2s + 2 + 2s = 4s + 2$$

$$s^2 + 2s + 2 = 2s + 2 + 2s = 4s + 2$$

$$s^2 + 2s + 2 = 2s + 2 + 2s = 4s + 2 \text{ وهو المطلوب}$$

$$2صص + \left(\frac{جئاس}{ص}\right)^2 = -جاس$$

$$2صص + \frac{2جئاس}{ص} = -جاس$$

$$2صص + \frac{جئاس - 1}{ص} = -جاس$$

$$2صص + \frac{(جئاس - 1)(جئاس + 1)}{ص} = -جاس$$

$$2صص + \frac{(جئاس - 1)ص}{ص} = -جاس$$

$$2صص + \frac{(جئاس - 1)}{2} = -جاس \text{ نوحده المقامات}$$

$$4صص + (جئاس - 1) = -2جاس$$

$$4صص + 1 + جئاس = 0$$

$$4صص + 1 = -صص \Rightarrow 0 = \frac{ص - 2}{4} = \frac{ص - 2}{4}$$

المطلوب : $ص + 4ص$

$$ص + 4\left(\frac{ص - 2}{4}\right) = ص - ص = 0 \text{ وهو المطلوب}$$

٢٤) اذا كان $ص = جئاه$ ، $س = جئاه$ ، اثبت ان :

$$\frac{س - 1}{جئاه} = \frac{ص - 1}{جئاه}$$

البرهان :

$$\frac{س}{جئاه} = \frac{ص}{جئاه} ، \frac{س - 1}{جئاه} = \frac{ص - 1}{جئاه}$$

$$\frac{س}{جئاه} \times \frac{جئاه}{جئاه} = \frac{ص}{جئاه} \times \frac{جئاه}{جئاه} \Leftarrow$$

$$\frac{س}{جئاه} = \frac{ص}{جئاه} \Rightarrow \frac{س}{جئاه} \times جئاه = \frac{ص}{جئاه} \times جئاه$$

$$\frac{س}{جئاه} \times (جئاه) = \frac{ص}{جئاه} \times (جئاه)$$

$$\frac{س}{جئاه} = \frac{ص}{جئاه} \Rightarrow \frac{س}{جئاه} = \frac{ص}{جئاه} \text{ وهو المطلوب}$$

٢١) اذا كان $ص = 1 + قاس$ ، اثبت ان :

$$\frac{ص}{س} = \frac{2}{س - 1 + جئاس}$$

البرهان :

$$\frac{ص}{س} = \frac{(1 - طئاس)قئاس - (1 + طئاس)(-قئاس)}{(1 - طئاس)^2}$$

$$= \frac{قئاس - قئاسطئاس + قئاسطئاس + قئاس}{(1 - طئاس)^2} =$$

$$\frac{قئاس}{(1 - طئاس)^2} = \frac{2قئاس}{(1 - طئاس)^2} =$$

$$= \frac{قئاس}{(1 - طئاس)^2} = \frac{2قئاس}{(1 - طئاس)^2} =$$

$$= \frac{قئاس}{2} = \frac{2جئاس + جئاس - 1}{2}$$

وهو المطلوب

وزاري

٢٢) اذا كان $ص = (قئاس + طئاس)^2$ ، اثبت ان :

$$ص = ٧صقئاس$$

البرهان :

$$ص = ٧(قئاس + طئاس)(قئاس + طئاس)$$

$$ص = ٧قئاس(قئاس + طئاس) + ٧طئاس(قئاس + طئاس)$$

$$ص = ٧قئاس(قئاس + طئاس) + ٧١٠طئاس(قئاس + طئاس)$$

$$ص = ٧قئاس(قئاس + طئاس) + ٧١٠طئاس(قئاس + طئاس) \text{ وهو المطلوب}$$

٢٣) اذا كان $ص = 1 + جئاس$ ، اثبت ان :

$$ص + 4ص = 0$$

البرهان :

$$ص + 1 = جئاس \text{ نشتق ضمنيا}$$

$$2صص = جئاس \text{ نشتق ضمنيا مرة اخرى}$$

$$2صص + 2ص = 2صص - جئاس$$

$$2صص + 2(ص) = -جئاس$$

واجب

(٢٥) اذا كان $v = جا٢س$ ، $ه = جا٣س$ ، اثبت ان :

$$\frac{١ - \frac{ص^٢}{ه}}{٢ جا٣س} = \frac{ص^٢}{ه}$$

(٢٦) اذا كان $٢ص = جا٤س - جا٣س$ ، اثبت ان :

$$ص^٣ + ٤ص + ٢ جا٤س = ٠$$

(٢٧) اذا كان $ص = ١ - قا٢س$ ، اثبت ان :

$$\frac{ص^٢}{س} = ٤ص(٣ص - ١)$$

وزاري

(٢٨) اذا كان $ص = س$ ، $|س| > ١$ ، اثبت ان :

$$\frac{ص}{س} = \frac{١}{س - ١}$$

وزاري

(٢٩) اذا كان $ص = ظا(س)$ ، اثبت ان :

$$\frac{ص + ص^٣}{(س - ١)(س + ١)} = \frac{ص}{س}$$

مع تمنياتي لكم
بالتوفيق والنجاح

أ. اياد عماد عباد



اللَّهُمَّ
بَشِّرْنِي بِمَا أَنْتَظِرُهُ
مِنْكَ وَأَنْتَ خَيْرُ الْمُبَشِّرِينَ

Fatakat.com