الرياضيات

النهايات والاتصال

المستوى الثالث

الفرع العلمي

إعداد

محمد العبدالات

السعر
٣,٠٠ دنانير

بسم الله الرحمن الرحيم

يحتوي الجديد في الرياضيات نسخة ٢٠١٨ لجيل ٢٠٠٠ على جميع اسئلة الكتاب المدرسي و دليل المعلم و اسئلة الوزارة و اسئلة قوية و اوراق عمل على كل درس و امتحان شامل في نهاية كل وحدة .

عزيزي الطالب و لله الحمد بالرغم من صعوبة الامتحانات الوزارية في الدورات السابقة لكن طلابي كانو في قمة التميز و الابداع بسبب المتابعة المستمرة و الجهد المشترك بين المعلم و الطالب .

الحمد لله للسنة الثالثة على التوالي متوقع (فوق السادة) لمادة الرياضيات العلمي يحصد على علامة عالية وهو المتوقع الوحيد المعتمد من قبل الطلبة

مقترح الاستاذ محمد العبداللات

مقترح الرياضيات العلمي 8955

مرات

اهداء : الى طالبتي المتميزة الثالثة على المملكة رانا جمال ابو دلو و طالبتي فرح ناصر عوض الاولى على مدرسة القادسية

المراكز التي تعقد بها دورات لجيل ٢٠٠٠ الصيفية :

١) مركز ريناس / طبربور ٢)درب الكمال /جبل عمان ٣)اكاديمية الحارون و العبداللات /ام نوارة ٤) الابداع /النصر ٥)اللحام /الهاشمي ٦) مركز الراية و الهادفون /ماركا ٧)اكاديمية احمد المصري /الحسين ٨) مركز المستقبل / الزهة

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

ثبت في تاريخ الأبطال أن النصر في الحياة يحصل عليه من يتحمل الضربات لا من يضربها

نهايات اعتيادية كسرية :-

حد النهايات التالية :-

١) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢}{س+٣} = \frac{٤}{٦}$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢+١}{س+٣} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

٣) $\lim_{ص \to ٥} \frac{ص^٣}{ص} = ١٢٥$

٤) $\lim_{هـ \to ١} \frac{هـ^٢+١}{هـ+١} = \frac{٢}{٢}$

٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{٩}{س} = \frac{٩}{٣}$

٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{س}{س+١} = \lim_{س \to ٢} \frac{٠}{٣} = صفر$

٧) $\lim_{س \to ١} \frac{س-١}{س+١} = \frac{٠}{٢} = صفر$

٨) $\lim_{س \to ١} \frac{س+١}{س-١} = \frac{٢}{٠}$ غير موجودة

٩) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢-١}{س-١} = \frac{٠}{٠}$ لا تقبل

نلاحظ من خلال الأمثلة السابقة عند إيجاد النهاية بالكسر نتبع الخطوات التالية :-

١- التعويض المباشر

٢- تقبل جميع النتائج ما عدا $\frac{٠}{٠}$

٣- إذا نتج $\frac{٠}{٠}$ نتبع احدى الطرق التالية

لإيجاد :-

أولاً] التحليل إلى العوامل

قاعدة :- إذا كان ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$

فعلاً نختصر بالمقام

× طرق التحليل :-

١) إخراج عامل مشترك $أ س^٢ + ب س = س(أ س + ب)$

٢) فرق بين مربعين $س^٢ - ص^٢ = (س-ص)(س+ص)$

٣) فرق بين مكعبين

$س^٣ - ص^٣ = (س-ص)(س^٢ + س ص + ص^٢)$

٤) مجموع مكعبين

$س^٣ + ص^٣ = (س+ص)(س^٢ - س ص + ص^٢)$

٥) المعادلة التربيعية

٦) $س^٢ - ٥ س + ٦ = (س-٢)(س-٣)$

٧) $س^٢ - ٤ س - ٥ = (س-٥)(س+١)$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

ولا خير في حسن الجسوم وطولها إذا لم يزن حسن الجسوم عقول.

لاحظ أن :

١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢}-٢}{س-١} = \frac{-١}{٠}$ لا تقبل

$= \lim_{س \to ١} \frac{س(س-١)}{س-١} = ٢$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢}-س}{س^{٥}} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{س(س^{٤}-١)}{س^{٥}} = \frac{-١}{٥}$

٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣}-٤س}{س-٢} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س(س-٢)(س+٢)}{(س-٢)} = ٤$

٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{س-٥}{س^{٢}-٢٥} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س-٥)}{(س-٥)(س+٥)} = \frac{١}{١٠}$

٥) $\lim_{س \to ٨} \frac{(س+١)^{٢}-٨١}{س-٨} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{(س+١-٩)(س+١+٩)}{(س-٨)}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{(س-٨)(س+١٠)}{(س-٨)} = ١٨$

٦) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢}-٢س-٣}{س^{٢}-٩} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س+١)}{(س-٣)(س+٣)} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

٧) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢}-٧س+١٢}{س-٤} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س-٣)(س-٤)}{(س-٤)} = ١$

٨) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣}-٢س+٧}{س-١} = \frac{٩}{٠}$ غير موجودة

٩) $\lim_{س \to ٣} \frac{س-٣}{س^{٣}-٢٧} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س-٣}{(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)} = \frac{١}{٢٧}$

١٠) $\lim_{س \to ٥} \frac{س-٥}{س^{٣}-١٢٥} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س-٥}{(س-٥)(س^{٢}+٥س+٢٥)} = \frac{١}{٧٥}$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

قطرة المطر تحفر في الصخر، ليس بالعنف ولكن بالتكرار

١١) $\lim_{س \to ٢} \frac{(٢س+١)^{٣} - ١٢٥}{س^{٣} + ٢س(س-٢) - ٤} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{(٢س+١-٥)(٢س+١)^{٢} + ٥(٢س+١) + ٢٥}{٣س^{٢} - ٢س - ٤ + ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(٢س-٤)(٢س+١)^{٢} + ٥(٢س+١) + ٢٥}{(س-٢)(س-\frac{٤}{٣})}$

$= \frac{٧٥ \times ٤}{٣} = ٥٠$

١٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} + ٢س^{٢} - ٢}{س + ١} = \frac{٠}{٠}$

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	$س$	جـ
١	١	٠	٠	-٢
	١	٢	٢	
١	١	٢	٢	٠

$\lim_{س \to ١} (س^{٢} + س + ٢)(س - ١) = ٥$

١٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} + ٨}{س^{٤} - ٢س^{٢} - ١٢} = \frac{٠}{٠}$

	$س^{٤}$	$س^{٣}$	$س^{٢}$	$س$	جـ
١	١	٠	-١	٠	-١٢
	-٢	٤	-٦	١٢	
١	-٢	٣	-٦	١٢	٠

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س+٢)(س^{٢} - ٢س + ٤)}{(س^{٣} - ٢س^{٢} + ٢س - ٦)(س + ٢)} = \frac{-٣}{٧}$

١٤) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} + ٣س - ٤}{س^{٢} - ١}$

الجواب : ٣

١٥) $\lim_{س \to ١} \frac{(س+١)^{٤} - ١٦}{(س+١)^{٣} - ٢٧}$

الجواب : ٤

١٦) $\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)^{٥}}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س-١)^{٤}}{(س-١)} = صفر$

مراجعة :

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٣س - ٢}{س^{٣} - ٨}$

الجواب : $\frac{٣}{٤}$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

جودة الكلام في الاختصار

١٧) $\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)^{٥}}{(س^{٥}-١)^{٥}}$

الجواب = صفر

١٨) $\lim_{س \to -١} \frac{(س+١)^{٥} - ٣٢}{(س-١)} = ب$

نستبدل $س = س+١ \leftarrow$ $ص = ١ - س$

عندما $س \to ١ \leftarrow ص \to ٢$

$\lim_{ص \to ٢} \frac{ص^{٥} - ٣٢}{ص - ٢} \leftarrow$ قسمة تركيبية

	$ص^{٥}$	$ص^{٤}$	$ص^{٣}$	$ص^{٢}$	ص	ب
١	٠	٠	٠	٠	٠	-٣٢
٢	٤	٨	١٦	٣٢		
١	٢	٤	٨	١٦	٠	

$\lim_{ص \to ٢} \frac{(ص-٢)(ص^{٤} + ٢ص^{٣} + ٤ص^{٢} + ٨ص + ١٦)}{ص - ٢}$

$= ٨٠$

* $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٣} - ٣س - ٢}{س^{٢} - ٤س - ١٦}$

الجواب : $\frac{٧}{١٢}$

* $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٦} - ٦٤}{(س+٢)(س-٢)}$

الجواب = -١٩٢

* $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٢} + ١}{س^{٤} - س^{٣} + ٣س + ١}$

الجواب = $\frac{٢}{٤}$

* $\lim_{س \to ٣} \frac{(س+١)^{٢} - ١٦}{س^{٣} - ٢٧}$

الجواب = $\frac{٨}{٢٧}$

* $\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)^{١٦} - ٣س + ٤}{س^{٢} - ٣س + ٢}$

الجواب = ١+

* $\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)^{٣} - ١}{س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س - ٣}$

الجواب = ١

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

سامح الناس واتسامح نفسك

* $\lim_{س \to 2} \frac{(س^2 - 4س + 4)^3}{(س^2 - 4)^6}$

الجواب = $\frac{1}{(4)^3}$

* $\lim_{س \to 2} \frac{(س+1)^4 - 5(س+1)^2 + 36}{س^3 - 8}$

الجواب = $\frac{13}{2}$

* ثانياً] توحيد المقامات في حالة الكسور :

قاعدة : إذا كانت ناتج التعويض :

نوحد ـ نختصر ـ نعوض

الأسئلة :

١) $\lim_{س \to 2} \frac{\frac{1}{س+1} - \frac{1}{3}}{س - 2} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{3 - (س+1)}{3(س+1)(س-2)}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{-(س-2)}{3(س+1)(س-2)}$

$= \frac{-1}{9}$

٢) $\lim_{س \to 5} \frac{س - 5}{\frac{1}{س-1} - \frac{1}{4}} = \frac{0}{0}$

$\lim_{س \to 5} \frac{س - 5}{\frac{4 - س + 1}{4(س-1)}}$

$= \lim_{س \to 5} \frac{4(س-1)(س-5)}{5 - س}$

$= \lim_{س \to 5} \frac{-4(س-1)}{1} = -16$

٣) $\lim_{س \to 5} \frac{\frac{1}{س-1} - \frac{1}{4}}{س^2 - 25}$

الجواب = $\frac{-1}{160}$

٤) $\lim_{س \to 1} \frac{\frac{1}{(س+1)^2} - \frac{1}{4}}{1 - س} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{4 - (س+1)^2}{4(س+1)^2}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{(2 - س - 1)(2 + س + 1)}{4(س+1)^2}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{(1 - س)(3 + س)}{4(س+1)^2}$

$= \frac{4}{4} = 1$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الأستاذ : محمد العبداللات
الفرع العلمي و الصناعي

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

ظاهر العتاب خير من باطن الحقد.

ج) $\text{نها}_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{س}^{-2} - (2)^{-2}}{\text{س} - 2}$

الحل : ترتيب

$= \text{نها}_{\text{س}\to 2} \dfrac{\frac{1}{\text{س}^2} - \frac{1}{4}}{\text{س} - 2} = \text{نها}_{\text{س}\to 2} \dfrac{\frac{4 - \text{س}^2}{4\text{س}^2}}{\text{س} - 2}$

$= \text{نها}_{\text{س}\to 2} \dfrac{\frac{(2+\text{س})(2-\text{س})}{4\text{س}^2}}{\text{س} - 2} = \dfrac{-4}{16}$

٦) $\text{نها}_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{س}^2}{\text{س}-1} - \dfrac{1}{\text{س}-1} = \dfrac{1}{0} - \dfrac{1}{0}$ لا يجوز

$= \text{نها}_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} - 1} = \dfrac{0}{0}$

$= \text{نها}_{\text{س}\to 1} \dfrac{(\text{س}-1)(\text{س}+1)}{(\text{س}-1)} = 2$

٧) $\text{نها}_{\text{س}\to 3} \dfrac{3}{9 - \text{س}^2} + \dfrac{3\text{س}}{\text{س}^2 - 9\text{س}} = \dfrac{3}{0} - \dfrac{9}{0}$ لا يجوز

$= \text{نها}_{\text{س}\to 3} \dfrac{3 \times \text{س}}{(\text{س})(9 - \text{س}^2)} + \dfrac{3\text{س}}{\text{س}^2 - 9\text{س}}$

$\text{نها}_{\text{س}\to 3} \dfrac{-3\text{س}}{\text{س}^3 + 9\text{س}} + \dfrac{3\text{س}}{\text{س}^2 - 9\text{س}}$

$= \text{نها}_{\text{س}\to 3} \dfrac{-3\text{س} + 3\text{س}}{\text{س}^2 - 9\text{س}}$

$= \text{نها}_{\text{س}\to 3} \dfrac{0}{\text{س}^2 - 9\text{س}} =$ صفر

٨) $\text{نها}_{\text{س}\to 3} \left(\dfrac{\text{س}}{\text{س}-3} - \dfrac{18}{(\text{س}^2 - 9)} \right)$

الجواب $= \dfrac{3}{2}$

٩) $\text{نها}_{\text{س}\to 2} \dfrac{1}{\text{س}-2} - \dfrac{4}{\text{س}^2 - 4} = \dfrac{1}{0} - \dfrac{4}{0}$ لا يجوز

$= \text{نها}_{\text{س}\to 2} \dfrac{1 \times (\text{س}+2)}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)} - \dfrac{4}{\text{س}^2 - 4}$

$= \text{نها}_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{س}+2}{\text{س}^2 - 4} - \dfrac{4}{\text{س}^2 - 4}$

$= \text{نها}_{\text{س}\to 2} \dfrac{(\text{س}-2)}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)} = \dfrac{1}{4}$

١٠) $\text{نها}_{\text{س}\to 1} \dfrac{1}{\text{س}-1} - \dfrac{3}{\text{س}^3 - 1}$

الجواب $= 1$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

كلام الرجل ميزان عقله.

١١) $\lim_{س \to ٥^+} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٥}\right)\left(\frac{١}{س-٥}\right) = \frac{١}{٠} \times$ صفر $= \frac{١}{٥}$

$\lim_{س \to ٥^+} \frac{(٥-س)٢}{٥س} \times \frac{١}{س-٥} = -\frac{١}{٢٥}$

١٢) $\lim_{س \to ٦^+} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٦}\right)\left(\frac{١}{س-٦}\right)$

الجواب $= \frac{١}{٣٦}$

١٣) $\lim_{س \to ٥^+} \left(\frac{٢}{س} - \frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{س^٢-٢٥}\right) = \frac{١}{٠} \times ٠$

$= \lim_{س \to ٥^+} \left(\frac{١٠-٢س}{٥س}\right)\left(\frac{١}{س^٢-٢٥}\right)$

$= \lim_{س \to ٥^+} \frac{-٢(س-٥)}{٥س} \times \frac{١}{(س-٥)(س+٥)}$

$= \frac{-٢}{٥٠٠}$

١٤) $\lim_{س \to ٠^+} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{(س+١)^٢} - ١\right) = \frac{١}{٠} \times ٠$

$\lim_{س \to ٠^+} \frac{١}{س}\left(\frac{١-(س+١)^٢}{(س+١)^٢}\right)$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{١}{س} \times \frac{(١-س-١)(١+س+١)}{(س+١)^٢}$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{١}{س} \times \frac{-س(س+٢)}{(س+١)^٢}$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{-(س+٢)}{(س+١)^٢} = \frac{-٢}{١} = -٢$

١٥) $\lim_{س \to ٢^-} \frac{١}{س^٣-٣س-١٤}\left(\frac{١}{س+١} + \frac{١}{س+٥}\right)$

$= \frac{١}{٠} \times ٠$ لايجوز

$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{١}{(س-٣)(س+٢)} \times \frac{٢س+٥+س+١}{(س+١)(س+٥)}$

$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{١}{(س-٣)(س+٢)} \times \frac{٣(س+٢)}{(س+١)(س+٥)}$

$= \frac{٣}{١٣}$

١٦) $\lim_{س \to ٠^+} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{س+٧} - \frac{١}{س-٧}\right)$

الجواب $= \frac{-٢}{٤٩}$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

لاتكن لينا فتعصر، ولا صلبا فتكسر

ثالثاً :- باطبر بالعامل المرافق :-

* ملاحظات مهمة :-

١) $\sqrt{س} \times \sqrt{س} = س$

٢) $\sqrt{س+١} \times \sqrt{س+١} = س+١$

٣) $\sqrt{س} + \sqrt{س} = ٢\sqrt{س}$

٤) $\sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{س} = س$

ملاحظة :- إذا كان ناتج المقدار في المجذور بدرجة أعلى بتحسبه بابنا نستبدل ـــ بـ ـــ نحلل ـــ نوجد ـــ نعوض ـــ باطبر بالعامل المرافق ـــ نختصر

* الأسئلة :-

١) نهـ $\frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$ ، س ← ٤

الحل :-

استبدل المجذور

$ص = \sqrt{س}$ ⟸ $ص^٢ = س$

$س \to ٤$ ، $ص \to ٢$

نهـ $\frac{ص - ٢}{ص^٢ - ٤}$ = نهـ $\frac{ص - ٢}{(ص-٢)(ص+٢)}$ = $\frac{١}{٤}$ ، ص ← ٢

٢) نهـ $\frac{\sqrt{٤-س} - \sqrt{س}}{٢ - س}$ ، س ← ٢

= نهـ $\frac{\sqrt{٤-س} - \sqrt{س}}{٢ - س} \times \frac{\sqrt{٤-س} + \sqrt{س}}{\sqrt{٤-س} + \sqrt{س}}$ ، س ← ٢

= نهـ $\frac{٤ - س - س}{(٢ - س)(\sqrt{٤-س} + \sqrt{س})}$ ، س ← ٢

= نهـ $\frac{٢(٢-س)}{(٢ - س)(\sqrt{٤-س} + \sqrt{س})}$ ، س ← ٢

= $\frac{٢}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

٣) نهـ $\frac{\sqrt{٣+س} - ٢}{١ - س}$ ، س ← ١ = $\frac{٠}{٠}$

= نهـ $\frac{\sqrt{٣+س} - ٢}{١ - س} \times \frac{\sqrt{٣+س} + ٢}{\sqrt{٣+س} + ٢}$ ، س ← ١

= نهـ $\frac{٣ + س - ٤}{(١ - س)(\sqrt{٣+س} + ٢)}$ ، س ← ١

= نهـ $\frac{-(١ - س)}{(١ - س)(\sqrt{٣+س} + ٢)}$ ، س ← ١ = $\frac{١}{٤}$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

من أوتي الحكمة فقد أوتي خيرا كثيرا

٤) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{1+س^2} - \sqrt{1-س^2}}{س^2} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{1+س^2} - \sqrt{1-س^2}}{س^2} \times \frac{\sqrt{1+س^2} + \sqrt{1-س^2}}{\sqrt{1+س^2} + \sqrt{1-س^2}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1+س^2-1+س^2}{س^2} \times \frac{1}{\sqrt{1+س^2} + \sqrt{1-س^2}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{2س^2}{س^2} \times \frac{1}{2} = 1$

٥) $\lim_{س \to 8} \frac{\sqrt[3]{س} - 2}{س - 8} = \frac{0}{0}$

الحل : (اسـتبدال)

$ص = \sqrt[3]{س} \leftarrow ص^3 = س$

$س \to 8 \quad ، \quad ص \to 2$

$= \lim_{ص \to 2} \frac{ص - 2}{ص^3 - 8}$

$= \lim_{ص \to 2} \frac{ص - 2}{(ص-2)(ص^2 + 2ص + 4)} = \frac{1}{12}$

أو الحل بالطريقة

٦) $\lim_{س \to 1} \frac{س^{\frac{1}{3}} - 1}{س - 1}$

الحل : بتبسيط

٤) $= \lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} - 1}{س - 1} \times \frac{(\sqrt[3]{س})^2 + \sqrt[3]{س} + 1}{(\sqrt[3]{س})^2 + \sqrt[3]{س} + 1}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{س - 1}{(س-1)((\sqrt[3]{س})^2 + \sqrt[3]{س} + 1)} \times \frac{1}{2}$

يمكن استبدال $ص = \sqrt[3]{س}$

٧) $\lim_{س \to 2} \frac{\sqrt[3]{س+6} - 2}{س - 2} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{س+6-8}{(س-2)((\sqrt[3]{س+6})^2 + 2\sqrt[3]{س+6} + 4)} \times \frac{1}{12}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{س-2}{(س-2)((\sqrt[3]{س+6})^2 + 2\sqrt[3]{س+6} + 4)} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$

٨) $\lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} - 1}{2 - \sqrt{س+3}} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} - 1}{2 - \sqrt{س+3}} \times \frac{2 + \sqrt{س+3}}{2 + \sqrt{س+3}} \times \frac{\sqrt{س} + 1}{\sqrt{س} + 1}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{س - 1}{-(س-1)} \times \frac{1}{2} \times 4 = -2$

٩) $\lim_{س \to 1} \frac{\sqrt[3]{س} - 1}{\sqrt[3]{س+7} - 2} = \frac{0}{0}$

الجواب = ٤

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

من قال ما لا ينبغي سمع ما لا يشتهي.

١) نهـا $\frac{س^٣ - ٣س - ٢}{س^٣ + ٣س^٢ - ٢}$ = $\frac{-٨ - ٦ - ٢}{٨ + ١٢ - ٢}$ = $\frac{-١٦}{١٨}$ = $-\frac{٨}{٩}$

الجواب = $-\frac{٨}{٩}$

١) نهـا $\frac{س^٣ - ٣س - ٢}{\sqrt{س + ٦} - ٢}$ = $\frac{٠}{٠}$

	$س^٣$	$س^٢$	س	ج
١	١	٠	-٣	-٢
	٢	٢	٤	٢
	١	٢	١	٠

$= نهـا_{س \leftarrow ٢} \frac{(س^٢ + ٢س + ١)(س - ٢)}{\sqrt{س + ٦} - ٢} \times \frac{(\sqrt{س + ٦})^٢ + ٢\sqrt{س + ٦} + ٤}{(\sqrt{س + ٦})^٢ + ٢\sqrt{س + ٦} + ٤}$

$= نهـا_{س \leftarrow ٢} \frac{(س^٣ + ٢س^٢ + س + ٢)(س - ٢)((\sqrt{س + ٦})^٢ + ٢\sqrt{س + ٦} + ٤)}{س + ٦ - ٨}$

$= ٩ \times ١٢ = ١٠٨$

طريقة أخرى :

يمكن إيجاد البسط من المقام

$\frac{س^٣ - ٣س - ٢}{س - ٢}$

نهـا $_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٣ - ٣س - ٢}{\sqrt{س + ٦} - ٢}$

نأخذ نهـا $_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٣ - ٣س - ٢}{س - ٢} = ٩$

نأخذ نهـا $_{س \leftarrow ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{س + ٦} - ٢} = \frac{١}{\frac{١}{١٢}}$

∴ المقلوب = $\frac{٩}{\frac{١}{١٢}} = ٩ \times ١٢ = ١٠٨$

ملاحظة :

ما بعد الجذر التكعيبي يجب استخدام طريقة الاستبدال المنقط

٢) نهـا $\frac{س - ١}{\sqrt[٥]{س} - ١} = \frac{٠}{٠}$ $_{س \leftarrow ١}$

نستبدل $م = \sqrt[٥]{س} \leftarrow م^٥ = س$

$س \leftarrow ١ \Rightarrow م \leftarrow ١$

$= نهـا_{م \leftarrow ١} \frac{م^٥ - ١}{م - ١}$ بالقسمة

$= نهـا_{م \leftarrow ١} \frac{م^٤ + م^٣ + م^٢ + م + ١)(م - ١)}{م - ١} = \frac{١}{٥}$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

لما حدا يسألني ليش بتؤكل كتير ؟ [الحلق حلقي و المعدة معدتي ما شأنك]

١٢) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٤]{س+٥} - ٢}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$

نستبدل $ص = \sqrt[٤]{س+٥} \Leftarrow ص^٤ = س+٥$

$س = ص^٤ - ١٥$

$س \to ١ \Leftarrow ص \to ٢$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{ص - ٢}{ص^٤ - ١٥ - ٣} = \lim_{ص \to ٢} \frac{ص - ٢}{ص^٤ - ١٦}$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{(ص-٢)}{(ص-٢)(ص+٢)(ص^٢+٤)} = \frac{١}{٣٢}$

١٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٤]{٢س-٥} - ١}{س^٢ - ٥س + ٦} = \frac{٠}{٠}$

بإعادة البسط على المقام

$= \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٤]{٢س-٥} - ١}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{٢س-٦}{(س-٣)(\sqrt[٤]{٢س-٥}^٣ + \sqrt[٤]{٢س-٥}^٢ + \sqrt[٤]{٢س-٥} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{٢}{\sqrt[٤]{٢س-٥}^٣ + \sqrt[٤]{٢س-٥}^٢ + \sqrt[٤]{٢س-٥} + ١}$

$= \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

لتبسيط البسط نضرب بمرافق البسط

$= \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٤]{٢س-٥} - ١}{س - ٣} \times \frac{\sqrt[٤]{٢س-٥}^٣ + \sqrt[٤]{٢س-٥}^٢ + \sqrt[٤]{٢س-٥} + ١}{\sqrt[٤]{٢س-٥}^٣ + \sqrt[٤]{٢س-٥}^٢ + \sqrt[٤]{٢س-٥} + ١}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{٢س-٦}{(س-٣)(\sqrt[٤]{٢س-٥}^٣ + \sqrt[٤]{٢س-٥}^٢ + \sqrt[٤]{٢س-٥} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{٢}{\sqrt[٤]{٢س-٥}^٣ + \sqrt[٤]{٢س-٥}^٢ + \sqrt[٤]{٢س-٥} + ١}$

$= \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

١٥) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٥]{س^٣+٧} - ٢}{\sqrt[٥]{س^٢} - ١} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٥]{س^٣+٧} - ٢}{\sqrt[٥]{س^٢} - ١} \times \frac{\sqrt[٥]{(س^٣+٧)^٤} + \sqrt[٥]{(س^٣+٧)^٣}\sqrt[٥]{٤} + \sqrt[٥]{(س^٣+٧)^٢}\sqrt[٥]{١٦} + \sqrt[٥]{(س^٣+٧)}\sqrt[٥]{٨} + \sqrt[٥]{١٦}}{\sqrt[٥]{(س^٣+٧)^٤} + \sqrt[٥]{(س^٣+٧)^٣}\sqrt[٥]{٤} + \sqrt[٥]{(س^٣+٧)^٢}\sqrt[٥]{١٦} + \sqrt[٥]{(س^٣+٧)}\sqrt[٥]{٨} + \sqrt[٥]{١٦}}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ١}{(س-١)(\sqrt[٥]{(س^٣+٧)^٤} + \sqrt[٥]{(س^٣+٧)^٣}\sqrt[٥]{٤} + \sqrt[٥]{(س^٣+٧)^٢}\sqrt[٥]{١٦} + \sqrt[٥]{(س^٣+٧)}\sqrt[٥]{٨} + \sqrt[٥]{١٦})}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^٢+س+١)}{(س-١)(\sqrt[٥]{(س^٣+٧)^٤} + \sqrt[٥]{(س^٣+٧)^٣}\sqrt[٥]{٤} + \sqrt[٥]{(س^٣+٧)^٢}\sqrt[٥]{١٦} + \sqrt[٥]{(س^٣+٧)}\sqrt[٥]{٨} + \sqrt[٥]{١٦})}$

$= \frac{٣}{٢٠}$

١٦) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٥]{س^٢ - ٤س + ١٤} - ٢}{س - ٣} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٥]{س^٢ - ٤س + ١٤} - ٢}{س - ٣} \times \frac{\sqrt[٥]{(س^٢ - ٤س + ١٤)^٤} + \sqrt[٥]{(س^٢ - ٤س + ١٤)^٣}\sqrt[٥]{٤} + \sqrt[٥]{(س^٢ - ٤س + ١٤)^٢}\sqrt[٥]{١٦} + \sqrt[٥]{(س^٢ - ٤س + ١٤)}\sqrt[٥]{٨} + \sqrt[٥]{١٦}}{\sqrt[٥]{(س^٢ - ٤س + ١٤)^٤} + \sqrt[٥]{(س^٢ - ٤س + ١٤)^٣}\sqrt[٥]{٤} + \sqrt[٥]{(س^٢ - ٤س + ١٤)^٢}\sqrt[٥]{١٦} + \sqrt[٥]{(س^٢ - ٤س + ١٤)}\sqrt[٥]{٨} + \sqrt[٥]{١٦}}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٤س + ١٠}{(س-٣)(\sqrt[٥]{(س^٢ - ٤س + ١٤)^٤} + \sqrt[٥]{(س^٢ - ٤س + ١٤)^٣}\sqrt[٥]{٤} + \sqrt[٥]{(س^٢ - ٤س + ١٤)^٢}\sqrt[٥]{١٦} + \sqrt[٥]{(س^٢ - ٤س + ١٤)}\sqrt[٥]{٨} + \sqrt[٥]{١٦})}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٢)(س-٢)}{(س-٣)(\sqrt[٥]{(س^٢ - ٤س + ١٤)^٤} + \sqrt[٥]{(س^٢ - ٤س + ١٤)^٣}\sqrt[٥]{٤} + \sqrt[٥]{(س^٢ - ٤س + ١٤)^٢}\sqrt[٥]{١٦} + \sqrt[٥]{(س^٢ - ٤س + ١٤)}\sqrt[٥]{٨} + \sqrt[٥]{١٦})}$

$= \frac{١}{٢٠}$

١٧) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٥]{س^٣ + ٧} - \sqrt[٥]{س^٢ + ١٢}}{\sqrt[٥]{س^٣} - ١} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٥]{س^٣ + ٧} - \sqrt[٥]{س^٢ + ١٢}}{\sqrt[٥]{س^٣} - ١} \times \frac{\sqrt[٥]{(س^٣ + ٧)^٤} + \sqrt[٥]{(س^٣ + ٧)^٣}\sqrt[٥]{س^٢ + ١٢} + \sqrt[٥]{(س^٣ + ٧)^٢}\sqrt[٥]{(س^٢ + ١٢)^٢} + \sqrt[٥]{(س^٣ + ٧)}\sqrt[٥]{(س^٢ + ١٢)^٣} + \sqrt[٥]{(س^٢ + ١٢)^٤}}{\sqrt[٥]{(س^٣ + ٧)^٤} + \sqrt[٥]{(س^٣ + ٧)^٣}\sqrt[٥]{س^٢ + ١٢} + \sqrt[٥]{(س^٣ + ٧)^٢}\sqrt[٥]{(س^٢ + ١٢)^٢} + \sqrt[٥]{(س^٣ + ٧)}\sqrt[٥]{(س^٢ + ١٢)^٣} + \sqrt[٥]{(س^٢ + ١٢)^٤}}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - س^٢ - ١٢}{(س-١)(\sqrt[٥]{(س^٣ + ٧)^٤} + \sqrt[٥]{(س^٣ + ٧)^٣}\sqrt[٥]{س^٢ + ١٢} + \sqrt[٥]{(س^٣ + ٧)^٢}\sqrt[٥]{(س^٢ + ١٢)^٢} + \sqrt[٥]{(س^٣ + ٧)}\sqrt[٥]{(س^٢ + ١٢)^٣} + \sqrt[٥]{(س^٢ + ١٢)^٤})}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س-٣)(س^٢+٤س+٤)}{(س-١)(\sqrt[٥]{(س^٣ + ٧)^٤} + \sqrt[٥]{(س^٣ + ٧)^٣}\sqrt[٥]{س^٢ + ١٢} + \sqrt[٥]{(س^٣ + ٧)^٢}\sqrt[٥]{(س^٢ + ١٢)^٢} + \sqrt[٥]{(س^٣ + ٧)}\sqrt[٥]{(س^٢ + ١٢)^٣} + \sqrt[٥]{(س^٢ + ١٢)^٤})}$

$= \frac{١٧}{٣}$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

قتلت أحدهم ... لماذا ؟ (كان يسأل أسئلة كثيرة مثلك)

١٨) $\lim_{س \to ١} \frac{س + \sqrt{س} - ٢}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} + س - ٢}{س - ١} \times \frac{\sqrt{س} - (س-٢)}{\sqrt{س} - (س-٢)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س - (س-٢)^{٢}}{س - ١} \times \frac{١}{\sqrt{س} - (س-٢)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ٤س + ٤ - س}{س - ١} \times \frac{١}{\sqrt{س} - (س-٢)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س-٤)}{(س-١)} \times \frac{١}{\sqrt{س} - (س-٢)}$

$= \frac{-٣}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{-٣}{٤}$

أجب :

حل السؤال السابق باستخدام طريقتي المرافق و التحليل بالتعويض المباشر

١٩) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ١}{\sqrt{س} + س^{٢} - ٣} = \frac{٠}{٠}$

$ص = \sqrt{س} \rightarrow ص^{٢} = س$

$س \to ١ \Rightarrow ص \to ١$

$\lim_{ص \to ١} \frac{ص^{٤} - ١}{ص + ص^{٤} - ٣}$

* تحليل تركيبي *

	$ص^{٤}$	$ص^{٣}$	$ص^{٢}$	$ص$	جـ
	١	٠	٠	١	-٣
١	١	١	١	٢	٠
١	١	١	٢	٠	

$\lim_{ص \to ١} \frac{(ص^{٢}-١)(ص^{٢}+١)}{(ص-١)(ص^{٣}+ص^{٢}+ص+٣)} = \frac{٤}{٥}$

٢٠) $\lim_{ص \to ٠} \frac{ص - ٤\sqrt{ص} + ٣}{ص - ١} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{ص \to ٠} \frac{ص - ١ - ٤\sqrt{ص} + ٢}{ص - ١}$

$\lim_{ص \to ٠} \frac{ص - ١}{ص - ١} - \lim_{ص \to ٠} \frac{٤\sqrt{ص} - ٢}{ص - ١}$

$\lim_{ص \to ٠} ١ - ٤ \left(\frac{\sqrt{ص} - ١}{ص - ١} \times \frac{\sqrt{ص} + ١}{\sqrt{ص} + ١} \right)$

$١ - ٤ \times \frac{ص - ١}{(ص-١)(\sqrt{ص}+١)} = ١ - \frac{٤}{٢} = -١$

٢١) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س^{٢} + ٢} - \sqrt{٣س + ٦}}{(س - ٢)} = \frac{٠}{٠}$

* طرح مرافق (٢) *

$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س^{٢}+٢} - ٢ + ٢ - \sqrt{٣س+٦}}{(س-٢)}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س^{٢}+٢} - ٢}{س - ٢} + \lim_{س \to ٢} \frac{٢ - \sqrt{٣س+٦}}{س - ٢}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٢}{(س-٢)(\sqrt{س^{٢}+٢}+٢)} + \lim_{س \to ٢} \frac{٤ - ٣س - ٦}{(س-٢)(٢ + \sqrt{٣س+٦})}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{س + ٢}{\sqrt{س^{٢}+٢}+٢} + \lim_{س \to ٢} \frac{-٣}{٢ + \sqrt{٣س+٦}}$

$\frac{٤}{٤} - \frac{٣}{٤} = \frac{١}{٤}$

تابع

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

الطيور التي تولد في القفص تعتقد أن الطيران جريمة .

← تابع حل ٢١

$$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٣} + ٢}{س - ٢} \times \frac{\sqrt{س+٣} - ٢}{\sqrt{س+٣} - ٢}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{س + ٣ - ٤}{٤ \times (س-٢)} = \frac{١}{٤}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{٨ - س - ٦}{(س-٢)(١٢)} = \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(٤-س)(٢+س)}{(س-٢)(١٢)}$$

$$= \frac{١}{١٢}$$

$$\therefore = \frac{\frac{١}{٤}}{١٢} = \frac{١}{١٢} \div \frac{٣}{٤} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٦}$$

٢٢) $\text{نها}_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^٢+٧} - \sqrt{س+٣}}{س - ١}$

الجواب = $-\frac{١}{٦}$

٢٣) $\text{نها}_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{س^٢} - ١} = \frac{٠}{٠}$

اضافة مرافق $\sqrt{س^٢}$ أي $\sqrt{س}$ ، ثم توزيع

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{س^٢ - \sqrt{س} + \sqrt{س} - ١}{س - ١}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{س^٢ - \sqrt{س}}{س - ١} + \text{نها}_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}(\sqrt{س^٣} - ١)}{س - ١} + \text{نها}_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} \times \frac{\sqrt{س} + ١}{\sqrt{س} + ١}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}(\sqrt{س} - ١)(س + \sqrt{س} + ١)}{(س - ١)} + \text{نها}_{س \to ١} \frac{١}{\sqrt{س} + ١} \times \frac{١}{٢}$$

$$= ١ \times ٢ \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ٢ + \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٢}$$

٢٤) $\text{نها}_{س \to ٨} \frac{س^{\frac{٢}{٣}} - ١٦}{س - ٨} = \frac{٠}{٠}$

اضافة مرافق $س^{\frac{١}{٣}}$ أي $\sqrt[٣]{س}$

$$= \text{نها}_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س^٢} - ٨ \sqrt[٣]{س^٢} + ٨ \sqrt[٣]{س^٢} - ١٦}{س - ٨}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س^٢}(\sqrt[٣]{س} - ٨) + ٨(\sqrt[٣]{س^٢} - ٢)}{س - ٨}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س^٢}(س - ٨)}{س - ٨} + ٨ \left(\frac{\sqrt[٣]{س^٢} - ٢}{س - ٨} \times \frac{\sqrt[٣]{س^٤} + ٢\sqrt[٣]{س^٢} + ٤}{\sqrt[٣]{س^٤} + ٢\sqrt[٣]{س^٢} + ٤} \right)$$

$$= \text{نها}_{س \to ٨} \sqrt[٣]{س^٢} + ٨ \left(\frac{س - ٨}{س - ٨} \times \frac{١}{\sqrt[٣]{س^٤} + ٢\sqrt[٣]{س^٢} + ٤} \right)$$

$$= ٤ + ٨ \times \frac{١}{١٢} = ٤ + \frac{٢}{٣} = \frac{١٤}{٣}$$

٢٥) $\text{نها}_{س \to ١} \frac{(س+١)^٢ - ٤}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$

اضافة مرافق $(س+١)^٢$ أي $\sqrt{س}$

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{(س+١)^٢ \sqrt{س} - (س+١)^٢ + (س+١)^٢ - ٤}{س - ١}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{(س+١)^٢(\sqrt{س} - ١)}{س - ١} + \text{نها}_{س \to ١} \frac{(س+١)^٢ - ٤}{س - ١}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{(س+١)^٢(\sqrt{س} - ١)}{(س - ١)(\sqrt{س} + ١)} + \text{نها}_{س \to ١} \frac{(س+٣)(س-١)}{س - ١}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{(س+١)^٢}{\sqrt{س} + ١} + \text{نها}_{س \to ١} (س + ٣)$$

$$= \frac{٤}{٢} + ٤ = ٢ + ٤ = ٦$$

تابع ←

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

علموا أولادكم أن الأنثى هي الرفيقة هي الوطن هي الحياة.

تابع حل ٢٥

$$\text{نها}_{س \to 1} \frac{(س+1)^2(س^{\frac{1}{2}}-1)}{1-س} + \frac{(س+1)(س-1)(س+1)}{1-س}$$

$$\text{نها}_{س \to 1} \frac{(س+1)^2}{1-س}\left(\frac{س-1}{1+س^{\frac{1}{2}}}\right) + \frac{(س+1)(س-1)}{1-س}$$

$$\text{نها}_{س \to 1} \frac{(س+1)^2}{1-س}\left(\frac{س-1}{1+س^{\frac{1}{2}}}\right) + (س+1)$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 + 4 = 6$$

٢٦) $\text{نها}_{س \to 3} \frac{س\sqrt{س} + 2س - 12}{س - 3}$

الجواب $= \frac{25}{4}$

٢٧) $\text{نها}_{س \to 3} \frac{س\sqrt{س+1} - 6\sqrt{س+1} - 6}{س - 3}$

الجواب $= \frac{13}{12}$

٢٨) $\text{نها}_{س \to 0} \frac{(س+1)^2(س+2)^3 - 8}{س}$

الجواب $= 3.8$

٢٩) $\text{نها}_{س \to 1} \frac{1}{1-س}\left(\frac{1}{\sqrt{س}} - 1\right) = \frac{1}{2} \times$ مرافق

$$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{1}{1-س}\left(\frac{\sqrt{س}+1}{\sqrt{س}+1} \times \frac{\sqrt{س}-1}{\sqrt{س}}\right)$$

$$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{1}{1-س}\left(\frac{1}{\sqrt{س}+1} \times \frac{س-1}{\sqrt{س}}\right)$$

$$= -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

٣٠) $\text{نها}_{س \to 0} \frac{1}{1+س}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+س^2}+1} - 1\right) = \frac{1}{2} \times$ مرافق

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{1}{1+س}\left(\frac{1-\sqrt[3]{1+س^2}-1}{\sqrt[3]{1+س^2}+1}\right) \times \frac{\sqrt[3]{(1+س^2)^2}+\sqrt[3]{1+س^2}+1}{\sqrt[3]{(1+س^2)^2}+\sqrt[3]{1+س^2}+1}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{1}{1+س} \times \frac{-س^2}{\sqrt[3]{1+س^2}+1} \times \frac{\sqrt[3]{(1+س^2)^2}+\sqrt[3]{1+س^2}+1}{\sqrt[3]{(1+س^2)^2}+\sqrt[3]{1+س^2}+1}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{1}{1+س} \times \frac{-س^2}{1+س^2} \times \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{1}{1+س} \times \frac{-2س}{\sqrt[3]{1+س^2}} \times \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

أنت سبب كثرة النمل في بيتنا يا سكر

٣١) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{\frac{٣}{٢}} - ٣}{\sqrt{س+٦} - ٢}$ = $\frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س^{\frac{٣}{٢}} - ٣} \times \frac{\sqrt{س+٦} + ٢}{\sqrt{س+٦} + ٢}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(\sqrt{س+٦} + ٢)}{(س^{\frac{٣}{٢}} - ٣)(\sqrt{س+٦} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(\sqrt{س+٦} + ٢)}{(س-٣)(س+٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+٦} + ٢}{س+٣}$

$= \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

٣٢) $\lim_{س \to ١} \frac{٥س^{٣} + ٧س^{٢} - ١٢}{س^{٥} - ١}$

الجواب = $\frac{١٧}{٢}$

٣٣) $\lim_{س \to ١} \frac{٣س^{٢} + ٧س - ٥}{(س-١)}$ = $\frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(٣س+٨)(س-١)}{(س-١)}$

$= ٣ + ٨ = ١١$

الجواب = $\frac{١}{٢}$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

أذكر أسم معلم له فضل عليك ؟ [معلم الشاورما] .

رابعاً] ← حساب النهايات للاقترانات الأسية

قاعدة : إذا كان ناتج التعويض $\frac{0}{0}$

نرتب ← نحلل ← نختصر ← نعوض

الأسئلة :

$\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{(هـ^2)^س - هـ^س}{1 - هـ^س} = \frac{0}{0}$

$\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{(هـ^2)^س - هـ^س}{1 - هـ^س} = \underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{(هـ^س)^2 - هـ^س}{1 - هـ^س}$

$= \underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{هـ^س (هـ^س - 1)}{1 - هـ^س} = -1$

* $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{9^س - 1}{3^س - 1} = \frac{0}{0}$

$\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{(3^س)^2 - 1}{3^س - 1} = \underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{(3^س - 1)(3^س + 1)}{3^س - 1}$

$= \underset{س \to 0}{\text{نها}} 3^س + 1 = 2$

* $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{4^س - 4}{2^س - 2} = \frac{0}{0}$

الجواب = 4

* $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{هـ^{2س} - هـ^س - 20}{هـ^{2س} - 25} = \frac{0}{0}$

$\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{(هـ^س - 5)(هـ^س + 4)}{(هـ^س - 5)(هـ^س + 5)}$

$= \frac{9}{10}$

* $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{4^س - 2^{س+1}}{2^س - 2}$

الجواب = 2

* $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{(2)^{2س} - 5(2)^س + 6}{2^س - 2}$

الجواب = -1

* $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{3^{3س} - 27}{3^س - 3} = \frac{0}{0}$

$\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{(3^س)^3 - 27}{(3^س - 3)}$

$\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{(3^س - 3)(3^{2س} + 3 \times 3^س + 9)}{(3^س - 3)}$

$= 27$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

هي أنثى برائحة الورد و لذة القهوة

أ) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤}$

$= \frac{٣ - ٨}{٤ - ٤}$

الجواب = ٣

* $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(هـ + ٢)^٣ - ٨}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ^٣ + ٦هـ^٢ + ١٢هـ + ٨ - ٨}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(هـ^٢ + ٦هـ + ١٢)}{هـ}$

$= ١٢$

* $\lim_{س \to ٠} \frac{(٧ + س)^٢ - ٤٩}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٤٩ + ١٤س + س^٢ - ٤٩}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س(١٤ + س)}{س}$

$= ١٤$

* $\lim_{س \to ٠} \frac{(٧ + س)^٣ - ٣٤٣}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣٤٣ + ٧٣س + ٧س^٢ + س^٣ - ٣٤٣}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س(٧٣ + ٧س + س^٢)}{س}$

$= ٧٣$

* $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣ + هـ)^٣ - ٢٧}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢٧ + ٢٧هـ + ٩هـ^٢ + هـ^٣ - ٢٧}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٢٧ + ٩هـ + هـ^٢)}{هـ}$

$= ٢٧$

* $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ١}{س^٢ - ١}$

الجواب = $\frac{٣}{٢}$

* $\lim_{س \to ٠} \frac{(٧ + س)^٢ - ٤٩}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٤٩ + ١٤س + س^٢ - ٤٩}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س(١٤ + س)}{س}$

$= ١٤$

* $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ١}{س^٢ - ١}$

الجواب = $\frac{٣}{٢}$

* $\lim_{س \to ٠} \frac{(٧ + س)^٢ - ٤٩}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٤٩ + ١٤س + س^٢ - ٤٩}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س(١٤ + س)}{س}$

$= ١٤$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٧^٣ (٧^٣ - ١)}{٧^٣ - ١}$

$= ٧^٣ - ١$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

الرياضيات لعبتك الصغيرة

* بإيجاد المشتقات :-

* إذا كانت $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} (س^٢ + ٢س) = ٧$ جد $ق(٢)$!

$٣ + ٢ق = ٧ \Leftarrow ق = ٢$

$ق(س) = س^٢ + ٢س \Leftarrow ق(٢) = ٤ + ٤ = ٨$

* إذا كانت $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٢ - ق}{س - ٣} = ١$ جد قيمة $ق$ ؟!

$\frac{٣ - ق}{٣ - ٣} = \frac{٣ - ق}{٠}$ بما أن المقام = صفر

$\therefore$ نهـا $(س - ق) = ٣ - ق =$ صفر
$س \leftarrow ٣$

$٣ - ق =$ صفر

$ق = ٣$

* إذا كانت $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٢ - ب س + ٦}{س - ٢} = ٥$

بما أن المقام $= ٠$ عندما $س \leftarrow ٢$

$\therefore$ البسط $=$ صفر

$\therefore$ نهـا $(س^٢ - ب س + ٦) = ٤ - ٢ب + ٦ =$ صفر
$س \leftarrow ٢$

$٤ق - ٢ب + ٦ =$ صفر

$٢ق - ب + ٣ =$ صفر ..... ①

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٣)}{(س - ٢)} = ٥$

$٤ + ٢ق + ٣ = ٥ \Leftarrow ٢ق = ٢ \Leftarrow ق = ١$

$٢ - ب + ٣ = ٠ \Leftarrow ب = ٥$

إذا كانت

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٥} \frac{س^٢ - ب س - ١٥}{س - ٥} = ٨$

فما قيمة $ق$ ، $ب$ ؟

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٥} (س^٢ - ب س - ١٥) = ٠$

$٢٥ - ٥ب - ١٥ =$ صفر

$٥ق - ب - ٣ = ٠$ ..... ①

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٥} \frac{س^٢ - ب س - ١٥}{س - ٥} = ٨$

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٥} \frac{(س - ٥)(س + ٣)}{س - ٥} = ٨$

$٥ق + ٣ = ٨ \Leftarrow ق = ١$

$٥ - ب - ٣ = ٠$

$ب = ٢$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

الرياضيات مش عقدة .. الرياضيات فن و ابداع

* إذا كان $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x + 2 & x < 1 \\ 2x + 3 & x \geq 1 \end{cases}$ ، كانت

$\lim_{x \to 1^-} \frac{ax^2 + 3x + 2}{x - 1} = 2x + 3$

جد قيمة a ، b

الحل :-

$\lim_{x \to 1^-} ax^2 + 3x + 2 = 2 + 3 + b$ صغر

$a + 3 + 2 = 2 + 3 + b$ صغر

$a = 5$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{5x^2 + 3x + 5}{x - 1} = b$

$\therefore \lim_{x \to 1^-} \frac{5x^2 + 3x + 5}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(5x+8)}{x-1} = 7$

$2b + 3 = 7$

$2b = 4 \Leftarrow b = 2$

* إذا كانت

$\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 3x^2 - 9x - 27}{x - 3} = 8$

جد قيمة a ، b التي تجعل $f(x)$ متصلة عند $x = 3$

الحل :-

نوحد المقام

$\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 3x^2 + bx - 9a - 3b}{x - 3} = 8$

$\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 3x^2 + bx - 9a - 3b}{(x-3)(x-1)} = 8$

$1 + a - 3 = 8$

$a - 2 = 9$

$a = 3 \Leftarrow$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

عشان فرحة أهلك ... أدرس .. أجتهد .. أنجح

* لاحظ من الرسم :

إذا كان ناتج التعويض داخل الجذر التربيعي = صفر ، كذلك المجال خطوات الحل :

نساوي ما داخل الجذر بالصفر ← نحدد الإشارة عن طريق الأصداد ← نأخذ الموجب فقط

* الإجابة :

* نهـا $\sqrt{س^2 + 4س + 4}$ = ٣
$س \leftarrow -5$

نهـا $\sqrt{س^2 + 2س + 4}$ = $\sqrt{4}$
$س \leftarrow 2$

نهـا $\sqrt{س^2 - 2س - 3}$ = $\sqrt{-1}$ غير موجودة
$س \leftarrow 1$

نهـا $\sqrt{س^3 - 1}$ = $\sqrt{0}$ = ٠
$س \leftarrow 1$

* نهـا $\sqrt{س^2 - 1}$ = $\sqrt{0}$
$س \leftarrow -1^+$

الحل :

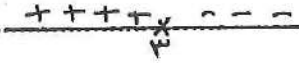
نهـا $\sqrt{س^2 - 1}$ = صفر
$س \leftarrow -1^+$

نهـا $\sqrt{س^2 - 1}$ غير موجودة
$س \leftarrow -1^-$

∴ النهاية غير موجودة

* نهـا $\sqrt{س^2 - 3س}$ = $\sqrt{0}$
$س \leftarrow 3^+$

نهـا $\sqrt{س^2 - 3س}$ = صفر
$س \leftarrow 3^-$



نهـا $\sqrt{س^2 - 3س}$ غير موجودة
$س \leftarrow 3^+$

∴ نهـا $\sqrt{س^2 - 3س}$ غير موجودة
$س \leftarrow 3$

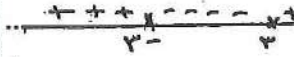
* نهـا $\sqrt{س^2 - 9}$ = $\sqrt{0}$
$س \leftarrow 3^+$

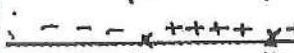
نهـا $\sqrt{س^2 - 9}$ = غير موجودة
$س \leftarrow -3^-$

نهـا $\sqrt{س^2 - 9}$ = صفر
$س \leftarrow -3^+$

∴ نهـا $\sqrt{س^2 - 9}$ = غير موجودة
$س \leftarrow 3$

* نهـا $\frac{س - 3}{\sqrt{س^2 - 9}}$
$س \leftarrow 3^+$





نهـا $\frac{س - 3}{(س - 3)(س + 3)}$
$س \leftarrow 3^+$

$= \frac{1}{6}$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

ألا ليتني كنت أدرس أول بأول [ملحوق درويش]

* $\lim_{س \to -٤} \frac{س^٢ - ١٦}{\sqrt{س} - ٤}$

الجواب = ٨

* $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+١} + \sqrt{س-١}}{\sqrt{س} - ١}$

نكامل :-

$\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{س} - ١} + \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س-١}}{\sqrt{س} - ١}$

$\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)}{\sqrt{س} - ١} \times \frac{(\sqrt{س}+١)}{(\sqrt{س}+١)} + ٢$

$\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{٢} + ٢ =$

صفر + ٢ = ٢

* $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٣ + ٦س - ٢}{\sqrt{س} - ٢}$

الجواب = ٢

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

فرجينا شطارتك

[الاسئلة القوية]

مربعة على (١) :-

مفهوم النهاية : نهاية دالة إذا كانت غير متصلة

١) اوجد قيمة كل من النهايات التالية :-

١) $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{١}{س-٢} - \frac{٤}{س^٢-٤}\right)$

$ج = -\frac{١}{٤}$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{س+٣} - \frac{١}{٣}}{س}$

$ج = -\frac{١}{٩}$

٣) $\lim_{س \to -٢} \frac{١}{س^٣ - ٣س - ١٤} \left(\frac{١}{س+٥} + \frac{١}{س+١٢}\right)$

$ج = \frac{٣}{١٣}$

٤) $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{س^٢ + ١٢}{س^٢ - ٤} - \frac{س+٢}{س-٢}\right)$

$ج = -١$

٥) $\lim_{س \to ١} \frac{١}{س-١} - \frac{٣}{س^٣-١}$

$ج = ١$

٦) $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س^٢} - \frac{١٤}{س+٣}}{س-١}$

$ج = -\frac{٢}{٩}$

٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{(س+١)^٥ - ٢٥}{س-٢}$

$ج = ٨٠$

٨) $\lim_{س \to ١} \frac{(س+١)^٣ - ٨}{س^٣ - ١}$

$ج = -٦$

٩) $\lim_{س \to ٥} \frac{(س-٥)^٧}{(٢٥-س^٢)^٧}$

$ج = \left(-\frac{١}{١٠}\right)^٧ = -١٠^{-٧}$

١٠) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٥س^٢ + ٣س + ٣}{س^٢ + س - ٢}$

$ج = -٢$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

فرجينا شطارتك

[الاسئلة القوية]

* نهـا $\frac{\sqrt{3س+1}-2}{س-1}$ ، س ← 1

ج = $\frac{3}{4}$

* نهـا $\frac{\sqrt{س^2-3}-\sqrt{3س+3}}{س^2+س-2}$ ، س ← 1

ج = $\frac{-1}{2\sqrt{7}}$

* نهـا $\frac{1}{س-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3س}}-1\right)$ ، س ← 1

ج = $\frac{-1}{2}$

* نهـا $\frac{س^3-4س+3}{س^2-1}$ ، س ← 1

ج = $\frac{1}{2}$

* نهـا $\frac{\sqrt{س^2-1}+\sqrt{س-1}}{\sqrt{س-1}}$ ، س ← 1+

ج = $\sqrt{2}$

* نهـا $\frac{\sqrt{3س-2}-\sqrt{س+3}}{س-1}$ ، س ← 1

ج = $\frac{1}{2}$

* نهـا $\frac{\sqrt{3س+1}-2}{س-1}$ ، س ← 1

ج = $\frac{3}{4}$

* نهـا $\frac{\sqrt{7+س}-\sqrt{3+س}}{س-1}$ ، س ← 1

ج = $\frac{1}{6}$

* نهـا $\frac{\sqrt{3}(1+س)^3-8}{س-1}$ ، س ← 1

ج = 16

* نهـا $\frac{س-\sqrt{2+س^2}-8}{س-2}$ ، س ← 2

ج = 9

* نهـا $\sqrt{\frac{س-1}{1+س}}$ ، س ← 1

ج = غير موجودة

* نهـا $\sqrt{3س+1}-2$ ، س ← 9

ج = $\frac{1}{24}$

* نهـا $\frac{\sqrt[4]{س}-1}{\sqrt{س}-1}$ ، س ← 1

ج = $\frac{3}{4}$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

فرجينا شطارتك

[الأسئلة القوية]

* نهـا $\frac{\sqrt{س+٣}-٢}{س-١}$ = $\frac{١}{٢}$
  س ← ١
  بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$
  بالضرب بمرافق البسط
  نهـا $\frac{(س+٣)-٤}{(س-١)(\sqrt{س+٣}+٢)}$
  س ← ١
  نهـا $\frac{١}{\sqrt{س+٣}+٢}$ = $\frac{١}{٤}$
  س ← ١
  ∴ ج = $\frac{١}{١٦}$

* نهـا $\frac{(٤^{س-١})^{٥}-١}{س-١}$ = ١٠
  س ← ١
  بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$
  (يستبدل حيث نفرض أن ص = ٤^{س-١})
  نهـا $\frac{ص^{٥}-١}{ص-١}$ = ٥
  ص ← ١
  ج = ١٠

* نهـا $\frac{٣^{س+٢}-٣^{س}}{٣^{س+١}-٣^{س}}$ = $\frac{٨}{٩}$
  س ← ٠
  بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$
  بالقسمة على $٣^{س}$
  نهـا $\frac{٣^{٢}-١}{٣^{١}-١}$ = $\frac{٨}{٩}$
  س ← ٠
  ج = $\frac{٨}{٩}$

* نهـا $\frac{(س-١)^{٢}}{س^{٢}-٤س+٣}$ = $\frac{١}{٢}$
  س ← ١
  بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$
  نهـا $\frac{(س-١)^{٢}}{(س-١)(س-٣)}$
  س ← ١
  نهـا $\frac{س-١}{س-٣}$
  س ← ١
  ج = $\frac{٩}{٢}$

* نهـا $\frac{\sqrt{س+٣}-٢}{س-١}$ = $\frac{١}{٤}$
  س ← ١
  بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$
  بالضرب بمرافق البسط
  نهـا $\frac{(س+٣)-٤}{(س-١)(\sqrt{س+٣}+٢)}$
  س ← ١
  نهـا $\frac{١}{\sqrt{س+٣}+٢}$ = $\frac{١}{٤}$
  س ← ١
  ∴ ج = $\frac{١}{٤}$

* نهـا $\frac{س^{٤}-٣س^{٢}+٢}{س^{٤}-٤س^{٢}+٣}$ = $\frac{٠}{٠}$
  س ← ١
  بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$
  نهـا $\frac{(س^{٢}-١)(س^{٢}-٢)}{(س^{٢}-١)(س^{٢}-٣)}$
  س ← ١
  نهـا $\frac{س^{٢}-٢}{س^{٢}-٣}$
  س ← ١
  ج = ٣

* نهـا $\frac{(س-١)^{٣}}{س^{٣}-٣س+٢}$ = $\frac{٣}{٢}$
  س ← ١
  بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$
  نهـا $\frac{(س-١)^{٣}}{(س-١)(س^{٢}+س-٢)}$
  س ← ١
  نهـا $\frac{(س-١)^{٢}}{(س-١)(س+٢)}$
  س ← ١
  نهـا $\frac{س-١}{س+٢}$
  س ← ١
  ج = $\frac{٠}{٣}$

* نهـا $\frac{\sqrt{س+٣}-٢}{س-١}$ = $\frac{١}{٤}$
  س ← ١
  بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$
  بالضرب بمرافق البسط
  نهـا $\frac{(س+٣)-٤}{(س-١)(\sqrt{س+٣}+٢)}$
  س ← ١
  نهـا $\frac{١}{\sqrt{س+٣}+٢}$ = $\frac{١}{٤}$
  س ← ١
  ∴ ج = $\frac{١}{٤}$

* نهـا $\frac{س^{٣}-٢س^{٢}+٦}{س-٣}$ = ب
  س ← ٣
  بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$
  بالقسمة تركيبياً
  خارج القسمة ٢س^{٢} + ٤س + ١٢
  (ج : ٢ = ٥ ، ب = ١)

* نهـا $\frac{٢س^{٣}-س^{٢}-س-٦}{س-٢}$ = ٥
  س ← ٢
  بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$
  بالقسمة تركيبياً
  خارج القسمة ٢س^{٢} + ٣س + ٥
  (ج : ٢ = ١ ، ب = ٠)

* نهـا $\frac{\sqrt{٣س+٣}-٣}{س-٣}$ = $\frac{١}{٣}$
  س ← ٣
  بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$
  بالضرب بمرافق البسط
  نهـا $\frac{(٣س+٣)-٩}{(س-٣)(\sqrt{٣س+٣}+٣)}$
  س ← ٣
  نهـا $\frac{٣}{\sqrt{٣س+٣}+٣}$ = $\frac{١}{٣}$
  س ← ٣
  ∴ ج = ١

* نهـا $\frac{٧}{س^{٢}+٣س+٢}$ غير موجودة
  س ← ٢
  بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٧}{٠}$
  جبرياً ج : م = ∞
  ∴ ج = ١

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

فرجينا شطارتك

[الأسئلة القوية]

* $\lim_{س \to 1} \frac{س - 1}{س^2 + أ س + ب}$ غير موجودة

$س^2 + أ س + ب = 0$ عند $س = 1$

$1 + أ + ب = 0$

$ب = -1 - أ$

$س^2 + أ س - 1 - أ = 0$

$(س - 1)(س + 1 + أ) = 0$

$س = 1$ أو $س = -1 - أ$

$-1 - أ = 1$

$أ = -2$

$ب = -1 + 2 = 1$

* $\lim_{س \to 1} \frac{(س^3 - 1)^{ن^2}}{(س^2 - 2س + 1)^{ن}} = 81$

ما قيمة $ن$ ؟!

$ن = 2$

* إذا كانت $\lim_{س \to 1} \frac{س^{ن} - 1}{س - 1} = ن$

حيث $ن \in ص^+$

ما قيمة الثابت $(ن)$ الذي يجعل ؟!

$\lim_{س \to 2} \frac{س^2 + س - 6}{\sqrt{س^2 + س - 1} - 1} = 4$

$ن = 4$

ب) $\lim_{س \to 1} \frac{\sqrt[ن]{س^2 + 3س - 3} - 1}{س^2 + 4س - 5} = \frac{1}{10}$

$ن = 5$

* ما مجموعة القيم التي تجعل :-

أ) $\lim_{س \to 2} \sqrt{س^2 + 3س - 3}$ موجودة

$ج : ح \in (\infty ، 3)$

ب) $\lim_{س \to 1} \sqrt{س^2 + 3س - 3}$ غير موجودة

$ج : ح \in [-4 ، \infty)$

* اثبت أن

$\lim_{س \to 1} \frac{س^{ن+1} - (ن+1)س + ن}{(س - 1)^2} = \frac{ن(ن+1)}{2}$

* جد $\lim_{س \to \frac{1}{2}} (1 + س + س^2 + س^3 + س^4 + س^5 + \ldots)$

$ج = \frac{4}{3}$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

خلقت ضعيفة . تحزن و تبكي اذا قص شعرها

* الاقتران المعرف على عدة قواعد (متشعب) :-

عند حساب النهاية عند (ح) نقطة الاقتران المتشعب يجب تحديد نوع النقطة من حيث (ن) :-

١) نقطة عادية :-
هي تحتوي قاعدة واحدة من قواعد الاقتران المتشعب ، تحسب النهاية لها بشكل مباشر دون تطبيق حد اليمين = اليسار .

٢) نقاط التشعب :-
هي تحتوي على أكثر من قاعدة ، تحسب لها النهاية من اليمين = اليسار .

٣) أطراف الاقتران :-
تحسب النهاية لبداية المفترة من جهة اليمين ، النهاية لنهاية المفترة من جهة اليسار .

* الأسئلة :-

إذا كان :-

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 + 2س & ، \ س < 3 \\ 5 + 2س & ، \ 3 \leq س \leq 5 \end{cases}$$

جد :-

أ) $\lim_{س \to 3} ق(س) =$

$\lim_{س \to 3^+} ق(س) = 5 + 2(3) = 11$

ب) $\lim_{س \to 4} ق(س) =$

$\lim_{س \to 4^-} ق(س) = س^2 + 2س = 24$

ج) $\lim_{س \to 2} ق(س) =$

$\lim_{س \to 2^+} ق(س) = س^2 + 2س = 8$

د) $\lim_{س \to 5} ق(س) =$

$\lim_{س \to 5^-} ق(س) = 5 + 2س = 15$

هـ) $\lim_{س \to 1} ق(س) =$

$\lim_{س \to 1^+} ق(س) = 5 + 2س = 7$

و) $\lim_{س \to 0} ق(س) =$

$\lim_{س \to 0^-} ق(س) = س^2 + 2س = 0$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

من هز بيت جاره سقط بيته

ملاحظة :

النهاية دائماً عن أطراف الفترات تكون غير معرفة

* النهاية لا تتأثر بالمساواة *

ج) إذا كان

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x < 2 \\ 4x + 5 & , -2 < x \leq 3 \\ 6x - 1 & , x > 3 \end{cases}$

احسب :

١) $\lim_{x \to 3} f(x)$

$= \lim_{x \to 3^-} f(x)$

$= \lim_{x \to 3^-} 4x + 5 = 17$

$\lim_{x \to 3^+} 6x - 1 = 17$

$\therefore \lim_{x \to 3} f(x) = 17$

٢) $\lim_{x \to 2} f(x)$

$= \lim_{x \to 2^-} f(x)$

$= \lim_{x \to 2^-} x^2 - 1 = 3$

$\lim_{x \to 2^+} 4x + 5 = 13$

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة

٣) $\lim_{x \to 3} f(x)$

٤) $\lim_{x \to -2} f(x)$

$= \lim_{x \to -2^+} f(x)$

$= \lim_{x \to -2^+} 4x + 5 = -3$

٥) $\lim_{x \to 1} f(x)$

د) إذا كان

$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ 9 & , x = 2 \\ x^2 & , x > 2 \end{cases}$

احسب :

١) $\lim_{x \to 3} f(x)$

$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ (نقطة عادية)

٢) $\lim_{x \to 0} f(x)$

$= \lim_{x \to 0} x^2 = 0$ (نقطة عادية)

٣) $\lim_{x \to 2} f(x)$ (نقطة حول)

$\lim_{x \to 2^+} x^2 = 4$

$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = 4$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

مش شرط الذكريات تكون اشخاص يمكن تكون منسف لحمة أكلته بعزيمة

$$*\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x<2\\ x+2, & x\geq 2\end{cases}$$

جد $\lim_{x\to 2} f(x)$ إن أمكن

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=0$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=4$$

$$\lim_{x\to 2^-} x+2=4$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=4$$

$$*\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & x\neq 1\\ \dfrac{1}{x-1}, & x=1\end{cases}$$

جد $\lim_{x\to 1} f(x)$ إن أمكن

الحل :

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0^+}=\infty \text{ غير موجودة}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty \text{ غير موجودة}$$

$\therefore$ النهاية غير موجودة

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}=3$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x-1}\times\frac{1}{\sqrt{x}+1}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

$$*\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & x\neq 1\\ \dfrac{1}{x^2-1}, & x=1\end{cases}$$

جد $\lim_{x\to 1} f(x)$ إن أمكن

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{0^+}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$\therefore$ النهاية غير موجودة

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

بالأردن اذا بترمي حجر بيجي براس محاسب أو كيا سيفيا

* إذا كان د:

$$د(س) = \frac{س^2 - 9}{س - 3}$$ ، $س \neq 3$ ، $س = 3$

احسب $\lim_{س \to 3} د(س)$ إذا

لكل د:

$$\lim_{س \to 3} \frac{س^2 - 9}{س - 3} = \lim_{س \to 3} \frac{(س-3)(س+3)}{(س-3)}$$

$= 6$

* إذا كان:

$د(س) = \begin{cases} س^3 - أ س^2 + ب س - 4 & ، س \neq 2 \\ 12 - س & ، س = 2 \end{cases}$

جد قيمة أ، ب بحيث تجعل $\lim_{س \to 2} د(س)$ موجودة

لكل:

$$\lim_{س \to 2^+} \frac{س^3 - أ س^2 + ب س - 4}{س - 2} = \lim_{س \to 2^-} 12 - س$$

$$\lim_{س \to 2} س^3 - أ س^2 + ب س - 4 = صفر$$

$$8 - 4أ + 2ب - 4 = 0 \Leftarrow أ = 2$$

$$\lim_{س \to 2^+} \frac{س^3 - 2س^2 + ب س - 4}{س - 2} = \lim_{س \to 2^-} 12 - س$$

$$\lim_{س \to 2} س^3 - 2س^2 + ب س - 4 = صفر$$

$$8 - 8 + 2ب - 4 = 0 \Leftarrow ب = 2$$

$$\lim_{س \to 2^+} \frac{س^3 - 2س^2 + 2س - 4}{س - 2} = \lim_{س \to 2^-} 12 - س$$

$$\lim_{س \to 2} \frac{(س-2)(س^2+2)}{(س-2)} = 6$$

$$\lim_{س \to 2} س^2 + 2 = 6$$

$$\lim_{س \to 2} س^2 - 12 = 6$$

$$ب = 9$$

إذا كان

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - م^2}{س - م} & ، س \neq م \\ 4 + 5س & ، س = م \end{cases}$$

$س = م$

وكانت $\lim_{س \to م} د(س)$ موجودة فما قيمة م ؟؟

لكل:

$$\lim_{س \to م^+} د(س) = \lim_{س \to م^-} د(س)$$

$$\lim_{س \to م} \frac{س^2 - م^2}{س - م} = 4 + 5س$$

$$م + م = 4 + 5م$$

$$-4م = 4$$

$م = -1$

يتابع

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

وكان عليه السلام ضحاكا بساما

تابع

نهـا $\frac{(س-أ)(س+أ)}{(س-أ)}$ = نهـا $س^{3}+أس^{2}-أ^{2}س-أ^{3}$

$أ^{2}+أ^{2}=أ^{2}+٤$

$أ^{2}=٤$

$\therefore أ=-\frac{٤}{٣}$

* إذا كان :

$ق(س)=\begin{cases}\frac{س^{3}-أ^{3}}{س-أ} & ، س<أ \\ ٢أس & ، س\geq أ\end{cases}$

$٢أ=١٨-س=٢٧$ ، $س\geq أ$

بما أن النهاية موجودة فإن $أ=١٩$

لكون $أ=٣$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

الرياضيات أجمل من هدفا في الدقيقة .9

* اقتران القيمة المطلقة :-

عند حساب نهاية لاقتران القيمة المطلقة نتبع الخطوات التالية :-

١- التعويض مباشر

٢- إذا كان ناتج التعويض يساوي صفر نكتب دائماً إعادة التعريف ثم حساب النهاية

٣- إذا كان ناتج التعويض موجب تحسب النهاية بشكل مباشر مع إزالة إشارة القيمة المطلقة

٤- إذا كان ناتج التعويض عدد سالب نجب ضرب ما بداخل السالب مع إزالة القيمة المطلقة

مثال :

١) $\lim_{س \to ٣} (س^٢ + س + ١)$

$= \lim_{س \to ٣} س^٢ + س + ١ = ٩ + ٣ + ١ = ١٣$

٢) $\lim_{س \to ٣} |س^٢ - ٣س - ٥|$

$= \lim_{س \to ٣} س^٢ - ٣س - ٥ = ٩ - ٩ - ٥ = -٥$

٣) $\lim_{س \to ٣} |س^٢ - ٤|$

الحل :- (إعادة التعريف)

$ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٤ & ، س \geq ٢ \\ ٤ - س^٢ & ، س < ٢ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^+} س^٢ - ٤ = ٠$

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} ٤ - س^٢ = ٠$

$\therefore \lim_{س \to ٢} ق(س) = ٠$

٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{|س - ٥|}{س - ٥}$

الحل :- (إعادة التعريف)

$ق(س) = \begin{cases} \frac{س - ٥}{س - ٥} & ، س > ٥ \\ \frac{٥ - س}{س - ٥} & ، س < ٥ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٥^+} ق(س) = ١$

$\lim_{س \to ٥^-} ق(س) = -١$

$\therefore \lim_{س \to ٥} ق(س)$ غير موجودة

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

شايف البحر شو كبيييير .... كتاب الرياضيات أكبر منه

ج) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{|س^٢ - ٤|} = ؟$

$س^٢ - ٤ = ٠ \quad \Rightarrow \quad س = \pm ٢$

	−		+		−	
		−٢		٢		

$\lim_{س \to ٢^+} \frac{س - ٢}{س^٢ - ٤} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س - ٢}{(س - ٢)(س + ٢)}$

$= \frac{١}{٤}$

$\lim_{س \to ٢^-} \frac{س - ٢}{-(س^٢ - ٤)} = -\frac{١}{٤}$

∴ النهاية غير موجودة

⑥ $\lim_{س \to ٢} \frac{|س^٢ - س - ٢|}{س - ٢}$

الحل: (إعادة التعريف)

$س^٢ - س - ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س + ١) = ٠ \quad \Rightarrow \quad س = ٢ ، س = -١$

	+		−		+	
		−١		٢		

$\lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٢ - س - ٢}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{(س - ٢)(س + ١)}{(س - ٢)} = ٣$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

⑦ $\lim_{س \to ٢} \frac{|س - ٣| - ١}{س - ٢}$

الحل:

$\lim_{س \to ٢} \frac{٣ - س - ١}{س - ٢} = \frac{-س + ٢}{س - ٢} = -١$

⑧ $\lim_{س \to ٧} \frac{|س - ٤| - ٣}{س - ٧}$

$= \lim_{س \to ٧} \frac{س - ٤ - ٣}{س - ٧}$

$= \lim_{س \to ٧} \frac{س - ٧}{س - ٧} = ١$

⑨ $\lim_{س \to ٢} \frac{|س^٣ - ٣| - ٨}{س - ٢}$

الجواب = ٤

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

إذا كان يجري الدَّهرُ عكسُ مَرامِنا.. فَهل جَدُّنا يُجدِي أوِ الفِكرُ ينفَعُ.

١١) $\lim_{س \to ٢} \frac{|س-٢| - س}{س+٥}$

$= \frac{-٢}{٧}$

١٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{|س-٢| - س^{٢}}{س-٢}$

= غير موجودة

١٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{|س-٢| + س - ٢}{|س-٢|} = \frac{٠}{٠}$

$|س-٢| = س-٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢$

$|س-٢| = -(س-٢) \Leftarrow س < ٢$

$\lim_{س \to ٢^{+}} \frac{س-٢+س-٢}{س-٢} = ٢$

$\lim_{س \to ٢^{-}} \frac{-(س-٢)+س-٢}{س-٢} = ٠$

∴ النهاية غير موجودة

١٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{|س^{٢}-٦| - |٢س-٦|}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٦-س^{٢}-(٦-٢س)}{س} = ١$

١٥) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{(س-١)^{٢}}}{١-س}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{|س-١|}{١-س}$

$|س-١| = س-١ \Leftarrow س = ١$ مرفوض

$\lim_{س \to ١^{+}} \frac{س-١}{١-س} = -١$

$\lim_{س \to ١^{-}} \frac{-(س-١)}{(س-١)} = -١$

∴ النهاية غير موجودة

١٦) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^{٢}-٨س+١٦}}{٤-س}$

لكل :

$\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{(س-٤)^{٢}}}{٤-س} = \lim_{س \to ٤} \frac{|س-٤|}{٤-س}$

$= \lim_{س \to ٤^{+}} \frac{(س-٤)}{٤-س} = -١$

$= \lim_{س \to ٤^{-}} \frac{-(س-٤)}{٤-س} = ١$

∴ النهاية غير موجودة

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

جلَسنا زماناً حائرينَ لِأنَّنا.. إلى العيشِ أبطَأنا ولِلموتِ نُسرِعُ.

١٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{\sqrt{س^٢}} + س$

$= \sqrt{س^٢} = |س|$

$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{س}{|س|} + س$

$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢}{س} + س & ، س < ٠ \\ \frac{س^٢}{-س} + س & ، س > ٠ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٠^+} ق(س) = \lim_{س \to ٠^+} ١ + س = ١$

$\lim_{س \to ٠^-} ق(س) = \lim_{س \to ٠^-} -١ + س = -١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} ق(س)$ غير موجودة

١٨) $\lim_{س \to ٠} ٢س \sqrt{\frac{١}{س^٢} + ٤}$

الحل :-

يجب توحيد المقامات داخل الجذر

$\lim_{س \to ٠} ٢س \sqrt{\frac{١ + ٤س^٢}{س^٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} ٢س \frac{\sqrt{١ + ٤س^٢}}{|س|}$

$= \lim_{س \to ٠} ٢س \frac{\sqrt{١ + ٤س^٢}}{-س}$

$= \lim_{س \to ٠} -٢ \sqrt{١ + ٤س^٢} = -٢$

١٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٣ - س^٢} - \sqrt{٣}}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٣ - س^٢} - \sqrt{٣}}{س} \times \frac{\sqrt{٣ - س^٢} + \sqrt{٣}}{\sqrt{٣ - س^٢} + \sqrt{٣}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣ - س^٢ - ٣}{س(\sqrt{٣ - س^٢} + \sqrt{٣})}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-س^٢}{س(\sqrt{٣ - س^٢} + \sqrt{٣})}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-س}{\sqrt{٣ - س^٢} + \sqrt{٣}} = \frac{٠}{٢\sqrt{٣}} = ٠$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

الأعدام شنقا لمن يكسر قلب أمراة في هذه الحارة.

٢) $\lim_{س \to 1} \frac{|س^3 - ٥س + ٤|}{|س^3 - ٤س + ٣|} = ب$

$= \lim_{س \to 1} \left| \frac{س^2 - ٥س + ٤}{س^2 - ٤س + ٣} \right|$

$= \lim_{س \to 1} \left| \frac{(س-٤)(س-١)}{(س-٣)(س-١)} \right|$

$= \left| \frac{-٣}{-٢} \right| = \frac{٣}{٢}$

٣) $\lim_{س \to ٠} (٢س + ٣)^{\frac{١}{س}}$

$= \lim_{س \to ٠} (٣س + ٢)^{\frac{١}{س}} = ١$

$= \lim_{س \to ٠} (٣س + ٢)^{-\frac{١}{س}} = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} (٢س + ٣)^{\frac{١}{س}} = ١$

٤) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{|س-٢|}{س-٢} & ، س < ٢ \\ \frac{س}{٢} & ، س > ٢ \end{cases}$

جد $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ إن وجدت

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{|س-٢|}{س-٢}$

$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{-(س-٢)}{س-٢} = -١$

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س}{٢} = \frac{٢}{٢} = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٢} ق(س)$ غير موجود

٥) إذا كان $\lim_{س \to ١} \frac{أ س^2 + ب س + ٤}{س - ١} = ٧$ جد قيمة أ ، ب بحيث $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٤$

$\lim_{س \to ١} ق(س) = صفر$

$أ + ب + ٤ = صفر$

$أ + ب = -٤$ ..... ①

$\lim_{س \to ١} \frac{أ س^2 + ب س + ٤}{س - ١} = ٧$

$\lim_{س \to ١} \frac{أ س^2 + ب س + ٤}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(أ س + ب + أ)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} (أ س + ب + أ) = ٧$

$أ + ب + أ = ٧$

$٢أ + ب = ٧$ ..... ②

بطرح ① من ②

$أ = ١١$

$ب = -١٥$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٤$

$٤أ + ٢ب + ٤ = ٤$

$٤أ + ٢ب = ٠$

$٢أ + ب = ٠$

$-٢أ - ب = ٠$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

هدفنا العلامة الكاملة وليس فقط النجاح.

تابع حل سؤال ٢٣ ⇐

$= ٣ \cdot ب = ٣ \Leftarrow ب = ١$

$٢ ق - ١ = ١$

$٢ ق = ٢ \Leftarrow ق = ١$

٢٤) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{|س-٣|}{س-٣} & ، س > ٣ \\ ٢ ق - س & ، س \leq ٣ \end{cases}$$

جد قيمة ، الثابت ق علماً بأن نهـا ق(س) موجودة
٣←س

الحل :

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٣-س}{س-٣} & ، س > ٣ \\ ٢ق - س & ، س \leq ٣ \end{cases}$$

نهـا = -١ = -١
٣←س-

نهـا ٢ق - س = -١
٣←س+

٢ق - ٣ = -١ ⇐ ق = $\frac{١}{٢}$

٢٥) إذا كان:

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{|س-٤|}{س-٤} & ، س \neq ٤ \\ ٩ - ق^{٢} & ، س = ٤ \end{cases}$$

وكانت نهـا ق(س) موجودة فما قيمة ق ؟
٤←س

الحل :

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٤-س}{س-٤} & ، س < ٤ \\ ٩ - ق^{٢} & ، س \geq ٤ \end{cases}$$

نهـا = -١ = -١
٤←س+

نهـا ق(س) = ٩ - ق^{٢} = -١
٤←س-

١٦ - ق^{٢} = -٩ = -١

١٦ ق^{٢} = ٨ ⇐ ق = $\frac{١}{٢}$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

من قال أن المال لا يمكنه شراء السعادة، فهو ببساطة لم يعرف أين عليه أن يتسوق

٢٦) إذا كان

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} \frac{|أ س^2 - 1|}{س - 1} & ، س < 1 \\ 2س + 6 & ، س \geq 1 \end{cases}$$

جد قيمة أ التي تجعل $\lim_{س \to 1} \text{ق}(س)$ موجودة ؟!

الحل :

$$\lim_{س \to 1^+} = 2س + 6 = 8$$

$$\lim_{س \to 1^-} = \frac{|أ س^2 - 1|}{س - 1} = -أ$$

$$\lim_{س \to 1^+} = \frac{(أ - 1)(س - 1)}{س - 1} = أ - 1$$

$$أ - 1 = 8$$

$$أ = 9$$

* إذا كانت $\lim_{س \to 3} \frac{س + 3}{أ س^2 - 15 س + ب} = 6$

جد قيمة أ ، ب ؟!

الجواب :

$$أ = -1$$

٢٧) إذا كانت $\lim_{س \to 3} \frac{|أ س^2 + ب س - 2|}{س - 3} = 1$

جد قيمة أ ، ب ؟!

الحل :

$$\lim_{س \to 3^+} = |أ س^2 + ب س - 2| \div$$ صغر

$$\therefore |9أ + 3ب - 2| = 0$$

$$|3أ + ب| = 2$$

إما $3أ + ب = 2 \Leftarrow أ = -1$

$$\therefore \lim_{س \to 3^+} = \frac{-س^2 + س - 2}{س - 3} = \lim_{س \to 3^+} = -س + 2 = -1$$

$$\therefore أ = -1 \times$$

أو $3أ + ب = -2 \Leftarrow أ = -5$

$$\lim_{س \to 3^-} = \frac{-5س^2 + س - 2}{س - 3} = \lim_{س \to 3^-} = -5س - 2 = -17$$

$$= \lim_{س \to 3^-} \frac{-ها - 3 - س}{س - 3} = -1$$

$$\therefore أ = -5 \checkmark$$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

ولا خير في حسن الجسوم وطولها إذا لم يزن حسن الجسوم عقول.

* استراتيجية إيجاد أكبر عدد صحيح :-

مفهوم أكبر عدد صحيح :-

هو العدد الذي يقل عن أو يساوي العدد المعطى

[٣] = ٣ [٢,٥] = ٢

[٧,٩] = ٧ [-٢] = -٢

[-١٤,٥] = -١٥ [-٣,٨] = -٤

* حساب النهاية عند اقتران أكبر عدد صحيح :-

عند حساب النهاية لاقتران أكبر عدد صحيح

نتبع ما يلي :-

١- التعويض المباشر

٢- إذا كان ناتج التعويض كسر عشري فإن

النهاية تحسب بشكل مباشر

٣- إذا كان ناتج التعويض = عدد صحيح

فإن الاقتران متشعب وتحسب النهاية

عن طريق اليمين واليسار

٤- إذا كان م يمثل ناتج التعويض في النهايات

داخل اقتران أكبر عدد صحيح وكان :-

أ) م ∉ ص فإن :

$[م]^+ = [م]^- = [م]$

ب) م ∈ ص :-

١- وكان معامل س موجب فإن

$[م]^+ = م$ $[م]^- = م - ١$

٢- معامل س سالب

$[م]^+ = م - ١$

$[م]^- = م$

* الأسئلة :-

١) نهـا $\frac{[س+٠,٦]}{٢ ، ٣}$

$= [٢,٦] = ٢$

٢) نهـا $\frac{[٢ س - ١]}{٢ ، ٣}$

$= [٣,٥] = [٣,٥] = ٣$

٣) نهـا $\frac{[١ - س]}{٤ ، ٥}$

$= [-٣,٥] = -٤$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

دع الأيام تفعل ما تشاء وطب نفسا إذا حكم القضاء

٤) نهـا [س+٣] يُشعب
س←٧

ركل :-

نهـا [س+٣] = [١٠]⁺ = ١٠
س←٧⁺

نهـا [س+٣] = [١٠]⁻ = ٩
س←٧⁻

∴ نهـا [س+٣] غير موجودة
س←٧

٥) نهـا [ع-س-٨]
س←٣

= نهـا [ع-س-٨]⁺ = [-٤]⁺ = -٤
س←٣⁺

= نهـا [ع-س-٨]⁻ = [-٤]⁻ = -٥
س←٣⁻

∴ نهـا [ع-س-٨] ≠ غير موجودة
س←٣

٦) نهـا [ع-س]
س←٤

= نهـا [ع-س] = [-٢]⁺ = -٣
س←٤⁺

= نهـا [ع-س] = [-٢]⁻ = -٣
س←٤⁻

∴ نهـا [ع-س] غير موجودة
س←٤

٧) نهـا [٥-٢س]
س←١

نهـا [٥-٢س] = [٣]⁺ = ٣
س←١⁺

نهـا [٥-٢س] = [٣]⁻ = ٣
س←١⁻

∴ نهـا [٥-٢س] غير موجودة
س←١

٨) نهـا [ع س² + ½] + س³ + ٤
س←١

= نهـا (ع + س³ + ٤) = ٧
س←١

٩) نهـا ٣س [س+٤]
س←٣

نهـا ٣س [س+٤] - نهـا ١٨ س
س←٣⁺ س←٣⁺

= ٣٦

نهـا ١٥ س = ٣س = ٣
س←٣⁻

∴ نهـا ٣س [س+٤] غير موجودة
س←٣

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

الرياضيات سهل بس أنت ما بتدرس ؟

* $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{صفر}{٢ + ٢}$ = صفر

$\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢} = \lim_{س \to -٢} س - ٢ = -٤$

$= -\frac{٣}{٤}$

∴ النهاية غير موجودة

* إذا كان :

$ق(س) = \begin{cases} |س - ١| & ، س \neq ٣ \\ [س - ١] & ، س = ٣ \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ إن أمكن !

$ق(س) = \begin{cases} س - ١ & ، س < ٣ \\ ٢ & ، س = ٣ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = ٢ - ١ = ١$ ، $\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = ١$

∴ $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ غير موجودة

* إذا كان :

$ق(س) = \begin{cases} |س - ١| & ، س \neq ٣ \\ [س - ١] & ، س = ٣ \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ إن أمكن !

$ق(س) = \begin{cases} ١ - س & ، س < ٣ \\ ٢ & ، س = ٣ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = ١$

∴ $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ غير موجودة

* إذا كان :

$ق(س) = \begin{cases} \frac{|س - ٤|}{س - ٤} & ، س \neq ٤ \\ [٥ - س] & ، س = ٤ \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to ٤} ق(س)$ إن أمكن !

$ق(س) = \begin{cases} -١ & ، س < ٤ \\ ١ & ، س > ٤ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٤^+} ق(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ٤^-} ق(س) = -١$

∴ $\lim_{س \to ٤} ق(س)$ غير موجودة

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

ولا تجزع لحادثة الليالي فما لحوادث الدنيا بقاء

* $\lim_{س \to ٢^+} \frac{[س] + ٠,٥}{س^٢ + ١}$

$= \frac{[٢,٥]}{٥} = \frac{٢}{٥} = ٠,٤$

* $\lim_{س \to ٢^+} \frac{٢}{[س] + ٣}$

$= \frac{٢}{٥}$

$\lim_{س \to ٢^+} \frac{٢}{[س] + ٣} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

$\lim_{س \to ٢^+} \frac{٢}{[س] + ٣}$ غير موجودة

* $\lim_{س \to ٣^+} \frac{٤ س^٢}{[س + ١]}$

$\lim_{س \to ٣^+} \frac{٤ س^٢}{[س + ١]} = \frac{٣ \times ٤ س^٢}{٣} = \frac{٨}{٣}$

$\lim_{س \to ٣^-} \frac{٤ س^٢}{[س + ١]} = \frac{٤ س^٢}{٣} = ٤$

$\lim_{س \to ٣} \frac{٤ س^٢}{[س + ١]}$ غير موجودة

* $\lim_{س \to ١^+} \frac{س^٢ + ٤}{[٣ - س]}$

$= \lim_{س \to ١^+} \frac{س^٢ + ٤}{[٣ - س]} = \frac{١^٢ + ٤}{١} = ٥$

$\lim_{س \to ١^-} \frac{س^٢ + ٤}{[٣ - س]} = \frac{٥}{٢}$

$\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٤}{[٣ - س]}$ غير موجودة

* ضابط بين مهمة :-

إذا كان $ق \in ص$ ضابط :-

١) $[س \pm ق] = [س] \pm ق$

٢) $[ق - س] = [-س + ق] = [-س] + ق$

* $\lim_{س \to ٣^+} [س + ٥] = [س] + ٥$

$= \lim_{س \to ٣^+} [س] + ٥ - ([س] + ٣)$

$= \lim_{س \to ٣^+} ٢ = ٢$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

جيل ...ال عزيمة الرجال و قوة الأبطال

* $\lim_{س \to 3} [س + 5] + [س - 6]$

$\lim_{س \to 3^+} [س + 5] + [س - 6] = \lim_{س \to 3^+} (8 + 2) = 10$

$\lim_{س \to 3^-} (7 + 3) = 10$

$\therefore \lim_{س \to 3} [س + 5] + [س - 6] = 10$

* $\lim_{س \to 2} \frac{س^3 - 4س^2 + 4س}{|س| - 2}$

$\lim_{س \to 2^+} \frac{س^2 + س - 2}{س - 2} = \lim_{س \to 2^+} \frac{س + 2}{-(س + 2)}$

$= -1$

* $\lim_{س \to \frac{5}{2}^+} \frac{س - [س]}{(4س - 25)}$

$= \lim_{س \to \frac{5}{2}^+} \frac{س - [س]}{(2س - 5)(2س + 5)}$

$= \lim_{س \to \frac{5}{2}^+} \frac{س - 5}{(2س - 5)(10)} = \frac{1}{10}$

* $\lim_{س \to 0} (2س + 1)^{[س]}$

$\lim_{س \to 0^+} (2س + 1)^{[س]} = \text{صفر}^{\text{صفر}} = 1$

$\lim_{س \to 0^-} (2س + 1)^{-1} = 1$

$\therefore \lim_{س \to 0} (2س + 1)^{[س]} = 1$

* $\lim_{س \to 2} (س + 2)^{[س]}$

$\lim_{س \to 2^+} (س + 2)^{[س]} = 6^2 = 36$

$\lim_{س \to 2^-} (س + 1)^1 = 4$

$\therefore \lim_{س \to 2} (س + 2)^{[س]}$ غير موجودة

* $\lim_{س \to 0} \frac{[س]}{س}$

$\lim_{س \to 0^+} \frac{[س]}{س} = \lim_{س \to 0^+} \frac{0}{س} = \text{صفر}$

$\lim_{س \to 0^-} \frac{[س]}{س} = \lim_{س \to 0^-} \frac{-1}{س} = -\infty$

$\therefore$ النهاية غير موجودة

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

تدريس الرياضيات فن و ابداع

* إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^2 - ٤}{س + ١٢} & ، \ س \neq -٢ \\ [س + ٤] & ، \ س < -٢ \end{cases}$$

جد $\lim_{س \to -٢} ق(س)$

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{(س - ٢)(س + ٢)}{-(س + ٢)} & ، \ س \neq -٢ \\ ٢ & ، \ س = -٢ \end{cases}$$

$\lim_{س \to -٢^+} ق(س) = ٢$

$\lim_{س \to -٢^-} ق(س) = ٤$

$\therefore$ النهاية غير موجودة

* إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} |س - ٤| & ، \ س \geq ١ \\ [س] + ٢ & ، \ س < ١ \end{cases}$$

جد $\lim_{س \to ١} ق(س)$

لكن $ا = ٣$

* إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} |س| & ، \ |س| < ٢ \\ \left[\dfrac{س}{٢}\right] & ، \ |س| \geq ٢ \end{cases}$$

جد $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

لكن $ا \neq$ غير موجودة

* إيجاد قيمة الثابت :

* ما مجموعة قيم $أ$ التي تجعل

$\lim_{س \to ٣} [٢س] = ٣$

$٣ \leq ٢أ < ٤$

$\frac{٣}{٢} \leq أ < ٢$

$\therefore أ \in [\frac{٣}{٢}, ٢)$

لحل هذا المثال لابد من وضع إشارة المساواة عند العدد ٣ ، فكر في ذلك !؟"

* $\lim_{س \to ٣^+} [أ س + ٢] = ٥$

الحل :

$[٣أ + ٢] = ٥$

$٥ \geq ٣أ + ٢ > ٦$

$٣ \geq ٣أ > ٤$

$١ \geq أ > \frac{٤}{٣}$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

لاتكن ليناً فتعصر، ولا صلباً فتكسر

* $\lim_{س \to -٤} [٢س + ٣] = ٥$

$[٢ + ٣]^{-} = ٥$

$٥ < ٢ + ٣ < ٦$

$٣ < ٣ < ٤$

$\frac{٣}{٣} < ١ < ١$

* $\lim_{س \to ٢^{+}} [٣ - ١] = -٤$

$[٣ - ١]^{+} = -٤$

$-٤ < ٣ - ١ < -٣$

$-٥ < ٣ - ٢ < -٤$

$-\frac{٥}{٢} < ٣ < -٢$

* في المثال السابق إذا كانت

$٣ \in ص$

$[٣ - ١]^{+} = -٤$

$٣ - ١ = -٤$

$-٣ = -٤$

$٣ = -٢$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

جودة الكلام في الاختصار

* نظريات النهايات *

إذا كان و ، هـ اقترانين بحيث

$\lim_{س \to أ} و(س) = ب$

$\lim_{س \to أ} هـ(س) = ج$ ، فإن :

١) $\lim_{س \to أ} ب = ب$

٢) $\lim_{س \to أ} [و(س) \pm هـ(س)] =$

$\lim_{س \to أ} و(س) \pm \lim_{س \to أ} هـ(س)$

$= ب \pm ج$

٣) $\lim_{س \to أ} م \cdot و(س) = م \cdot \lim_{س \to أ} و(س)$

$= م \times ب$

٤) $\lim_{س \to أ} [و(س) \times هـ(س)] =$

$\lim_{س \to أ} و(س) \times \lim_{س \to أ} هـ(س)$

$= ب \times ج$

٥) $\lim_{س \to أ} \frac{و(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} و(س)}{\lim_{س \to أ} هـ(س)} = \frac{ب}{ج}$

حيث $ج \neq$ صفر

٦) $\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{و(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to أ} و(س)}$

$= \sqrt[ن]{ب}$

حيث $ب > ٠$ عندما ن عدد نسبي

الاستنتاجات :

١) إذا كانت $\lim_{س \to أ} و(س) = ٤$

$\lim_{س \to أ} هـ(س) = ٥$ أوجد :

أ) $\lim_{س \to أ} [و(س) + هـ(س)]$

$= \lim_{س \to أ} و(س) + \lim_{س \to أ} هـ(س)$

$= ٤ + ٥ = ٩$

ب) $\lim_{س \to أ} \frac{١}{و(س)}$

$= \frac{١}{٤}$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

فرجينا شطارتك

٢) إذا كانت $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٦$

$\lim_{س \to ١} هـ(س) = ٤$ ، جد :-

$\lim_{س \to ١} (ق^{٢}(س) - هـ(س) - ١١)$

الحل :-

$٦^{٢} - ٤ - ١١ = ٢٧$

٣) $\lim_{س \to ٥} ٢ق(س) = ٦$ ، $\lim_{س \to ٥} \frac{هـ(س)}{٢} = ٢$

جد $\lim_{س \to ٥} \sqrt{ق(س) + هـ(س) + ٣}$

الحل :-

(ترتيب العمليات)

$\lim_{س \to ٥} ق(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٤$

$\therefore \lim_{س \to ٥} \sqrt{ق(س) + هـ(س) + ٣} = \sqrt{٢ + ٤ + ٣} = ٣$

٤) إذا كان $هـ(س)$ كثير حدود بحيث

$\lim_{س \to ٣} \frac{١}{٢} هـ(س) + س^{٢} - ٤ = ١٢$

اوجد قيمة $\lim_{س \to ٣} (هـ(س))^{٢}$ ؟

$\lim_{س \to ٣} \frac{١}{٢} هـ(س) + \lim_{س \to ٣} س^{٢} - ٤ = ١٢$

$\lim_{س \to ٣} \frac{١}{٢} هـ(س) + ٩ - ٤ = ١٢$

$\lim_{س \to ٣} \frac{١}{٢} هـ(س) = ٧$

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ١٤$

$\lim_{س \to ٣} (هـ(س))^{٢} = ١٩٦$

٥) $\lim_{س \to ٤} (ق(س) \times هـ(س) + س^{٢} - ٤) = ٦$

$\lim_{س \to ٤} هـ(س) = ٤$

جد $\lim_{س \to ٤} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ؟

$\lim_{س \to ٤} ٢ق(س) + \lim_{س \to ٤} س^{٢} - ٤ = ٦$

$\lim_{س \to ٤} ٢ق(س) = ٦$

$\lim_{س \to ٤} ق(س) = ٣$

$\therefore \lim_{س \to ٤} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{٣}{٢}$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

فرجينا شطارتك

٦) $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٨ = ٠$ ..... جد

$\lim_{س \to ٢} (ق(س) + س^٢)$

الحل:

$(\lim_{س \to ٢} ق(س))^٣ = ٨$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٢$

$\therefore \lim_{س \to ٢} (ق(س) + س^٣) = ٤ + ٢ = ٦$

٧) $\lim_{س \to ٣} ق^٢(س) - ٥ ق(س) + ٦ = ٠$

جد $\lim_{س \to ٣} ق(س) + ٢س$

الحل:

$\lim_{س \to ٣} (ق(س) - ٣)(ق(س) - ٢) = ٠$

إما $\lim_{س \to ٣} ق(س) - ٣ = ٠$

$\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٣$

$\therefore \lim_{س \to ٣} ق(س) + ٢س = ٩ + ٦ = ٣ + ٢ \times ٣$

أو $\lim_{س \to ٣} ق(س) - ٢ = ٠$

$\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٢$

$\therefore \lim_{س \to ٣} ق(س) + ٢س = ٨ = ٦ + ٢ = ٢ + ٢ \times ٣$

٨) إذا كانت $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٣ + ٤ ق(س) - ق^٢(س)$ صفر

جد $\lim_{س \to ١} (ق^٣(س) + ق(س) + س)$

الحل:

$\lim_{س \to ١} (ق(س) - ٣)(ق(س) - ١) =$ صفر

$\therefore \lim_{س \to ١} ق(س) = ٣ = ٠$

أو $\lim_{س \to ١} ق(س) = ١ = ٠$

$\lim_{س \to ١} ق(س) = ٣$

$\therefore \lim_{س \to ١} ق(س) = ١$

$\lim_{س \to ١} ق^٣(س) + \lim_{س \to ١} ق(س) + س = ١ + ١ + ٣ = ٢٨$

وعندما $\lim_{س \to ١} ق(س) = ١$

$\lim_{س \to ١} ق^٣(س) + \lim_{س \to ١} س = ١ + ١ = ٢$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

فرجينا شطارتك

٩) إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)+٤}{س-٢} = ٨$ فجد $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

ركان $ق(س)$ اقتران كثير حدود ، جد :-

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٢ق(٢) + ٣(٢) - ٢$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) + ٤ = صفر$ ✱

$\therefore \lim_{س \to ٢} ق(س) = -٢$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) + \lim_{س \to ٢} ٣س - ٢ = ٢ق(٢) + ٣(٢) - ٢$

$= ٢$

١٠) إذا كانت $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س)+٧}{س+٣} = ٢$

ركان $ق(س)$ كثير حدود ، جد $\lim_{س \to ٣} ق(س)+٣س$

الحل :-

بما أن النهاية مرجودة ، ناتج التعويض المقام = ٠

$\therefore \lim_{س \to ٣} ق(س) + ٧ = صفر$

$\lim_{س \to ٣} ق(س) = -٧$

$\lim_{س \to ٣} ق(س) + ٣س = \lim_{س \to ٣} ق(س) + \lim_{س \to ٣} ٣س$

$= (-٧)^{٢} + ٣ \times ٣ - ٢ = ٤٩ - ٩$

$= ٤٠$

١١) $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س)+٥}{س+٢} = ٩$

جد $\lim_{س \to ٣} ق(س) + ٢س$ ؟!

$\lim_{س \to ٣} ق(س) = -٥$

$\lim_{س \to ٣} ق(س) + ٢س = -٥ - ٤ = -٩$

١٢) إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)-٤}{س-٢} = ٤$

فما قيمة $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢}-٤}{ق(س)-٤}$ ؟!

الحل :-

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢}-٤}{ق(س)-٤} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س+٢)}{ق(س)-٤}$

$= \frac{٤ \times ٤}{٤} = ١$

١٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س)-٣}{س^{٣}-٢٧} = ٢$

جد $\lim_{س \to ٣} \frac{س-٣}{ق(س)-٣}$

الجواب = $\frac{١}{٥٤}$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

فرجينا شطارتك

١٤) إذا كانت $\frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ١} \frac{\text{ق}(\text{س})-٦}{\text{س}-١} = ٨$

جد $\frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}^{٣}+٢\text{س}^{٢}-٣}{\text{ق}(\text{س})-٦}$ ؟!

الحل:

$\frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}^{٣}+٢\text{س}^{٢}-٣}{\text{ق}(\text{س})-٦} = \frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ١} \frac{٤(\text{س}-١)}{\text{ق}(\text{س})-٦}$

$= ٤ \times \frac{١}{٨} = \frac{١}{٢}$

١٥) إذا كانت $\frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٣} \frac{\text{ق}(\text{س})-٩}{\text{س}-٣} = ١٠$

جد $\frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٣} \frac{\text{ق}(\text{س})-\text{س}^{٢}}{\text{س}-٣}$ ؟!

$\frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٣} \frac{\text{ق}(\text{س})-\text{س}^{٢}}{\text{س}-٣}$ (طرح وإضافة ٩)

$\frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٣} \frac{\text{ق}(\text{س})-٩+٩-\text{س}^{٢}}{\text{س}-٣}$

$\frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٣} \frac{\text{ق}(\text{س})-٩}{\text{س}-٣} + \frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٣} \frac{٩-\text{س}^{٢}}{\text{س}-٣}$

$١٠ + \frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٣} \frac{(٣-\text{س})(٣+\text{س})}{\text{س}-٣}$

$= ١٠ - ٦ = ٤$

١٦) $\frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٢} \frac{\text{ق}(\text{س})-٤}{\text{س}-٢} = ٤$

جد $\frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٢} \frac{\text{ق}(\text{س})-\text{س}^{٢}}{\text{س}-٢}$ ؟!

$\frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٢} \frac{\text{ق}(\text{س})-٤}{\text{س}-٢} = ٤$

$= \frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٢} \frac{\text{ق}(\text{س})-\text{س}^{٢}}{\text{س}-٢}$

$= \frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٢} \frac{\text{ق}(\text{س})-٤}{\text{س}-٢} + \frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٢} \frac{٤-\text{س}^{٢}}{\text{س}-٢}$

$= \frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٢} \frac{\text{ق}(\text{س})-٤}{\text{س}-٢} + \frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٢} \frac{(٢-\text{س})(٢+\text{س})}{\text{س}-٢}$

$= ٤ - ٤ = \text{صفر}$

١٧) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣}$

$\frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٥} \frac{\text{ق}(\text{س})-٢٥٠}{\text{س}-٥} = ٧٥$

فما قيمة $\frac{\text{نهـا}}{\text{س}\to ٥} \frac{\text{ق}(\text{س})-\text{س}^{٢}}{\text{س}-٥}$

الجواب = ٣٠

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

فرجينا شطارتك

١٨) إذا كانت

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{\text{ه}(س)-1}{س-1} = ٤$$

جد $\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{س^{٣}\text{ه}(س)-1}{س-1}$ ؟

$\text{نهـا}_{س\to 1} \text{ه}(س) - 1 = $ صفر

$\text{نهـا}_{س\to 1} \text{ه}(س) = 1$

(طرح و اضافة $\text{ه}(س)$)

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{س^{٣}\text{ه}(س)-\text{ه}(س)}{س-1} + \text{نهـا}_{س\to 1} \frac{\text{ه}(س)-1}{س-1}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{\text{ه}(س)(س^{٣}-1)}{س-1} + \text{نهـا}_{س\to 1} \frac{\text{ه}(س)-1}{س-1}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{\text{ه}(س)(س-1)(س^{٢}+س+1)}{س-1} + ٤$$

$١ \times ٣ + ٤ = ٧$

١٩) $\text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{\text{ه}(س)-٣}{س-٣} = ٤$

جد $\text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{س\,\text{ه}(س)-٦}{س-٣}$

$= ٣ \times ٤ - ٦$

$= ١٢ - ٦$

$= ٦$

الجواب = ١١

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

ولا تجزع لحادثة الليالي فما لحوادث الدنيا بقاء

مرجعة عمل رقم (٢)

نهايات ، لا فترابات ، متشعبة

نظريات في النهايات

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{|س^٣ - ١|}{س - ١}$

ح : غير موجودة

٢) $\lim_{س \to ٣^+} \frac{س - [س]}{|س^٢ - ١٩|}$

$ح = \frac{١}{٦}$

٣) $\lim_{س \to -١^+} \frac{[س + ١]}{|س + ١١|}$

ح = صفر

٤) $\lim_{س \to ١} |س - ١| [س + ١]$

ح = صفر

٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{|س^٢ - ٤|}{|س - ٢|}$

ح : ٤

* $\lim_{س \to ٢^+} \frac{[\frac{س}{٢}] - ٢س}{س + ١}$

ح : غير موجودة

* $\lim_{س \to ١} \frac{|س - ٣| + |١ - س|}{|س - ١| + ٥}$

$ح : \frac{١}{٥}$

* $\lim_{س \to -\frac{١}{٢}^+} \frac{\sqrt{١ + ٤س + ٤س^٢}}{٢س + ١}$

ح : غير موجودة

* $\lim_{س \to ٠} ([٢س + ١] - [٢س - ١])$

ح = ٢

* $\lim_{س \to ٠} \sqrt{\frac{٤}{س^٣} - ١}$

ح = -٢

* $\lim_{س \to ١^+} \frac{[٦س] - ٥س}{س - ١}$

ح = ٢

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

جيل ...لا عزيمة الرجال و قوة الأبطال

* $\lim_{س \to ٠} [|س|]$

ح = صفر

* $م(س) = \begin{cases} |س-١| & س < ٣ \\ [س-١] & س \geq ٣ \end{cases}$

فجد $\lim_{س \to ٣} م(س)$ إن أمكن

ح : غير موجودة

* إذا كان

$م(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س & س < ١ \\ ٣س + ب & س \geq ١ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ١} م(س) = د$ فجد (د ، ب)

ح : (د = ٤ ، ب = ٢)

* $م(س) = \begin{cases} \frac{س - ٤}{١س - ١٤} & س \neq ٤ \\ ٩ - ٢م & س = ٤ \end{cases}$

فجد الثابت م إذا كانت $\lim_{س \to ٤} م(س)$ موجودة

ح : $م = \frac{١}{٢}$

* $ل(س) = \frac{س^٣ - ٥س + ٢}{س^٢ - ٣س + ١}$ ، $س \neq ١$

ب ، $س = ١$

فجد قيمة ب إذا كانت $\lim_{س \to ١} ل(س)$ موجودة ؟!

(ح : ب = ١)

* $م(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} & س \neq ٢ \\ ٣س & س = ٢ \end{cases}$ ، $س \neq ك$

فما مجموعة قيم ك لتكون $\lim_{س \to ك} م(س)$ موجودة

(ح : ك = ١)

* $م(س) = \begin{cases} ٤ + |س - ١| & س \leq ٢م \\ [س] + ٢م & س > ٢م \end{cases}$

فجد قيمة الثابت م علماً بأن $٢م \in ط$

كما أن $\lim_{س \to ٢م} م(س)$ موجودة ؟!

ح : $٢م : ٢ = ٢$ مقبولة

$م = ١$ مرفوضة

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

الرياضيات سهل بس أنت ما بتدرس ؟

* $\text{هـ}(س) = \dfrac{س^2 - ٢س + ٣}{س - ١}$ ، $س \neq ١$

$ن = ٧ - ٥ = ٢$ ، $س \to ١$

حيث $\lim_{س \to ١} \text{هـ}(س)$ موجودة فجد $ل$ ، $ب$ ؟

$\lim_{س \to ١} (س^2 - ل س + ب) = ٠$

$١ - ل + ب = ٠$

$ب = ل - ١$

$\lim_{س \to ١} \dfrac{س^2 - ل س + ل - ١}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \dfrac{(س - ١)(س - (ل - ١))}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} (س - (ل - ١)) = ٢$

$ل - ١ = ٢$

$ل = ٣$ ، $ب = ٣ - ١ = ٢$

* ما مجموعة قيم $أ$ التي تجعل

$\lim_{س \to ٢} [س] = ٣$

$أ \in [٢ ، ٣)$

* إذا كان $\text{هـ}(س) = \begin{cases} [س + أ] & س < ٣ \\ ٤ - س & س \geq ٣ \end{cases}$

فما قيمة $أ$ إذا كانت $\lim_{س \to ٣} \text{هـ}(س)$ موجودة

$\lim_{س \to ٣^+} (٤ - س) = ١$

$\lim_{س \to ٣^-} [س + أ] = ٣ + أ$

$٣ + أ = ١$

$أ = -٢$

* إذا كانت $\lim_{س \to -٣} [أ - س] = ٥$

فجد قيمة الثابت $أ$ ؟

$٥ \leq أ + ٣ < ٦$

$٢ \leq أ < ٣$

$أ \in [٢ ، ٣)$

* إذا كانت $\lim_{س \to ١} \text{هـ}(س) = ٦$

$\lim_{س \to ١^+} \text{هـ}(س) = ٤$ فجد

$\lim_{س \to ١^-} (\text{هـ}^2(س) - \text{هـ}(س) - ١١)$

$(ج : ٢٧)$

* $\lim_{س \to ٣^+} \text{هـ}(س) = ٣$

$\lim_{س \to ٣^-} (\text{هـ}^2(س) + ٢\text{هـ}(س) - \dfrac{٤}{س}) = ٢١$

فجد $\lim_{س \to ٣} \text{هـ}^2(س)$

$ج = ٢٥$

* إذا كانت $\lim_{س \to ٣} \text{هـ}(س) = ٨$ موجودة

$(ج = [٨ ، ٩))$

* إذا كانت $\lim_{س \to ٣^-} [س - ٣] = ٥$

فجد قيمة الثابت $أ$ ؟

$ج = [٨ ، ٩)$

* إذا كانت $\lim_{س \to ٣} \text{هـ}(س) = ٧$

أ) $\lim_{س \to ٣} \dfrac{\text{هـ}(س) - ٨}{س - ٣}$

$(ج : غير موجودة)$

ب) $\lim_{س \to ٣} \dfrac{س^2 - ٣\text{هـ}(س)}{س - ٣}$

$(ج = ١)$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

إذا أردت أن تتوقف المرأة عن الكلام. اسألها عن عمرها

*المتطابقات المتعلقة بالدوال المثلثية

تذكير:

الزاوية	٠°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
الزاوية	٠	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
جاه	٠	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	١	٠	-١	٠
جتاه	١	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	٠	-١	٠	١

المتطابقات :

١) $جا^2 س + جتا^2 س = 1$

٢) $جا^2 س = 1 - جتا^2 س$

٣) $جتا^2 س = 1 - جا^2 س$

٤) $ظا^2 س + 1 = ثا^2 س$

٥) $ظتا^2 س + 1 = قتا^2 س$

٦) $جا^2 س = \frac{1}{2}(1 - جتا 2س)$

٧) $جتا^2 س = \frac{1}{2}(1 + جتا 2س)$

٨) $جا 2س = 2 جا س جتا س$

٩) $جتا 2س = جتا^2 س - جا^2 س$

١٠) $جتا 2س = 2 جتا^2 س - 1$

١١) $جتا 2س = 2 جا^2 س + 1 = 1 - 2 جا^2 س$

١٢) $جا س - جا ص = 2 (\frac{جتا \frac{س+ص}{2}}{2}) جا (\frac{س-ص}{2})$

١٣) $جا (س \pm ص) = جا س جتا ص \pm جتا س جا ص$

١٤) $جتا (س \pm ص) = جتا س جتا ص \mp جا س جا ص$

١٥) $ظا (س + ص) = \frac{ظا س + ظا ص}{1 - ظا س ظا ص}$

١٦) $ظا (س - ص) = \frac{ظا س - ظا ص}{1 + ظا س ظا ص}$

١٧) $ظا 2س - ظا ص = ظا (س - ص)(1 + ظا س ظا ص)$

١٨) $ظا 2س + ظا ص = ظا (س + ص)(1 - ظا س ظا ص)$

جاه+	جتاه+	جاه+
جتاه+	جاه+	ظتاه+
ظاه+	ظتاه+	(π - ه)
جتاه+	ظاه+	
ظاه+	ظتاه+	
(2π - ه)	(π + ه)	

١) $جا (\frac{3\pi}{2} - ه) = - جاه$

٢) $جتا (\frac{3\pi}{2} - ه) = - جتاه$

٣) $جا (\frac{3\pi}{2} + ه) = - جاه$

٤) $جا (2\pi - ه) = - جاه$

٥) $جتا (\frac{3\pi}{2} + ه) = - جتاه$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

الرجل الناجح هو الذي يكسب مالا أكثر مما تستطيع أن تنفق زوجته

٦) $\text{جتا}(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\text{جتا}\theta$

٧) $\text{جتا}(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \text{ا}(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \text{اجا}\theta$

٨) $\text{جا}(\frac{5\pi}{2} - \theta) = \text{ظا}(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \text{اجا}\theta$

٩) $\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س) = \text{جتا}س$

١٠) $\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - س) = \text{جا}س$

* التحويل من القياس الستيني الى القياس الدائري :

ضرب الزاوية في $\frac{\pi}{180}$

مثال) $90 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$

* التحويل من القياس الدائري الى القياس الستيني :

ضرب الزاوية في $\frac{180}{\pi}$

مثال) $\frac{\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = 45°$

* النهايات المثلثية :

حد النهايات التالية =

١) $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س + 3س} = \frac{0}{1+0} = 0$

٢) $\text{نها}_{س \to 0} \frac{3 + \text{ظا}س}{4 + س} = \frac{3+0}{4+0} = \frac{3}{4}$

٣) $\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{\text{جتا}س}{1 - \text{جا}س} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

٤) $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}3س}{\text{جا}2س} = \frac{1}{0}$ غير موجودة

نظرية :

إذا كانت س زاوية مقاسة بالتقدير الدائري فإن $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{س} = 1$

نظرية :

إذا كانت س زاوية مقاسة بالتقدير الدائري فإن $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا}س}{س} = 1$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

المرأة كالغصن الرطب.. تميل إلى كل جانب مع الرياح. ولكنها لا تنكسر في العاصفة

ملاحظة :-

إذا كانت س زاوية مقاسة بالدرجات

فإن :-

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{حا س}}{س} = \frac{\pi}{180}$

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا س}}{س} = \frac{\pi}{180}$

* نتائج النظريات السابقة :-

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{حا ن س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{ن}}{\text{ب}}$

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ن س}}{\text{حا ب س}} = \frac{\text{ن}}{\text{ب}}$

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا ن س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{ن}}{\text{ب}}$

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ن س}}{\text{ظا ب س}} = \frac{\text{ن}}{\text{ب}}$

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{حا ن س}}{\text{ظا ب س}} = \frac{\text{ن}}{\text{ب}}$

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا ن س}}{\text{حا ب س}} = \frac{\text{ن}}{\text{ب}}$

#

* الأسئلة :-

١) إذا كانت $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{حا ٥ س}}{\text{حا ٣ س}} = \frac{٥}{٣}$

اثبت ذلك ؟

الحل :- نقسم على البسط والمقام

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\frac{\text{حا ٥ س}}{س}}{\frac{\text{حا ٣ س}}{س}} = \frac{٥}{٣}$

٢) $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{حا ٥ س}}{\text{ظا ٣ س}}$

الحل (بالقسمة على س)

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{حا ٥ س}/س}{\text{ظا ٣ س}/س} = \frac{٥}{٣}$

٣) اثبت أن $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{حا ٧ س}}{\text{ظا ٧ س}} = \frac{٧}{٧}$

(واضح)

٤) $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{حا (ظا ٥ س)}}{\text{ظا ٣ س}}$

(واضح)

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

المرأة الصالحة لا يعدلها شيء.. لأنها عون على أمر الدنيا والآخرة

٥) $\lim_{س \to 0} \frac{ط٤س}{س} = ٤$

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{ا٣س}{س٧} = \frac{٣}{٧}$

٧) $\lim_{س \to 0} \frac{٥س}{جا٦س} = \frac{٥}{٦}$

٨) $\lim_{س \to 0} \frac{ظا٣س}{س٢} = \frac{٣}{٢}$

٩) $\lim_{س \to 0} \frac{ظا٤س}{جا٨س} = \frac{١}{٤}$

١٠) $\lim_{س \to 0} \frac{٤جاهـ٣س}{ظا٦س} = \frac{٤}{٦}$

١١) $\lim_{س \to 0} \frac{٣جا٢س}{س٧} = \frac{٦}{٧}$

١٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جاس}{س٢} = \frac{جا\frac{\pi}{٢}}{\pi٢} = ٠$

١٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{جا(س-٢)}{س٢-٤} = \frac{٠}{٠}$

نستبدل هـ = س - ٢

س ← ٢ ⇒ هـ ← ٠

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{جاهـ}{هـ٤} = ١$

١٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{ظا٣(س-٣)}{س٧-١٤} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{ظا٣(س-٣)}{٧(س-٣)}$

هـ = س - ٣

س ← ٣ ⇒ هـ ← ٠

$\lim_{هـ \to 0} \frac{ظا٣هـ}{٧هـ} = \frac{٣}{٧}$

١٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{جا(٤س-٨)}{٥س-١٠} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{جا٤(س-٢)}{٥(س-٢)}$

هـ = س - ٢

س ← ٢ ⇒ هـ ← ٠

$\lim_{هـ \to 0} \frac{جا٤هـ}{٥هـ} = \frac{٤}{٥}$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

تحب المرأة أن يتذكر يوم ميلادها بشرط أن ينسى عمرها

١٦) $\lim_{س \to ١} \frac{ظا(س-١)}{س^٢-١} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{ظا(س-١)}{(س-١)(س+١)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{ظا(س-١)}{(س-١)} \times \lim_{س \to ١} \frac{١}{س+١}$

$= ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

١٧) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣-١}{ظا(س-١)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^٢+س+١)}{ظا(س-١)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س-١}{ظا(س-١)} \times \lim_{س \to ١} س^٢+س+١$

$= ١ \times ٣ = ٣$

١٨) $\lim_{س \to ١} \frac{ظا^٣(س-١)}{ظا^٢(س-١)}$

ص = س - ١

س ← ١ ⟹ ص ← ٠

$\lim_{ص \to ٠} \frac{ظا^٣ص}{ظا^٢ص} = \lim_{ص \to ٠} \frac{ظا^٢ص}{ظا^٢ص} \times \lim_{ص \to ٠} ظاص$

$= \lim_{ص \to ٠} \left(\frac{ظاص}{ظاص}\right)^٢ \times \lim_{ص \to ٠} ظاص = ١ \times ٠ = صفر$

١٩) $\lim_{س \to ٣} (٩-س^٢) ظتا(س-٣)$

الجواب = ٦

٢٠) $\lim_{س \to ٥} \frac{ظا(س^٢-٢٥)}{س-٥} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ٥} \frac{ظا(س^٢-٢٥)}{س^٢-٢٥} \div \frac{س-٥}{س^٢-٢٥}$ (القسمة على بارة)

$= \lim_{س \to ٥} \frac{١}{س-٥} \times \frac{(س-٥)(س+٥)}{(س+٥)} = ١٠$

٢١) $\lim_{س \to ١} \frac{ظا(س^٣-١)}{س-١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{ظا(س^٣-١)}{س^٣-١} \times \frac{س^٣-١}{س-١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^٢+س+١)}{(س-١)(س+١)} = ٣$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

المرأة تقلق على المستقبل حتى تحصل على زوج أما الرجل لا يقلق على المستقبل إلا بعد الزواج.

٢٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا(س^٣ + س^٢)}{(س^٢ - س)} = \frac{٠}{}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا(س^٣ + س^٢)}{س^٣ + س^٢} \times \frac{س^٣ + س^٢}{س^٢ - س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{\frac{س^٢ - س}{س^٣ + س^٢}} \times \lim_{س \to ٠} \frac{س^٣ + س^٢}{س^٢ - س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س - ١} \times \lim_{س \to ٠} \frac{س^٢(س + ١)}{س(س - ١)} = \frac{٠}{-١} = صفر$

٢٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا(جاس)}{س} = \frac{٠}{}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{ظا(جاس)}{جاس} \times \frac{جاس}{س} = ١$

٢٤) $\lim_{س \to ١} \frac{ظا(س - ١)}{س^٢ - ١}$

الجواب $= \frac{١}{٢}$

٢٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا(ظا٨س)}{٨س} = \frac{٠}{}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{جا(ظا٨س)}{ظا(٧س)} \times \frac{ظا(٧س)}{٨س}$

$= \frac{١}{\frac{٨}{٧}} = \frac{٧}{٨}$

ملاحظة :-
نلاحظ من خلال الأمثلة السابقة أنه
من شروط القسمة على النهاية أن
يكون ناتج البسط في النهاية = صفر
وناتج المقام في النهاية = ٠

٢٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{هاس + ظا٧س}{٣س} = \frac{٠}{}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{هاس}{٣س} + \lim_{س \to ٠} \frac{ظا٧س}{٣س}$

$= \frac{٥}{٣} + \frac{٧}{٣} = ٤$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

المرأة هي أكبر مربية للرجل. فهي تعلمه الفضائل الجميلة.. وأدب السلوك.. ورقة الشعور

٢٧) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ + ٥س}{ظا٧س - جا٢س} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س^٢}{س^٢} + \frac{٥س}{س^٢} \div \frac{ظا٧س}{س^٢} - \frac{جا٢س}{س^٢}$

$= \frac{٥}{٥} + \frac{٧}{٢} \div \frac{٢}{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥$

٢٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا٤س + جا٧س}{جا٣س} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{ظا٤س}{جا٣س} + \frac{جا٧س}{جا٣س}$

$= \frac{٤}{٣} + \frac{٧}{٣} = \frac{١١}{٣} = ٣$

٢٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢٤س}{٥س^٤}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا٤س}{٥س} \times \frac{جا٤س}{س} \times \frac{٤}{٥} \times ٤$

$= \frac{٤}{٥}$

٣٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ظا٣س}{جا٢س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س^٢}{جا٢س} + \frac{ظا٣س}{جا٢س}$

$= \frac{٢+٣}{٢} = \frac{٥}{٢}$

٣١) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا٢س}{٣س + ظا٢س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا٢س}{س}$

$\frac{٣س}{س} + \frac{ظا٢س}{س}$

$= \frac{٢}{٣+٢} = \frac{٢}{٥}$

٣٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{جاس + ظا٧س}{س^٣ + ٦جاس}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س} + \frac{ظا٧س}{س}$

$\frac{س^٣}{س} + \frac{٦جاس}{س}$

$= \frac{٨}{٠+٦} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$

٣٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{٥ظا٧س + جا^٢٣س}{جا٥س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٥ظا٧س}{جا٥س} + \frac{جا^٢٣س}{جا٥س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٥ظا٧س}{٥س} + \frac{جا٢٣س \times جا٢٣س}{٥س \times جا٥س}$

$= ٧ \times ٥ + \frac{٣}{٥} \times ٣ = ٧ + \frac{٩}{٥} = \frac{٤٤}{٥}$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

اتق الله حيثما كنت

٣٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{س + ظا أس}{٢س + ظا ٣س} = ٠$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{س}{س} + \frac{ظا أس}{س}}{\frac{٢س}{س} + \frac{ظا ٣س}{س}}$

$= \frac{١ + ١ \times ١}{٢ + ٣} = \frac{٢}{٥}$

الجواب = $\frac{٢}{٥}$

٣٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{س جا ٢س + ظا^٥ س}{٤ س^٢ + جا ٣س ظا ٢س}$

الجواب = $\frac{٢٧}{٥}$

٣٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا أس}{س جا ٢س} = ٠$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا أس}{جا ٢س} \times \frac{جا ٢س}{س}$

$= ١ \times ١ = ١$

٣٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{٣ س - ظا ٢س}{جتا^٥ ٣س - ١} = ٠$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣س \times ظا ٢س}{- جا^٥ ٣س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣س \times ظا ٢س}{- جا ٣س \times جا ٣س \times جا ٣س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣س \times ظا ٢س}{- جا ٣س \times جا ٣س \times جا ٣س}$

$= \frac{-٣}{٥} \times \frac{٢}{٥} = \frac{-٦}{٢٥}$ #

٣٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا أس - ١}{س^٢} = ٠$

$\lim_{س \to ٠} \frac{ظا^٢ س}{س^٢} = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{ظا س}{س}\right)^٢ = ١$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

اثنان يذهبان ضياعا: عقل بلا دين، ومال بلا بذل..

٣٩) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \tan س}{\cos 2س}$

الجواب = ١

٤٠) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan س}{\sin س}$

الجواب = -١

* الحل باستخدام القاعدة البديلة :-

٤١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan س}{\pi - 2س} = \frac{\infty}{\infty}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 س}{-2} = \frac{1}{-2}$

٤٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos س}{\pi - 2س} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin س}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

٤٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan س}{\pi - 2س}$

الجواب = -٢

٤٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{(٢ - س)}{\sin(\pi - س)}$

الجواب = $\frac{-1}{\pi}$

٤٥) $\lim_{س \to ١} \frac{س \sin(\pi - س)}{١ - س} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س \sin(\pi - س)}{١ - س}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sin(\pi - س)}{١ - س}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{-\sin(\pi - س)}{-1}$

$= \lim_{س \to ١} \sin(\pi - س) = \sin 0 = 0$

٤٦) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2س}{\cos^2 س - \sin^2 س}$

٤٧) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2(\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{2} - س)(\frac{\pi}{2} + س)}$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

أحسن القول ما وافق الحق

تابع حل ٤٥)

$$= \text{نهـا}_{\substack{ص \to 0 \\ -ص}} \frac{\text{جا}\, ٣ص}{} = -٣$$

٤٦) $$\text{نهـا}_{\substack{س \to \frac{\pi}{٢} \\ \frac{\pi}{٢} - س}} \frac{\text{جتا}\, س}{} = ٠$$

$$= \text{نهـا}_{\substack{س \to \frac{\pi}{٢} \\ \frac{\pi}{٢} - س}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{}$$

ص = $\frac{\pi}{٢} - س$

س ← $\frac{\pi}{٢}$ ، ص ← ٠

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{جا}\, ص}{-ص} = -١$$

٤٧) $$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٤} س\right)}{س^٢ - ٤} = ٠$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٤} س\right)}{(س - ٢)(س + ٢)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٤}(س - ٢)\right)}{(س - ٢)(س + ٢)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٤}(س - ٢)\right)}{(س - ٢)} \times \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{١}{(س + ٢)}$$

٤٨) $$\text{نهـا}_{\substack{س \to \frac{\pi}{٤} \\ \frac{\pi}{٤} - س}} \frac{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٤} + س\right)}{}$$

الجواب = ١

٤٩) $$\text{نهـا}_{س \to \pi} \frac{\text{ظا}^٢ س}{\pi^٢ - س^٢} = ٠$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \pi} \frac{-\text{ظا}^٢(\pi - س)}{\pi^٢ - س^٢}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \pi} \frac{-\text{ظا}^٢(\pi - س)}{(\pi - س)\, ٣}$$

ص = $\pi - س$

س ← π ، ص ← ٠

$$= \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{-\text{ظا}^٢ ص}{٣ ص} = \frac{٠}{٣}$$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

إذا قدرت على عدوك، فاجعل العفو عنه شكرا للقدرة عليه.

٥) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{ظا(\frac{\pi}{2} - س)}{\pi - 2س} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{ظا(\frac{\pi}{2} - س)}{2(\frac{\pi}{2} - س)}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2} ظا(\frac{\pi}{2} - س)}{\frac{\pi}{2} - س}$

ص = $\frac{\pi}{2} - س$

س $\to \frac{\pi}{2}$ ص $\to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\frac{1}{2} ظا ص}{ص} = \frac{1}{2}$

١) $\lim_{س \to 0} \frac{حا(\pi حتاس)}{س^2}$ =

الجواب = $\frac{\pi^2}{2}$

٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - حتا^2 س}{(\pi - 2س)^2} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{حا^2 س}{(\pi - 2س)^2}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{حاس}{\pi - 2س}\right)^2$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{حا(\frac{\pi}{2} - س)}{\pi - 2س}\right)^2$

ص = $\frac{\pi}{2} - س$

س $\to \frac{\pi}{2}$ ص $\to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \left(\frac{حاص}{2ص}\right)^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{حا^2 س - حتا^2 س}{حاس - حتاس} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{(حاس - حتاس)(حاس + حتاس)}{(حاس - حتاس)}$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$

٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{حتا 2س}{حاس - حتاس} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{حتا^2 س - حا^2 س}{حاس - حتاس}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{(حتاس - حاس)(حتاس + حاس)}{(حاس - حتاس)}$

$= \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

القناعة عدسة إن لبست رأيت الحياة جميلة.

٥٥) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{ظا^2 س}{ظاس + 1} = 0$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{ظا^2 س - 1}{ظاس + 1}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{(ظاس - 1)(ظاس + 1)}{(ظاس - 1)} = -2$

٥٦) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{2ظاس - 1}{4(1 - ظا^2 س) - 3}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{2ظاس - 1}{4(1 - ظا^2 س) - 3}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{2ظاس - 1}{4 - 4ظا^2 س - 3}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{2ظاس - 1}{1 - 4ظا^2 س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{2ظاس - 1}{(1 - 2ظاس)(1 + 2ظاس)} = -\frac{1}{2}$

* حالات الضرب بالعامل المرافق :-

١) الحالة العامة :-

٥٧) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - جتاس}{س} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - جتاس}{س} \times \frac{1 + جتاس}{1 + جتاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا^2 س}{س(1 + جتاس)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^2 س}{س(1 + جتاس)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{1 + جتاس}$

$= 1 \times 0 = صفر$

٥٨) $\lim_{س \to 0} \frac{جتاس - 1}{س^2} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جتاس - 1}{س^2} \times \lim_{س \to 0} \frac{جتاس + 1}{جتاس + 1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جتا^2 س - 1}{س^2(جتاس + 1)} = \lim_{س \to 0} \frac{-جا^2 س}{س^2(جتاس + 1)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-جاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{جتاس + 1}$

$= -1 \times 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

أضعف الناس من ضعف عن كتمان سره.

* حاد حلة *

$\text{حتا}^2 س - 1 = -\text{حا}^2 س$

$* \lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}^2 س}{\text{قا} س - 1} = 0$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}^2 س}{\text{قا} س - 1} \times \frac{\text{قا} س + 1}{\text{قا} س + 1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س (\text{قا} س + 1)}{\text{قا}^2 س - 1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س (\text{قا} س + 1)}{\text{ظا}^2 س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{\text{ظا} س} \times \frac{\text{جا} س}{\text{ظا} س}$

$= 1 \times 1 \times 2 = 2$

$* \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا} س - \text{جا} س}{\text{جا} س \text{ظا} س} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{قتا} س}{\text{جا} س \text{ظا} س} \times \frac{1 + \text{قتا} س}{1 + \text{قتا} س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{قتا}^2 س}{\text{جا} س \text{ظا} س (1 + \text{قتا} س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-\text{ظا}^2 س}{\text{جا} س \text{ظا} س (1 + \text{قتا} س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا} س}{\text{جا} س} \times \frac{-\text{ظا} س}{1 + \text{قتا} س} \times \frac{1}{\text{ظا} س}$

$= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$* \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{حتا} 6س}{\text{حتا} 8س - 1} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{حتا} 6س}{\text{حتا} 8س - 1} \times \frac{1 + \text{حتا} 6س}{1 + \text{حتا} 6س} \times \frac{\text{حتا} 8س + 1}{\text{حتا} 8س + 1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{حتا}^2 6س}{\text{حتا}^2 8س - 1} \times \frac{\text{حتا} 8س + 1}{1 + \text{حتا} 6س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 6س}{-\text{جا}^2 8س} \times \frac{6}{8}$

$= -\frac{6}{8} \times \frac{6}{8} \times 1 = -\frac{9}{16}$

$* \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{حتا} 5س}{\text{قا} 3س - 1} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{حتا} 5س}{\text{قا} 3س - 1} \times \frac{1 + \text{حتا} 5س}{1 + \text{حتا} 5س} \times \frac{\text{قا} 3س + 1}{\text{قا} 3س + 1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{حتا}^2 5س}{\text{قا}^2 3س - 1} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 5س}{\text{ظا}^2 3س} = \frac{25}{9}$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

اطردوا واردات الهموم بعزائم الصبر.

٦) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2}\,جاس}{1 - \sqrt{2}\,ظاس} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2}\,جاس}{1 - \sqrt{2}\,ظاس} \times \frac{1 + \sqrt{2}\,جاس}{1 + \sqrt{2}\,جاس} \times \frac{1 + \sqrt{2}\,ظاس}{1 + \sqrt{2}\,ظاس}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2جا^2س}{1 - 2ظا^2س} \times \frac{1 + \sqrt{2}\,ظاس}{1 + \sqrt{2}\,جاس}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتا2س}{-جتا2س} \times \frac{2}{2}$

$= -1 \times 1 = -1$

---

* الحالة الثانية :- (مراعاة الجبر)

٣٦) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \sqrt{جتاس}}{س^2} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - جتاس}{س^2} \times \frac{1 + \sqrt{جتاس}}{1 + \sqrt{جتاس}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - جتاس}{س^2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1 + جتاس}{1 + \sqrt{جتاس}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا^2س}{س^2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^2س}{س^2} \times \frac{1}{4}$

$= \left(\lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

٣٧) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{1 + جاس} - جتاس}{س} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{1 + جاس} - جتاس}{س} \times \frac{\sqrt{1 + جاس} + جتاس}{\sqrt{1 + جاس} + جتاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 + جاس - جتا^2س}{س} \times \frac{1}{\sqrt{1 + جاس} + جتاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جاس + جا^2س}{س} \times \frac{1}{2}$

$= \lim_{س \to 0} \left(\frac{جاس}{س} + \frac{جاس}{س} \times جاس\right) \times \frac{1}{2}$

$= (1 + 1 \times 0) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

---

* الحالة الثالثة :- (مراعاة أصل الجبر)

٣٤) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{1 - جتا2س}}{\sqrt{2}\,س} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{1 - جتا2س}}{س\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{1 + جتا2س}}{\sqrt{1 + جتا2س}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{1 - جتا^2 2س}}{\sqrt{2}\,س \times \sqrt{1 + جتا2س}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{جا^2 2س}}{\sqrt{2}\,س} = \lim_{س \to 0} \frac{|جا2س|}{\sqrt{2}\,س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا2س}{\sqrt{2}\,س} = 1$

∴ بالتعويض

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

أعقل الناس أعذرهم للناس.

← تابع حل ٦٤)

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{-\text{جا}^2 س}{س^2} = -1$$

∴ النهاية غير موجودة

٦٥) $$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{\text{ظا}^2 \text{ظتا} س}{\text{جا} س}$$

الجواب (غير موجودة)

٦٦) $$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جتا} س - \text{جتا}^3 س}{س \text{ ظا}^2 س} = \frac{0}{0}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{-\text{جا}^2 س (\text{جتا}^2 س + \text{جتا} س + 1)}{س \text{ ظا}^2 س}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{-\text{جا}^2 س}{س^2} \times \frac{\text{جتا}^2 س + \text{جتا} س + 1}{1}$$

$$= -1 \times 3 = -3$$

٦٧) $$\text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا} س - \text{جتا} \frac{\pi}{4}}{س - \frac{\pi}{4}} = \frac{0}{0}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{4}} \frac{-2 \text{جا}(س - \frac{\pi}{4}) \times \text{جا}(س + \frac{\pi}{4})}{س - \frac{\pi}{4}}$$

$$ص = س - \frac{\pi}{4}$$

$$س = ص + \frac{\pi}{4} \quad ، \quad ص \to 0$$

$$= \text{نهـا}_{ص\to 0} \frac{-\text{جا} ص}{ص} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

٦٨) $$\text{نهـا}_{س\to 2} \frac{\text{جا} س - \text{جا} 2}{س - 2} = \frac{0}{0}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to 2} \frac{2 \text{جا} \frac{س-2}{2} \times \text{جتا} \frac{س+2}{2}}{س - 2}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to 2} \frac{\text{جا} \frac{1}{2}(س-2)}{(س-2)} \times \text{جتا} 2$$

$$ص = س - 2$$

$$س \to 2 \quad ، \quad ص \to 0$$

$$= \text{نهـا}_{ص\to 0} \frac{\text{جا} \frac{1}{2} ص}{ص} \times \text{جتا} 2 = \frac{1}{2} \times \text{جتا} 2$$

$$= \text{جتا} 2 \quad \#$$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

أقوى الناس من قوي على غضبه.

٦٩) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{حا^٢(س-٢) - حا^٢ ٢}$

الجواب = $\frac{١}{٤ حتا^٢ ٢}$

٧٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٣س - ظا س)^٢}{حتا ٥س - ١}$

٧١) $\lim_{س \to ٠} \frac{(ظا س - س)^٢}{(١ - حتا ٢س)}$

الجواب = صفر

٧٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{حا ٨س}{س^٢ - ٣س}$

الجواب = $-\frac{٨}{٣}$

٧٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{حا ٣س (\sqrt{س+٤} - ٢)}{س^٢}$

الجواب = $\frac{٣}{٤}$

٧٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{حا س - حتا س}{س - \frac{\pi}{٤}}$

الجواب = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$

٧٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{حتا ٣س - ١}{\sqrt{٣} س}$

الجواب = صفر

٧٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{حا^٢ ٥س}$

الجواب = $\frac{١}{٥}$

٧٧) $\lim_{س \to ١} \frac{حتا(٢\pi س) - س}{س^٢ - ١}$

الجواب = $-\frac{١}{٢}$

٧٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ - (٢حتا^٢ ٣س - حتا ٤س + حتا ٦س)}{حا ٢س ظا ٣س}$

٧٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{٩س^٢ - ٦س ظا ٣س + ظا^٢ ٣س}{حتا ٥س - ١} \times \frac{حتا ٥س + ١}{حتا ٥س + ١}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٩س^٢ - ٦س ظا ٣س + ظا^٢ ٣س}{- حا^٢ ٥س} \times ٢$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٨١س^٢ - ٣٦س ظا ٣س + ٤ ظا^٢ ٣س}{- حا^٢ ٣س} \times \frac{- حا^٢ ٥س}{- حا^٢ ٥س}$

$= -\frac{٨}{٢٥}$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

كن شامخا في التواضع. ومتواضعا في الشموخ.

٧٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا٣س - ٤جا٣س}{س^٣}$

الجواب = أ

٨٠) إذا كانت :-

$\lim_{س \to ٠} \frac{ظا٥س}{٣س + ٣ظا٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا٣س}{٣س} \times \frac{٣س}{٣س + ٣ظا٢س} = ٢$

أوجد قيمة أ، ب، ١٢

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا٣س}{٣س} \times \frac{٣س}{أ س + ب ظا٢س} = ٢$

$\therefore \frac{٣}{أ} = ٢ \Leftarrow أ = ١٢$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{ظا٥س}{س(١ + ٢ب)} = ٢$

$\frac{٥}{١ + ٢ب} = ٢$

$٥ = ٢ + ٤ب$

$٤ب = ٣$

$ب = \frac{٣}{٤} \Leftarrow$

الأستاذ : محمد العبداللات
الفرع العلمي و الصناعي

الجديد في الرياضيات
٠٧٩٩٢٠٣٦٥٤

فرجينا شطارتك

ورقة العمل (٣) في النهايات ، الاتصال

* نهاية الاقترانات الدائرية .

١) $\lim_{س \to 0} \frac{ظا٢س}{س^2 - ٤س}$ (ج : $\frac{١}{٢}$)

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{ما٢س}{س^2 + ظا٣س}$ (ج : $\frac{٢}{٥}$)

٣) $\lim_{س \to 0} \frac{س \, ما٣س - ظا٢س}{ما٣س - ٥س}$ (ج : ١)

٤) $\lim_{س \to 0} \frac{٤س^2 - ما٩س}{٩س - ظا٤س} = \frac{١}{٤}$

عين قيمة الثابت م ؟!

(ج : م = $\frac{٤}{٥}$)

٥) $\lim_{س \to 0} \frac{٢س^2 + ٣س ظا٢س}{جا^2 س}$ (ج : ٤)

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{٣ ظتا٢س قتا٢س}{س}$ (ج : $\frac{١}{٣}$)

٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{ما(س^2 - ٤)}{ظا(س^3 - ٨)}$ (ج : $\frac{١}{٣}$)

٨) $\lim_{س \to ١} \frac{ما(باس - ١)}{س - ١}$ (ج : $\frac{١}{٢}$)

٩) $\lim_{س \to +٠} \frac{جا^2 ٣س}{س}$ (ج : ٣)

١٠) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا٢س}{س ما٢س}$ (ج : ١)

١١) $\lim_{س \to 0} \frac{جتا٣س - جتاس}{س^2}$ (ج : -٤)

١٢) $\lim_{س \to م} \frac{ما٢س - ما٢م}{س - م}$ (ج = ٢ جتا٢م)

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

فرجينا شطارتك

١٣) $\lim_{س \to 1^+} \frac{\text{حا}^2 \pi س}{س^2 - 1}$

(ج : $-\frac{\pi}{2}$)

١٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}^+} (\pi - 2س) \text{ظا} س$

(ج : ٢)

١٥) $\lim_{س \to 0^+} \frac{\text{ظتا}(\frac{\pi}{2} - 3س)}{\text{ظا}(\pi - 5س)}$

(ج : $-\frac{3}{5}$)

١٦) $\lim_{س \to 1^+} \frac{\text{حا}^2 \pi س}{س^2 - 2س + 1}$

(ج = π^2)

١٧) $\lim_{س \to 0^+} \frac{\sqrt{5س + 4} - 2}{\text{حا}^2 س}$

(ج = $\frac{5}{8}$)

١٨) $\lim_{س \to 0^+} \frac{س^2}{\sqrt{1 + \text{حتا}^2 س} - 1}$

(ج = -6)

١٩) $\lim_{س \to 0^+} \frac{(\text{حا}3س + 2س)^2}{1 - \text{حتا}^2 3س}$

(ج = ٢)

٢٠) $\lim_{س \to 0^+} \frac{\text{حا}(1 - \text{حتا}س)}{س^2}$

(ج = $\frac{1}{2}$)

٢١) $\lim_{س \to 0^+} \frac{1 - \text{حتا}(\text{ظا}س)}{\text{ظا}^2 س}$

(ج = $\frac{1}{2}$)

٢٢) $\lim_{س \to 0^+} \frac{\text{ظا}^2 2س - 1}{س^2}$

(ج = ٢)

٢٣) $\lim_{س \to 0^+} \frac{1 - \text{حتا}س}{س}$

(ج = غير موجود)

٢٤) $\lim_{س \to 0^-} \frac{\sqrt{\text{قا}س} - 1}{س}$

ج = $\frac{1}{2}$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

فرجينا شطارتك

٢٥) $\lim_{س \to 0} \left(\frac{٢}{\text{جا}س \text{ جتا}^{٢}س} - \frac{١}{\text{جا}^{٢}س} \right)$

(ج = $\frac{١}{٢}$)

٢٦) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - \text{ظا}س}{\text{جتا} ٢س}$

(ج = ١)

٢٧) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{٤ \text{ جتا}س - ١}{١ - \text{ظا}^{٢}س}$

(ج = $\frac{١}{٤}$)

٢٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{٤ - ٤ \text{ جتا}^{٣}س}{س \text{ جا}٣س}$

(ج = ٢)

٢٩) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا}٣س}{س - \frac{\pi}{٢}}$

(ج = ٣)

٣٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جا}٢س - \text{جتا}^{٢}س}{٤ س}$

ج = $\frac{-١}{٢}$

٣١) $\lim_{س \to ٠} \frac{٣ \text{جتا}س - \text{جتا}٢س - ٢}{س^{٢}}$

(ج = $\frac{١}{٢}$)

٣٢) $\lim_{س \to ١} \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{٢}س - س}{س - ١}$

(ج = -١)

٣٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جا}س + \text{جتا}٢س}{\text{جتا}^{٢}س}$

(ج = $\frac{٣}{٢}$)

٣٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا}س \text{ جتا}٣س - ١}{س^{٢}}$

(ج = -٥)

٣٥) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - \text{جا}٢س}{\text{جتا}س - \text{جا}س}$

(ج = صفر)

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

فرجينا شطارتك

٣٦) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}^2 س}{1 + \text{جتا}^3 س}$

$(ج = \frac{2}{3})$

٣٧) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا} س}{(\pi - 2س)^2}$

$(ج = \frac{1}{8})$

٣٨) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \text{جتا} 2س}{1 - \text{جا} س}$

$(ج = 4)$

٣٩) $\lim_{س \to 2} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{4} س}{س + 2}$

$(ج = \frac{\sqrt{2}}{4})$

٤٠) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} |س|}{س}$

$(ج = \text{غير موجودة})$

٤١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\frac{1}{2} - \text{جا} س}{س - \frac{\pi}{6}}$

$ج = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

٤٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \text{جتا} 2س}}{\pi - 2س}$

$(ج = \frac{-\sqrt{2}}{2})$

٤٣) $\lim_{س \to 1} \frac{\text{جا} \frac{\pi}{2} س}{1 - س}$

$(ج = \pi)$

٤٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}^2 3س - \text{جا}^2 س}{س - \frac{\pi}{4}}$

$(ج = -4)$

٤٥) $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - \text{جا} \frac{1}{2} س}{1 + \text{جتا} س}$

$(ج = \frac{1}{4})$

٤٦) $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{\text{جا} س - \sqrt{3} \text{جتا} س}{1 - 2 \text{جتا} س}$

$(ج = \frac{2}{\sqrt{3}})$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

أقوى نوع

قال أن المرأة ليس لها رأي.. المرأة لها كل يوم رأي جديد

٤٧) نهـا $\frac{١ - ٢ \text{ جتا } س}{س^{٣} - ٣ س}$ ← $\frac{٣\pi}{٣}$

$\left(ج = \frac{١}{٣٧} \right)$

٤٨) نهـا $\frac{٣ \text{ جا } س - \text{ جا } ٣س}{س^{٣}}$ ← ٠

$(ج = ٤)$

٤٩) إذا كانت

نهـا $\frac{أ - \text{ جتا } ٢ب}{س^{٢}} = ١٨$ ← ٠

فما قيمة أ، ب حيث ب ≠ ٠

$\left(ج : \begin{matrix} أ = ١ \\ ب = ٣ \end{matrix} \right)$

٥٠) إذا كانت

نهـا $\frac{١ - \text{ جتا } س}{س^{ن}}$ ← ٠ من جـ وجة

فجد قيمة ن حيث ن ∈ ط+

ج : ن = ٢

$(ن = ٢٤١)$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

لا تصدّق إلّا قلبك لكن لا تقم بإطاعته

* الاتصال عند نقطة :-

تعريف :

يكون الاقتران متصلاً عند $س = أ$ إذا

حقق الشروط التالية :-

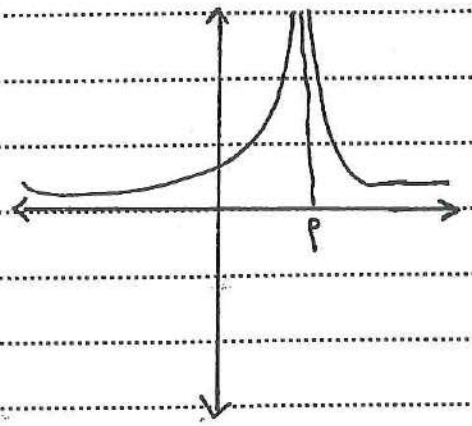
١) الاقتران $هـ$ معرف عند $س = أ$

٢) $\lim_{س \to أ} هـ(س)$ موجودة

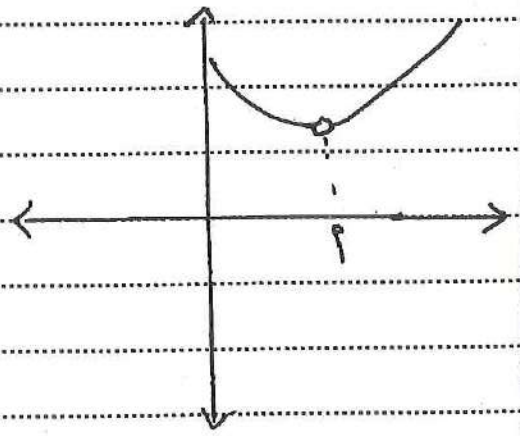
٣) $هـ(أ) = \lim_{س \to أ} هـ(س)$

* أي إذا كان منحنى الاقتران $هـ(س)$ ليس فيه قفزة أو انقطاع عند $س = أ$ فإنه متصل عند $س = أ$

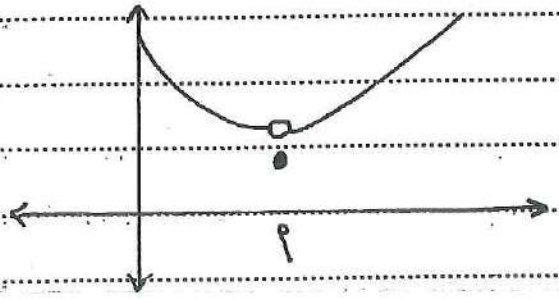
الأشكال التالية توضح حالات عدم الاتصال لمنحنى $هـ(س)$ عند $س = أ$



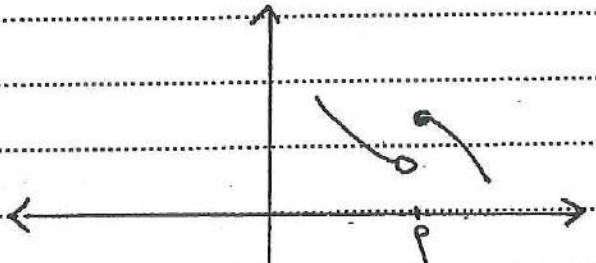
$\lim_{س \to أ} هـ(س) = \infty$



$هـ(أ)$ غير معرفة



$\lim_{س \to أ} هـ(س) \neq هـ(أ)$



$\lim_{س \to أ} هـ(س)$ غير موجودة

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

راقِبْ أفكارَكَ لأنّها سوف تُصبحُ أفعالاً

ملاحظة :-

بعض نظريات الحد الأعلى (أو) جبر النهايات

١) كثيرات الحدود

٢) القيمة المطلقة

٣) جا س ، جتا س

٤) الجذور الفردية

٥) نظريات النسبة عند الصفر

المقام

الإستثناء :-

١) $\text{هـ}(س) = \frac{س^٤ + ١}{س + ٤}$ ، $س \neq -٤$

ابحث في الاتصال عند $س = ١$ ؟

$\text{هـ}(١) = \frac{٢}{٥}$

$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{س^٢ + ١}{س + ٤} = \frac{٢}{٥}$

$\text{هـ}(١) = \text{نهـا}_{س \to ١} \text{هـ}(س)$

$\therefore$ متصل عند $س = ١$

٢) $\text{هـ}(س) = \frac{س^٢ + ٣س}{س - ٢}$ ، $س \neq ٢$

ابحث في الاتصال عند $س = ٢$ ؟

$\text{هـ}(٢) =$ ـ غير معرف

$\therefore$ هـ(س) غير متصل عند $س = ٢$

٣) إذا كان :

$\text{هـ}(س) = \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$ ، $س \neq ٢$

ابحث في اتصال هـ(س) عند $س = ٢$ ؟

$\text{نهـا}_{س \to ٢} \text{هـ}(س) = \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$

$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س - ٢)}$

$= ١٢$

$\text{هـ}(٢) = ٢ \neq \text{نهـا}_{س \to ٢} \text{هـ}(س) = \frac{٠}{٠}$

هـ(س) غير معرفة عند $س = ٢$

$\therefore$ هـ(س) غير متصل عند $س = ٢$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

وراقِبْ طِباعَكَ لأنّها سوف تُحدِّدُ مصيرَك

ج) إذا كانت :

$$م(س) = \frac{س^2 - 3}{س + 2}$$

ابحث في الاتصال

م(س) عند س = 2 ؟!

الحل :-

جذر البسط = ٢

جذر المقام = ٢

	−	+	+
−			
	−	+	+

م(٢) = صفر

نهـا م(س) غير موجودة
س→٢+

نهـا م(س) = صفر
س→٢-

∴ نهـا م(س) غير موجودة
س→٢

∴ م(س) غير متصل عند س = ٢

د) إذا كانت :

$$م(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - 4}{س - 2} & ، س \neq 2 \\ 7س & ، س = 2 \end{cases}$$

ابحث في اتصال م(س) عند س = ٢ ؟!

م(٢) = ١٤

نهـا $\frac{س^2 - 4}{س - 2}$ = ٠
س→٢+

نهـا $\frac{(س - 2)(س + 2)}{(س - 2)}$ = ٤
س→٢+

نهـا س^٢ = ٤
س→٢-

∴ النهاية موجودة لكنه غير متصل

∵ م(٢) ≠ نهـا م(س)
س→٢

و) $م(س) = \begin{cases} 4س - 1 & ، س \neq 2 \\ 3س^2 - 5 & ، س = 2 \end{cases}$

ابحث في اتصال م(س) عند س = ٠ ؟!

نهـا ٣س^٢ - ٥ = -٥
س→٠

م(٠) = -٥ ∴ متصل عند س = ٠

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

المرأة تكتب وعودها على صفحات من الماء

٧) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & , x \neq 1 \\ 6 & , x = 1 \end{cases}$

ابحث في اتصال $f(x)$ عند $x = 1$ ؟!

$f(1) = 6$

$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = 3$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

$\therefore f(x)$ غير متصل عند $x = 1$

٨) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & , x \neq 1 \\ 3 & , x = 1 \end{cases}$

ابحث في اتصال $f(x)$ عند $x = 1$ ؟!

$f(1) = 3$

$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} \times \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\therefore f(x)$ غير متصل عند $x = 1$

٩) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x-1|} & , x \neq 1 \\ -1 & , x = 1 \end{cases}$

ابحث في اتصال $f(x)$ عند $x = 1$ ؟!

$x = 1 \rightarrow$ صفر $\leftarrow x < 1$

$\frac{x}{|x-1|}$: − − − ، + + +

$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & , x < 1 \\ -1 & , x = 1 \\ \frac{x}{x-1} & , x > 1 \end{cases}$

يتبع

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

المرأة تدرك في دقيقة.. ما لا يدركه الرجل في حياته كلها

تابع حل ٩)

$\lim_{س \to 1^+} ق(س) = 1$ ، $ق(1) = -1$

$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = -1$

$\lim_{س \to 1} ق(س)$ غير موجودة

∴ غير متصل عند $س = 1$

ب) $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - 3س}{س - 1} & ، س \neq 0 \\ -3 & ، س = 0 \end{cases}$

ابحث في اتصال $ق(س)$ عند $س = 0$ ؟!

$س = 0$

$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - 3س}{س} & ، س > 0 \\ \frac{س^2 - 3س}{-س} & ، س < 0 \\ -3 & ، س = 0 \end{cases}$

$ق(0) = -3$

$\lim_{س \to 0} \frac{س^2 - 3س}{س} = \lim_{س \to 0^+} س(س - 3) = -3$

$\lim_{س \to 0^-} \frac{س^2 - 3س}{-س} = \lim_{س \to 0^-} -(س - 3) = -3$

$\lim_{س \to 0} ق(س) = -3$

$\lim_{س \to 0} ق(س) = ق(0)$

∴ متصل عند $س = 0$

$\lim_{س \to 0^+} \frac{س^2 - 3س}{س} = \lim_{س \to 0^+} (س - 3) = -3$

$\lim_{س \to 0^-} \frac{س^2 - 3س}{-س} = \lim_{س \to 0^-} -(س - 3) = 3$

$\lim_{س \to 0^+} ق(س) \neq \lim_{س \to 0^-} ق(س)$

∴ غير متصل عند $س = 0$

ابحث في اتصال :-

$ق(س) = \begin{cases} س^2 - 2س + 3 & ، 0 \leq س < 1 \\ [س + 1] & ، 1 \leq س < 3 \end{cases}$

عند $س = 1$ ؟!

$\lim_{س \to 1^+} [س + 1] = 2$

$\lim_{س \to 1^-} (س^2 - 2س + 3) = 2$

$\lim_{س \to 1} ق(س) = 2$

$ق(1) = 2$

$\lim_{س \to 1} ق(س) = ق(1)$

∴ متصل عند $س = 1$

طول الدرجة $= \frac{1}{|\text{عامل } س|} = \frac{1}{1} = 1$

$ق(س) = \begin{cases} س^2 - 2س + 3 & ، 0 \leq س < 1 \\ 2 & ، 1 \leq س < 2 \\ 3 & ، 2 \leq س < 3 \end{cases}$

$ق(1) = 2$

$\lim_{س \to 1^+} ق(س) = 2$ ، $\lim_{س \to 1^-} ق(س) = 1^2 - 2(1) + 3 = 2$

$\lim_{س \to 1} ق(س) = 2$

∴ $\lim_{س \to 1} ق(س) = 2$

∴ متصل عند $س = 1$

$\lim_{س \to 0^+} \frac{س^2 - 3س}{س} = \lim_{س \to 0^+} (س - 3) = -3$

$\lim_{س \to 0^-} \frac{س^2 - 3س}{-س} = \lim_{س \to 0^-} -(س - 3) = 3$

$\lim_{س \to 0^+} ق(س) \neq \lim_{س \to 0^-} ق(س)$

∴ غير متصل عند $س = 0$

$\lim_{س \to 1^+} ق(س) = \lim_{س \to 1^+} [س + 1] = 2$

$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = \lim_{س \to 1^-} (س^2 - 2س + 3) = 2$

$\lim_{س \to 1} ق(س) = 2$

$ق(1) = 2$

$\lim_{س \to 1} ق(س) = ق(1)$

∴ متصل عند $س = 1$

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

كل عقل الرجل لا يساوي عاطفة من عواطف المرأة.

١) ابحث في اتصال :-

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{1+x} & , x=-2 \text{ أو } x>-1 \\ x[x]+1 & , -1\le x\le 1\end{cases}$$

عند $x=-1$ ؟

الحل :-

$x=0$ طول الدرجة $=1$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{1+x} & , x=-2 \text{ أو } x>-1 \\ -x+1 & , -1<x<0 \\ 1 & , 0\le x<1\end{cases}$$

$f(-2)=2$

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=2$

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\frac{1-1}{1+1}=0$

$\lim_{x\to -1^+} \neq \lim_{x\to -1^-}$

$\lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(1+x)}=-2$

$\therefore \lim_{x\to -1} f(x)$ غير موجودة

$\therefore f(x)$ غير متصل عند $x=-1$

٢) إذا كان :-

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x^2-1|}{x} & , x\neq 0 \\ 2\beta+3 & , x=0\end{cases}$$

ابحث في اتصال $f(x)$ عند $x=0$

الجواب ⇐ متصل عند $x=0$

٣) إذا كان :-

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{3-x} & , x<3 \\ (3-x^2) & , x\ge 3\end{cases}$$

ابحث في اتصال $f(x)$ عند

$x=3$ ؟

الجواب ⇐

متصل عند $x=3$ ؟

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

الغرور يدمر النساء أكثر مما يدمرهن الحب

هـ) ابحث في اتصال د(س) عند س = ٢

د(س) = (س - ٢) [½ س + ٣] عند س = ٢

الحل :-

½ س + ٣ = ٠ ⟵ س = -٦

ل = ½ ، ك = ٢

∴ د(س) = { ٣(س - ٢)³ ، س ≤ ٢
{ ٤(س - ٢)³ ، ٢ < س < ٤

د(٢) = ٤(٢ - ٢)³ = صفر

نهـا د(س) = ٤(٢ - ٢)³ = صفر
س ← ٢+

نهـا د(س) = ٣(٢ - ٢)³ = صفر
س ← ٢-

نهـا د(س) = صفر
س ← ٢

∴ د(س) متصل عند س = ٢

و) إذا كان :-

د(س) = { ٢س + ٦ ، |س + ١| ≥ ٢
{ س² + ٢ ، |س + ١| < ٢

ابحث في اتصال د(س) عند س = -٣ ، ١

|س + ١| ≥ ٢

-٢ ≥ س + ١ ≥ ٢

-٣ ≥ س ≥ ١

|س + ١| < ٢

-٢ < س + ١ < ٢

-٣ < س < ١

∴ د(س) = { ٢س + ٦ ، -٣ ≤ س ≤ ١
{ س² + ٢ ، س < -٣ ، س > ١

د(-٣) = صفر

نهـا د(س) = صفر
س ← -٣+

نهـا د(س) = ١١
س ← -٣-

∴ نهـا د(س) غير موجودة
س ← -٣

∴ د(س) غير متصل عند س = -٣

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

صفحة رقم [ ]

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

اهتمام المرأة المبالغ بشكلها يجعلها تفقد مضمونها

١٧) إذا كان

$$م(س) = \begin{cases} أ س^2 + ٤ ب & س \le ١ \\ ٣ أ س + ١ & س = ١ \\ ٢ س + ٥ & س > ١ \end{cases}$$

متصل عند $س = ١$ ، جد $أ$ ، $ب$

$\therefore$ نهـا $_{س \to ١^+}$ $م(س)$ = نهـا $_{س \to ١^-}$ $م(س)$

$أ + ب = ٣ أ + ١ = ٢ + ٥$

$أ + ب = ٧$ ⟸ $أ = ٦$

$١ + ٤ ب = ٧$ ⟸ $ب = \frac{٣}{٢}$

١٨) إذا كان :

$$م(س) = \begin{cases} أ س^3 - ب س + ١ & س < ١ \\ ٥ & س = ١ \\ س^2 - (أ + ب) س + ١ & س > ١ \end{cases}$$

جد قيمة $أ$ ، $ب$ التي تجعل $م(س)$ متصل

عند $س = ١$ ؟

$\therefore م(١) = ٥$

نهـا $_{س \to ١^+}$ $س^2 - (أ + ب) س + ٢ = ٥$

$١ - أ - ب + ٢ = ٥$

$-أ - ب = ٢$ ..... ①

نهـا $_{س \to ١^-}$ $أ س^3 - ب س + ١ = ٥$

$أ - ب = ٤$ ..... ②

① + ② $-٢ ب = ٦$ ⟸ $ب = -٣$

$-أ + ٣ = ٢$ ⟸ $أ = ١$

١٩) إذا كان

$$م(س) = \begin{cases} س^2 + أ س - ١ & س < ٢ \\ ٥ & س = ٢ \\ ب س + ٣ & س > ٢ \end{cases}$$

متصل عند $س = ٢$ ، فما قيمة $أ$ ، $ب$ ؟

$\therefore م(٢) = ٥$

نهـا $_{س \to ٢^-}$ $س^2 + أ س - ١ = ٥$

$٤ + ٢ أ - ١ = ٥$

$٢ أ = ٢$ ⟸ $أ = ١$

نهـا $_{س \to ٢^+}$ $ب س + ٣ = ٥$

$٢ ب + ٣ = ٥$

$٢ ب = ٢$ ⟸ $ب = ١$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

المرأة ترى في الرجل بطلا قبل الزواج وأسيرا بعد الزواج

ج) إذا كان :

$ق(س) = \begin{cases} أ س^2 + ب س + 12 & س < 2 \\ 3 ب & س = 2 \\ أ س^2 + ب س + 12 & س > 2 \end{cases}$

متصلاً عند $س = 2$ فما قيمة $أ$ ، $ب$ ؟

$ق(2) = 3ب$ ..... ①

$\lim_{س \to 2^+} (أ س^2 + ب س + 12) = 3ب$

$4أ + 2ب + 12 = 3ب$

$4أ + 12 = ب$

$4أ - ب = -12$ ..... ②

$\lim_{س \to 2^-} (أ س^2 + ب س) = 3ب$

$4أ + 2ب = 3ب$

$4أ - ب = صفر$ ..... ③

$4أ = -12$

$4أ - ب = 0$

$-8أ + 12 = 0$

$-6أ = -12$

$أ = 2$

$4 \times 2 - ب = -12$

$ب = 8$

#

د) ليكن $ق(س) = \begin{cases} [س] + أ & س < 2 \\ أ & س = 2 \\ [س] + أ & س > 2 \end{cases}$

حد قيمة $أ$ التي تجعل $ق(س)$ متصلاً عند $س = 2$ ؟

بما أن $ق(س)$ متصلاً عند $س = 2$

$\lim_{س \to 2^-} [س] + أ = \lim_{س \to 2^+} [س] + أ$

$1 + أ = 2 + أ$

$أ = أ$

هـ) إذا كان :

$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - (3 - 2ج)س - 6ج}{س - 3} & س \neq 3 \\ 11 & س = 3 \end{cases}$

متصلاً عند $س = 3$ فما قيمة $ج$ ؟

بما أن $ق(س)$ متصلاً عند $س = 3$

$ق(3) = \lim_{س \to 3} ق(س)$

$ق(3) = 11$

$\lim_{س \to 3} \frac{(س - 3)(س + 2ج)}{(س - 3)} = 11$

$\lim_{س \to 3} س + 2ج = 11$

$3 + 2ج = 11$

$\therefore ج = 4$

#

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

أغلب النساء تصفين لأزواجهن عندما يتحدثون أثناء النوم فقط

* نظريات خ. الاتصال :-

نظرية :-

إذا كان $\lim_{س \to أ} ق(س) = ل$ ، $\lim_{س \to أ} ك(س) = م$ حيث $ل, م \in ح$

١) $\lim_{س \to أ} [ق(س) + ك(س)] = ل + م$

٢) $\lim_{س \to أ} [ق(س) - ك(س)] = ل - م$

٣) $\lim_{س \to أ} [ق(س) \times ك(س)] = ل \times م$

٤) $\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{ك(س)} = \frac{ل}{م}$ ، حيث $م \neq$ صفر

* الإستنتاج :-

١) إذا كان $ق(س) = (س - ٢)^{٣}$

$هـ(س) = ٢س + ١$ ، $هـ$ متصل خ. الاتصال

$\lim_{س \to ٢} (ق \times هـ)(س)$ عند $س = ٢$

الحل :-

$ق(س)$ متصل $\forall$ $س \in$ كثير حدود

$هـ(س)$ متصل $\forall$ $س \in$ كثير حدود

$\lim_{س \to ٢} (ق \times هـ)(س)$ متصل عند $س = ٢$ حسب نظريات الاتصال

٢) $ق(س) = ٤س^{٢} + ١$

$هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢س & ، س < ١ \\ ٢س + ١ & ، س \geq ١ \end{cases}$

$ق + هـ$ متصل خ. الاتصال عند $س = ١$

الحل :-

$ق(س)$ متصل $\forall$ $س \in$ كثير حدود

$هـ(١) = ٣$

$\lim_{س \to ١^{+}} هـ(س) = \lim_{س \to ١^{+}} (٢س + ١) = ٣$

$\lim_{س \to ١^{-}} هـ(س) = \lim_{س \to ١^{-}} (س^{٢} + ٢س) = ٣$

$\lim_{س \to ١} هـ(س) = ٣$

$\therefore هـ(س)$ متصل عند $س = ١$

$\therefore (ق + هـ)(س)$ متصل عند $س = ١$

حسب نظريات الاتصال

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

قل للمرأة الخرساء سرا ستجدها تنطق.

٣) $\text{هـ}(س) = \begin{cases} \frac{س^3 + 1}{س + 2} & ، س < -2 \\ \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} س)}{س} & ، س \geq -2 \end{cases}$

$\text{هـ}(س)$ ابحث في الاتصال $(\text{و} + \text{هـ})(س)$ عند $س = -2$ ؟

$\text{و}(-2) = \frac{3}{2}$

$\text{نهـا}_{س \to -2^+} \frac{س^3 + 1}{س + 2} = \frac{0}{0}$

$\text{نهـا}_{س \to -2^+} \frac{(\frac{1}{2} س + 1)(\frac{1}{4} س^2 - \frac{1}{2} س + 1)}{س + 2}$

$\text{نهـا}_{س \to -2^+} \frac{1}{4}(س + 2)(\frac{1}{4} س^2 - \frac{1}{2} س + 1)$

$= \frac{1}{4} \times 3 \times 2 = \frac{3}{2}$

$\therefore \text{نهـا}_{س \to -2^+} \text{و}(س) = \frac{3}{2}$

$\therefore \text{نهـا}_{س \to -2} \text{و}(س) = \frac{3}{2}$

$\therefore \text{و}(س)$ متصل عند $س = -2$

$\text{هـ}(س)$ متصل عند $س = -2$

$(\text{و} + \text{هـ})(س)$ متصل عند $س = -2$

حسب نظريات الاتصال

٤) إذا كان $\text{و}(س) = (س - 2)^3$

$\text{هـ}(س) = [س + 1]$ ابحث في الاتصال

$(\text{و} \times \text{هـ})(س)$ عند $س = 2$

$\text{و}(س)$ متصل عند $س = 2$ لأنه كثير حدود

$\text{هـ}(س)$ غير متصل عند $س = 2$ لأن $س + 1 = 0 \Rightarrow س = -1$

$ل = \frac{1}{1} = 1$

$[س + 1] = \begin{cases} 2 & ، 1 \leq س < 2 \\ 3 & ، 2 \leq س < 3 \end{cases}$

$\text{هـ}(2) = 3$

$\text{نهـا}_{س \to 2^+} \text{هـ}(س) = 3$

$\text{نهـا}_{س \to 2^-} \text{هـ}(س) = 2$

$\therefore \text{نهـا}_{س \to 2} \text{هـ}(س)$ غير موجودة

$\therefore \text{هـ}(س)$ غير متصل عند $س = 2$

لا تكن كالذي كسر المنبه ؛ لأنه أيقظه

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

أكثر الناس كذبا من يكثر الحديث عن نفسه

* التنبيه :-

لا نستطيع الحكم على اتصال أو عدم اتصال (ف×هـ) عند س = ٢ باستخدام نظرية النهايات لذلك يجب إيجاد طريقة أخرى لتحديد الاتصال أو عدم الاتصال

نظرية : ل(س) = ف(س) × هـ(س)

ل(س) = { ٢س(س-٢)^٣ ، س ≤ ٢ ; ٣(س-٢)^٣ ، س > ٢ }

ل(س) = ٣(س-٢)^٣ = ٠

∴ نهـا ل(س) = صفر
س→٢+

∴ نهـا ل(س) = صفر
س→٢-

∴ نهـا ل(س) = صفر
س→٢

∴ ل(س) متصل عند س = ٢

(ف×هـ)(س) متصل عند س = ٢

هـ(س) = { ٤س+٣ ، س ≤ ١ ; س^٢+١ ، س > ١ }

ل(س) = { ٥س^٢-٣س+٤ ، س ≤ ١ ; س^٢+٢س+٢ ، س > ١ }

ل(١) = ١

نهـا ل(س) = ١ ، نهـا ل(س) = ١
س→١+ ، س→١-

∴ نهـا ل(س) = ١
س→١

∴ ل(س) متصل عند س = ١

(ف+هـ)(س) متصل عند س = ١

الوحدة الأولى : النهـــايـــات و الاتصال

التائب من الذنب كمن لا ذنب له