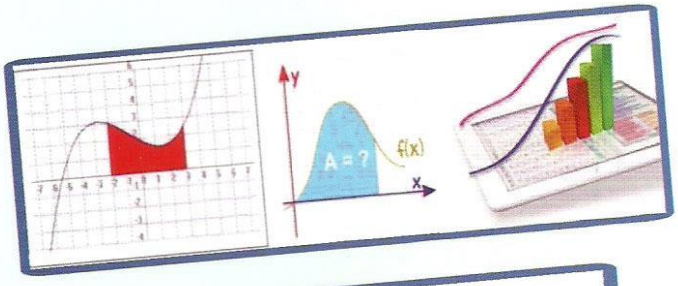
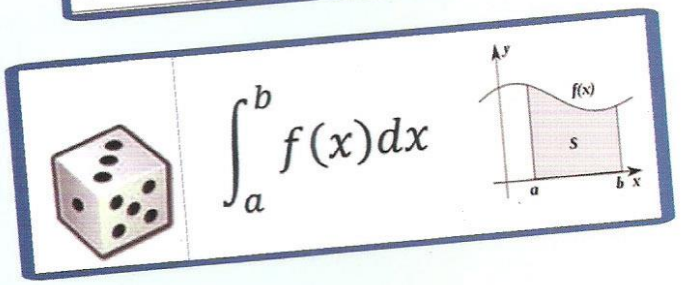
سلسلة المبدع
Al Mobde3

لؤي أبو لبده

المبدع في الرياضيات

مكتبة رم





إعداد المعلم
لؤي أبو لبده
٠٧٩٥٤٢١٣٣٥
٠٧٨٥٥٠٨٨٧٠

٠٧٩٥٤٢١٣٣٥
الأستاذ لؤي أبو لبده "رياضيات"

النهايات و الاتصال

النهايات ومفهومها

إذا كان لدينا الإقتران التالي ق(س) = س + ٥
أوجد قيمة ق(س) عندما تكون قيم س قريبة جداً من العدد ٤ (أعداد تزيد عن العدد ٤ ، بشيء بسيط
أعداد تقل عن العدد ٤ بشيء بسيط)

س	٤٫١	٤٫٠١	٤٫٠٠١	٤	٣٫٩٩	٣٫٩	٣٫٨
ق(س)	٩٫١	٩٫٠١	٩٫٠٠١	٩	٨٫٩٩	٨٫٩	٨٫٨

وبناء على ما ورد سابقاً ، نلاحظ أنه كلما إقتربنا من العدد ٤ إما من جهة اليمين أو من جهة اليسار ، إقتربت قيمة ق(س) من الناتج ٩ .

◉ وعليه $\lim_{س \to ٤^+}$ ق(س) ... تعني أنه إقتربنا من العدد ٤ من جهة اليمين " أعداد أكبر من " ٤ " بقليل "

◉ $\lim_{س \to ٤^-}$ ق(س) تعني إنّه إقتربنا من العدد " ٤ " من جهة اليسار ، أعداد أقل من " ٤ " بقليل .

◉ $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) ... تعني جميع الأعداد حول ٤
" أكبر بقليل و أصغر بقليل "
" س ≠ ٤ "

قاعدة

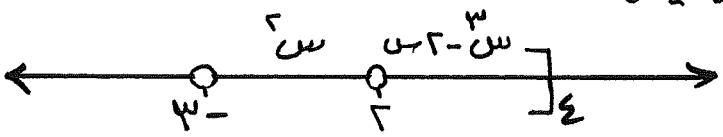
$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ل ⟹ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ل ∴

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) ⟹ ∴ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجودة

مثال إذا كانت لدينا ق(س)

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} س^{2} & ، \ -3 < س < 2 \\ س^{3} - 2س & ، \ 2 < س \leq 4 \end{cases}$$

فجد قيمة كل ما يلي :



① ق(٢) = غير معرفة

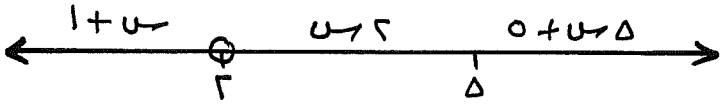
② $\lim_{س \to 2}$ ق(س) = ٤ لأن $\lim_{س \to 2^+}$ ه(س) = ٢^٣ - ٢×٢ = ٨ - ٤ = ٤ * $\lim_{س \to 2^-}$ ه(س) = ٢^٢ = ٤

③ $\lim_{س \to -3}$ ه(س) = غير موجودة ∵ نهاية الفتره دون مساواة"

④ $\lim_{س \to 4}$ ق(س) = ٥٦ ∵ ٤^٣ - ٢×٤ = ٦٤ - ٨ = ٥٦

مثال إذا كان لدينا ه(س)

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} س + 1 & ، \ س < 2 \\ 2س & ، \ 2 < س < 5 \\ 5س + 5 & ، \ س \geq 5 \end{cases}$$



فجد قيمة كل مما يلي :

◉ $\lim_{س \to 1}$ ه(س) = ٢

◉ $\lim_{س \to 3}$ ه(س) = ٦

◉ $\lim_{س \to 7}$ ه(س) = ٥×٧ + ٥ = ٤٠

◉ $\lim_{س \to 5^+}$ ه(س) = ٥×٥ + ٥ = ٣٠

◉ $\lim_{س \to 2}$ ه(س)

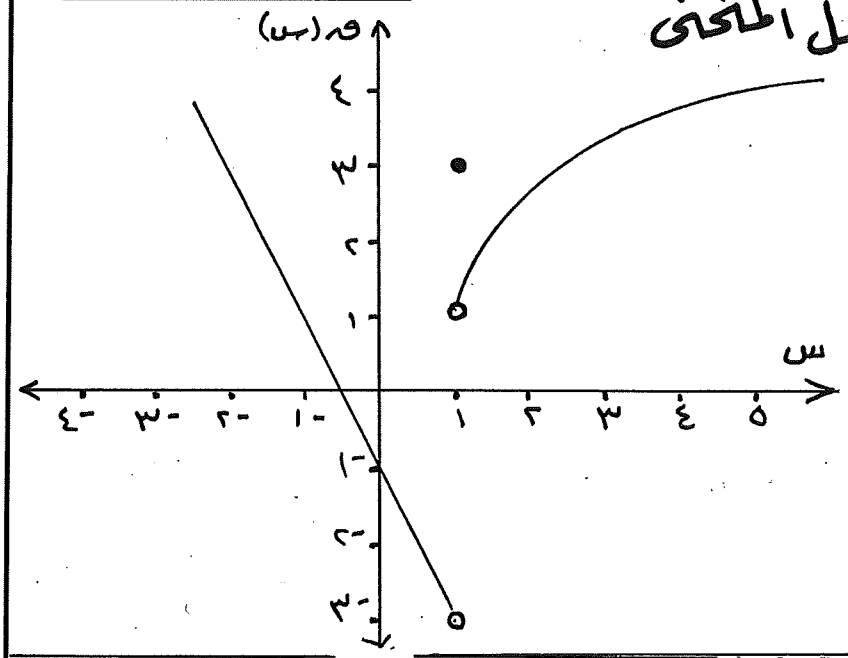
① $\lim_{س \to 2^+}$ ه(س) = ٢×٢ = ٤

② $\lim_{س \to 2^-}$ ه(س) = ٢ + ١ = ٣

⇐ $\lim_{س \to 2}$ ه(س) = غير موجودة

المبدع 0795421335 لؤي أبو لبده

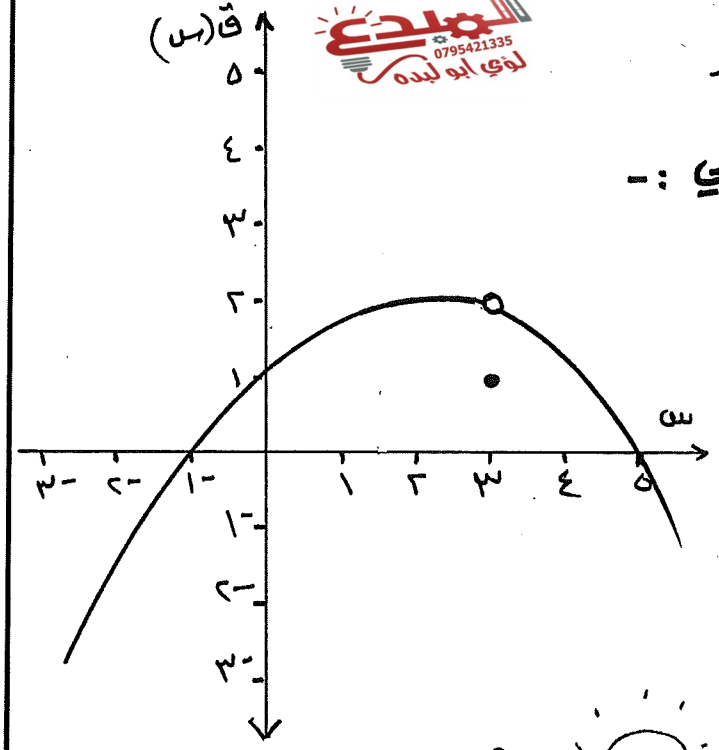
مثال الرسم المجاور يمثل المنحنى ق(س) حيث :-



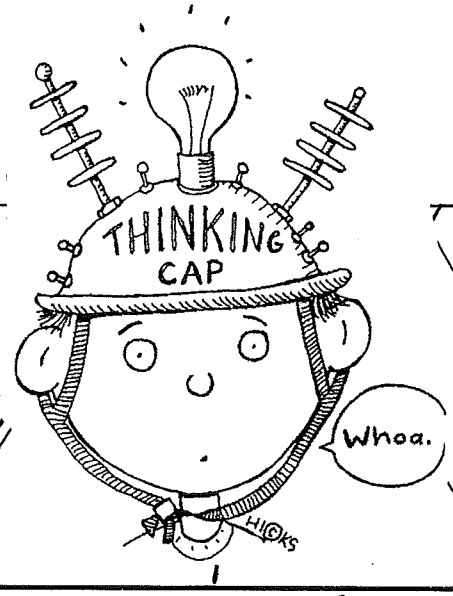
- $\lim_{س \to 1^+} ق(س) = 1$
- $\lim_{س \to 1^-} ق(س) = -3$
- $\lim_{س \to 1} ق(س) =$ غير موجودة
- $\lim_{س \to -2} ق(س) = 2$
- $ق(1) = 3$

المبدع 0795421335 لؤي أبو لبده

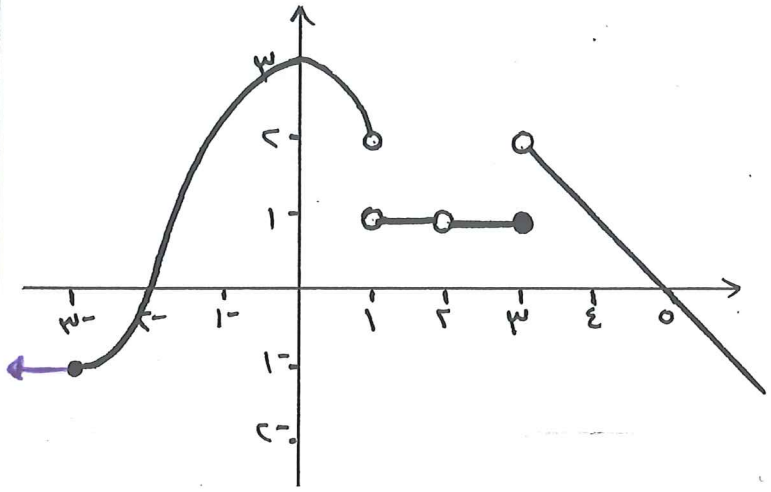
مثال أدرس الشكل المجاور الذي يمثل المنحنى ق(س) ، وأجب عما يلي :-



- $\lim_{س \to 3^+} ق(س) = 2$
- $\lim_{س \to -3} ق(س) = 2$
- $\lim_{س \to 3} ق(س) = 2$
- $\lim_{س \to 0} ق(س) = 1$
- $ق(3) = 1$



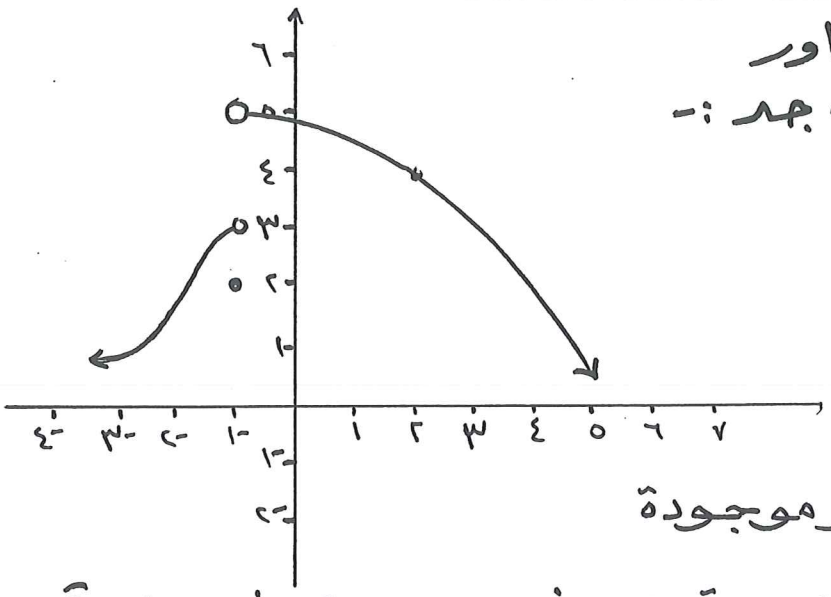
مثال الرسم المجاور يمثل المنحنى ق(س) ، جد :



- ق(-٤) = -١
- ق(١) = غير معرفة
- ق(٢) = غير معرفة
- ق(٣) = ١
- $\lim_{س \to -٣^+}$ ق(س) = -١
- $\lim_{س \to -١}$ ق(س) = ٢
- $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ١ ، لأنّ $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ١
- $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = غير موجودة لأنّ $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س)

٢ ≠ ١

مثال الرسم البياني المجاور يمثل ه(س) ، جد :-



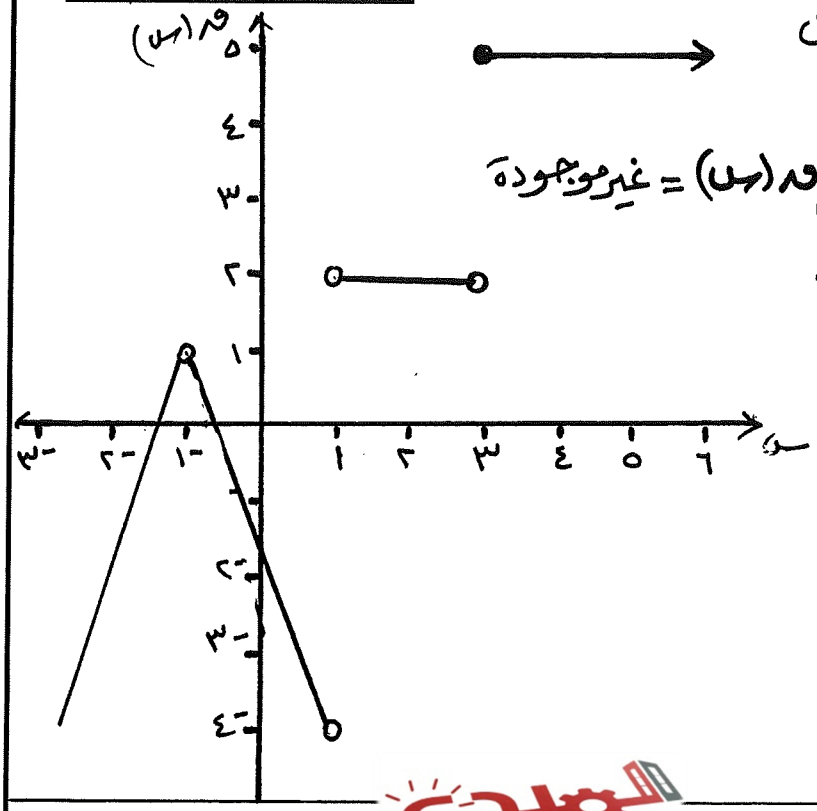
- ه(-١) = ٢
- $\lim_{س \to -١^+}$ ه(س) = ٥
- $\lim_{س \to -١^-}$ ه(س) = ٣
- $\lim_{س \to -١}$ ه(س) = غير موجودة
- قيمة الثابت (أ) التي تجعل $\lim_{س \to أ}$ ه(س) غير موجودة

أ = -١

- قيمة الثابت (ب) حيث $\lim_{س \to ب}$ ه(س) = ٤

ه(س) ← ٤ عندما س ← ٢ ومنه ستكون ب = ٢

مثال معتمداً على الشكل المجاور جد :



١- قيم م التي تجعل $\lim_{س \to م} ه(س)$ = غير موجودة

ابحث عن النقاط التي يكون فيها قطع للرسم البياني وعندها ستكون قيم م هي {-١، ٣، ٤}

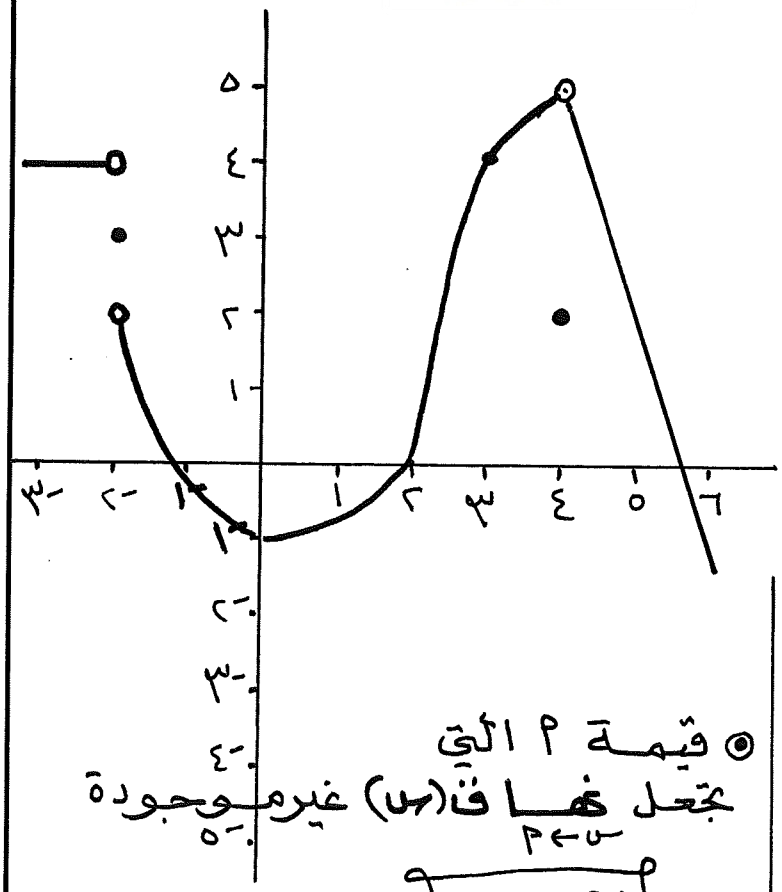
٢- $\lim_{س \to -١} ه(س) = ١$

٣- ف(١) = غير معرف

٤- ف(٣) = ٥

المبدع 0795421335 لؤي أبو لبده

مثال



- $\lim_{س \to ٣+} ق(س) = ٤$
- $\lim_{س \to ٣-} ق(س) = ٤$
- $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٤$
- ف(٣) = ٤
- $\lim_{س \to -٢+} ق(س) = ٢$
- $\lim_{س \to -٢-} ق(س) = ٤$
- $\lim_{س \to -٢} ق(س)$ = غير موجودة
- ف(-٢) = ٣
- $\lim_{س \to ٤} ق(س) = ٥$
- ف(٤) = ٢

- قيمة م التي تجعل $\lim_{س \to م} ق(س)$ غير موجودة

م هي -٢

نقطة فصل .

نظريات على النهايات

نهاية العدد الثابت هو نفسه

- $\lim_{س \to م} جـ = جـ$ (جـ عدد حقيقي)
- $\lim_{س \to م} س = م$ (حيث م عدد حقيقي)

- إذا كان $\lim_{س \to م} هـ(س) = ل$ ، $\lim_{س \to م} و(س) = م$ ، ل، م أعداد حقيقية

$$\lim_{س \to م} (هـ(س) \pm و(س)) = \lim_{س \to م} هـ(س) \pm \lim_{س \to م} و(س) = ل \pm م$$

$$\lim_{س \to م} (هـ(س) \times و(س)) = \lim_{س \to م} هـ(س) \times \lim_{س \to م} و(س)$$

$$\lim_{س \to م} \frac{هـ(س)}{و(س)} = \frac{\lim_{س \to م} هـ(س)}{\lim_{س \to م} و(س)} = \frac{ل}{م} \quad ، \text{حيث } م \neq 0$$

$$\lim_{س \to م} (جـ \times ق(س)) = جـ \times \lim_{س \to م} ق(س) = جـ \times ل$$

$$\lim_{س \to م} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to م} ق(س)} = \sqrt[ن]{ل}$$

بشرط ل > 0 اذا كان ن عدد زوجي

$\sqrt[ن]{ل}$ معرفة

$$\lim_{س \to م} (ق(س))^{ن} = (\lim_{س \to م} ق(س))^{ن} = ل^{ن}$$

مثال جد نهـا كل مما يلي :-

- نهـا $_{س \to ٢}$ ٤ = ٤
- نهـا $_{س \to ٤}$ $\sqrt{٦}$ = $\sqrt{٦}$
- نهـا $_{س \to ٢}$ -٤ = -٤
- نهـا $_{س \to -٣}$ $\frac{\pi}{٤} = \frac{\pi}{٤}$
- نهـا $_{س \to \sqrt{٧}}$ س = $\sqrt{٧}$
- نهـا $_{س \to -٢}$ س = -٢
- نهـا $_{س \to ٠}$ س = ٠
- نهـا $_{س \to ٢}$ -٤ س = $-٤ \times ٢ = -٨$
- نهـا $_{س \to -٣}$ ٥ س = $٥ \times -٣ = -١٥$
- نهـا $_{س \to ٤}$ ٢ س = $٢ \times ٤ = ٨$
- نهـا $_{س \to ٢}$ $س^{٢}$ = $٢^{٢} = ٤$
- نهـا $_{س \to ٢}$ $٣ س^{٢} + ٢ = ٣(٢)^{٢} + ٢$ $= ١٤$
- نهـا $_{س \to ١}$ $٥ س + س^{٣} = ٥ \times ١ + ١^{٣}$ $= ٦$
- نهـا $_{س \to ٢}$ $س^{٢}(س + ٣) = ٢^{٢} \times (٢+٣)$ $= ٤ \times (٥)$ $= ٢٠$
- نهـا $_{س \to ٢}$ ن = ٢

نظير الحدود

نهـا $_{س \to ع}$ ق(س) = ق(ع)

كثير الحدود تعويض مباشر

س $\to$ ع + ، س $\to$ ع $-$ ، س $\to$ ع جميعها نفس المعنى

مثال

١- نهـا $_{س \to ٢}$ $(٣ س^{٢} + ٥ س)$

$٣(٢)^{٢} + ٥(٢) = ١٢ + ١٠ = ٢٢$

٢- نهـا $_{س \to ٣}$ $(س^{٣} - ٨)$

$= ٣^{٣} - ٨ = ٢٧ - ٨ = ١٩$

٣- $\lim_{س \to -٢} (٦س + ٩) = ٦ \times -٢ + ٩$

$= -١٢ + ٩ = -٣$

٤- $\lim_{س \to -٢} (٢س^{٣} + ٤س^{٢} - ١٧)$

$= ٢(-٢)^{٣} + ٤(-٢)^{٢} - ١٧ = ٢(-٨) + ٤(٤) - ١٧$

$= -١٦ + ١٦ - ١٧ = -١٧$

٥- $\lim_{س \to ٥} (٣س - ٥)^{٢}$

$= (٣ \times ٥ - ٥)^{٢} = (١٥ - ٥)^{٢} = (١٠)^{٢} = ١٠٠$

٦- $\lim_{س \to ٤} (٩ - ٣س^{٢})$

$٩ - ٣(٤)^{٢} = ٩ - ٣ \times ١٦ = ٩ - ٤٨ = -٣٩$

$\therefore \lim_{س \to ٤} (٩ - ٣س^{٢}) = -٣٩$

٧- $\lim_{س \to ٤} \left(٢س^{٢} + \frac{٨ - ٢س}{س + ٢} \right)$

$= ٢ \times (٤)^{٢} + \frac{٨ - ٢ \times ٤}{٤ + ٢} = ٢ \times ١٦ + \frac{٨ - ٨}{٦}$

$= ٣٢ + \frac{٠}{٦}$

$= ٣٢ + ٠ = ٣٢$

$\therefore \lim_{س \to ٤} \left(٢س^{٢} + \frac{٨ - ٢س}{س + ٢} \right) = ٣٢$

٨- $\lim_{س \to ١} (٣س^{٢} - ٤س)^{٥}$

$= (٣ \times ١^{٢} - ٤ \times ١)^{٥} = (٣ - ٤)^{٥} = (-١)^{٥} = -١$

$\therefore \lim_{س \to ١} (٣س^{٢} - ٤س)^{٥} = -١$

٩- $\lim_{س \to ٥} (١٣ - س^{٢})$

$= ١٣ - ٥^{٢} = ١٣ - ٢٥ = -١٢$

$\therefore \lim_{س \to ٥} (١٣ - س^{٢}) = -١٢$

١٠- $\lim_{س \to -٢} (٤س^{٣} - ٨س + ٥)$

$= ٤ \times (-٢)^{٣} - ٨ \times -٢ + ٥$

$= ٤ \times -٨ + ١٦ + ٥$

$= -٣٢ + ١٦ + ٥$

$= -١٦ + ٥ = -١١$

$\therefore \lim_{س \to -٢} (٤س^{٣} - ٨س + ٥) = -١١$

١١- $\lim_{س \to ٩} (٣س + س^{٢})$

$= ٣ \times ٩ + ٩^{٢} = ٢٧ + ٨١ = ١٠٨$

$\therefore \lim_{س \to ٩} (٣س + س^{٢}) = ١٠٨$

مثال إذا علمت أن $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٩$ ، $\lim_{س \to ١} هـ(س) = -٣$

فجد قيمة كل مما يلي :

١- $\lim_{س \to ١} (ق(س) + هـ(س)) = \lim_{س \to ١} ق(س) + \lim_{س \to ١} هـ(س)$

$= ٩ + -٣ = ٦$

٢- $\lim_{س \to ١} ق(س) \times هـ(س)$

$= \lim_{س \to ١} ق(س) \times \lim_{س \to ١} هـ(س)$

$= ٩ \times -٣ = -٢٧$

مكتبة رم
اربد - المجمع الشمالي 0274025552

٣- $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س)}{هـ(س)} =$

$= \frac{\lim_{س \to ١} ق(س)}{\lim_{س \to ١} هـ(س)} = \frac{٩}{-٣} = -٣$

٤- $\lim_{س \to ١} \sqrt{ق(س)}$

$= \sqrt{\lim_{س \to ١} ق(س)} = \sqrt{٩} = ٣$

٥- $\lim_{س \to ١} (هـ(س))^{٢}$

$= (\lim_{س \to ١} هـ(س))^{٢} = (-٣)^{٢} = ٩$

٦- $\lim_{س \to ١} ٤ هـ(س) = ٤ \lim_{س \to ١} هـ(س) = ٤ \times -٣ = -١٢$

٧- $\lim_{س \to ١} ٢ ق(س) + ٣ هـ(س)$

$= ٢ \lim_{س \to ١} ق(س) + ٣ \lim_{س \to ١} هـ(س)$

$= ٢ \times ٩ + ٣ \times -٣$

$= ١٨ + -٩ = ٩$

المبدع 0795421335 لؤي ابو لبده

مثال إذا كان $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٥$

فجد

١- $\lim_{س \to ٢} (ق(س) + هـ(س)) = \lim_{س \to ٢} ق(س) + \lim_{س \to ٢} هـ(س)$

$= ٣ + ٥ = ٨$

٢- $\lim_{س \to ٢} (س^{٢} ق(س) - هـ^{٢}(س))$

$= \lim_{س \to ٢} س^{٢} \times \lim_{س \to ٢} ق(س) - (\lim_{س \to ٢} هـ(س))^{٢}$

$= ٤ \times ٣ - ٢٥$

$= ١٢ - ٢٥ = -١٣$

٣- $\lim_{س \to ٢} (ق(س) هـ(س) - س ق^{٢}(س))$

$= \lim_{س \to ٢} ق(س) \times \lim_{س \to ٢} هـ(س) - \lim_{س \to ٢} س \times (\lim_{س \to ٢} ق(س))^{٢}$

$= ٣ \times ٥ - ٢ \times ٣^{٢} = ١٥ - ١٨ = -٣$

٤- $\lim_{س \to ٢} \sqrt{ق(س) + هـ(س) + س^{٢}}$

$= \sqrt{\lim_{س \to ٢} ق(س) + \lim_{س \to ٢} هـ(س) + \lim_{س \to ٢} س^{٢}} = \sqrt{٣+٥+٤} = \sqrt{١٢}$

مثال إذا كانت $\lim_{س \to ٧} ق(س) = ٨$ ، $\lim_{س \to ٧} هـ(س) = ٣$ فجد :-

١- $\lim_{س \to ٧} (٣ ق(س) + ٤ هـ(س))$

$= ٣ \times ٨ + ٤ \times ٣$

$= ٢٤ + ١٢ = ٣٦$

٢- $\lim_{س \to ٧} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$

$= \frac{\lim_{س \to ٧} ق(س)}{\lim_{س \to ٧} هـ(س)} = \frac{٨}{٣}$

٣- $\lim_{س \to ٧} (٢ ق(س) + ٤ س)$

$= ٢ \lim_{س \to ٧} ق(س) + \lim_{س \to ٧} ٤ س$

$= ٢ \times ٨ + ٤ \times ٧ = ٢ \times ٨ + ٢٨$

$= ١٦ + ٢٨ = ٤٤$

٤- $\lim_{س \to ٧} \left(\frac{هـ(س) + س^{٢}}{٣ س} \right)$

$= \frac{\lim_{س \to ٧} هـ(س) + \lim_{س \to ٧} س^{٢}}{\lim_{س \to ٧} ٣ س}$

$= \frac{٣ + ٧^{٢}}{٣ \times ٧} = \frac{٣ + ٤٩}{٢١}$

$= \frac{٥٢}{٢١}$

٥- $\lim_{س \to ٧} (\sqrt{٣ ق(س) + ١} + هـ^{٢}(س))$

$= \lim_{س \to ٧} (\sqrt{٣ ق(س) + ١} + (\lim_{س \to ٧} هـ(س))^{٢}$

$= \sqrt{\lim_{س \to ٧} ٣ ق(س) + \lim_{س \to ٧} ١} + (\lim_{س \to ٧} هـ(س))^{٢}$

$= \sqrt{٣ \times ٨ + ١} + ٣^{٢} = \sqrt{٢٥} + ٩ = ٣ + ٩ = ١٢$

مثال إذا كان $\lim_{س \to ٣} (س \cdot ه(س) + ١) = ١٠$ ، $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٢$

جد $\lim_{س \to ٣} (ه^{٢}(س) + هـ^{٢}(س))$:

الحل: $\lim_{س \to ٣} (س \cdot ه(س) + ١) = \lim_{س \to ٣} س \times \lim_{س \to ٣} ه(س) + \lim_{س \to ٣} ١ = ١٠$

$\Leftarrow ٣ \times \lim_{س \to ٣} ه(س) + ١ = ١٠$

$\Leftarrow \frac{٣}{٣} \times \lim_{س \to ٣} ه(س) = \frac{٩}{٣}$

$\Leftarrow \therefore \lim_{س \to ٣} ه(س) = ٣$

$\therefore \lim_{س \to ٣} ه(س)^{٢} + \lim_{س \to ٣} هـ(س)^{٢} = ٣^{٢} + -٢^{٢} = ٩ + ٤ = ١٣$

مثال إذا علمت أن $\lim_{س \to ٢} (ه(س) + س + ١) = ٩$

فجد قيمة $\lim_{س \to ٢} (ه(س))^{٢}$

الحل $\lim_{س \to ٢} (ه(س) + س + ١) = ٩$

$\lim_{س \to ٢} ه(س) + \lim_{س \to ٢} س + \lim_{س \to ٢} ١ = ٩$

$\lim_{س \to ٢} ه(س) + ٢ + ١ = ٩$

$\lim_{س \to ٢} ه(س) = ٩ - ٣ = ٦$

لذا فإن $\lim_{س \to ٢} (ه(س))^{٢} = (\lim_{س \to ٢} ه(س))^{٢} = (٦)^{٢} = ٣٦$

نهاية الاقتران المتشعب

الاقتران المتشعب: هو مجموعة من الاقترانات البسيطة التي تعمل خلال فترات مختلفة

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} \text{ه}(س) & ، س_1 < س < س_2 \\ \text{ل}(س) & ، س_2 < س < س_3 \\ \text{ك}(س) & ، س_3 < س < س_4 \end{cases}$$

نتعامل مع الاقتران المتشعب دائما بالخطوات التالية:

- نضع كل الفترات على خط الأعداد (الأرقام).
- نضع الاقتران على فتراتها.
- نحدد النهاية من اليمين ومن اليسار.
- نعوض في كل طرف ونستنتج.

مثال إذا كان $\text{ه}(س) = \begin{cases} 2س^2 + 4 & ، س < 1 \\ س^2 + 5 & ، س > 1 \end{cases}$

$س = 1$ نقطة تشعب

$2س^2 + 4$	$س^2 + 5$
1	

أ. جد $\lim_{س \to 2}$ ق(س) $= 2 \times 2^2 + 4 = 8 + 4 = 12$

ليست نقطة تشعب نعوض مباشرة

ب. جد $\lim_{س \to 1}$ ق(س)

نقطة تشعب نفحص يمين ويسار

نقطة $س = 1$ تشعب

- $\lim_{س \to 1^+}$ ق(س) $= 2 \times 1^2 + 4 = 6$
- $\lim_{س \to 1^-}$ ق(س) $= 1^2 + 5 = 6$

$\therefore \lim_{س \to 1}$ ق(س) $= 6$

مثال

$$ق(س) = \begin{cases} ٤س^{٢} + ٢س & ، \ س < ٢ \\ ٩ - س^{٢} & ، \ س \geq ٢ \end{cases}$$

نقطة $س = ٢$ تشعب

جد قيمة ما يلي

أ) $\lim_{س \to ٥} ق(س) = ٤ \times ٥^{٢} + ٢ \times ٥$

$= ١٠٠ + ١٠ = ١١٠$

ب) $\lim_{س \to ٠} ق(س) = ٩ - (٠)^{٢}$

$= ٩$

جـ) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

$\lim_{س \to ٢^{+}} ق(س) = ٤ \times ٢^{٢} + ٢ \times ٢$

$= ١٦ + ٤ = ٢٠$

$\lim_{س \to ٢^{-}} ق(س) = ٩ - ٢^{٢}$

$= ٩ - ٤ = ٥$

$\lim_{س \to ٢} ق(س)$ غير موجودة

$٤س^{٢} + ٢س$	$٩ - س^{٢}$
٢	

مثال

$$ه(س) = \begin{cases} ٤س^{٢} - ٥ & ، \ س \neq ٣ \\ ١٥ & ، \ س = ٣ \end{cases}$$

نقطة $س = ٣$ تشعب

جد

$\lim_{س \to ٣} ق(س)$

$٤س^{٢} - ٥$	$٤س^{٢} - ٥$
٣	

بما أنه يريد $س \to ٣$

هذا يعني يريد $س \neq ٣$

$\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٤ \times ٣^{٢} - ٥$

$= ٣٦ - ٥ = ٣١$

* جد $ق(٣)$

$ق(٣) = ١٥$

مكتبة رم
اربد - المجمع الشمالي -027402552

مثال $ق(س) = \begin{cases} ٥س + ٦ & ، س < ٣ \\ ٢س^{٢} + ١ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

نقطة $س = ٣$ تشعب

جـــد

$٥س + ٦$	$٢س^{٢} + ١$
٣	

أ) $\lim_{س \to ٤} ق(س)$

$= \lim_{س \to ٤^{+}} ٥س + ٦ = ٥ \times ٤ + ٦$

$= ٢٠ + ٦ = ٢٦$

ب) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٢(٢)^{٢} + ١ = ٨ + ١ = ٩$

جـ) $\lim_{س \to ٣} ق(س)$

نقطة $س = ٣$ تشعب

$\Leftarrow \lim_{س \to ٣^{+}} ق(س) = ٥ \times ٣ + ٦$

$= ١٥ + ٦ = ٢١$

$\lim_{س \to ٣^{-}} ق(س) = ٢ \times ٣^{٢} + ١$

$= ١٨ + ١ = ١٩$

$\lim_{س \to ٣} ق(س)$: غير موجودة

مثال $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، س < ٤ \\ س + ١ & ، س = ٤ \\ ٢٢ - ٣س & ، س > ٤ \end{cases}$

أ) $\lim_{س \to ٤^{+}} ق(س) = ٢٢ - ٤ = ١٨$

ب) $\lim_{س \to ٧} ق(س) = ٢٢ - ٧ = ١٥$

جـ) $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٣^{٢} + ٢ = ٩ + ٢ = ١١$

د) $\lim_{س \to ٤^{-}} ق(س) = ٤^{٢} + ٢ = ١٦ + ٢ = ١٨$

هـ) $\lim_{س \to ٤} ق(س) = ١٨$

$\lim_{س \to ٤^{+}} ق(س) = ١٨$ ، $\lim_{س \to ٤^{-}} ق(س) = ١٨$

و) $ق(٤) = ٥$

مثال $ق(س) = \begin{cases} 3س^2 + 5س & ، س = 2 \\ 6س - 3س^3 & ، س \neq 2 \end{cases}$

جد $\lim_{س \to 2}$ ق(س)

$= 6 \times 2 - 3 \times 2^3 = 12 - 8 \times 3$

$= 12 - 24 = -12$

مثال $ق(س) = \begin{cases} س + 9 & ، س < 1 \\ 2س + 8 & ، س \geq 1 \end{cases}$

نقطة $س = 1$ كشعب

جد $\lim_{س \to 1}$ ق(س)

$س + 9$	$2س + 8$

- $\lim_{س \to 1^+}$ ق(س) $= 1 + 9 = 10$
- $\lim_{س \to 1^-}$ ق(س) $= 2 \times 1 + 8 = 2 + 8 = 10$

$\therefore \lim_{س \to 1}$ ق(س) $= 10$

مثال إذا كانت $\lim_{س \to 3}(3س + ب) = 12$ ، فجد قيمة ب ؟

$12 = ب + 3 \times 3$

$12 = ب + 9$

$ب = 3$

مثال إذا كانت $\lim_{س \to 2} أ س^2 + 4 = 16$ ، فجد قيمة أ

$16 = 4 + 2^2 \times أ$

$16 = 4 + 4أ$

$12 = 4أ$

$أ = 3$

مكتبة رم
اربد - المجمع الشمالي - 027402552

مثال إذا كانت $\lim_{س \to ١} (م س^{٣}) = ٦٤$

$م \times ١^{٣} = ٦٤$

$\boxed{م = ٦٤}$

مثال إذا كانت $\lim_{س \to ٢} م س^{٢} + ٥ س + ٦ = ٣٨$ ، فجد قيمة م ؟

$م \times ٢^{٢} + ٥ \times ٢ + ٦ = ٣٨$

$٤ م + ١٠ + ٦ = ٣٨$

$٤ م + ١٦ = ٣٨$

$٤ م = ٢٢$

$\boxed{م = ٣}$

مثال جد قيمة الثابت م التي تجعل $\lim_{س \to ٢} ف(س) = ١٢$ علماً بأن

$ف(س) = ٢ س^{٢} - م س$

الحل $\lim_{س \to ٢} (٢ س^{٢} - م س) = ١٢$

$٢(٢)^{٢} - م(٢) = ١٢$

$٨ - ٢ م = ١٢$

$-٢ م = ٤$ $\Leftarrow$ $\therefore$ $\boxed{م = -٢}$

مثال إذا كانت $\lim_{س \to ١} (م س)^{٣} = ٦٤$ ، فجد قيمة المجهول م

الحل $(م \times ١)^{٣} = ٦٤$

$م^{٣} = ٦٤$

$\boxed{م = ٤}$

مثال إذا كانت $\lim_{س \to ٥} \sqrt[٤]{س^٢ + ب} = ٢$ فجد قيمة $ب$

الحل

$$(\sqrt[٤]{٥^٢ + ب})^٤ = ٢^٤$$

$$٥^٢ + ب = (٢)^٤$$

$$ب = ١٦ - ٢٥$$

$$\boxed{ب = -٩}$$

مثال جد قيمة $م$ التي تجعل $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) موجودة

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س}{٢} + ٣س & ، س > ٤ \\ ٢٥ & ، س = ٤ \\ س^٢ - ٢م س & ، س < ٤ \end{cases}$$

بما أن $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) موجودة

$$\therefore \lim_{س \to ٤^+} ق(س) = \lim_{س \to ٤^-} ق(س)$$

$$\frac{٤}{٢} + ٤ \times ٣ = ٤ \times م٢ - ٤^٢$$

$$٢ + ١٢ = ٨م - ١٦$$

$$١٤ = ٨م - ١٦$$

$$٢ = ٨م$$

$$\therefore \boxed{م = \frac{١}{٤}}$$

مثال جد قيمة $م$ إذا كان $\lim_{س \to م}$ $س^٢ - ٢س = ٨$

$$م^٢ - ٢م = ٨$$

$$م^٢ - ٢م - ٨ = ٠$$

$$\therefore (م - ٤)(م + ٢) = ٠$$

$$\boxed{م = ٤} \quad \text{أو} \quad \boxed{م = -٢}$$

مثال $هـ(س) = \begin{cases} أ س + س^{٢} ، س \geq ٣ \\ س^{٣} - ١٢ ، س < ٣ \end{cases}$

ما قيمة أ إذا كانت $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$ موجودة

بما أن النهاية موجودة

$\therefore \lim_{س \to ٣^{+}} هـ(س) = \lim_{س \to ٣^{-}} هـ(س)$

$٣^{٣} - ١٢ = ٣ \times أ + ٣^{٢}$

$٢٧ - ١٢ = ٣ أ + ٩$

$١٥ = ٣ أ + ٩$

$٣ أ = ٩ - ١٥$

$\Longleftarrow \frac{٣ أ}{٣} = \frac{٦}{٣} \Longleftarrow$ **أ = ٢**

مثال $هـ(س) = \begin{cases} ٣س - ٥ ، س < ب \\ س^{٢} + س - ١٣ ، س \geq ب \end{cases}$

جد قيمة ب إذا علمت إن $\lim_{س \to ب} هـ(س)$ موجودة

بما أن النهاية موجودة

$\therefore \lim_{س \to ب^{+}} هـ(س) = \lim_{س \to ب^{-}} هـ(س)$

$١٣ - ب + ب^{٢} = ٥ - ب \times ٣$

$١٣ - ب + ب^{٢} = ٥ - ٣ب$

بجميع الحدود في طرف واحد

$٥ + ٣ب - ١٣ - ب + ب^{٢} = ٠$

$٨ - ٣ب - ب^{٢} = ٠$

$(ب + ٢)(ب - ٤) = ٠$

$\therefore ب = \{٤ ، -٢\}$

المبدع في الرياضيات ❖ لؤي أبو لبده ❖ 0785508870 0795421335

مثال جد قيمة م التي تجعل $\lim_{س \to 3} ق(س)$ موجودة

$$ق(س) = \begin{cases} 15 & ، س < 3 \\ 2س + م^2 & ، س \geq 3 \end{cases}$$

مكتبة رم
اربد - المجمع الشمالي - 0527402552

$$\lim_{س \to 3^+} ق(س) = \lim_{س \to 3^-} ق(س)$$

$$15 = 2 \times 3 + م^2$$

$$15 = 6 + م^2$$

$$م^2 = 15 - 6$$

$$م^2 = 9 \Leftarrow \boxed{م = 3} \text{ أو } \boxed{م = -3}$$

مثال اذا كان $ق(س) = \begin{cases} 5س - م & ، س < 1 \\ ب س^2 + 7 & ، س \geq 1 \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to 1} ق(س) = 16$ ، $\lim_{س \to 1} ق(س)$ موجودة

فما قيمة كل من الثابتين م ، ب ؟

الحل

$$\lim_{س \to 1^+} ب س^2 + 7 = 16$$

$$ب (1)^2 + 7 = 16$$

$$ب + 7 = 16$$

$$ب = 16 - 7$$

$$\boxed{ب = 9}$$

$$\lim_{س \to 1^-} 5س - م = 16$$

$$5(1) - م = 16$$

$$5 - م = 16$$

$$-م = 11$$

$$\boxed{م = -11}$$

مثال إذا كان $ق(س) = \begin{cases} 5س^3 & ، س < م \\ 40 & ، س \geq م \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to م} ق(س)$ موجودة ، فما قيمة الثابت م ؟

الحل

$$\lim_{س \to م^-} 5س^3 = \lim_{س \to م^+} 40$$

$$5م^3 = 40$$

$$م^3 = \frac{40}{5}$$

$$م^3 = 8$$

$$م = \sqrt[3]{8}$$

$$\boxed{م = 2}$$

نهاية خارج قسمة إقترانين

النهاية للإقترانات الكسرية (المنسبي)

$$\lim_{س \to م} \frac{ق(س)}{ك(س)} = \frac{\lim_{س \to م} ق(س)}{\lim_{س \to م} ك(س)} = \frac{ب ط}{مقام}$$

(١) **عدد / عدد** — جواب نهائي مباشر

(٢) **صفر / عدد** — جواب نهائي صفر

(٣) **عدد / صفر** — غير موجودة

(٤) **صفر / صفر** — يتم معالجة الاقترانات وإيجاد الناتج من خلال

- أ- التحليل
- ب) اخراج عامل مشترك
- ج) ضرب بالمرافق (الجذور)
- د) توحيد المقامات (الكسور)

الحالة الأولى: $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ ← جواب نهائي مباشر

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٢س + ١}{٥س} = \frac{١ + ٤ - ٤}{١٠} = \frac{١}{١٠}$$

$$\lim_{س \to ٣} \frac{٥س^{٢} + ٣}{س + ٣} = \frac{٥ \times ٣^{٢} + ٣}{٣ + ٣} = \frac{٤٥ + ٣}{٦} = \frac{٤٨}{٦} = ٨$$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} + ٢س}{س^{٢} + ٦س + ٢} = \frac{٢^{٣} + ٢ \times ٢}{٤ + ١٢ + ٢} = \frac{٨ + ٤}{١٨} = \frac{١٢}{١٨}$$

$$\lim_{س \to ٣} \frac{٢س - ٩}{س^{٢} + ١٢} = \frac{٢ \times ٣ - ٩}{٣^{٢} + ١٢} = \frac{٦ - ٩}{٩ + ١٢} = \frac{-٣}{٢١} = \frac{-١}{٧}$$

٢- الحالة الثانية :- $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ ⇐ جواب نهائي « صفر »

$$\text{نها}_{س\leftarrow ٢} \frac{٣س^{٢}-٦}{س^{٢}+٥} = \frac{٣\times ٢^{٢}-٦}{٥+٢^{٢}} = \frac{٦-٦}{٥+٤} = \frac{\text{صفر}}{٩} = \text{صفر}$$

$$\text{نها}_{س\leftarrow ٢} \frac{س^{٢}-٤}{٥س+٢} = \frac{٢^{٢}-٤}{٢+٢\times ٥} = \frac{٤-٤}{٢+١٠} = \frac{\text{صفر}}{١٢} = \text{صفر}$$

$$\text{نها}_{س\leftarrow ٢} \frac{(٨-س^{٣})(س+١)}{٣س+١} = \frac{(٨-٢^{٣})(٢+١)}{٢\times ٣+١}$$

$$= \frac{(٨-٨)(٢+١)}{٦+١} = \frac{(\text{صفر})(٣)}{٧} = \frac{٠}{٧} = ٠$$

٣- الحالة الثالثة : $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ النهاية غير موجودة .

$$\text{نها}_{س\leftarrow ٢} \frac{س+٧}{س-٢} = \frac{٢+٧}{٢-٢} = \frac{١٤+٧}{٠} = \frac{٢١}{٠} = \text{نهاية غير موجودة}$$

$$\text{نها}_{س\leftarrow -١} \frac{س^{٢}+٨}{س+١} = \frac{(-١)^{٢}+٨}{-١+١} = \frac{١+٨}{٠} = \frac{٩}{٠} = \text{نهاية غير موجودة}$$

٤- الحالة الرابعة: $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ⇐ إستخدام المعالجة

$$\text{نها}_{س\leftarrow ٣} \frac{س^{٢}-٢س-٣}{٩-س^{٢}} \Leftarrow \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

استخدام المعالجة (التحليل)

$$= \text{نها}_{س\leftarrow ٣} \frac{(س-٣)(س+١)}{(س-٣)(٣+س)}$$

$$= \text{نها}_{س\leftarrow ٣} \frac{س+١}{٣+س}$$

$$= \frac{٣+١}{٣+٣} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$$

المبدع في الرياضيات ❖ لؤي أبو لبده ❖ 0785508870 0795421335

$$\text{نهـا}_{س\to -1} \frac{س^3+1}{س+س^2} \leftarrow \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

تحليل مجموع مكعبين
واخراج عامل مشترك

$$\text{نهـا}_{س\to -1} \frac{(س+1)(س^2-س+1)}{س(1+س)} \qquad \text{نهـا}_{س\to -1} \frac{س^2-س+1}{س}$$

$$= \frac{1+1+1}{-1} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{(س+1)^2-4}{س^2-س} \leftarrow \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

" فرق بين مربعين
وعامل مشترك "

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{((س+1)-2)((س+1)+2)}{س(س-1)}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{(س-1)(س+3)}{س(س-1)} = \text{نهـا}_{س\to 1} \frac{س+3}{س} = \frac{1+3}{1} = 4$$

$$\text{نهـا}_{س\to 2} \frac{س^2-5س+6}{س^2-4} \leftarrow \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

تحليل

$$\text{نهـا}_{س\to 2} \frac{(س-2)(س-3)}{(س-2)(س+2)} = \text{نهـا}_{س\to 2} \frac{س-3}{س+2} = \frac{2-3}{2+2} = \frac{-1}{4}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{س^3-1}{1-س^2} \leftarrow \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{(س-1)(س^2+س+1)}{(1-س)(1+س)}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{-1 \times (س^2+س+1)}{1+س}$$

$$= \frac{-1\times(1+1+1^2)}{1+1} = \frac{-1\times 3}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 6} \frac{س^2 - 7س + 6}{36 - س^2} \leftarrow \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

« تحليل عبارة تربيعية وفرق بين مربعين »

$$\text{نهـا}_{س\to 6} \frac{(س-6)(س-1)}{(6-س)(6+س)} = \text{نهـا}_{س\to 6} \frac{-1(س-1)}{6+س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 6} \frac{-س+1}{6+س} = \frac{-6+1}{6+6} = \frac{-5}{12}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{س^3 + 4س}{س^2 + 3س} \leftarrow \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

إخراج عامل مشترك

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{س(س^2+4)}{س(س+3)} = \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{س^2+4}{س+3} = \frac{0^2+4}{3+0} = \frac{4}{3}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{2س^2 - 2}{س^2 + 8س + 7} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to -1} \frac{2(س^2-1)}{(س+7)(س+1)} = \text{نهـا}_{س\to -1} \frac{2(س-1)(س+1)}{(س+7)(س+1)}$$

$$\text{نهـا}_{س\to -1} \frac{2(س-1)}{س+7} = \frac{2(-1-1)}{-1+7} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

الرياضيات رياضة العقل

من وجي كأس العالم لكرة القدم ٢٠١٨

مكتبة رم
اربد - المجمع الشمالي - 027402552

توحيد مقامات

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{\frac{1}{س+1} - \frac{2}{س+3}}{س-1}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{\frac{(س+3) - (2س+2)}{(س+1)(س+3)}}{س-1}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{\frac{س+3-2س-2}{(س+1)(س+3)}}{س-1} = \text{نهـا}_{س\to 1} \frac{(-س+1)}{(س+1)(س+3)(س-1)}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{(-س+1)}{(س+1)(س+3)(س-1)}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{-1}{(س+3)(س+1)} = \frac{-1}{(1+3)(1+1)} = \frac{-1}{8}$$

توحيد مقامات

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\frac{2}{س-3} + \frac{4}{س+6}}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\frac{2(س+6) + 4(س-3)}{(س-3)(س+6)}}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\frac{2س+12+4س-12}{(س-3)(س+6)}}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\frac{6س}{(س-3)(س+6)}}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{6س}{(س-3)(س+6)} \times \frac{1}{س} = \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{6}{(س-3)(س+6)}$$

$$= \frac{6}{6\times -3} = \frac{6}{-18} = \frac{-1}{3}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٥} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٥}}{س - ٥}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٥} \frac{\frac{٥-س}{٥س}}{س-٥} = \text{نهـا}_{س\to ٥} \frac{٥-س}{٥س} \times \frac{١}{س-٥} = \text{نهـا}_{س\to ٥} \frac{-١}{٥س}$$

$$= \frac{-١}{٥\times٥} = \frac{-١}{٢٥}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٣} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}\right)\left(\frac{١}{س^{٢}+٩}\right)$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{٣-س}{٣س} \times \frac{١}{(س+٣)(٣-س)}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{-١}{٣س(س+٣)} = \frac{-١}{(٣+٣)٣\times٣} = \frac{-١}{٦\times٩} = \frac{-١}{٥٤}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{٥س-١٠}{\frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{٤}}$$

توحيد مقامات
واخراج عامل مشترك

$$= \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{٥(س-٢)}{\frac{٤-س^{٢}}{٤س^{٢}}} = \text{نهـا}_{س\to ٢} ٥(س-٢)\times\frac{٤س^{٢}}{٤-س^{٢}}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٢} ٥(س-٢)\times\frac{٤س^{٢}}{(٢-س)(٢+س)}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{-٢٠س^{٢}}{٢+س} = \frac{-٢٠\times٢^{٢}}{٢+٢} = \frac{-٢٠\times٤}{٤} = -٢٠$$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{٢س}{س^٢ - ٤} - \frac{٤}{س^٢ - ٤}$$

توجد مقامات :: اخراج عامل مشترك
فرق بين مربعين

$$\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٤}{س^٢ - ٤} = \lim_{س \to ٢} \frac{٢(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)} = \lim_{س \to ٢} \frac{٢}{س + ٢}$$

$$\frac{٢}{٢ + ٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

الضرب بالمرافق

$$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٧س + ٨} - ٣}{س - س^٢} = \frac{صفر}{صفر}$$

$$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٧س + ٨} - ٣}{س(١ - س)} \times \frac{\sqrt{٧س + ٨} + ٣}{\sqrt{٧س + ٨} + ٣}$$

$$\lim_{س \to ١} \frac{(٧س + ٨) - ٩}{س(١ - س)(\sqrt{٧س + ٨} + ٣)} = \lim_{س \to ١} \frac{-س + ١}{س(١ - س)(\sqrt{٧س + ٨} + ٣)}$$

$$\lim_{س \to ١} \frac{١}{س(\sqrt{٧س + ٨} + ٣)} = \frac{١}{(\sqrt{١٥} + ٣)} = \frac{١}{١ \times (٣ + ٣)} = \frac{١}{٦}$$

$$\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} = \frac{صفر}{صفر}$$

$$\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} \times \frac{\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س} + ٣} = \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{(س - ٩)(\sqrt{س} + ٣)}$$

$$\lim_{س \to ٩} \frac{١}{\sqrt{س} + ٣} = \frac{١}{\sqrt{٩} + ٣} = \frac{١}{٣ + ٣} = \frac{١}{٦}$$

$$\lim_{س \to ١٠} \frac{\sqrt{س+٦} - ٤}{١٠ - س} = \frac{صفر}{صفر}$$

$$= \lim_{س \to ١٠} \frac{\sqrt{س+٦} - ٤}{١٠ - س} \times \frac{\sqrt{س+٦} + ٤}{\sqrt{س+٦} + ٤}$$

$$= \lim_{س \to ١٠} \frac{س + ٦ - ١٦}{(١٠-س)(\sqrt{س+٦} + ٤)} = \lim_{س \to ١٠} \frac{س - ١٠}{(١٠-س)(\sqrt{س+٦} + ٤)}$$

$$\lim_{س \to ١٠} \frac{-١}{\sqrt{س+٦} + ٤} = \frac{-١}{\sqrt{١٦} + ٤} = \frac{-١}{٤+٤} = \frac{-١}{٨}$$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س+٥} - \sqrt{٢س+١}}{س - ٤} = \frac{صفر}{صفر}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س+٥} - \sqrt{٢س+١}}{س-٤} \times \frac{\sqrt{س+٥} + \sqrt{٢س+١}}{\sqrt{س+٥} + \sqrt{٢س+١}}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س+٥ - (٢س+١)}{(س-٤)(\sqrt{س+٥} + \sqrt{٢س+١})}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س+٥ - (٢س+١)}{(س-٤)(\sqrt{س+٥} + \sqrt{٢س+١})}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{-س+٥-٢س-١}{(س-٤)(\sqrt{س+٥} + \sqrt{٢س+١})}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{-س+٤}{(س-٤)(\sqrt{س+٥} + \sqrt{٢س+١})}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{-١}{\sqrt{س+٥} + \sqrt{٢س+١}} = \frac{-١}{\sqrt{٤+٥} + \sqrt{٨+١}} = \frac{-١}{٣+٣} = \frac{-١}{٦}$$

المبدع 0795421335 لؤي أبو لبده

$$\lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{\sqrt{س + ١١} - ٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{\sqrt{س + ١١} - ٤} \times \frac{\sqrt{س + ١١} + ٤}{\sqrt{س + ١١} + ٤}$$

$$\lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(\sqrt{س + ١١} + ٤)}{(\sqrt{س + ١١} - ٤)(\sqrt{س + ١١} + ٤)}$$

$$\lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(\sqrt{س + ١١} + ٤)}{١٦ - (س + ١١)}$$

$$\lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(\sqrt{س + ١١} + ٤)}{-(س - ٥)}$$

$$\lim_{س \to ٥} -(\sqrt{س + ١١} + ٤) = -(\sqrt{٥ + ١١} + ٤)$$

$$= -٤ - \sqrt{١٦} = -٤ - ٤ = -٨$$

$$\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^٢ + ١٦} - ٥}{٣ - س} \quad \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^٢ + ١٦} - ٥}{٣ - س} \times \frac{\sqrt{س^٢ + ١٦} + ٥}{\sqrt{س^٢ + ١٦} + ٥} = \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ١٦ - ٢٥}{(٣ - س)(\sqrt{س^٢ + ١٦} + ٥)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{(٣ - س)(\sqrt{س^٢ + ١٦} + ٥)} \Leftarrow \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(-(س - ٣))(\sqrt{س^٢ + ١٦} + ٥)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{-(س + ٣)}{\sqrt{س^٢ + ٦} + ٥} = \frac{-(٣ + ٣)}{\sqrt{٩ + ١٦} + ٥} = \frac{-٦}{٥ + ٥} = \frac{-٦}{١٠}$$

الإتصال

١- عند نقطة (س = أ)

أولاً :

يكون ق(س) متصلا عند س = أ إذا تحققت الشروط الثلاث مجتمعة :-

١- ق معرف عند أ (أي أن ق(أ) موجودة)

٢- $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة (أي أن $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س))

٣- $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

ملاحظة

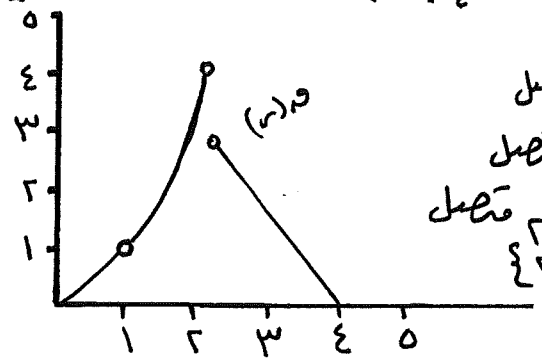
١- إذا كان ق(س) كثير حدود فإنه يكون متصلا لجميع الاعداد الحقيقية .

٢- الإقتران النسبي $\frac{ق(س)}{ك(س)}$ متصل على جميع الاعداد الحقيقية ماعدا أصفار المقام .

الاتصال من الرسم :

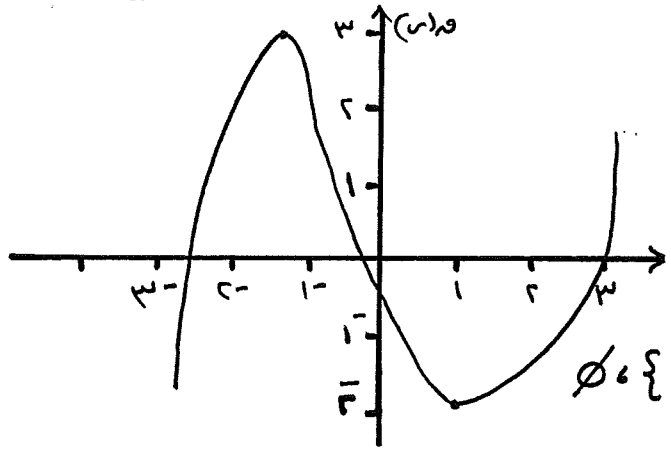
اعتمد على الاشكال التالية بالإجابة عن الاسئلة التي تليها :-

①



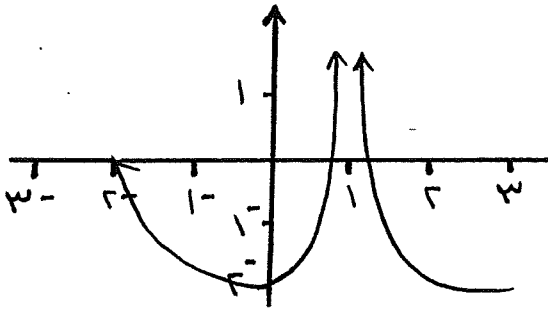
- هل ق(س) متصل عند س = ١ ⟸ غير متصل
- هل ه(س) متصل عند س = ٢ ⟸ غير متصل
- هل ه(س) متصل عند س = ٣ ⟸ نعم متصل
- ما نقاط عدم الاتصال س = {١ ، ٢}

②



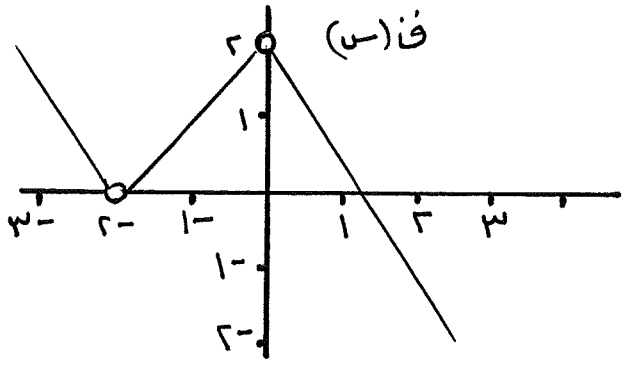
- هل ق(س) متصل عند س = -١ نعم
- هل ق(س) متصل عند س = ٠ نعم
- هل ق(س) متصل عند س = ١ نعم
- هل ق(س) متصل عند س = ٢ نعم
- ما نقاط عدم الاتصال لا يوجد { } ، ∅

③



- هل ل(س) متصل عند س = -١ ، نعم
- هل ل(س) متصل عند س = ٠ نعم
- هل ل(س) متصل عند س = ١ لا غير متصل.
- ما نقاط عدم الاتصال س = {١}

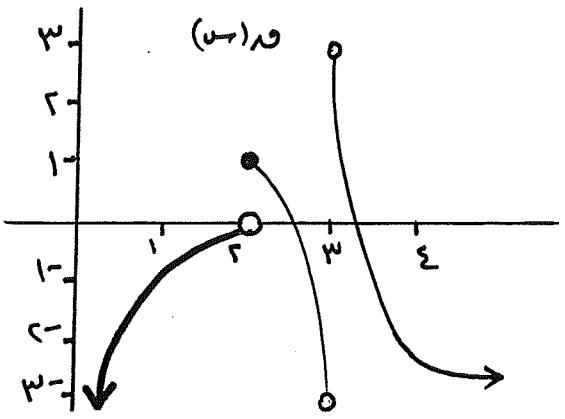
④



ما نقاط عدم الإتصال للاقتران

س = { -٢ ، ٠ }

من الشكل المجاور ما هي قيم م حيث التي يكون عندها ق(س) غير متصل



نقاط عدم الاتصال
{٢ ، ٣}

الاتصال عند نقطة :

كثير الحدود

مثال ١ إذا كان ه(س) = ٣س^{٢} - ٢س + ٤

ابحث في اتصال هذا الاقتران ، عند س = ٢ ؟؟

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٣ × ٢^{٢} - ٢ × ٢ + ٤

= ٣ × ٤ - ٤ + ٤

= ١٢ - ٤ + ٤

= ١٢

ق(٢) = ٣ × ٢^{٢} - ٢ × ٢ + ٤

= ١٢ - ٤ + ٤

= ١٢

بما أن $\lim_{س \to ٢}$ ه(س) = ه(٢) = ١٢

∴ ه(س) متصل عند س = ٢

بإمكانك الإجابة فوراً أنه متصل عند س = ٢ لأنه كثير الحدود

مثال ١ إذا كان ه(س) = ٢س + ٤ ، ابحث في اتصال هذا الاقتران عند س = ٦ ؟

$\lim_{س \to ٦}$ ه(س) = ٢ × ٦ + ٤

= ١٢ + ٤

ق(٦) = ٢ × ٦ + ٤

= ١٢ + ٤

= ١٦

بما أن $\lim_{س \to ٦}$ ه(س) = ه(٦) = ١٦

∴ ه(س) متصل عند س = ٦

الاقتران النسبي

كل إقتران نسبي متصل ماعدا أصفار المقام

مثال ١ هل ق(س) = $\frac{س^{٢}-٥}{س+٧}$ ، متصل عند س = ٣

الجواب : نعم ، لأنه نسبي والعدد ٣ ليس صفر المقام

مثال ٢ هل ل(س) = $\frac{٣س+٥}{س-٢}$ ، متصل عند س = ٢

الجواب : لا ، لأن ٢ صفر المقام

مثال ٣ هل هـ(س) = $\frac{س+١}{س^{٢}-٤}$ ، متصل في [٥ ، ٩]

الجواب : نعم ، لأن أصفار المقام ٢ ، -٢ غير موجودة في [٥ ، ٩]

و هـ (س) نسبي .

مثال ٤ ابحث في إتصال هـ(س) = $\frac{٣-٢س}{س^{٢}-٥س-٦}$

ابحث في أصفار المقام

الحل $س^{٢}-٥س-٦ = ٠$

$(س-٦)(س+١) = ٠$

$س_{١} = ٦$

$س_{٢} = -١$

∴ هـ(س) متصل على ح - {٦ ، -١}

هـ(س) متصل على ح ماعدا {٦ ، -١}

مثال ٥ ابحث في إتصال هـ(س) = $\frac{٩}{س^{٢}-٤س}$

ابحث في أصفار المقام

$س^{٢}-٤س = ٠$

$س(س-٤) = ٠$

$س_{١} = ٠$

$س_{٢} = ٤$

∴ هـ(س) متصل على ح باستثناء {٠ ، ٤}

المبدع في الرياضيات ❖ لؤي أبو لبده ❖ 0785508870 0795421335

مثال ٦ إبحث في إتصال

$$هـ(س) = \frac{٢س^{٢} - ٥}{س^{٢} - ١٦}$$

الحل ابحث في أصفار المقام

$س^{٢} - ١٦ = ٠$

$(س - ٤)(س + ٤) = ٠$

$س_{١} = ٤$

$س_{٢} = -٤$

∴ هـ(س) متصل على ح ما عدا $\{٤، -٤\}$

مثال ٧ ابحث في اتصال

$$هـ(س) = \frac{٢٧}{س^{٢} + ١٦}$$

ابحث في اصفار المقام

الحل $س^{٢} + ١٦ = ٠$

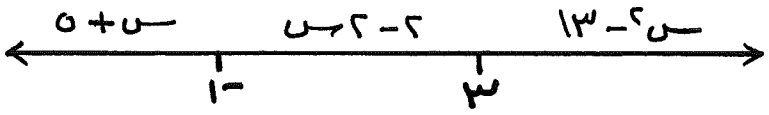
$س^{٢} = -١٦$ لا تحلل

∴ هـ(س) متصل على ح ولا يوجد نقاط عدم اتصال

الإقتران المتشعب :

مثال ٨ إبحث في إتصال هـ(س) عند س = -١ ، س = ٣

$$هـ(س) = \begin{cases} س + ٥ & ، \ س < -١ \\ ٢ - ٢س & ، \ -١ \leq س \leq ٣ \\ س^{٢} - ١٣ & ، \ س > ٣ \end{cases}$$



⊙ ف(-١) = ٢ - ٢ × (-١)

= ٢ - (-٢)

= ٤

⊙ $\lim_{س \to -١^{+}}$ ف(س) = ٢ - ٢ × (-١)

= ٢ - -٢ = ٤

⊙ $\lim_{س \to -١^{-}}$ ف(س) = (-١) + ٥

= ٤

$\lim_{س \to -١}$ هـ(س) = ٤

∴ هـ(-١) = $\lim_{س \to -١}$ هـ(س) ∴ هـ(س) = متصل عند س = -١

المبدع في الرياضيات ❖ لؤي أبو لبده ❖ 0785508870 0795421335

⊙ ق(٣) = ٢ - ٢×٣
= ٢ - ٦ = -٤

⊙ $\lim_{س \to 3^+}$ هـ(س) = (٣)^٢ - ١٣
= ٩ - ١٣ = -٤

⊙ $\lim_{س \to 3^-}$ هـ(س) = ٢ - ٢×٣
= ٢ - ٦ = -٤

$\lim_{س \to 3}$ ق(س) = -٤

∴ هـ(٣) = $\lim_{س \to 3}$ ق(س)

∴ هـ(س) متصل عند س = ٣

مثال ٢ إبحث في اتصال هـ(س) عند س = ١

هـ(س) = { س^٢ ، س < ١ ؛ ٣س + ١ ، س ≥ ١ }

	س^٢	٣س + ١
	١	

ق(١) = ٣×١ + ١
= ٣ + ١ = ٤

⊙ $\lim_{س \to 1^+}$ هـ(س) = (١)^٢ = ١

⊙ $\lim_{س \to 1^-}$ هـ(س) = ٣×١ + ١
= ٣ + ١ = ٤

$\lim_{س \to 1}$ هـ(س) غير موجودة

∴ هـ(س) غير متصل عند
س = ١

مثال ٣ إبحث في اتصال هـ(س) عند س = ٣

هـ(س) = { س^٢ - ٥ ، س ≥ ٣ ؛ س + ١ ، س < ٣ }

	س + ١	س^٢ - ٥
	٣	

هـ(٣) = ٣^٢ - ٥
= ٩ - ٥ = ٤

⊙ $\lim_{س \to 3^-}$ هـ(س) = (٣)^٢ - ٥ = ٩ - ٥ = ٤

⊙ $\lim_{س \to 3^+}$ هـ(س) = ٣ + ١ = ٤

$\lim_{س \to 3}$ هـ(س) = ٤

∴ هـ(س) متصل عند س = ٣

مثال ٤ إبحث في إتصال $هـ(س)$ عند $س = ٢$

$$هـ(س) = \begin{cases} س^٢ - ١ & ، س > ٢ \\ ٥ & ، س = ٢ \\ س + ٧ & ، س < ٢ \end{cases}$$

$س + ٧$ ⓐ $س^٢ - ١$

$ق(٢) = ٥$

① $\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = ٢ + ٧ = ٩$

② $\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = (٢)^٢ - ١ = ٤ - ١ = ٣$

$\Rightarrow \lim_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجودة

∴ $هـ(س)$ غير متصل عند $س = ٢$

مثال ٥ إبحث في إتصال $هـ(س)$ عند $س = ٣$

$$هـ(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٨س + ١٥} & ، س \neq ٣ \\ -٣ & ، س = ٣ \end{cases}$$

$ق(٣) = -٣$

① $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = \dfrac{(س + ٣)(س - ٣)}{(س - ٣)(س - ٥)}$

② $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = \dfrac{(س + ٣)}{(س - ٥)} = \dfrac{٦}{-٢} = -٣$

∴ $هـ(س)$ متصل عند $س = ٣$

مكتبة رم
اربد - المجمع الشمالي - 0274025552

الشرح المميز ... من الجلدة الى الجلدة ...

مع لؤي ابو لبدة ...

مثال ٦ إبحث في إتصال ل(س) عند س = ٢

$$هـ(س) = \begin{cases} س^2 - ٥ & ، س \leq ٢ \\ ١ & ، س = ٢ \\ ٣س - ٥ & ، س > ٢ \end{cases}$$

هـ(٢) = ١

- $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = (٢)^2 - ٥ = ٤ - ٥ = -١$
- $\lim_{س \to ٢^-} ف(س) = ٣ \times ٢ - ٥ = ٦ - ٥ = ١$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ = غير موجودة

∴ هـ(س) غير متصل عند س = ٢

مثال ٧ إبحث في إتصال هـ(س) عند س = ٣

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - ٩}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٦ & ، س = ٣ \end{cases}$$

ف(٣) = ٦

$$\lim_{س \to ٣} ق(س) = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)}$$

$$= س + ٣$$

$$= ٣ + ٣ = ٦$$

بما أن هـ(٣) = $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$

∴ هـ(س) متصل عند س = ٣

المبدع في الرياضيات ❖ لؤي أبو لبده ❖ 0785508870 0795421335

نظرية

إذا كان كل من الاقترانين ق ، هـ متصلاً عند س = أ
فإن كل من الآتية يكون متصلاً عند س = أ :

- ق + هـ
- ق − هـ
- ق × هـ
- $\frac{ق}{هـ}$ ، هـ(أ) ≠ صفر

مثال ق(س) = ٥ + ٢س ، هـ(س) = $\begin{cases} ٣س + ٤ & ، س < ٣ \\ س^٢ + ٤ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

وكان ل(س) = ق(س) + هـ(س)

ابحث في اتصال ل(س) عند س = ٣

ق(٣) = ٥ + ٢ × ٣ = ١١
$\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = ٥ + ٦ = ١١
∴ ق(س) متصل عند س = ٣
لأن ق(٣) = $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س)

نبحث في اتصال هـ(س) عند س = ٣

- هـ(٣) = ٣^٢ + ٤ = ١٣
- $\lim_{س \to ٣^-}$ هـ(س) = ١٣
- $\lim_{س \to ٣^+}$ هـ(س) = ١٣

$\lim_{س \to ٣^-}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ٣^+}$ هـ(س) = ١٣

∴ هـ(س) متصل عند س = ٣

هـ(٣) = $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س)

∴ ل(س) متصل عند س = ٣ لأنه « ناتج جمع متصلين »

مثال

$ق(س) = \sqrt{س^2 + 5}$

$هـ(س) = (2س - 1)^3$

وكان $ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$

إبحث إتصال ل(س) عند س = ٢

- $ق(٢) = \sqrt{٢^2 + 5} = \sqrt{9} = ٣$

  $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٣$

  ق(س) متصل عند س = ٢

- $هـ(س) = (٢ \times ٢ - ١)^3 = ٣^3 = ٢٧$

  $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٢٧$

  $\therefore$ هـ(س) متصل عند س = ٢

$\therefore$ ل(س) متصل عند س = ٢ "لأنه ناتج ضرب متصلين"

مثال

$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - ١}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٢س & ، س = ١ \end{cases}$

$هـ(س) = \begin{cases} ٢س^2 + ٣ & ، س < ١ \\ ٤س + ١ & ، س \geq ١ \end{cases}$

وكان $ل(س) = ق(س) - ٣ هـ(س)$

إبحث اتصال ل(س) عند س = ١

- نبحث اتصال ق(س) عندما س = ١
- ق(١) = ٢ × ١ = ٢
- $\lim_{س \to ١} ق(س) = \lim_{س \to ١} \frac{س^2 - ١}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)}$

$= ١ + ١ = ٢$

$ق(١) = \lim_{س \to ١} ق(س)$

$\therefore$ ق(س) متصل عند س = ١

- نبحث اتصال هـ(س) عند س = ١

هـ(١) = ٤ × ١ + ١ = ٥

- $\lim_{س \to ١^-} هـ(س) = ٥$
- $\lim_{س \to ١^+} هـ(س) = ٥$

$\lim_{س \to ١} هـ(س) = ٥$

هـ(١) = $\lim_{س \to ١} هـ(س)$

$\therefore$ هـ(س) متصل عند س = ١

$\therefore$ ٣هـ(س) متصل عند س = ١

$\therefore$ ل(س) متصل عند س = ١ لأنه ناتج جمع متصلين"

المبدع في الرياضيات ❖ لؤي أبو لبده ❖ 0785508870 0795421335

مثال $ق(س) = \begin{cases} س^3 + 5 & ، س \geq 1 \\ 6س + 4 & ، س < 1 \end{cases}$ ، $هـ(س) = \begin{cases} 9 & ، س \geq 1 \\ 5س^2 & ، س < 1 \end{cases}$

وكان $ل(س) = ق(س) + هـ(س)$

إبحث إتصال $ل(س)$ عند إتصال $س = 1$

بما أن $ق$ ، $هـ$ غير متصلين عند $س = 1$ ، لذلك نقوم بعملية الجمع .

$ل(س) = ق(س) + هـ(س) = \begin{cases} س^3 + 5 + 9 & ، س \geq 1 \\ 6س + 4 + 5س^2 & ، س < 1 \end{cases}$

$= \begin{cases} س^3 + 14 & ، س \geq 1 \\ 6س + 4 + 5س^2 & ، س < 1 \end{cases}$

المبدع 0795421335 لؤي ابو لبده

◉ $ل(1) = 6 + 4 + 5 = 15$

◉ $\lim_{س \to 1^+} ل(س) = 6 + 4 + 5 = 15$

◉ $\lim_{س \to 1^-} ل(س) = 1 + 14 = 15$

$\lim_{س \to 1} ل(س) = 15$

مكتبة رم
اربد - المجمع الشمالي - 0527402552

◉ $ل(1) = \lim_{س \to 1} ل(س)$

∴ $ل(س)$ متصل عند $س = 1$

مثال

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} ٣ & ، \ س > ٢ \\ ٥ & ، \ س = ٢ \\ -٣ & ، \ س < ٢ \end{cases} \quad ، \ \text{هـ}(س) = (س-٢)^{٢}$$

إبحث اتصال $\text{ق}(س) \times \text{هـ}(س)$ عند $س = ٢$

بما أن $\text{ق}(س)$ غير متصل عند $س = ٢$ ، لذلك نقوم بعملية الضرب :

$$\text{ل}(س) = \text{ق}(س) \times \text{هـ}(س) = \begin{cases} ٣(س-٢)^{٢} & ، \ س > ٢ \\ ٥(س-٢)^{٢} & ، \ س = ٢ \\ -٣(س-٢)^{٢} & ، \ س < ٢ \end{cases}$$

$$\text{ل}(٢) = ٥ \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \text{ل}(س) = \begin{cases} \text{نهـا}_{س \to ٢^{+}} \text{ل}(س) = -٣ \times \text{صفر} = \text{صفر} \\ \text{نهـا}_{س \to ٢^{-}} \text{ل}(س) = ٣ \times \text{صفر} = \text{صفر} \end{cases}$$

$$\text{ل}(س) = \text{نهـا}_{س \to ٢} \text{ل}(س)$$

$\therefore$ ل$(س)$ متصل عند $س = ٢$

متصل مع مجاهيل

مثال إذا علمت أن $هـ(س) = \begin{cases} س^2 + ٧ & ، س \leq -٢ \\ ٣س + ا & ، س > -٢ \end{cases}$

متصل عند $س = -٢$ ، فما قيمة الثابت $ا$ ؟

الحل

$هـ(-٢) = (-٢)^2 + ٧ = ٤ + ٧ = ١١$

$\lim_{س \to -٢^-} هـ(س) = (-٢)^2 + ٧ = ١١$

$\lim_{س \to -٢^+} هـ(س) = ٣ا - ٢$ علماً بأن $هـ(س)$ متصل عند $س = -٢$

$\therefore \lim_{س \to -٢^+} هـ(س) = \lim_{س \to -٢^-} هـ(س) = هـ(-٢)$

$\therefore ٣ا - ٢ = ١١ \Leftarrow \frac{ب}{د} = \frac{ا}{ج} \Leftarrow \frac{-٢ا}{-١} = \frac{-١١}{-١}$

$ا = ٥$

مثال $هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - ٦س}{س - ٦} & ، س \neq ٦ \\ ٣ا - ١٢ & ، س = ٦ \end{cases}$

جد $ا$ التي تجعل $ف(س)$ متصل عند $س = ٦$

الحل

$\lim_{س \to ٦} هـ(س) = ف(٦)$

$\lim_{س \to ٦} \frac{س^2 - ٦س}{س - ٦} = ٣ا - ١٢$

$\lim_{س \to ٦} \frac{س(س - ٦)}{س - ٦} = ٦ا - ١٢$

$٦ = ٦ا - ١٢$

$+١٢ \quad +١٢$

$١٨ = ٦ا$

$\frac{١٨}{٦} = \frac{٦ا}{٦}$

$ا = ٣$

مثال $\text{هـ}(س) = \begin{cases} س^2 - 5س & ، س > 3 \\ أ س + 9 & ، س \leq 3 \end{cases}$

جد قيمة أ التي تجعل هـ(س) متصل عند س = 3

∴ $\lim_{س \to 3^+} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to 3^-} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(3)$

$3 \times 5 - 3^2 = 9 + 3أ$

$15 - 9 = 9 + 3أ$

$6 = 9 + 3أ$

$-9 \quad -9$

$\frac{-15}{3} = \frac{3أ}{3} \Leftarrow$ **أ = −5**

مثال $\text{هـ}(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - 16}{2س - 8} & ، س \neq 4 \\ 3س + أ & ، س = 4 \end{cases}$

إذا علمت أن هـ(س) متصل عند س = 4 ، جد أ

∴ هـ(س) متصل

∴ $\lim_{س \to 4} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(4)$

$\lim_{س \to 4} \frac{س^2 - 16}{2س - 8} = 3 \times 4 + أ$

$\lim_{س \to 4} \frac{(س - 4)(س + 4)}{2(س - 4)} = 12 + أ$

$\frac{4 + 4}{2} = 12 + أ$

$4 = 12 + أ$

$-12 \quad -12$

أ = −8

مثال

$$هـ(س) = \begin{cases} أ س^{٣} + ب & ، س < ١ \\ ٧ & ، س = ١ \\ ٣ أ + ٣ س & ، س > ١ \end{cases}$$

إذا كان هـ(س) متصلاً عند س = ١ ، جد قيمة كل من
أ ، ب

الحل

$$\text{نها}_{س \to ١^-} هـ(س) = \text{نها}_{س \to ١^+} هـ(س) = ف(١)$$

$$\text{نها}_{س \to ١^-} أ س^{٣} + ٣ س = ٧$$

$$أ \times ١^{٣} + ٣ = ٧$$

$$أ + ٣ = ٧$$

$$-٣ \quad -٣$$

$$أ = ٤ \quad \therefore \quad \frac{أ^{٢}}{٢} = \frac{٤}{٢}$$

$$\boxed{أ = ٢}$$

$$\text{نها}_{س \to ١^+} هـ(س) = ف(١)$$

$$\text{نها} \; ٢ أ س^{٣} + ب = ٧$$

$$٢ أ \times ١^{٣} + ب = ٧$$

$$٢ أ + ب = ٧$$

$$٢ \times ٢ + ب = ٧$$

$$٤ + ب = ٧$$

$$-٤ \quad -٤$$

$$\boxed{ب = ٣} \Leftarrow$$

مكتبة رم
لربد - المجمع الشمالي - 027402552

مثال $هـ(س) = \begin{cases} أ س^2 - ب & ، س > 2 \\ 16 & ، س = 2 \\ 3أ + 1 & ، س < 2 \end{cases}$

اذا كان هـ(س) متصل عند س = 2 ، جد قيمة الثابت أ ، ب .

$$\text{نها}_{س \to 2^+} هـ(س) = \text{نها}_{س \to 2^-} هـ(س) = هـ(2)$$

⊙ $\text{نها}_{س \to 2^+} هـ(س) = هـ(2)$

$\text{نها}_{س \to 2^+} 3أ س + 1 = 16$

$3 \times أ \times 2 + 1 = 16$

$6أ + 1 = 16$

$-1 \quad -1$

$\frac{6أ}{6} = \frac{15}{6} \Leftarrow$ $\boxed{أ = \frac{5}{2}}$

⊙ $\text{نها}_{س \to 2^-} هـ(س) = هـ(2)$

$\text{نها}_{س \to 2^-} هـ(س) = هـ(2)$

$\text{نها}_{س \to 2^-} أ س^2 - ب = 16$

$4أ - ب = 16$

$4 \times \frac{5}{2} - ب = 16$ بالتعويض بـ $أ = \frac{5}{2}$

$10 - ب = 16$

$ب = 16 - 10$

$\boxed{ب = 6-}$

نقاط عدم الاتصال

- ق(س) غير متصل عند أصفار المقام
- أي كثير حدود متصل على جميع الأعداد الحقيقية
- انتبه للإقتران التشعبي عند نقطة التشعب لأنها قد تكون نقطة إنفصال.

مثال ف(س) = $\frac{٢}{س} + \frac{٧}{س-٣}$ ، جد نقطة عدم الإتصال

الحل بما أنه إقتران نسبي ، جد أصفار المقام والتي ستكون

س - ٣ = صفر ∴ $\boxed{س = ٣}$

∴ $\boxed{س = صفر}$

اذن ق(س) غير متصل عند {٠ ، ٣}

مثال إذا كان ف(س) = $\frac{س + ٧}{٣س + ٩}$ ، جد نقاط عدم الإتصال.

الحل بما أنه إقتران نسبي جد أصفار المقام

$٣س + ٩ = صفر$

$-٩ \quad -٩$

$\frac{٣س}{٣} = \frac{-٩}{٣}$

$\boxed{س = -٣}$ ∴ إذاً ق(س) غير متصل عند {-٣}

مثال $هـ(س) = س^3 + 2س - 1$ ، جد نقاط عدم الاتصال

الحل لا يوجد نقاط عدم اتصال ، و متصل على جميع الأعداد الحقيقية (كثير حدود)

مثال $هـ(س) = 6$ ، جد نقاط عدم الإتصال

الحل لا يوجد نقاط عدم اتصال لان $هـ(س)$ متصل على ح (كثير حدود) .

مثال $هـ(س) = \frac{س^2 - 4}{س + 5}$ ، جد نقاط عدم الاتصال

الحل نجد أصفار المقام

$س + 5 = صفر \Leftarrow \boxed{س = -5}$

إذاً $هـ(س)$ غير متصل عند $\{-5\}$.

مثال $ق(س) = \frac{2}{س^2 + 4}$ ، جد نقاط عدم الإتصال

الحل نجد أصفار المقام

$س^2 + 4 = صفر$

$س^2 = -4$

∴ لا يوجد قيم لـ س

* $هـ(س)$ متصل على جميع الأعداد الحقيقية ولا يوجد نقاط عدم الاتصال .

المبدع في الرياضيات ❖ لؤي أبو لبده ❖ 0785508870 0795421335

مثال $هـ(س) = \begin{cases} ٤س - ١ ، & س < ٥ \\ ٥س + ٢ ، & س \geq ٥ \end{cases}$

جد نقاط عدم الاتصال

الحل

نبحث في الإتصال عند نقطة التشعب

○ $\lim_{س \to ٥^+} هـ(س) = ٥س + ٢$

$= ٥ \times ٥ + ٢ = ٢٧$

○ $\lim_{س \to ٥^-} هـ(س) = ٤س - ١$

$= ٤ \times ٥ - ١ = ١٩$

∴ إذاً $\lim_{س \to ٥}$ هـ(س) غير موجودة

∴ هـ(س) غير متصل عند {٥}

النهايات هي البدايات ∴ تعلم من البسيط حتى الإحتمالات.