المعدلات المرتبطة بالزمن

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

* قوانين

① المربع:

مساحة المربع = (طول الضلع)^2

محيط المربع = ٤ × طول الضلع

② المستطيل:

مساحة المستطيل = الطول × العرض

محيط المستطيل = ٢ × الطول + ٢ × العرض

③ فيثاغورس:

ل^2 = س^2 + ص^2

④ المثلث

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × ضلع① × ضلع② × جا (الزاوية المحصورة)

⑤ المسافة بين نقطتين:

ف = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

⑥ المسافة بين نقطة ومستقيم

ف = $\frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$

⑦ متوازي المستطيلات:

حجم المتوازي = الطول × العرض × الارتفاع

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

⑧ المكعب:

حجم المكعب = (طول الضلع)^3

المساحة الجانبية = ٤ × (طول الضلع)^2

المساحة الكلية = ٦ × (طول الضلع)^2

⑨ الدائرة:

مساحة الدائرة = π نق^2

محيط الدائرة = ٢ π نق

⑩ الكرة

حجم الكرة = $\frac{4}{3}$ π نق^3

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^2

⑪ الاسطوانة:

حجم الاسطوانة = π نق^2 ع

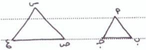
المساحة الجانبية = ٢ π نق ع

المساحة الكلية = ٢ π نق ع + ٢ π نق^2

⑫ المخروط:

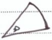
حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع

⑬ تشابه المثلثات



$\frac{أب}{س ص} = \frac{ب جـ}{ص ع} = \frac{أ جـ}{س ع}$

⑭ القطاع الدائري



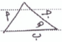
مساحة القطاع الدائري

= $\frac{1}{2}$ × نق^2 × هـ

طول القوس = نق × هـ

⑮ قانون جيب التمام

أ^2 = ب^2 + جـ^2 − ٢ ب جـ جتا هـ



مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

مثال

تتحرك نقطة على منحنى العلاقة
س² + ص² − ٥س + ٣ص − ٦ = صفر
فإذا كان معدل تغير احداثها السيني بالنسبة إلى الزمن ٣ سم/ث عند النقطة (١،٢)، فجد معدل تغير احداثها الصادي بالنسبة إلى الزمن عند النقطة نفسها.

الحل:

$$٢\text{س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دن}} - ٥ \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٣ \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠$$

$$\text{س} = ١ ، \text{ص} = ٢ ، \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٣$$

$$٢ \times ١ \times ٣ + ٢ \times ٢ \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}} - ٥ \times ٣ + ٣ \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠$$

$$٦ + ٤ \frac{\text{دص}}{\text{دن}} - ١٥ + ٣ \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠$$

$$-٩ + ٧ \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠$$

$$٧ \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٩$$

$$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{٩}{٧}$$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

٢٠١٣ صيفي

يتحرك جسم في المستوى البياني على منحنى العلاقة س² + ٣ص = ٦
إذا كان معدل تغير الاحداثي السيني للجسم عند س = ٥ يساوي ٣ وحدة/ث فإن معدل تغير الاحداثي الصادي بالوحدة/ث عند تلك اللحظة

أ) ١٠ $\boxed{\text{ب)}}$ −١٠ ج) −٨ د) $\frac{-١}{٣}$

الحل:

$$٢\text{س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٣ \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠$$

$$٢ \times ٥ \times ٣ + ٣ \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠$$

$$٣٠ + ٣ \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠$$

$$-٣٠ = ٣ \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{-٣٠}{٣} = -١٠$$

مثال

مكعب من الثلج يتناقص طول ضلعه بمعدل ٠,٠٠١ سم/ث جد معدل التغير في كل من حجمه ومساحته الكلية عندما يكون طول ضلعه ١٠ سم .

الحل :

طول الضلع : س   المساحة : م

الحجم : ح

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{-١}{١٠٠٠}$ س = ١٠

المطلوب : ① $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ ② $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

① ح = $\text{س}^٣$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٣\,\text{س}^٢ \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$= ٣ \times (١٠)^٢ \times \frac{-١}{١٠٠٠}$

$= ٣ \times ١٠٠ \times \frac{-١}{١٠٠٠} = \frac{-٣}{١٠}$

② م = ٦ $\text{س}^٢$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ١٢\,\text{س} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$= ١٢ \times ١٠ \times \frac{-١}{١٠٠٠} = \frac{-١٢}{١٠٠}$

مثال

قرص معدني دائري الشكل يتمدد بالحرارة محافظاً على شكله ، تزداد مساحة سطحه بمعدل ٦ سم²/ث ، جد معدل تغير طول نصف قطر القرص عندما يكون طول نصف قطره ٣ سم .

الحل:

دم/دن = ٦ ، نق = ٣

م = π نق²

دم/دن = ٢π نق دنق/دن

٦ = ٢π × ٣ × دنق/دن

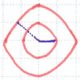
٦ = ٦π دنق/دن

⇐ دنق/دن = ٦/٦π = ١/π

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

مثال

دائرتان متحدتان في المركز طولا نصفي قطريهما ٥ سم ، ٢٠ سم ، ابتدأت الدائرة الصغرى تتسع بحيث يزداد طول نصف قطرها بمعدل ٢ سم/د وفي اللحظة نفسها أخذت الدائرة الكبرى تصغر بحيث يتناقص طول نصف قطرها بمعدل ١ سم/د جد معدل التغير في المساحة المحصورة بين الدائرتين في اللحظة التي تنطبق الدائرتان على بعضهما .



الحل:

م١ = π نق١²

م٢ = π نق٢²

نق١ = ٥ + ٢ن

نق٢ = ٢٠ − ن

م = π نق٢² − π نق١²

م = π (٢٠ − ن)² − π (٥ + ٢ن)²

عندما تنطبق الدائرتان يكون نق١ = نق٢

⇐ ٢٠ − ن = ٥ + ٢ن

١٥ = ٣ن

ن = ٥

⇐

دم/دن = ٢π (٢٠ − ن) × −١ − ٢π (٥ + ٢ن) × ٢

= ٢π × ١٥ × −١ − ٢π × ١٥ × ٢

= −٣٠π − ٦٠π

= −٩٠π .

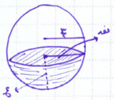
٢٠١٨ شتوي قديم

خزان ماء كروي الشكل طول نصف قطره ٣/٢ م صب فيه الماء فإذا كان معدل تغير ارتفاع الماء فيه ١/٥ م/د جد معدل تغير مساحة سطح الماء في الخزان بعد ٣ دقائق من بدء صب الماء .

الحل:

نق الكرة = ٣/٢

دع/دن = ١/٥



نق² + (٣/٢ − ع)² = (٣/٢)²

ع = ١/٥ × ٣ = ٣/٥

$\text{م} = \pi \, \text{نق}^2$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\pi \, \text{نق} \, \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$= ٢\pi \times \frac{١٢}{١٠} \times \frac{٣}{٢٠}$

$= \frac{٩\pi}{٢٥}$

$\text{نق}^2 + \left(\frac{٣}{٢} - \frac{٣}{٥}\right)^2 = \frac{٩}{٤}$

$\text{نق}^2 + \left(\frac{١٥-٦}{١٠}\right)^2 = \frac{٩}{٤}$

$\text{نق}^2 + \left(\frac{٩}{١٠}\right)^2 = \frac{٩}{٤}$

$\text{نق}^2 = \frac{٩}{٤} - \frac{٨١}{١٠٠}$

$\text{نق}^2 = \frac{٢٢٥ - ٨١}{١٠٠}$

$= \frac{١٤٤}{١٠٠}$

$\text{نق} = \frac{١٢}{١٠}$

$\text{نق}^2 + \left(\frac{٣}{٢} - \text{ع}\right)^2 = \frac{٩}{٤}$

$٢ \, \text{نق} \, \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} + ٢\left(\frac{٣}{٢} - \text{ع}\right)\left(\frac{-\text{دع}}{\text{دن}}\right) = ٠$

$٢ \times \frac{١٢}{١٠} \times \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} + ٢\left(\frac{٣}{٢} - \frac{٣}{٥}\right) \times \frac{-١}{٥} = ٠$

$\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{٣}{٢٠}$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

٢٠١٨ شتوي جديد

خزان ماء كروي الشكل طول نصف قطره ١ م صب فيه الماء فإذا كان معدل تغير ارتفاع الماء فيه $\frac{١}{٢}$ م/د جد معدل تغير مساحة سطح الماء في الخزان بعد دقيقتين من بدء صب الماء فيه .

الحل :

- نفس حل السؤال السابق

الجواب $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{\pi}{٤}$

عصام محمد الشيخ
ماجستير رياضيات

مثال

كرة من الجليد تنصهر بسبب الحرارة بحيث تبقى محافظة على شكلها إذا كان طول نصف قطرها يتناقص بمعدل ٠٫٠١ سم/ث فجد ما يلي

① معدل تناقص حجم الكرة عندما يكون طول نصف قطرها ١٠ سم.

② معدل تناقص مساحة سطح الكرة عندما يكون طول نصف قطرها ٥ سم.

الحل:

①
$$ح = \frac{٤\pi}{٣} نق^{٣}$$
$$\frac{دح}{دن} = ٤\pi\ نق^{٢}\ \frac{دنق}{دن}$$
$$= ٤\pi (١٠)^{٢} \times \frac{-١}{١٠٠}$$
$$= ٤\pi \times ١٠٠ \times \frac{-١}{١٠٠} = -٤\pi$$

②
$$م = ٤\pi\ نق^{٢}$$
$$\frac{دم}{دن} = ٤ \times \pi \times ٢\ نق\ \frac{دنق}{دن}$$
$$= ٨ \times \pi \times ٥ \times \frac{-١}{١٠٠}$$
$$= \frac{-٤٠\pi}{١٠٠} = \frac{-٢\pi}{٥}$$

٢٠١٠ شتوي

يضخ غاز داخل بالون كروي بمعدل ١٢٥ سم^٣^/ث جد معدل الزيادة في مساحة سطح البالون عندما يكون طول قطر البالون ١٠ سم.

الحل:
$$ح = \frac{٤}{٣}\pi\ نق^{٣}$$
$$\frac{دح}{دن} = ٤\pi\ نق^{٢}\ \frac{دنق}{دن}$$
$$١٢٥ = ٤\pi \times ٢٥ \times \frac{دنق}{دن}$$
$$\Leftarrow \frac{دنق}{دن} = \frac{١٢٥}{١٠٠\pi}$$

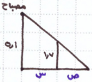
الآن
$$م = ٤\pi\ نق^{٢}$$
$$\frac{دم}{دن} = ٨\pi\ نق\ \frac{دنق}{دن}$$
$$= ٨\pi \times ٥ \times \frac{١٢٥}{١٠٠\pi}$$
$$= \frac{٥٠٠}{١٠} = ٥٠ \text{ سم}^{٢}/\text{ث}.$$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

مثال

رجل طوله ١,٧ م يسير على أرض مستوية بسرعة ٢ م/ث مبتعداً عن عمود كهرباء في قمته مصباح يرتفع ٥,١ أمتار عن سطح الأرض جد معدل تغير طول ظل الرجل.

الحل:



ص : ظل الرجل

$\frac{دس}{دن} = 2$

المطلوب: $\frac{دص}{دن}$

من تشابه المثلثات

$\frac{5.1}{1.7} = \frac{س + ص}{ص}$

$5.1\, ص = 1.7\, س + 1.7\, ص$

$5.1\, ص - 1.7\, ص = 1.7\, س$

$3.4\, ص = 1.7\, س$

$3.4 \frac{دص}{دن} = 1.7 \frac{دس}{دن}$

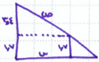
$\cancel{3.4} \frac{دص}{دن} = \cancel{1.7} \times \cancel{2}$

$\Leftarrow \frac{دص}{دن} = 1$

مثال

في المثال السابق جد معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٣ متر عن عمود الكهرباء

الحل:



$\frac{دس}{دن} = 2$

مطلوب $\frac{دص}{دن}$ عندما $س = 3$

$ص^2 = س^2 + (3.4)^2$

$ص = \sqrt{س^2 + (3.4)^2}$

$\frac{دص}{دن} = \frac{\cancel{2} س \frac{دس}{دن}}{\cancel{2}\sqrt{س^2 + (3.4)^2}}$

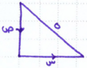
$= \frac{3 \times 2}{\sqrt{9 + (3.4)^2}}$

$= \frac{6}{\sqrt{20.56}}$ م/ث .

مثال

يرتكز سلم طوله ٥ أمتار بطرفه العلوي على حائط عمودي وبطرفه السفلي على أرض مستوية إذا تحرك الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل ½ م/ث فجد سرعة انخفاض الطرف العلوي للسلم عندما يكون طرفه السفلي على بعد ٣ م عن الحائط

الحل:



$\frac{دس}{دن} = \frac{1}{2}$

$س = 3$

$\frac{دص}{دن}$ ؟؟

$(5)^2 = س^2 + ص^2$

$0 = 2س \frac{دس}{دن} + 2ص \frac{دص}{دن}$

عندما س = ٣ فإن

$\text{٢٥} = \text{٩} + \text{ص}^2$

$\text{ص}^2 = \text{١٦}$

$\Leftarrow \text{ص} = \text{٤}$

$\Leftarrow$

$\text{٠} = \text{٢} \times \text{٣} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} + \text{٢} \times \text{٤} \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

$\text{٠} = \text{٣} + \text{٨} \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

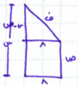
$-\text{٣} = \text{٨} \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{-\text{٣}}{\text{٨}}$

مثال

مصعدان كهربائيان مستقران في الطابق الأرضي المسافة الأفقية بينهما ٨ أمتار بدأ المصعد الأول يرتفع إلى الأعلى بسرعة ٢م/ث وبعد ثانيتين بدأ المصعد الثاني في الارتفاع بسرعة ١م/ث . جد معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد ثانيتين من بدء حركة المصعد الثاني .

الحل:



$\text{ف}^2 = \text{٨}^2 + (\text{س} - \text{ص})^2$

$\text{ف} = \sqrt{\text{٦٤} + (\text{س} - \text{ص})^2}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{\cancel{\text{٢}}(\text{س} - \text{ص})\left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}} - \frac{\text{دص}}{\text{دن}}\right)}{\cancel{\text{٢}}\sqrt{\text{٦٤} + (\text{س} - \text{ص})^2}}$

س = ٤ × ٢ = ٨

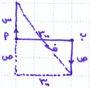
ص = ٢ × ١ = ٢

$= \frac{(\text{٨} - \text{٢})(\text{٢} - \text{١})}{\sqrt{\text{٦٤} + (\text{٨} - \text{٢})^2}} = \frac{\text{٦}}{\sqrt{\text{١٠٠}}} = \frac{\text{٦}}{\text{١٠}}$

٢٠٠٨ شتوي

انطلق شخص من النقطة م متجهاً شمالاً راكباً دراجة هوائية تسير بسرعة ٦ م/ث وبعد ٣٠ ثانية ومن النقطة ب الواقعة على بعد ٣٠م شرق النقطة م انطلق شخص ثانٍ متجهاً جنوباً راكباً دراجة هوائية تسير بسرعة ٥ م/ث جد معدل تغير المسافة بين الدراجتين بعد ٢٠ ثانية من انطلاق الدراجة الثانية.

الحل:



$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ؟$

$\text{ن} = \text{٢٠}$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

$\text{س} = (\text{ن} + \text{٣٠}) \times \text{٦}$

$\text{ص} = \text{٥ن}$

$\text{ف}^2 = (\text{٣٠})^2 + (\text{س} + \text{ص})^2$

$\text{ف}^2 = \text{٩٠٠} + (\text{٦ن} + \text{١٨٠} + \text{٥ن})^2$

$\text{ف}^2 = \text{٩٠٠} + (\text{١١ن} + \text{١٨٠})^2$

$\text{ف} = \sqrt{\text{٩٠٠} + (\text{١١ن} + \text{١٨٠})^2}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{\cancel{\text{٢}}(\text{١١ن} + \text{١٨٠})}{\cancel{\text{٢}}\sqrt{\text{٩٠٠} + (\text{١١ن} + \text{١٨٠})^2}}$

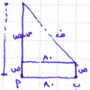
$= \frac{\text{١١} \times \text{٢٠} + \text{١٨٠}}{\sqrt{\text{٩٠٠} + (\text{١١} \times \text{٢٠} + \text{١٨٠})^2}}$

$=$

٢٠١٠ صيفي

قاربان ا، ب المسافة الأفقية بينهما ٨٠ م بدأ القارب ا بالحركة بسرعة ٢٠م/ث وبعد ثانيتين بدأ القارب ب بالحركة في خط موازٍ للقارب ا وبنفس الاتجاه بسرعة ١٠م/ث جد معدل التغير في المسافة بين القاربين بعد ٤ ثوانٍ من انطلاق القارب ا

الحل:



$$ف^٢ = (٨٠)^٢ + (س - ص)^٢$$

$$ف = \sqrt{٦٤٠٠ + (س-ص)^٢}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{\cancel{٢}(س-ص)\left(\frac{دس}{دن} - \frac{دص}{دن}\right)}{\cancel{٢}\sqrt{٦٤٠٠+(س-ص)^٢}}$$

$س = ٢٠ \times ٤ = ٨٠$

$ص = ١٠ \times ٢ = ٢٠$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{(٨٠-٢٠)(٢٠-١٠)}{\sqrt{٦٤٠٠ + (٨٠-٢٠)^٢}}$$

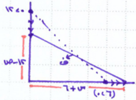
$$= \frac{٦٠ \times ١٠}{\sqrt{٣٦٠٠ + ٦٤٠٠}}$$

$$= \frac{٦٠٠}{١٠٠} = ٦$$

٢٠١٣ شتوي

بدأت نقطة مادية الحركة من النقطة ا(٦،٠) على محور السينات متبعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٣ سم/ث وفي اللحظة نفسها بدأت نقطة أخرى الحركة من النقطة ب(١٢،٠) على محور الصادات مقتربة من نقطة الأصل بسرعة ٢ سم/ث جد معدل تغير المسافة بين النقطتين المتحركتين عندما تكون النقطة المتحركة على محور الصادات على بعد ٨ سم من نقطة الأصل

الحل:



$$ف = \sqrt{(س+٦)^٢ + (١٢-ص)^٢}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{\cancel{٢}(س+٦)\frac{دس}{دن} + \cancel{٢}(١٢-ص)\left(-\frac{دص}{دن}\right)}{\cancel{٢}\sqrt{(س+٦)^٢ + (١٢-ص)^٢}}$$

عندما تكون النقطة الثانيه على بعد ٨
$س = ٦$ ، $ص = ٤$

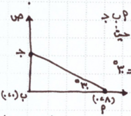
عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

$$= \frac{١٢ \times ٣ + ٨ \times -٢}{\sqrt{١٢^٢ + ٨^٢}}$$

$$= \frac{٣٦ - ١٦}{\sqrt{١٤٤ + ٦٤}} = \frac{٢٠}{\sqrt{٢٠٨}}$$

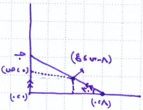
٢٠١٥ شتوي

الشكل يمثل المثلث اب جـ المرسوم في المستوى حيث ا(٨،٠) ، ب(٠،٠) قياس الزاوية ب ا جـ = ٣٠° بدأت نقطة الحركة من ا على الضلع ا جـ باتجاه جـ وبسرعة مقدارها ٢ سم/ث وبنفس اللحظة بدأت نقطة أخرى بالحركة من ب على الضلع ب جـ باتجاه جـ وبسرعة مقدارها ٣ سم/ث جد معدل تغير بعد النقطتين المتحركتين عن بعضهما بعد



ثانيه واحدة من بدء حركتهما.

الحل:



$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = 2$

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 3$

بعد ثانيه ص = ٣

ف = المسافة بين نقطتين (٨-س،ع)،(٠،ص)

$\text{ف} = \sqrt{(8-\text{س}-0)^2 + (\text{ع}-\text{ص})^2}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{\cancel{2}(8-\text{س})\times -\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + \cancel{2}(\text{ع}-\text{ص})\left(\frac{\text{دع}}{\text{دن}} - \frac{\text{دص}}{\text{دن}}\right)}{\cancel{2}\sqrt{(8-\text{س})^2 + (\text{ع}-\text{ص})^2}}$

$= \frac{(8-\sqrt{3})\times -\sqrt{3} + (1-3)(1-3)}{\sqrt{(8-\sqrt{3})^2 + (1-3)^2}}$

$= \frac{3 - 8\sqrt{3} + 4}{\sqrt{(8-\sqrt{3})^2 + 4}}$

$= \frac{7 - 8\sqrt{3}}{\sqrt{(8-\sqrt{3})^2 + 4}}$

$\text{جا}\,30 = \frac{\text{ع}}{\text{ل}}$

$\frac{\text{ع}}{\text{ل}} = \frac{1}{2}$

$\text{ل} = 2\text{ع}$

$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = 2\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

بعد ثانيه ل = ٢

⟸ ع = ١

$\text{جتا}\,30 = \frac{\text{س}}{\text{ل}}$

$\frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{ل} = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{س}$

$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

بعد ثانية ل = ٢

⟸ $\text{س} = \sqrt{3}$

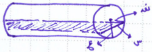
$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = 2 \leftarrow \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = 1$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \sqrt{3}$

٢٠١٥ صيفي

يجري الماء في أنبوب أفقي اسطواني الشكل طوله ١٠م وطول نصف قطره يساوي ٢٥سم فإذا كان عمق الماء في الأنبوب يتناقص بمعدل ٣ سم/د فجد معدل التغير في مساحة سطح الماء العلويا في الأنبوب عندما يكون عمق الماء ١٨ سم.

الحل:



عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

طول الاسطوانه ١٠م = ١٠٠٠ سم

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -3$ سم/د ، ع = ١٨

نق = ٢٥

$(25)^2 = \text{س}^2 + (25-\text{ع})^2$

$\cancel{625} = \text{س}^2 + \cancel{625} - 50\text{ع} + \text{ع}^2$

$\text{س}^2 = 50\text{ع} - \text{ع}^2$

مساحة سطح الماء = الطول × العرض

$= 1000 \times 2\text{س}$

$\text{م} = 1000 \times 2\sqrt{50\text{ع} - \text{ع}^2}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{2000 \times (50 - 2\text{ع})\frac{\text{دع}}{\text{دن}}}{2\sqrt{50\text{ع} - \text{ع}^2}}$

$= \frac{1000(50-36)\times -3}{\sqrt{50\times 18 - (18)^2}}$

$= \frac{1000 \times -42}{\sqrt{900 - 324}} = \frac{1000\times -42}{\sqrt{576}}$

$= \frac{1000\times -42}{24} = -1750$ سم²/د

٢٠١٧ صيفي

مصعدان كهربائيان مستقران في الطابق الأرضي المسافة الأفقية بينهما ٨م ، بدأ المصعد الأول في الارتفاع للأعلى بسرعة ٣م/ث وبعد ثانية بدأ المصعد الثاني في الانخفاض للأسفل بسرعة ٢م/ث جد معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد ثانيتين من بدء حركة المصعد الثاني .

الحل :

$$\text{ف}^{٢} = (\text{س}+\text{ص})^{٢} + (٨)^{٢}$$

$$\text{ص} = ٢ \times ٢ = ٤$$

$$\text{س} = ٣ \times ٣ = ٩$$

$$\text{ف} = \sqrt{(\text{س}+\text{ص})^{٢} + ٦٤}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{\cancel{٢}(\text{س}+\text{ص})\left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + \frac{\text{دص}}{\text{دن}}\right)}{\cancel{٢}\sqrt{(\text{س}+\text{ص})^{٢} + ٦٤}}$$

$$= \frac{(٩+٤)(٣+٢)}{\sqrt{(٩+٤)^{٢} + ٦٤}}$$

$$= \frac{١٣ \times ٥}{\sqrt{١٦٩ + ٦٤}} = \frac{٦٥}{\sqrt{٢٣٣}}$$

عصام الشيخ
عمان طربور
جامعة آل البيت
0796300625

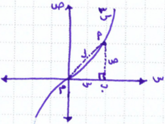
مثال

بدأت النقطتان م، ب الحركة معاً من نقطة الأصل م بحيث تتحرك النقطة ب على المحور السيني الموجب مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٢ سم/ث وتتحرك النقطة م في الربع الأول على منحنى الاقتران ق(س) = س³ بحيث تبقى $\overline{\text{م ب}}$ دائماً عمودية على محور السينات الموجب جد:

① معدل التغير في مساحة المثلث م ب م بعد ثانية من بدء الحركة.

② معدل التغير في طول وتر المثلث م ب م بعد ثانية واحدة من بدء الحركة

الحل:



① $م = \frac{١}{٢} \times س \times ص$

$م = \frac{١}{٢} \times س \times س^{٣}$

$م = \frac{١}{٢} س^{٤}$

$\frac{دم}{دن} = ٢ س^{٣} \frac{دس}{دن}$

$= ٢ \times ٢^{٣} \times ٢$

$= ٣٢$ سم²/ث.

س = السرعة × الزمن

$= ٢ \times ١$

$= ٢$

② $ل^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}$

$ل^{٢} = س^{٢} + (س^{٣})^{٢}$

$ل^{٢} = س^{٢} + س^{٦}$

$\Leftarrow ل = \sqrt{س^{٢} + س^{٦}}$

$\frac{دل}{دن} = \frac{(٢س + ٦س^{٥}) \frac{دس}{دن}}{٢\sqrt{س^{٤} + س^{٦}}}$

$= \frac{(٢\times٢ + ٦\times٢^{٥})\times٢}{٢\sqrt{٢^{٢} + ٢^{٦}}}$

$= \frac{(٤ + ١٩٢)\times\cancel{٢}}{\cancel{٢}\sqrt{٤+٦٤}}$

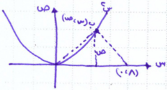
$= \frac{١٩٦}{\sqrt{٦٨}}$ سم/ث.

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

٢٠٠٩ شتوي

تتحرك نقطة مادية ب على منحنى الاقتران ص = س² في الربع الأول بادئة من نقطة الأصل م فإذا كان الاحداثي السيني للنقطة ب يتزايد بمعدل ٢ وحدة/ث وكانت ج نقطة ثابتة احداثياتها (٨، ٠) جد معدل تغير مساحة المثلث م ب ج بعد ٢ ثانية من بدء حركة النقطة ب.

الحل:



$م = \frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{١}{٢} \times ٨ \times ص$

$م = ٤ س^{٢}$

ن = ٢

$\Leftarrow س = ٢ \times ٢ = ٤$

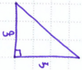
$\frac{دم}{دن} = ٨ س \frac{دس}{دن}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٨ \times ٤ \times ٢ = ٦٤$.

٢٠٠٩ صيفي

في لحظة ما كان طولا ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية ١٢ سم ، ١٦ سم فإذا كان طول الضلع الأول يزداد بمعدل ٢سم/ث وطول الضلع الثاني ينقص بمعدل ١ سم/ث بحيث أن المثلث يبقى محافظاً على شكله فجد معدل التغير في مساحة المثلث بعد ٢ ثانية من تلك اللحظة .

الحل :



س = ١٢

ص = ١٦

س = ١٢ + ٢ن

ص = ١٦ − ن

$\text{م} = \frac{1}{2} \times \text{س} \times \text{ص}$

$\text{م} = \frac{1}{2} (١٢ + ٢\text{ن})(١٦ - \text{ن})$

$\text{م} = (٦ + \text{ن})(١٦ - \text{ن})$

$\text{م} = ٩٦ - ٦\text{ن} + ١٦\text{ن} - \text{ن}^2$

$\text{م} = ٩٦ + ١٠\text{ن} - \text{ن}^2$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ١٠ - ٢\text{ن}$

$= ١٠ - ٢ \times ٢ = ١٠ - ٤ = ٦$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

مثال

انطلقت سفينتان من الميناء نفسه في اتجاهين مختلفين على شكل خطين مستقيمين قياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، إذا كانت سرعة الأولى ٣٠ كم/س وسرعة الثانية ٤٠ كم/س فجد معدل تغير البعد بينهما عندما يكون بعداهما عن نقطة الانطلاق ٦ كم ، ٨ كم على الترتيب

الحل :

$$\text{ف}^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2 - ٢\,\text{س ص جتا}\,١٢٠$$

$$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2 - ٢\,\text{س ص} \times \frac{-١}{٢}}$$

$$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{س ص}}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٢\text{س}\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دن}} + \text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دن}} + \text{ص}\frac{\text{دس}}{\text{دن}}}{٢\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{س ص}}}$$

$$= \frac{٢ \times ٦ \times ٣٠ + ٢ \times ٨ \times ٤٠ + ٦ \times ٤٠ + ٨ \times ٣٠}{٢\sqrt{٣٦ + ٦٤ + ٦ \times ٨}}$$

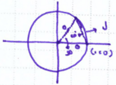
$$= \frac{٣٦٠ + ٦٤٠ + ٢٤٠ + ٢٤٠}{٢\sqrt{١٤٨}}$$

$$= \frac{٧٤٠}{\sqrt{١٤٨}}$$

مثال

بدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها نقطة الأصل من النقطة (٥،٠) باتجاه عكس عقارب الساعة بحيث يزداد طول القوس الدائري الذي ترسمه النقطة في أثناء حركتها بمعدل ١٠ سم/ث ، جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقطة (٥،٠) عندما يقابل القوس الذي ترسمه النقطة زاوية مركزية مقدارها $\frac{\pi}{٣}$ راد

الحل :



$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = ١٠$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ؟$ ، $\text{هـ} = \frac{\pi}{٣}$

$$\text{ف}^2 = ٥^2 + ٥^2 - ٢ \times ٥ \times ٥ \times \text{جتاهـ}$$

$$\text{ف} = \sqrt{٥٠ - ٥٠\,\text{جتاهـ}}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٥٠\,\text{جاهـ} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}}{٢\sqrt{٥٠ - ٥٠\,\text{جتاهـ}}}$$

$$= \frac{٥٠ \times \text{جا}\frac{\pi}{٣} \times ٢}{٢\sqrt{٥٠ - ٥٠\,\text{جتا}\frac{\pi}{٣}}}$$

$$= \frac{٥٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٢}{٢\sqrt{٥٠ - ٥٠ \times \frac{١}{٢}}}$$

$$= \frac{٥٠\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢٥}}$$

$$= \frac{٢٥\sqrt{٣}}{٥}$$

$$= ٥\sqrt{٣}$$

$\text{ل} = \text{نق} \times \text{هـ}$

$\text{ل} = ٥ \times \text{هـ}$

$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = ٥\,\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$

$١٠ = ٥\,\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$

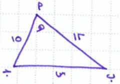
$\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = ٢$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

٢٠١٣ صيفي

أ ب جـ مثلث فيه أب = ١٢ سم ، أجـ = ١٥ سم ، يزداد قياس الزاوية ب أ جـ بمعدل $\frac{\pi}{٩٠}$ راد/ث جد معدل تغير طول الضلع ب جـ عندما يكون قياس الزاوية ب أ جـ يساوي $\frac{\pi}{٣}$ راد

الحل :



عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

$س^2 = ١٢^2 + ١٥^2 - ٢ \times ١٢ \times ١٥ \times \text{جتا}هـ$

$س = \sqrt{١٤٤ + ٢٢٥ - ٣٦٠ \,\text{جتا}هـ}$

$\frac{دس}{دن} = \frac{-٣٦٠ \,\text{جا}هـ \,\frac{دهـ}{دن}}{٢\sqrt{٣٦٩ - ٣٦٠ \,\text{جتا}هـ}}$

$= \frac{+ ٣٦٠ \times \text{جا}\frac{\pi}{٣} \times \frac{\pi}{٩٠}}{٢\sqrt{٣٦٩ - ٣٦٠ \times \text{جتا}\frac{\pi}{٣}}}$

$= \frac{٣٦٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\pi}{٩٠}}{٢\sqrt{٣٦٩ - ٣٦٠ \times \frac{١}{٢}}}$

$= \frac{\frac{٤\sqrt{٣}\,\pi}{٢}}{٢\sqrt{٣٦٩ - ١٨٠}}$

$= \frac{٢\sqrt{٣}\,\pi}{٢\sqrt{١٨٩}} = \frac{\sqrt{٣}\,\pi}{\sqrt{١٨٩}}$

٢٠١٣ صيفي

انطلق قاربان من نفس النقطه في اتجاهين مختلفين قياس الزاوية بينهما ١٢٠° إذا كانت سرعة الأول ٨كم/س وسرعة الثاني ٦كم/س فجد معدل تغير المسافة بينهما بعد مرور نصف ساعه من انطلاقهما .

الحل :

$\frac{دس}{دن} = ٨ \qquad س = ٤$

$\frac{دص}{دن} = ٦ \quad \leftarrow \quad ص = ٣$

$ف = \sqrt{س^2 + ص^2 - ٢ س ص \,\text{جتا}١٢٠}$

$ف = \sqrt{س^2 + ص^2 + س ص}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن} + \left(س \frac{دص}{دن} + ص \frac{دس}{دن}\right)}{٢\sqrt{س^2 + ص^2 + س ص}}$

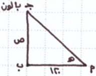
$= \frac{٢ \times ٤ \times ٨ + ٢ \times ٣ \times ٦ + (٤ \times ٦ + ٣ \times ٨)}{٢\sqrt{١٦ + ٩ + ٣ \times ٤}}$

$= \frac{٦٤ + ٣٦ + (٢٤ + ٢٤)}{٢\sqrt{٢٥ + ١٢}}$

$= \frac{١٠٠ + ٤٨}{٢\sqrt{٣٧}} = \frac{١٤٨}{٢\sqrt{٣٧}} = \frac{٧٤}{\sqrt{٣٧}}$

مثال

يرتفع بالون رأسياً إلى أعلى بمعدل ثابت قدره ٤٠ م/د رصده مشاهد يقف على الأرض ويبعد ١٢٠ م عن موقع البالون على الأرض جد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للبالون عندما يكون البالون على ارتفاع ١٢٠م عن سطح الأرض.



الحل:

$\frac{دص}{دن} = ٤٠$

المطلوب $\frac{دهـ}{دن}$ عندما ص = ١٢٠

$ظاهـ = \frac{ص}{١٢٠}$

$قا^2هـ \frac{دهـ}{دن} = \frac{1}{١٢٠} \frac{دص}{دن}$

عندما ص = ١٢٠

$ظاهـ = \frac{١٢٠}{١٢٠} = ١$

$قا^2هـ = ١ + ظا^2هـ$

$= ١ + ١$

$= ٢$

$٢ \frac{دهـ}{دن} = \frac{1}{١٢٠} \times ٤٠$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{1}{٢} \times \frac{٤٠}{١٢٠}$

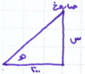
$\frac{دهـ}{دن} = \frac{٢}{١٢} = \frac{1}{٦}$

مثال

أطلق صاروخ عمودياً لأعلى بسرعة ١٠٠م/ث وعلى بعد ٢٠٠ م من نقطة الانطلاق للصاروخ كان مشاهد جالساً على الأرض ينظر إلى الصاروخ، جد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد عندما يكون الصاروخ على ارتفاع ٤٠٠م من سطح الأرض

الحل:

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625



$ظاهـ = \frac{س}{٢٠٠}$

$قا^2هـ \frac{دهـ}{دن} = \frac{1}{٢٠٠} \frac{دس}{دن}$

$٥ \times \frac{دهـ}{دن} = \frac{1}{٢٠٠} \times \frac{دس}{دن}$

$٥ \times \frac{دهـ}{دن} = \frac{1}{٢٠٠} \times ١٠٠$

$٥ \frac{دهـ}{دن} = \frac{1}{٢}$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{1}{٢} \times \frac{1}{٥}$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{1}{١٠}$

عند س = ٤٠٠

$ظاهـ = \frac{٤٠٠}{٢٠٠}$

ظاهـ = ٢

$١ + ظا^2هـ = قا^2هـ$

$١ + ٤ = قا^2هـ$

$٥ = قا^2هـ$

٢٠١١ شتوي

سلم طوله ٥م يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي وبطرفه السفلي على أرض أفقية إذا انزلق الطرف السفلي للسلم مبتعداً عن الحائط بمعدل ٢م/ث فجد سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض عندما يكون طرفه السفلي على بعد ٣ م عن الحائط.

الحل:

$جتاهـ = \frac{س}{٥}$

$-جاهـ \frac{دهـ}{دن} = \frac{1}{٥} \frac{دس}{دن}$

رياضيات (العلمي) الوحدة (تطبيقات التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (المعدلات المرتبطة بالزمن) ماجستير رياضيات

$س = ٣$

$جتاهـ = \frac{٣}{٥}$

$جا^2هـ + جتا^2هـ = ١$

$جا^2هـ + \frac{٩}{٢٥} = ١$

$جا^2هـ = \frac{١٦}{٢٥}$

$جاهـ = \frac{٤}{٥}$

$-\frac{٤}{٥} \frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{٥} \times ٢$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{-٢}{٥} \times \frac{٥}{٤}$

$\frac{دهـ}{دن} = -\frac{١}{٢}$ راد/ث

٢٠١٣ شتوي

سلم طوله ١٣ متر يرتكز طرفه العلوي على حائط عمودي وطرفه السفلي على أرض أفقية اذا انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل ٠٫١ م/ث فما معدل التغير في قياس الزاوية المحصورة بين الطرف السفلي للسلم وسطح الأرض في اللحظة التي يكون فيها طرفه العلوي على ارتفاع ١٢ م عن سطح الارض.

الحل:

$ص = ١٢$ ، $\frac{دهـ}{دن} = ؟؟$

$جتاهـ = \frac{س}{١٣}$

$-جاهـ \frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{١٣} \frac{دس}{دن}$

$جاهـ = \frac{١٢}{١٣}$

$-\frac{١٢}{١٣} \frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{١٣} \times \frac{١}{١٠}$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{١٣ \times ١٠} \times \frac{-١٣}{١٢}$

$= \frac{-١}{١٢٠}$

٢٠١٤ شتوي

يقف رجل طوله (١٫٨) م أمام مصباح كهربائي مثبت على عمود ارتفاعه عن سطح الأرض (٥٫٤) م إذا أخذ الرجل بالاقتراب من قاعدة العمود بمعدل ٢ م/ث فجد معدل التغير في الزاوية المحصورة بين العمود الذي يحمل المصباح والشعاع الواصل بين المصباح ورأس الرجل عندما يكون الرجل على بعد ١٫٨ م من قاعدة العمود

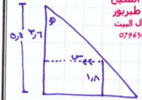
الحل:

$\frac{دهـ}{دن} = ؟؟$

$س = ١٫٨$

$\frac{دس}{دن} = -٢$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625



$ظاهـ = \frac{س}{٣٫٦}$

$قا^2هـ \frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{٣٫٦} \times \frac{دس}{دن}$

$ظاهـ = \frac{س}{٣٫٦} = \frac{١٫٨}{٣٫٦} = \frac{١}{٢}$

$\frac{٥}{٤} \frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{٣٫٦} \times -٢$

$١ + ظا^2هـ = قا^2هـ$

$١ + \frac{١}{٤} = قا^2هـ$

$\frac{٥}{٤} = قا^2هـ$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{-٢}{٣٫٦} \times \frac{٤}{٥}$

$= \frac{-٨}{١٨}$

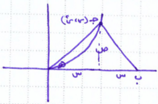
$= \frac{-٤}{٩}$

٢٠١٧ شتوي

بدأت النقطتان ب، جـ الحركة معاً من نقطة الأصل م بحيث تتحرك النقطة ب على محور السينات الموجب متبعدة عن نقطة الأصل وتتحرك النقطة جـ في الربع الأول على منحنى الاقتران ق(س) = $س^2$ بحيث يبقى طول مجـ يساوي طول ب جـ وكان معدل تغير الزاوية هـ المحصورة بين محور السينات الموجب

والمستقيم م ج يساوي $\frac{1}{2}$ راد/ث فجد معدل التغير في المساحة للمثلث م ب ج.

الحل:



م = $\frac{1}{2}$ × ٢س × ص

م = س × س

م = $س^٢$

$\frac{دم}{دن}$ = ٣ $س^٢$ $\frac{دس}{دن}$

= ٣ × ٣ × ٢

= ٩ × ٢

= ١٨

هـ = $\frac{\pi}{٣}$

ظاهـ = $\sqrt{٣}$

قا²هـ = ظا²هـ + ١

= ٣ + ١

= ٤

ظاهـ = $\frac{ص}{س}$

ظاهـ = س

قا²هـ $\frac{دهـ}{دن}$ = $\frac{دس}{دن}$

٤ × $\frac{1}{2}$ = $\frac{دس}{دن}$

٢ = $\frac{دس}{دن}$

س = ظا $\frac{\pi}{٣}$

س = $\sqrt{٣}$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

مثال

مثلث متطابق الضلعين طول كل من ضلعيه المتطابقين ٨ سم يزداد قياس الزاوية المحصورة بينهما ٢°/ د جد معدل التغير في مساحة المثلث في الحالات التالية :

① عندما يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٠°

② عندما يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما ١٢٠°.

الحل :

$\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = ٢$

$\text{م} = \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٨ \times \text{جاهـ}$

$\text{م} = ٣٢ \ \text{جاهـ}$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٣٢ \ \text{جتاهـ} \ \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$

① $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٣٢ \times \text{جتا} ٦٠^\circ \times ٢$

$= ٣٢ \times \frac{١}{٢} \times ٢ = ٣٢ \ \text{سم}^٢/\text{د}$

② $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٣٢ \times \text{جتا} ١٢٠^\circ \times ٢$

$= ٣٢ \times \frac{-١}{٢} \times ٢ = -٣٢ \ \text{سم}^٢/\text{د}$

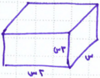
رياضيات (العلمي) الوحدة (تطبيقات التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (المعدلات المرتبطة بالزمن) ماجستير رياضيات

٢٠١٦ صيفي

صندوق معدني على شكل متوازي مستطيلات طوله مثلي عرضه وارتفاعه ٣ أمثال عرضه يتمدد بالحرارة محافظاً على شكله بحيث يزداد حجمه بمعدل ٧٢ سم³/د جد معدل التغير في مساحة سطحه الكلي عندما يكون طوله ٣٦سم

الحل:



$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٧٢$

$\text{ح} = ٢\text{س} \times \text{س} \times ٣\text{س}$

$\text{ح} = ٦\,\text{س}^{٣}$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ١٨\,\text{س}^{٢}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

طوله = ٣٦

٢س = ٣٦

س = ١٨

$٧٢ = ١٨ \times ١٨ \times ١٨ \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$٤ = ١٨ \times ١٨ \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{٤}{١٨ \times ١٨} = \frac{٢}{١٨ \times ٩}$

$\text{م} = ٢(٢\text{س} \times \text{س}) + ٢(٣\text{س} \times \text{س}) + ٢(٣\text{س} \times ٢\text{س})$

$= ٤\,\text{س}^{٢} + ٦\,\text{س}^{٢} + ١٢\,\text{س}^{٢}$

$\text{م} = ٢٢\,\text{س}^{٢}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٤٤\,\text{س} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$= ٤٤ \times \cancel{١٨} \times \frac{٢}{\cancel{١٨} \times ٩}$

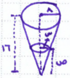
$= \frac{٨٨}{٩}$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

مثال

قمع على شكل مخروط دائري قائم قاعدته للأعلى فإذا كان ارتفاع القمع ١٦ سم وطول نصف قطر قاعدته ٨ سم صب فيه سائل بمعدل ١٢ سم³/ث جد معدل تغير مساحة سطح السائل في القمع عندما يكون ارتفاع السائل ٨ سم.

الحل:



$\frac{دح}{دن} = ١٢$

$\frac{دم}{دن} = ؟$ عندما ص = ٨

$م = \pi س^٢$

$\frac{دم}{دن} = ٢\pi س \frac{دس}{دن}$

$= ٢\pi \times ٤ \times \frac{٣}{٨\pi}$

$= ٣$ سم²/ث

$ح = \frac{١}{٣}\pi س^٢ ص$

$\frac{٨}{١٦} = \frac{س}{ص}$

$٨ص = ١٦س$

$\boxed{ص = ٢س}$

$\Leftarrow ح = \frac{١}{٣}\pi س^٢ \times ٢س$

$= \frac{٢}{٣}\pi س^٣$

$\frac{دح}{دن} = ٢\pi س^٢ \frac{دس}{دن}$

$١٢ = ٢\pi \times ٤^٢ \times \frac{دس}{دن}$

$\frac{دس}{دن} = \frac{١٢}{٢\pi \times ١٦}$

$\boxed{\frac{دس}{دن} = \frac{٣}{٨\pi}}$

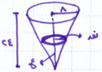
عندما ص = ٨ ← س = ٤

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

٢٠١٤ صيفي

إناء على شكل مخروط دائري قائم رأسه للأسفل وقاعدته أفقية يسكب منه الماء بمعدل ١٢ سم³/ث فإذا كان قطر قاعدته ١٦ سم وارتفاعه ٢٤ سم جد معدل تغير ارتفاع الماء في الاناء عندما يصبح ارتفاع الماء فيه ١٢ سم.

الحل:



تشابه مثلثات

$\frac{نق}{٨} = \frac{ع}{٢٤}$

$نق = \frac{٨ع}{٢٤} = \frac{ع}{٣}$

$ح = \frac{\pi}{٣} نق^٢ ع$

$ح = \frac{\pi}{٣} \frac{ع^٢}{٩} \times ع$

$ح = \frac{\pi}{٢٧} ع^٣$

$\frac{دح}{دن} = \frac{٣\pi}{٢٧} ع^٢ \times \frac{دع}{دن}$

$١٢ = \frac{\pi}{٩} (١٢)^٢ \times \frac{دع}{دن}$

$\frac{دع}{دن} = \frac{٩ \times ١٢}{\pi \times ١٢ \times ١٢} = \frac{٩}{١٢\pi} = \frac{٣}{٤\pi}$

٢٠٠٨ صيفي

اسطوانة دائرية قائمة مصنوعة من المعدن ارتفاعها يساوي $\frac{٧}{٦}$ طول قطر قاعدتها دائماً فإذا كان ارتفاعها يزداد بمعدل ٠.٠١ سم/ث فجد معدل التغير في حجم هذه الاسطوانة عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها ٦ سم .

الحل:

$\text{ع} = \frac{٧}{٦} \times ٢\,\text{نق}$

$\text{ع} = \frac{٧}{٣}\,\text{نق}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = ٠.٠١ \qquad \text{نق} = ٦$

$\text{ح} = \pi\,\text{نق}^٢\,\text{ع}$

$\text{ح} = \pi\,\text{نق}^٢ \times \frac{٧}{٣}\,\text{نق}$

$\text{ح} = \frac{٧}{٣}\pi\,\text{نق}^٣$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٧\pi\,\text{نق}^٢\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$= ٧ \times \pi \times ٣٦ \times \frac{٣}{٧٠٠}$

$= \frac{\pi\,٣٦ \times ٣}{١٠٠}$

$\text{ع} = \frac{٧}{٣}\,\text{نق}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{٧}{٣}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$\frac{١}{١٠٠} = \frac{٧}{٣}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{٣}{٧٠٠}$

مثال

تتمدد أضلاع مربع بمعدل ٤ سم/ث رسمت دائرة حول المربع بحيث تلامس رؤوسه وأخذت تتمدد مع المربع بحيث تبقى محافظة على شكلها ووضعها جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والمربع عندما يكون طول ضلع المربع ١٠ سم .

الحل :

ص نصف قطر الدائرة

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 4$

$\text{س} = 10$

$\text{م} = \text{مساحة الدائرة} - \text{مساحة المربع}$

$\text{م} = \pi\,\text{ص}^2 - \text{س}^2$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = 2\pi\,\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}} - 2\text{س}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$= 2\pi\,\cancel{\sqrt{50}} \times \frac{20}{\cancel{\sqrt{50}}} - 2\times4\times10$

$= 40\pi - 80$

$(2\text{ص})^2 = \text{س}^2 + \text{س}^2$

$4\text{ص}^2 = 2\text{س}^2$

$2\text{ص}^2 = \text{س}^2$

عندما $\text{س} = 10$

$2\text{ص}^2 = 100$

$\text{ص}^2 = 50$

$\boxed{\text{ص} = \sqrt{50}}$

$2\text{ص}^2 = \text{س}^2$

$4\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 2\text{س}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$4\sqrt{50}\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 20 \times 4$

$\boxed{\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{80}{4\sqrt{50}} = \frac{20}{\sqrt{50}}}$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

٢٠١١ صيفي

تتمدد دائرة بحيث يزداد قطرها بمعدل ٦ سم/د . رسم مربع داخل الدائرة وأخذ يتمدد معها بحيث تبقى رؤوسه ملامسه لها . جد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين المربع والدائرة عندما يكون طول قطر الدائرة ١٠ سم .

الحل :

ص قطر الدائرة

س ضلع المربع

$\text{م} = \text{مساحة الدائرة} - \text{مساحة المربع}$

$\text{م} = \pi\,\text{نق}^2 - \text{س}^2$

$\text{م} = \pi\left(\tfrac{1}{2}\text{ص}\right)^2 - \frac{\text{ص}^2}{2}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \left(\cancel{2}\pi \times \tfrac{1}{2}\text{ص} \times \cancel{\tfrac{1}{2}} - \frac{2\text{ص}}{2}\right)\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

$= \left(\tfrac{1}{2}\pi \times 10 - \frac{2\times10}{2}\right) \times 6$

$= (5\pi - 10) \times 6$

$= 30\pi - 60$

$\text{ص}^2 = \text{س}^2 + \text{س}^2$

$\text{ص}^2 = 2\text{س}^2$

$\text{س}^2 = \frac{\text{ص}^2}{2}$

$\text{ص} = 2\text{نق}$

$\text{نق} = \tfrac{1}{2}\text{ص}$

٢٠١٦ شتوي

رسم مثلث متساوي الأضلاع داخل دائرة بحيث تقع رؤوسه على محيط الدائرة بدأ كل من الدائرة والمثلث بالتمدد محافظين على شكلهما ووضعهما بحيث يتمدد نصف قطر الدائرة بمعدل ٣ سم/د جد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والمثلث عندما يكون نصف قطر الدائرة ٩سم

الحل:

نق نصف قطر الدائرة
س ضلع المثلث

م = مساحة الدائرة − مساحة المثلث

$= \pi$ نق^2 $- \frac{1}{2}$ س × س جا ٦٠°

$= \pi$ نق^2 $- \frac{1}{2} \times 3$ نق$^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

م $= \pi$ نق^2 $- \frac{3\sqrt{3}}{4}$ نق^2

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \left(2\pi \text{ نق} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ نق}\right) \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$= \left(2\pi \times 9 - 9 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \times 3$

$= 54\pi - \frac{81}{2}\sqrt{3}$

جتا ٣٠ $= \frac{\text{س}/2}{\text{نق}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{س}/2}{\text{نق}}$

س $= \sqrt{3}$ نق

نق $= \frac{\text{س}}{\sqrt{3}}$

عصام الشيخ
عمان طربور
جامعة آل البيت
0796300625