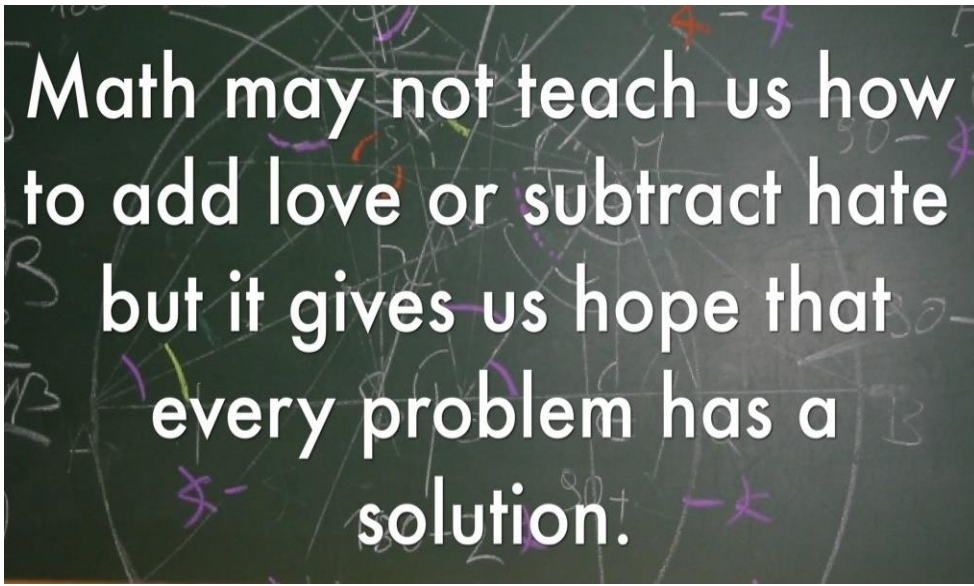


دوسية الإبداع في الرياضيات (أدبي)

توجيهى (الفصل الأول) – جيل (٢٠٠١)

(نسخة ٢٠١٨ / ٢٠١٩)



الأستاذ فيصل السعدون

اسم الطالب / الطالبة :



الفهرس

الصفحة	الموضوع	الوحدة
٧ - ٥	أولاً : مفهوم النهاية	الوحدة الأولى
١٣ - ٧	ثانياً : نظريات النهايات	
٢٦ - ١٣	ثالثاً : نهاية خارج قسمة اقترانين	
	رابعاً : نهاية اقتران الجذر النوني (محذوف بالكامل)	
٣٣ - ٢٧	خامساً : الاتصال عند نقطة	
٣٧ - ٣٣	سادساً : نظريات الاتصال	
٣٨ - ٣٧	((أسئلة ضع دائرة للوحدة الأولى))	
٤٧ - ٤٠	أولاً : متوسط (معدّل) التغير	الوحدة الثانية
٥١ - ٤٧	ثانياً : المشتقة الأولى	
٥٨ - ٥٢	ثالثاً : قواعد الاشتقاق	
٦٣ - ٥٩	رابعاً : قاعدة السلسلة	
٦٨ - ٦٣	خامساً : مشتقة الاقترانات المثلثية	
	سادساً : المشتقات العليا (محذوف بالكامل)	
٧٢ - ٧١	((أسئلة ضع دائرة للوحدة الثانية))	
٧٨ - ٧٤	أولاً : التفسير الهندسي للمشتقة	الوحدة الثالثة
٨٢ - ٧٩	ثانياً : التفسير الفيزيائي للمشتقة	
٨٧ - ٨٣	ثالثاً : التزايد و التناقص للاقتران	
٩٤ - ٨٧	رابعاً : القيم القصوى للاقتران (محذوف جزء منه)	
	خامساً : تطبيقات على القيم القصوى (محذوف بالكامل)	
١٠٠ - ٩٥	سادساً : تطبيقات اقتصادية على التفاضل	
١٠١	((أسئلة ضع دائرة للوحدة الثالثة))	

* ملاحظات مهمة :

- (١) الملاحظات الموجودة في الدوسية (في الدروس) مهمة .
- (٢) تحتوي الدوسية على جميع الأفكار التي وردت في الكتاب .
- (٣) الدوسية شاملة المادة ١٠٠% (ليست ملخص) .
- (٤) مستوى الأسئلة متنوع و تحتوي على أسئلة ضع دائرة (في نهاية كل وحدة)



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الوحدة الأولى

(النهايات و الاتصال)



مراجعة عامة (مهم جداً)

* التحليل إلى العوامل :

(١) إخراج العامل المشترك :

$$٣س٣ - ٢س١٢ = ٣س(٤ - س) ، \quad ٦س٢ + ٢س١٨ = ٢س٦(٣ + س)$$

(٢) الفرق بين مربعين : القاعدة : $س٢ - ٢أ = (س - أ)(س + أ)$

$$س٢ - ٩ = (س - ٣)(س + ٣) ، \quad ٣٦ - س٢ = (٦ - س)(٦ + س)$$
$$س٢ - ١ = (س - ١)(س + ١) ،$$

(٣) العبارة التربيعية : القاعدة : $س٢ + ب س + ج$

ملاحظة : * اذا كانت إشارة الحد الأخير (+) تكون إشارة القوسين نفس إشارة الحد الأوسط .
* اذا كانت إشارة الحد الأخير (-) تكون إشارة القوسين عكس بعض .

$$س٢ + ٥س + ٦ = (س + ٢)(س + ٣)$$

$$س٢ - ٥س + ٦ = (س - ٢)(س - ٣)$$

$$س٢ - ٣س - ١٠ = (س - ٥)(س + ٢)$$

$$س٢ + ٢س - ١٥ = (س - ٣)(س + ٥)$$

(٤) فرق و جمع عددين مكعبين :

$$القاعدة : س٣ - ٢أ = (س - أ)(س٢ + س أ + ٢أ)$$

$$س٣ + ٢أ = (س + أ)(س٢ - س أ + ٢أ)$$

$$س٣ - ٦٤ = (س - ٤)(س٢ + ٤س + ١٦)$$

$$س٣ - ٢٧ = (س - ٣)(س٢ + ٣س + ٩)$$

$$س٣ + ١ = (س + ١)(س٢ - س + ١)$$

$$س٣ + ٨ = (س + ٢)(س٢ - ٢س + ٤)$$

الدرس الأول : مفهوم النهاية

* مفهوم نهاية الاقتران : وصف و دراسة سلوك الاقتران عندما يقترب المتغير (س) من عدد محدد .

مثال (١) :

ق (س) = س + ٢ , كۆن جدولاً و ادرس ماذا يحدث لقيم ق (س) عندما س تقترب من ٢ (س ← ٢)

س	٢,٢	٢,١	٢	١,٩	١,٨
ق (س)	٤,٢	٤,١	٤	٣,٩	٣,٨

→
جهة اليسار (-)

←
جهة اليمين (+)

إذن نها ق (س) = ٤
س ← ٢

نها ق (س) = ٤
س ← ٢

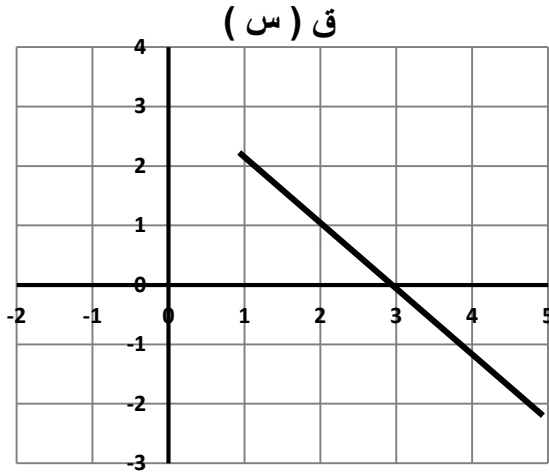
نها ق (س) = ٤
س ← ٢

س ١ : ق (س) = $\frac{٩ - ٢س}{٣ - س}$, س ≠ ٣

كۆن جدولاً و ادرس ماذا يحدث لقيم ق (س) عندما س ← ٣ ؟

إيجاد النهاية عن طريق الرسم

مثال : يمثل الشكل الاتي منحنى اقتران ق (س) , جد قيمة ما يلي :



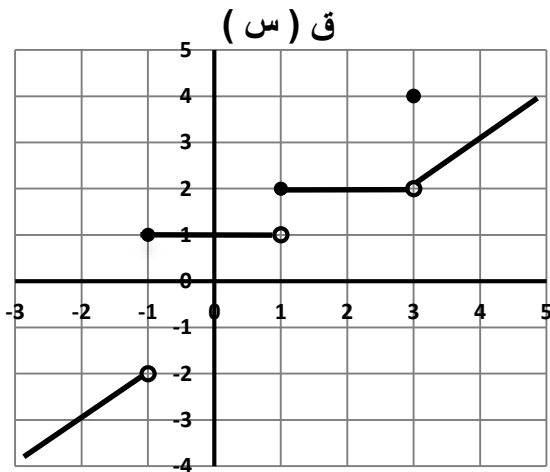
نها ق (س) = 1
س ← + 2

نها ق (س) = 1
س ← - 2

نها ق (س) = 1
س ← 2

نها ق (س) = صفر
س ← 3

س ٢ : يمثل الشكل الاتي منحنى اقتران ق (س) , جد قيمة ما يلي :



نها ق (س) =
س ← - 1

نها ق (س) =
س ← + 1

نها ق (س) =
س ← 1

نها ق (س) =
س ← + 3

نها ق (س) =
س ← 3

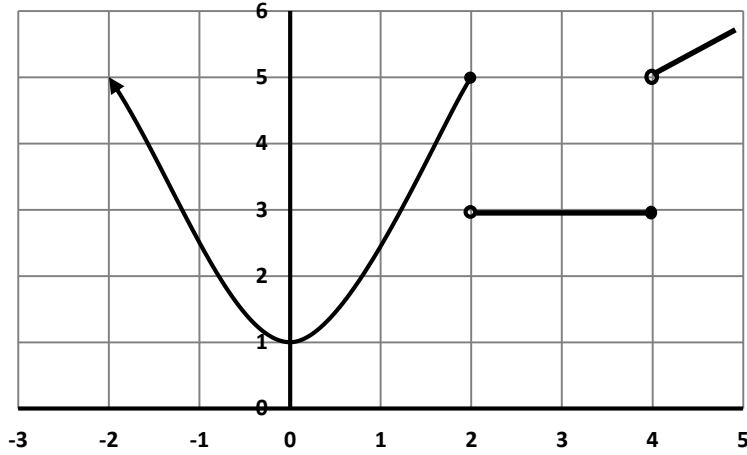
نها ق (س) =
س ← .

نها ق (س) =
س ← 2

نها ق (س) = $\frac{1}{4} - 2$ (س - ٧) + $\sqrt{6 + (س)}$
س ← + 3

* مثال : يمثل الشكل الاتي منحنى اقتران ق (س) , جد قيمة ما يلي :

ق (س)



نها ق (س) =
س ← ٢ +

نها ق (س) =
س ← ٢ -

نها ق (س) =
س ← ٢

نها ق (س) =
س ← ٣

نها ق (س) = ، نها ق (س) = ، نها ق (س) = ، ق (٠) =

* أوجد قيمة أو قيم (ب) :

نها ق (س) = غير موجودة ، اذن ب =

نها ق (س) = ١ ، اذن ب =

نها ق (س) = ٥ ، اذن ب =

ق (ب) = ٥ ، اذن ب =

الدرس الثاني : نظريات النهايات

* نظرية (١) : إذا كان أ و ج عددين حقيقيين و كان :

ق (س) = ج فإن نها ق (س) = ج <<< نها العدد الثابت = العدد الثابت

نها ٦ = ٦
س ← ٩

نها ٧ = ٧
س ← ٣

نها ٤ = ٤
س ← ٢

* أمثلة :

* نظرية (٢) : إذا كان ق (س) كثير حدود فإن : نها ق (س) = ق (أ)
 س ← ١

* مثال (١) :

$$\text{نها س} = ٢ - ٣ = ١ \quad \text{نها س}^٢ = ٣ - ١ \times ٢ = ١$$

$$\text{نها س}^٣ = ٧ + ٢ \text{س} + ٣ \text{س}^٢ = ٧ + (١-)^٢ + ٣(١-)^٢ = ٨$$

* مثال (٢) : إذا علمت أن نها (ق (س) + س + ١) = ٩ ، فأوجد نها (ق (س))^٢؟؟
 س ← ٢

الحل :

$$\text{نها (ق (س) + س + ١)} = ٩ \llll \text{نها (ق (س))} = ٩$$

$$\text{نها ق (س)} = ٦ \lll \text{نها ق (س)} = ٦ = ٣٦$$

س ١ : إذا علمت أن نها (ق (س) + س - ٣) = ٥ ، فأوجد نها (ق (س))^٣؟؟
 س ← ١

س ٢ : إذا كان نها (٢س - ٤س) = ٠ ، فجد قيم (ب) ؟
 س ← ب

س ٣ : اذا علمت أن نها (م س^٢ + ٥س + ١) = ٢٥ ، أوجد قيمة الثابت (م) ؟؟؟
س ← ٣

س ٤ : اذا علمت أن نها (٣ ق (س) + ٢س + ١) = ٢٧ ، فأوجد نها (ق (س)) ؟؟
س ← ٢

س ٥ : إذا كان (ق) و (ل) كثيري حدود ، و كان ق (٢) = ٣ ، ل (٢) = ٨ ، فأوجد :

$$(١) \text{ نها } (٥س) + \sqrt[٣]{ل(س) - س^٢} =$$

$$(٢) \text{ نها } \left(\frac{١}{٣} س - (س) \right) - \frac{\sqrt[٣]{ل(س)}}{٢} + \frac{٢}{س} =$$

* نظرية (٣) = إذا كانت أ ، ل ، ك ، ج أعداداً حقيقية
و كانت نها ق (س) = ل ، نها هـ (س) = ك فإن :

$$* \text{نها ق (س)} + \text{نها هـ (س)} = \text{ل} + \text{ك}$$

$$* \text{نها ق (س)} - \text{نها هـ (س)} = \text{ل} - \text{ك}$$

$$* \text{نها ق (س)} \times \text{نها هـ (س)} = \text{ل} \times \text{ك}$$

$$* \text{نها (ج} \times \text{ق (س))} = \text{ج} \times \text{ل}$$

$$* \text{نها نرا (س)} = \overline{\text{نرا ل}}$$

$$* (\text{نها (س)})^{\text{ل}} = \text{نها ل}$$

س ١ : إذا كان نها ق (س) = ٤ ، نها هـ (س) = -٣ ، جد قيمة ما يلي :

$$(١) \text{نها ق (س)} - \text{نها هـ (س)} =$$

$$(٢) \text{نها س}^٢ \text{ق (س)} \times \text{نها هـ (س)} =$$

$$(٤) \text{نها (٢ ق (س) + ٤ هـ (س))} =$$

$$(٥) \text{نها (٢ ق (س) - ٢ س}^٣ + \sqrt{٧ + \text{نها (س)}}) =$$

نهاية الاقتران المتشعب

* مثال :

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} ٣س^٢ - ٢س ، & س > ٤ \\ ٢س + ٣ ، & س \leq ٤ \end{cases} ، \text{جد قيمة نها ق (س) ؟}$$

في حال وجود نقطة تشعب :

نأخذ النهاية من اليمين (+)
و من اليسار (-)

$$\text{نها ق (س)} = \text{نها س}^٢ + ٣ = ٣ + ٤ \times ٢ = ١١$$

$$\text{نها ق (س)} = \text{نها (٤)}^٣ - ٢(٤) = ٤٠$$

إذن نها ق (س) غير موجودة ، لأن نها ق (س) \neq نها ق (س)

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > 1, \quad \text{س}^2 + 2 \\ \text{س} \leq 1, \quad \text{س}^2 + \text{س} \end{array} \right\} = \text{س} : \text{ق (س)}$$

جد قيمة (أ) نہا ق (س) ، (ب) نہا ق (س) ، (ج) ق (1-) ، (د) ق (4-) ؟؟
 $\text{س} \leftarrow 1$ $\text{س} \leftarrow 2$

و كانت نہا هـ (س)
 $\text{س} \leftarrow 3$
 موجودة ، جد قيمة (أ) ؟

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > 3, \quad \text{س}^2 + 5 \\ \text{س} = 3, \quad 20 \\ \text{س} < 3, \quad \text{أس} + 2 \end{array} \right\} = \text{س} : \text{مثال : اذا كان هـ (س)}$$

* الحل :

$$\begin{aligned} \text{نہا} \text{ هـ (س) موجودة} & \quad \text{نہا} \text{ هـ (س) إذن} & \quad \text{نہا} \text{ هـ (س) =} \\ \text{س} \leftarrow 3 & \quad \text{س} \leftarrow 3 & \quad \text{س} \leftarrow 3 \\ \text{نہا} = (\text{أس} + 2) & \quad \text{نہا} = (\text{س}^2 + 5) & \quad \text{نہا} = 2 + 3 \\ \text{س} \leftarrow 3 & \quad \text{س} \leftarrow 3 & \quad \text{س} \leftarrow 3 \\ 12 = 3 & \quad 12 = 3 & \quad 4 = 3 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > 2, \quad 2\text{س}^2 + 4 \\ \text{س} \leq 2, \quad 6 + \text{أس} \end{array} \right\} = \text{اذا كان ق (س)}$$

و كانت **هنا** ق (س) موجودة ، جد قيمة (أ) ؟
 $\text{س} \leftarrow 2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > 2, \quad 5\text{س}^2 - 2\text{ل} \\ \text{س} \leq 2, \quad 2 + \text{ل س} \end{array} \right\} = \text{اذا كان ق (س)}$$

و كانت **هنا** ق (س) موجودة ، جد قيمة (ل) ؟
 $\text{س} \leftarrow 2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > 1, \quad 5\text{س} - \text{أ} \\ \text{س} \leq 1, \quad 7 + 2\text{س}^2 \end{array} \right\} = \text{اذا كان هـ (س)}$$

و كانت **هنا** هـ (س) = 16 و **هنا** هـ (س) موجودة ، جد قيمة (أ) و (ب) ؟
 $\text{س} \leftarrow 3$ $\text{س} \leftarrow 1$

$$س ٥ : اذا كان ق (س) = \left. \begin{array}{l} ٥س^٣ \\ ٤٠ \end{array} \right\} ، س > أ ،$$

$$س \leq أ ،$$

و كانت **نہا** ق (س) موجودة ، فأوجد قيمة الثابت (أ) ؟؟

$$س ٦ : إذا كان ق (س) = \left. \begin{array}{l} ٣ - ٢س^٢ \\ ١٢ + ٥س \end{array} \right\} ، س \notin ص ،$$

$$س \in ص ،$$

جد قيمة **نہا** ق (س) ؟

الدرس الثالث :

نهاية خارج قسمة اقترانين

* نظرية : إذا كانت أ ، ل ، ك أعداداً حقيقية ، حيث ك \neq صفر

$$و كانت **نہا** ق (س) = ل ، **نہا** هـ (س) = ك ، فإن **نہا** ق (س) = $\frac{ل}{ك}$$$

* مثال :

$$اذا كانت **نہا** ق (س) = ٦ ، **نہا** هـ (س) = ٢- ، جد قيمة **نہا** ق (س) ؟$$

$$\text{الحل : } **نہا** ق (س) = \frac{٦}{٢-} = \frac{٦}{٢-} = \frac{٣}{١-}$$

س ١: اذا كانت $\text{نها} \text{ ق (س)} = ٥$ ، $\text{نها} \text{ هـ (س)} = ٣$ - ،

أوجد : (أ) $\frac{\text{نها (س)}}{\text{نها (س)}}$ ، (ب) $\frac{\text{نها (س)} + ٣}{\text{نها (س)} + ٢}$ ؟؟؟

س ٢: اذا كانت $\text{نها} \text{ ق (س)} = ١٥$ ، $\text{نها} \text{ هـ (س)} = ٩$ - ،

أوجد : (أ) $\frac{\text{نها (س)}}{\text{نها (س)}}$ ، (ب) $\frac{\text{نها (س)} + ١}{\text{نها (س)} + ٥}$ ؟؟؟

س ٣: اذا كانت $\text{نها} \text{ ق (س)} = ٧$ ، $\text{نها} \text{ هـ (س)} = ٢$ - ،

جد قيمة (ب) التي تجعل $\text{نها} \text{ هـ (س)} = \sqrt{\text{نها (س)} + ٢} - ١٠$ - ؟؟

س ٤ : ما قيمة كل مما يلي : (إذا كان الناتج $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ تكون النهاية غير موجودة)

$$(1) \quad \text{نها} = \frac{2(5-s) + 3 - s}{s^2 + s - 3} \quad \leftarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$(2) \quad \text{نها} = \frac{s-3}{s^2 - s - 1} \quad \leftarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$(3) \quad \text{نها} = \frac{\sqrt{s+1} + 7}{s^2 - 3} \quad \leftarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$(4) \quad \text{نها} = \frac{s^2 + 5}{s} \quad \leftarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$(5) \quad \text{نها} = \left(\frac{s^2 + 8}{s^2 + 16} + s \right) \quad \leftarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

* إذا كان الناتج $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نستخدم احد الطرق الآتية :

(١) التحليل للعوامل (صفحة المراجعة رقم ٤ في بداية الدوسية)

(٢) الضرب بالمرافق

(٣) توحيد المقامات

* أمثلة : الطريقة الأولى : حالة (١) : (إخراج العامل المشترك)

$$(1) \quad \text{نها} = \frac{s^3 - 6}{s^2 - 2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \lll \text{نها} = \frac{s(s-3)}{s-2} = \frac{3}{s-2} \quad \leftarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$(2) \quad \text{نها} = \frac{s^2 + s}{s} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \lll \text{نها} = \frac{s(s+1)}{s} = s+1 \quad \leftarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

س ١: جد قيمة ما يلي :

$$(١) \quad \text{نها} = \frac{٥٢س^٢ + ٥س}{٥س}$$

Blank area for solving the first problem, enclosed in a dashed border.

$$(٢) \quad \text{نها} = \frac{٢١س - ٣}{٣س - ٣}$$

Blank area for solving the second problem, enclosed in a dashed border.

$$(٣) \quad \text{نها} = \frac{٣س^٢ + ٤س}{٢س - ٤س}$$

Blank area for solving the third problem, enclosed in a dashed border.

الطريقة الأولى : حالة (٢) : الفرق بين مربعين (صفحة المراجعة رقم ٤ في بداية الدوسية)

* أمثلة :

$$(1) \quad 2- = \frac{6-}{3} = \frac{(3-3-)}{3} \text{ نها } = \frac{(\cancel{3+} (3-))}{(\cancel{3+}) 3} \text{ نها } \lll \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{9-^2}{9+3} \text{ نها } = \frac{9-^2}{9+3} \text{ نها } \lll \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$(2) \quad 2 = 1+ \text{ نها } = \frac{(\cancel{1-} (1+))}{\cancel{1-}} \text{ نها } \lll \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{1-^2}{1-} \text{ نها } \lll \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

* سؤال : جد قيمة ما يلي :

$$(1) \quad \text{نها } = \frac{9-^2}{3-} \text{ نها } \lll \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$(2) \quad \text{نها } = \frac{100-^2}{10-} \text{ نها } \lll \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$= \frac{16 - 2(2-s)}{s-9} \text{ نها } \begin{matrix} 3 \\ \leftarrow s \end{matrix}$$

* الطريقة الأولى : حالة (٣) : تحليل العبارة التربيعية (صفحة المراجعة رقم ٤ في بداية الدوسية)

* أمثلة :

$$(1) \quad \frac{1}{s-3} = \frac{1}{s-3} = \frac{(s-2)(s-3)}{s-3} \text{ نها } \begin{matrix} 2 \\ \leftarrow s \end{matrix} \lll \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{s^2 - 5s + 6}{s-2} \text{ نها } \begin{matrix} 2 \\ \leftarrow s \end{matrix}$$

$$(2) \quad \frac{7}{6} = \frac{4+3}{3+3} = \frac{(s+4)(s-3)}{(s+3)(s-3)} \text{ نها } \begin{matrix} 3 \\ \leftarrow s \end{matrix} \lll \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{s^2 + s - 12}{s-9} \text{ نها } \begin{matrix} 2 \\ \leftarrow s \end{matrix}$$

* سؤال : جد قيمة كل ما يلي :

$$(1) \quad \frac{s^2 + 3s - 4}{s+4} \text{ نها } \begin{matrix} 4 \\ \leftarrow s \end{matrix}$$

$$(2) \text{ نها} = \frac{\text{س}^2 - 25}{\text{س}^2 - 4\text{س} - 5}$$

$$(3) \text{ نها} = \frac{\text{س}^2 - 7\text{س} + 12}{\text{س} - 4}$$

* الطريقة الأولى : حالة (٤) :

تحليل فرق و جمع عددين مكعبين (صفحة المراجعة رقم ٤ في بداية الدوسية)

* أمثلة :

$$(1) \text{ نها} = \frac{\text{س}^3 + 8}{\text{س}^2 + 2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \lll \text{نها} = \frac{(\text{س}^2 - 2)(\text{س} + 2)}{\text{س}^2 + 2} = \frac{(\text{س}^2 - 2)(\text{س} + 2)}{\text{س}^2 + 2} = \text{س}^2 - 2$$

$$(2) \text{ نها} = \frac{\text{س} - 5}{\text{س}^3 - 125} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \lll \text{نها} = \frac{\text{س} - 5}{(\text{س} - 5)(\text{س}^2 + 5\text{س} + 25)} = \frac{1}{\text{س}^2 + 5\text{س} + 25}$$

* سؤال : جد قيمة ما يلي :

$$(1) \text{ نها} = \frac{\text{س}^3 + 8}{\text{س}^2 + 3\text{س} + 2}$$

Blank area for solving the first question.

$$(2) \text{ نها} = \frac{\text{س}^3 + 27}{\text{س}^3 + 3}$$

Blank area for solving the second question.

$$(3) \text{ نها} = \frac{\text{س}^3 + 27}{\text{س}^3 + 4\text{س} + 3}$$

Blank area for solving the third question.

* الطريقة الثانية : (الضرب بالمرافق) <<< هو عكس الإشارة بين الجذر و العدد .

* أمثلة :

$$(1) \text{ نها } \frac{1-\sqrt{s}}{1-s} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{الحل :} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\cancel{s}}{(1+\sqrt{s})(\cancel{s})} \text{ نها } = \frac{1+\sqrt{s}}{1+\sqrt{s}} \times \frac{1-\sqrt{s}}{1-s} \text{ نها}$$

$$(2) \text{ نها } \frac{s-3}{2-\sqrt{s+1}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{الحل :} \quad 4 = \frac{(2+\sqrt{s+1})(\cancel{s})}{\cancel{s+1}-4} \text{ نها } = \frac{2+\sqrt{s+1}}{2+\sqrt{s+1}} \times \frac{s-3}{2-\sqrt{s+1}} \text{ نها}$$

* سؤال : جد قيمة النهاية في كل ما يلي:

$$(1) \text{ نها } \frac{s-9}{\sqrt{s}-3} =$$

س ← ٣ ،

$$(٢) = \frac{٢ - \sqrt{١ + س}}{س - ٣}$$

$$(٣) = \frac{س^٢ - س - ٦}{س \sqrt{٢ - ١ + س}}$$

$$(٤) \quad \text{نها} = \frac{١٥ - س٣}{٥ - ٢٠ + س}$$

* الطريقة الثالثة : توحيد المقامات (اذا كان لدينا كسور)

$$\frac{ب \times ج + س \times ا}{ب \times ج + س \times ا} = \frac{ب \times ج + س \times ا}{س \times ب} = \frac{ج}{س} + \frac{ا}{ب}$$

* أمثلة :

$$(١) \quad \frac{١}{٤} = \frac{\cancel{س٢} - س}{(٢ - س) س٢} = \frac{٢ \times ١ - س \times ١}{(٢ - س) س٢} = \frac{٢ \times ١ - س \times ١}{س \times ٢} \lll \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{١}{س} - \frac{١}{٢ - س}$$

$$(٢) \quad \frac{\text{نها}}{\text{صفر}} = \frac{٢}{٣ + س} - \frac{١}{١ + س} \quad ، \quad \underline{\text{الحل :}}$$

$$\frac{١ - س}{٨} = \frac{\cancel{١ + س} - س}{(١ - س)(٣ + س)(١ + س)} = \frac{٢ - س٢ - ٣ + س}{(١ - س)(٣ + س)(١ + س)} = \frac{(١ + س)٢ - (٣ + س)}{(٣ + س)(١ + س)}$$

* سؤال : جد قيمة النهاية في كل ما يلي :

$$(1) \quad \lim_{s \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{s} - \frac{1}{4}}{\frac{4}{s} - 4}$$

Blank area for the solution of question 1.

$$(2) \quad \lim_{s \rightarrow 6} \frac{\frac{4}{s+6} + \frac{2}{s-3}}{s}$$

Blank area for the solution of question 2.

$$(3) \text{ نها} = \frac{\frac{1}{2+s} - \frac{1}{3+s}}{1-s}$$

$$(4) \text{ نها} = \frac{\frac{s}{2+s} - \frac{s}{2-s}}{1-s} = \frac{2-s}{8-s^2}$$

* سؤال : اذا كان ق (س) = س ، فجد نها $\frac{ق(س) - (س)^2}{س + 3}$ ؟؟

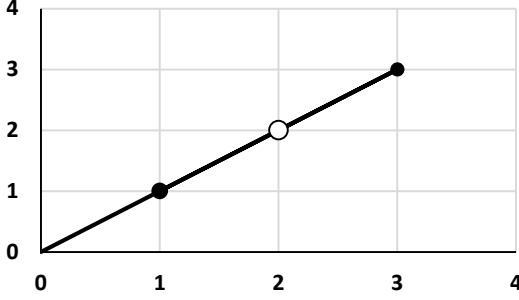
* سؤال : اذا علمت أن نها $\frac{ق(س) - 7}{س}$ ، نها $\frac{ق(س) - 2}{س}$

فبيّن (أثبت) أن نها $\frac{ق(س) - 3}{س + 7}$ = 4 - ؟

الدرس الخامس : الاتصال عند نقطة

* يكون الاقتران متصلًا في حال عدم وجود قفزات أو ثقب ، و يكون غير متصل عند وجود قفزات أو ثقب ..

ق (س)



ق (س) عند $s = 2$ (غير متصل)

ق (س) عند $s = 1$ (متصل)

* يكون الاقتران (ق) متصلًا عند النقطة $s = a$ ، إذا كانت $\lim_{s \rightarrow a^-} f(s) = f(a) = \lim_{s \rightarrow a^+} f(s)$

* أمثلة :

(1) إذا كان ق (س) $= s^3 + 2s^2 - 1$ ، فهل (ق) متصل عند $s = 2$ ؟

الحل : ق(2) $= (2)^3 + 2(2)^2 - 1 = 15$

هنا (س) $= \lim_{s \rightarrow 2^-} (s^3 + 2s^2 - 1) = 15$ ، هنا (س) $= \lim_{s \rightarrow 2^+} (s^3 + 2s^2 - 1) = 15$

بما أن $\lim_{s \rightarrow 2^-} f(s) = f(2) = \lim_{s \rightarrow 2^+} f(s)$ ، فإن ق (س) متصل عند $s = 2$

(2) إذا كان ق (س) $= \begin{cases} s^2 + 2s + 1 \\ s^3 + 1 \end{cases}$ ، هل (ق) متصل عند $s = 0$ ؟ ، $s \neq 0$ ، $s = 0$ ،

الحل : ق (0) $= 1 + 0 \times 3 = 1$

هنا (س) $= \lim_{s \rightarrow 0^-} (s^2 + 2s + 1) = 1$

بما أن $\lim_{s \rightarrow 0^-} f(s) = f(0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} f(s)$ ، فإن ق (س) متصل عند $s = 0$

$$(3) \text{ اذا كان ق (س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س}^2 + 2 \\ \text{س}^2 + \text{س} \end{array} \right\} \text{ ، س} > 1 \text{ ، ، ابحث في الاتصال عند س} = 1 \text{ - ؟}$$

الحل : ق (1-) = (1-) + 2(1-) = 1 - 1 = 0 = صفر

نهان (س) = (1-) + 2(1-) = 1 - 1 = 0 = صفر
 س ← 1 +

نهان (س) = (1-) + 2(1-) = 1 - 1 = 0 = صفر
 س ← 1 -

في حال وجود نقطة تشعب :
 نأخذ النهاية من اليمين (+)
 و من اليسار (-)

إذن **نهان (س)** غير موجودة و هذا يعني أن ق (س) غير متصل عند س = 1 -

* أسئلة :

(1) اذا كان ق (س) = س² + 5س + 2 ، فهل ق متصل عند س = 3 ؟

(2) اذا كان ق (س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{\text{س}^2 - 9}{\text{س} - 3} \\ 5 \end{array} \right\}$ ، س ≠ 3 ، ، ابحث في الاتصال عند س = 3 ؟
 ، س = 3 ،

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > 3, \\ \text{س} < 3, \\ \text{س} = 3, \end{array} \right\} = \text{اذا كان ق (س)}$$

، ابحث في الاتصال عند $s = 3$ ؟

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > 2, \\ \text{س} \leq 2, \end{array} \right\} = \text{اذا كان ق (س)}$$

و كان ق (س) متصلا عند $s = 2$ ، فما هي قيمة الثابت (أ) ؟

و كان ق (س) متصلا عند س = ٢
، فما هي قيمة الثابت (أ) و (ب) ؟

، س > ٢
، س < ٢
، س = ٢

أس^٢ + ب
أس^٣ + ٤
١٦ } = (س) اذا كان ق (س)

و كان ق (س) متصلا عند س = ٢
، فما هي قيمة الثابت (أ) و (ب) ؟

، س > ٢
، س < ٢
، س = ٢

أس^٢ + ب
أس^٢ + ٣ ب س
٨ } = (س) اذا كان ق (س)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3-s}{3-s} \\ 3-s \\ 3-s \end{array} \right\} = (س) \text{ اذا كان هـ (س) ، } \begin{array}{l} س \neq 3 \\ س = 3 \end{array} \text{ ، } \begin{array}{l} 2 + س \\ 3 = س \end{array}$$

و كان هـ (س) متصلًا عند $س = 3$ ،
فما هي قيمة الثابت (م) ؟

٨) اذا كان الاقتران (ق) متصلًا عندما $س = 2$ ، وكانت $\frac{س-2}{س-2}$ ، وكانت $\frac{س-2}{س-2}$ ، فأوجد ق (٢) ؟؟؟

٩) اذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين عند $س = 2$ ، و كان ق (٢) = ١٠ ، $\frac{س-2}{س-2}$ ، فأوجد هـ (٢) ؟

١٠) إذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين عند س = ٢ ، و كان ق (٢) = ٦ ، هـ (ق(س) - هـ(س)) = -١٤ -

فأوجد قيمة كل ما يلي :

(١) قيمة هـ (٢)

(٢) قيمة الثابت (ل) التي تجعل هـ (ق(س) - هـ(س)) = ل - ٢

نقاط عدم الاتصال (الانفصال)

هي النقاط التي تجعل المقام صفر (الاقتران النسبي)

* الاقتران النسبي دائما متصل عند جميع الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار المقام

* مثال :

جد نقاط عدم الاتصال ؟ $\frac{٩ - س}{س٣ - ٢س}$ = ق (س)

الحل : س٢ - ٣س = ٠ <<< س (س - ٣) = ٠ <<< س = ٠ ، س = ٣

* سؤال : جد نقاط عدم الاتصال للاقتران الآتية :

$$(1) \text{ ق (س) } = 5$$

$$(2) \text{ ق (س) } = \frac{25}{s-9} - \frac{s^2-9}{s+5}$$

$$(3) \text{ ق (س) } = \frac{s}{28-s^3-s^2}$$

$$(4) \text{ ق (س) } = (s+3)(s^2-16)$$

$$(5) = \frac{s^2-1}{s^2+9}$$

$$(6) \text{ هـ (س) } = \left. \begin{array}{l} (s^2+1) \\ (s^2+5) \\ (s+2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{، } s > 4 \\ \text{، } s = 4 \\ \text{، } s < 4 \end{array}$$

الدرس السادس : نظريات الاتصال

* نظرية : إذا كان كل من الاقترانين (ق) ، (هـ) متصلًا عند $s = أ$ فإن :

* ق + هـ متصل عند $s = أ$ (مجموع اقترانين متصلين)

* ق - هـ متصل عند $s = أ$ (فرق بين اقترانين متصلين)

* ق × هـ متصل عند $s = أ$ (حاصل ضرب اقترانين متصلين)

* $\frac{ق}{هـ}$ متصل عند $s = أ$ ، هـ (أ) \neq صفر (ناتج قسمة اقترانين متصلين)

* مثال :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > 2, \\ \text{س} \leq 2, \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 + \text{س}^4 \\ \text{س}^2 + 5 \end{array} = \text{هـ (س)}, \quad 1 - \text{س}^3 = \text{ق (س)}$$

ابحث في اتصال ل (س) = ق (س) X هـ (س) ؟

الحل : باستخدام الطريقة الأولى (فقط عندما يكون الاقترانين متصلين)

* ق (س) متصل لأنه كثير حدود

$$* \text{نهال (س)} = \text{نهاس}^2 + 5 = 9$$

$$* \text{نهال (س)} = \text{نهاس}^4 + 1 = 9$$

$$\text{إذن هـ (س) متصل من لأن } \text{نهال (س)} = \text{نهاس}^2 + 5 = 9$$

* إذن ل (س) متصل عند س = 2 لأنه (حاصل ضرب اقترانين متصلين)

* الحل بالطريقة الثانية (عندما يكون احد الاقترانين او كلاهما غير متصلين عند نقطة معينة)
(و تستخدم في حال الاتصال ايضاً) ((تستخدم في جميع الحالات))

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > 2, \\ \text{س} \leq 2, \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1 + \text{س}^4) (1 - \text{س}^3) \\ (5 + \text{س}^2) (1 - \text{س}^3) \end{array} = \text{ل (س)}$$

$$* \text{نهال (س)} = \text{نهال (س)} = (1 + \text{س}^4)(1 - \text{س}^3) = 9 \times 5 = 45$$

$$* \text{نهال (س)} = \text{نهال (س)} = (5 + \text{س}^2)(1 - \text{س}^3) = 9 \times 5 = 45$$

$$* \text{نهال (س)} = 45, \quad * \text{ل (س)} = 9 \times 5 = 45$$

$$* \text{إذن ل (س) = ق (س) X هـ (س) متصل عند س = 2 من لأن } \text{نهال (س)} = \text{ل (س)} = 45$$

* أسئلة :

$$(1) \text{ اذا كان هـ (س) = س}^2 + 5 \text{ ، ق (س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س}^2 \\ \text{س}^2 \end{array} \right\} \text{ ، س} > 2 \text{ ، س} \leq 2$$

ابحث في اتصال ق (س) + هـ (س) عند س = 2 ؟ (ق + هـ) (س)

$$(2) \text{ اذا كان هـ (س) = س}^2 - 4 \text{ ، ق (س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س}^2 \\ \text{س}^2 + 3 \end{array} \right\} \text{ ، س} > 2 \text{ ، س} \leq 2$$

و كان ل (س) = ق (س) X هـ (س) ، فبيّن أن ل (س) متصل عند س = 2 ؟ (ق X هـ) (س)

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > ٥ \\ \text{س} = ٥ \\ \text{س} < ٥ \end{array} \right\} \begin{array}{l} ١ \\ \text{صفر} \\ ١- \end{array} = \text{ق (س) ،} \quad \text{اذا كان هـ (س) = س - ٥}$$

ابحث في اتصال ل (س) = ق (س) X هـ (س) عند س = ٥ ؟

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > ٢ \\ \text{س} \leq ٢ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{س}^٢ - ٢ \\ \text{س}^٢ + ٣ \end{array} = \text{ق (س) ،} \quad \text{اذا كان هـ (س) = س}^٣$$

وكان ل (س) = (ق - هـ) (س) ، فابحث في اتصال ل (س) عند س = ٢ ؟

$$\left. \begin{array}{l} 5 - s \\ 5 - s \end{array} \right\} = (س) \text{ ق (س)} , \quad \begin{array}{l} s > 5 \\ s \leq 5 \end{array} , \quad \text{هـ (س)} = \frac{s-3}{s-2} = \frac{3-s}{2-s}$$

و كان ل (س) = ق (س) X هـ (س) ، فابحث في اتصال ل (س) عند س = 5 ؟

أسئلة ضع دائرة للوحدة الأولى

(1) $\frac{s^3-10}{s}$ تساوي :

(أ) صفر (ب) غير موجودة (ج) 10 - (د) 10

(2) اذا علمت أن $\frac{s^2-10}{s}$ (م) تساوي : ، فإن قيمة الثابت (م) تساوي :

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 2 (ج) $\frac{1}{2}$ (د) 2 -

(3) اذا كانت $\frac{s^2-4}{s}$ (س) تساوي : ، فإن قيمة (قيم) الثابت (ب) تساوي :

(أ) 3 ، 3 (ب) $\frac{3}{2}$ ، $\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{3}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ (د) 2 ، 2 -

(٤) إذا كان نها ق (س) = ٢- ، نها ه (س) = ٣- ،
فإن نها (٣- + ق (س) - ٢) = ٣س + ٥ ه (س) تساوي :

(أ) ٥ (ب) ٢٠ (ج) ٥- (د) ٢٠-

(٥) قيمة نها $\frac{1-s}{1-s}$ تساوي :

(أ) غير موجودة (ب) صفر (ج) $\frac{1-}{2}$ (د) $\frac{1}{2}$

(٦) إذا كانت نها ق (س) = ٥ ، نها ه (س) = ٣- ، فإن نها $\frac{2s(s-2)}{2+(s)}$ تساوي :

(أ) ١- (ب) ٢ (ج) ٢- (د) ١

(٧) قيمة نها $\frac{5+8+s}{8-3s}$ تساوي :

(أ) صفر (ب) $\frac{7-}{16}$ (ج) غير موجودة (د) $\frac{7}{16}$

(٨) إذا كان م (س) = $\frac{7}{s} + \frac{1-s}{2s-1}$ ، فإن النقاط التي تجعل الاقتران غير متصل هي :

(أ) ١- ، ١ (ب) ١- ، ١ ، ٠ (ج) صفر (د) لا يوجد

(٩) نها $\frac{64-s^2}{s+8}$ تساوي :

(أ) ١٦ (ب) ٨ (ج) ١٦- (د) غير موجودة

(١٠) نها $\frac{2s-16}{12-s^3}$ تساوي :

(أ) صفر (ب) غير موجودة (ج) $\frac{8}{3}$ (د) $\frac{8-}{3}$

(١١) اعتماداً على الجدول المجاور ، إذا كانت نها (س) غير موجودة ، فإن قيمة (ك) قد تكون :

٣,٩٨	٣,٩٩	٤,٠١	٤,١	س
ل	ك	٧,٠٤	٧,٤	ق (س)

(أ) ٢,٩٩ (ب) ٦,٩٩
(ج) ٦,٩٨ (د) ٦,٩٩٩



الوحدة الثانية

(التفاضل)



الدرس الأول : متوسط (معدل) التغير

* مثال على مفهوم التغير : قد يكون سعر كيلو غرام من الخبز في أحد الأيام ٢٠ قرشاً ثم يصبح بعد سنة ٣٠ قرشاً ، إذن التغير في السعر من ٢٠ إلى ٣٠ ، أي زيادة قدرها (٣٠ - ٢٠) = ١٠ قروش .

* مقدار التغير في (س) : هو الفرق بين قيمتي (س) عندما تتغير (س) من (١س) إلى (٢س) و يرمز له Δ س (دلتا س)

* التغير في (س) : Δ س = ١س - ٢س ، التغير في (ص) : Δ ص = ١ص - ٢ص = ق(٢س) - ق(١س)

* أمثلة : جد Δ س اذا تغيرت (س) من :

$$\begin{aligned} ١س = ٢ ، ٢س = ٥ ، \Delta س = ١س - ٢س = ٥ - ٢ = ٣ ، \\ ١س = ٢- ، ٢س = ٦- ، \Delta س = ١س - ٢س = ٦- - (٢-) = ٤- ، \\ ١س = ٢,٥ ، ٢س = ٣,٦ ، \Delta س = ١س - ٢س = ٣,٦ - ٢,٥ = ١,١ \end{aligned}$$

سؤال (١) : اذا كان ص = ق(س) = ١س - ٢ ، و تغيرت (س) من ٢ إلى ٣ ، جد التغير في (س) و (ص) ؟

$$\text{معدل (متوسط) التغير} \lll \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{١ص - ٢ص}{١س - ٢س} = \frac{ق(١س) - ق(٢س)}{١س - ٢س}$$

* مثال :

$$\text{اذا كان ص = ق(س) = ١س + ٣ ، ٢ = ١س ، ٣ = \Delta س ، جد : } \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

الحل :

$$\Delta س = ١س - ٢س = ٣ \lll ٢ - ٢س = ٥ \lll ٥ = ٢س$$

$$\Delta ص = \frac{ق(١س) - ق(٢س)}{١س - ٢س} = \frac{١ - ٢٨}{٢ - ٥} = \frac{٧ - ٢٨}{٣} = \frac{٢١}{٣}$$

* أسئلة : (١) ما معدل تغير الاقتران (ل) ، ل(س) = $5س^2 + 6$ ، عندما تتغير (س) من ١ إلى ٣ ؟

Blank area for the answer to question 1.

(٢) ما متوسط التغير في الاقتران (ق) حيث $ق(س) = \sqrt{س}$ عندما تتغير (س) من ٤٩ إلى ٢٥ ؟

Blank area for the answer to question 2.

(٣) اذا كان $ق(س) = س^2 - (س - ٢)^2$ ، حيث تغيرت س من (٢) إلى (٥) فجد معدل التغير للاقتران (ق) ؟

Blank area for the answer to question 3.

٤) اذا كان ق (س) = $\frac{1}{س}$ ، و تغيرت س من (١) إلى (٣) ، فأوجد :
أ) مقدار التغير في الاقتران (ق) ب) معدل التغير في الاقتران (ق)

٥) اذا كان متوسط التغير في الاقتران (ق) في الفترة [١- ، ٣] يساوي ١ ،
و كان هـ (س) = ق (س) - س^٢ ، جد متوسط التغير للاقتران (هـ) في الفترة [١- ، ٣] ؟

٦) اذا كان معدل التغير في الاقتران (ق) في الفترة [١- ، ٢] يساوي -٣ ،
و كان هـ (س) = ٥س - ٤ + ٢ق (س) ، جد معدل التغير للاقتران (هـ) في الفترة [١- ، ٢] ؟

$$(7) \text{ إذا كان ق (س) = } \left. \begin{array}{l} 3 \geq س \geq 0, \\ 7 \geq س > 3, \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 - 2س \\ 1 + 2س \end{array}$$

جد معدل التغير في الاقتران (ق) عندما تتغير (س) من 2 إلى 5 ؟

$$(8) \text{ إذا كان ق (س) = } \left. \begin{array}{l} 4 > س \geq 1, \\ 8 \geq س \geq 4, \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 - 2س \\ 2 + 6س \end{array}$$

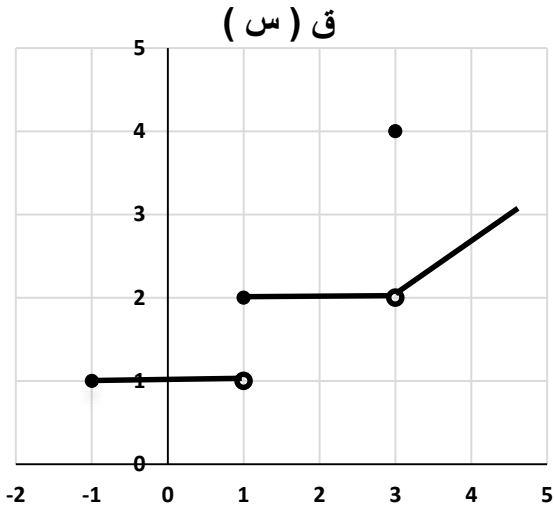
جد معدل التغير في الاقتران (ق) إذا كانت س = 3 ، $\Delta س = 2$ ؟

$$(9) \text{ إذا كان هـ (س) = } \left. \begin{array}{l} 3 \geq س \geq 1, \\ 5 \geq س > 3, \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2س \\ 2س \end{array}$$

و كان معدل تغير الاقتران (هـ) عندما تتغير (س) من 2 إلى 5 يساوي 4 ، فجد قيمة الثابت (أ) ؟؟

١٠ اعتمادا على الشكل الاتي الذي يمثل
منحنى اقتران ق (س) ، أوجد :

- أ) متوسط التغير في الاقتران (ق) في الفترة [٠ , ٣] ؟؟
ب) نقاط عدم الاتصال (الانفصال) ؟



* التفسير الهندسى لمتوسط التغير :

$$\text{ميل القاطع} : \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1}$$

* مثال : اذا كان $v = c(s)$ ، جد ميل القاطع المار بالنقطتين $(١ , ٢)$ ، $(-٣ , -٦)$ ؟

$$\text{الحل} : \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1} = \frac{٢ - (-٦)}{١ - (-٣)} = \frac{٨}{٤} = ٢$$

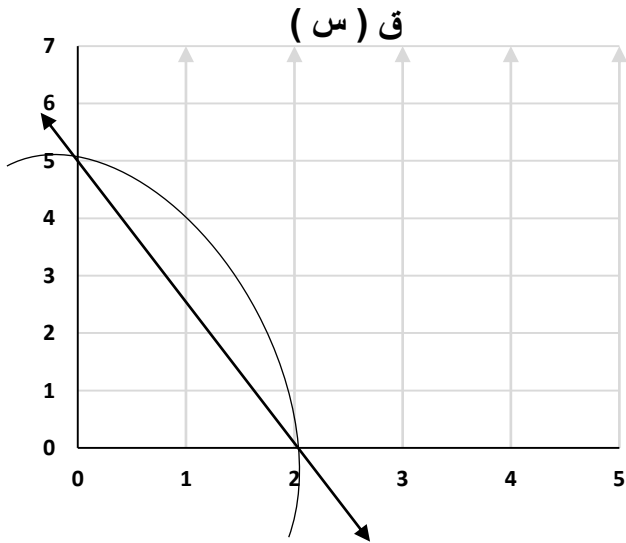
* أسئلة :

١) اذا كان $v = c(s)$ ، جد ميل القاطع المار بالنقطتين $(٠ , ٧)$ ، $(١ , -٦)$ ؟

٢) اذا كان $v = c(s)$ ، جد ميل القاطع المار بالنقطتين $(١ , ١)$ ، $(٣ , -٣)$ ؟

٣) إذا كان $ص = ق(س) = ٨س^٢$ ، جد ميل القاطع المار بالنقطتين $(٠، ٠)$ ، $(٣، ٣)$ ق (٣) ؟

٤) إذا كان منحنى الاقتران (ق) يمر بالنقطتين : أ $(٣، ٧)$ و ب $(١-، ل)$ ،
و كان ميل القاطع يساوي $= (٣-)$ ، فأوجد قيمة $(ل)$ ؟؟



٥) اعتماداً على الشكل الاتي :

أوجد ميل القاطع لمنحنى الاقتران (ق) ؟؟

* التفسير الفيزيائي لمتوسط التغير :

$$- \text{السرعة المتوسطة } \bar{v} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f_1 - f_2}{t_1 - t_2}$$

* مثال : يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $f = 3 + 2t$ ، حيث (ن) الزمن بالثواني ، (ف) المسافة بالمتر ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١ ، ٢] ؟

$$\text{الحل : } (\bar{v}) = \frac{f_1 - f_2}{t_1 - t_2} = \frac{(3 + 2 \cdot 1) - (3 + 2 \cdot 2)}{1 - 2} = \frac{5 - 3}{-1} = -2 \text{ م/ث}$$

* سؤال (١)

(١) اذا كانت المسافة التي يقطعها جسيم في أثناء سقوطه إلى أسفل تعطى بالعلاقة $f = 30t - 5t^2$ حيث (ن) الزمن بالثانية و (ف) المسافة بالمتر ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١ ، ٣] ؟

(٢) يتحرك جسيم حسب العلاقة $f = 2t^2 + 2t$ ، حيث (ن) الزمن بالثواني ، (ف) المسافة بالمتر احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [٢ ، ٣] ؟

٣) يتحرك جسيم حسب العلاقة $v = 5 + 2t$ ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١ ، ٣] ؟

* سؤال (٢) : مكعب معدني تعرض للحرارة بحيث تغير طول ضلعه من (١) سم إلى (٣) سم ،
جد مقدار التغير في حجم هذا المكعب ؟؟

الدرس الثاني : المشتقة الأولى

* التعريف العام للمشتقة الأولى :

$$v'(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{v(s + \Delta s) - v(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{v(s) + v'(s)\Delta s - v(s)}{\Delta s}$$

* رموز المشتقة الأولى : $v'(s)$ ، v' ، $\frac{dv}{ds}$

مثال : جد المشتقة الأولى للاقتران (ق) حيث $q = 3s - 5$ ، باستخدام التعريف العام للمشتقة الأولى ؟

الحل :

$$v'(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{v(s + \Delta s) - v(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{(3(s + \Delta s) - 5) - (3s - 5)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{3s + 3\Delta s - 5 - 3s + 5}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{3\Delta s}{\Delta s} = 3$$

* أسئلة : باستخدام التعريف العام للمشتقة ، جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :

(١) ق (س) = س^٢ - س



(٢) ق (س) = ٦ - س^٥ ، س = ٢ أو ٣ (٢)



٣) ق (س) = $\overline{س}$ ، س ≤ ٠



٤) ص = $\overline{س٣س٢}$ ، س = ١



، س ≠ ٠

$$(٥) \text{ ص} = \frac{٢}{س}$$



$$(٦) \text{ ص} = \frac{١}{س-١} ، \text{ س} = \frac{١}{٢} \text{ أو } \frac{١}{٢} ، \text{ ص} = \frac{١}{٢}$$



(٧) ق (س) = ٧

Blank dashed box for answer 7.

(٨) إذا كان $v = c (s)$ ، و كان مقدار تغير الاقتران $q (s) = s^2 h - 2 s h^2$ ، فجد $q (s)$ ؟؟

Blank dashed box for answer 8.

(٩) إذا كان $v = c (s)$ ، و كان مقدار تغير الاقتران $q (s)$ عندما تتغير s من (s) إلى $(s+h)$ هو $\Delta v = 4 s h + 2 h^2$ ، فجد قيمة $q (s)$ ؟؟

Blank dashed box for answer 9.

الدرس الثالث :
قواعد الاشتقاق

*** قاعدة (١) :** ق (س) = عدد <<< و (س) = صفر

*** أمثلة :**

(١) ق (س) = ٤ <<< و (س) = صفر
(٢) ق (س) = ١٦٦ <<< و (س) = صفر
(٣) ق (س) = ٣٦ <<< و (س) = صفر

*** قاعدة (٢) :** ق (س) = س^ن <<< و (س) = ن س^{ن-١}

*** أمثلة :** (١) ق (س) = س^٥ <<< س^٤
(٢) ق (س) = س^٦ <<< س^٥

*** أسئلة : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

(١) ق (س) = س^٤

(٢) ق (س) = س^٣

(٣) ق (س) = س^{١/٢}

(٤) ق (س) = س^{١/٣}

(٥) ق (س) = س^{٣/٢}

*** ملاحظة :** تذكر أن $\overline{\text{س}^{\frac{١}{٢}}} = \text{س}^{\frac{١}{٢}}$ ، $\overline{\text{س}^{\frac{١}{٣}}} = \text{س}^{\frac{١}{٣}}$ ، $\overline{\text{س}^{\frac{١}{٢}}} = \text{س}^{\frac{١}{٢}}$

*** أمثلة :** (١) ق (س) = $\overline{\text{س}^{\frac{٤}{٣}}} = \text{س}^{\frac{٤}{٣}}$ <<< و (س) = $\overline{\text{س}^{\frac{٤}{٣}}} = \text{س}^{\frac{٤}{٣}}$

(٢) ق (س) = $\overline{\text{س}^{\frac{٥}{٢}}} = \text{س}^{\frac{٥}{٢}}$ <<< و (س) = $\overline{\text{س}^{\frac{٥}{٢}}} = \text{س}^{\frac{٥}{٢}}$

* سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :

$$(1) \quad \overline{t^3} =$$

$$(2) \quad = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$(3) \quad = \frac{4}{s}$$

* قاعدة (3) : ق (س) = ج X م (س) ، حيث (ج) عدد ثابت <<< و (س) = ج X م (س) <<< م (س) <<< م (س)

* أمثلة : (1) ق (س) = t^3 س³ <<< و (س) = $3 \times t^2$ س² = 3×2 س¹ = 6 س¹ = 6 س

(2) ق (س) = $\frac{4}{s}$ س⁻¹ = $\frac{4}{s^2}$ س⁻² = $4 \times (-2) \times s^{-3}$ = -8 س⁻³ = $-\frac{8}{s^3}$

(3) ق (س) = \sqrt{s} س^{1/2} = $\frac{1}{2} s^{-1/2}$ س^{-1/2} <<< و (س) = $3 \times \frac{1}{2} s^{-3/2}$ = $\frac{3}{2} s^{-3/2}$ = $\frac{3}{2} \times (-\frac{3}{2}) s^{-5/2}$ = $-\frac{9}{4} s^{-5/2}$ = $-\frac{9}{4} s^{-2.5}$

* سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :

$$(1) \quad \text{و (س)} = \frac{5}{s^4} = 5s^{-4}$$

$$(2) \quad \text{و (س)} = 5 \times \sqrt{s} = 5s^{1/2}$$

$$(3) \quad \text{و (س)} = \frac{4}{s} = 4s^{-1}$$

$$(4) \quad \text{و (س)} = \frac{1}{2} s^2 = \frac{1}{2} s^2$$

* قاعدة (4) : في حالة الجمع و الطرح نشتق كل قاعدة لوحدها

$$\text{ق (س)} = \text{م (س)} \pm \text{هـ (س)} <<< \text{و (س)} = \text{م (س)} \pm \text{هـ (س)}$$

* مثال :

$$\text{س}^6 - \text{س}^3 + \text{س}^2 - 7\text{س} + 8 <<< \text{و (س)} = 6\text{س}^5 - 3\text{س}^2 - 2\text{س} - 7$$

* سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :

$$(1) \text{ ق (س)} = 5س^4 - 2س^3 - س^2 + 2 =$$

$$(2) \text{ ق (س)} = 5س^4 - 2س^3 - س^2 + 2 =$$

$$(3) \text{ ق (س)} = 1 + 2س^2 - 3س^3 =$$

$$(4) \text{ ق (س)} = 200س^2 + 1س =$$

* قاعدة (5) : مشتقة حاصل ضرب اقترانين

$$ص = ل \times م \text{ (س)} \lll \frac{ص}{س} = ل \times م \text{ (س)} + ل \times م' \text{ (س)}$$

بمعنى آخر (الاقتران الأول \times مشتقة الاقتران الثاني) + (الاقتران الثاني \times مشتقة الاقتران الأول)

* مثال :

$$\text{ق (س)} = (5س^3 + 1) (س^2 - 1) \lll \text{ق (س)} = (5س^3 + 1)' (س^2 - 1) + (5س^3 + 1) (س^2 - 1)'$$

$$= 15س^2 + 1 (2س) + (5س^3 + 1) (2س) = 10س^2 + 2س + 10س^2 + 2س = 20س^2 + 4س$$

* سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :

$$(1) \text{ ع (س)} = (س^3 - 1) (س^2 + 7) , \text{ عندما } س = 0$$

$$(2) \text{ ق (س) = س}^3 - (س^2 + 7)$$

$$(3) \text{ ق (س) = (س}^2 - 4) (س^2 + 1) \text{ ، أوجد نها } \frac{\text{ق(} - 2) - \text{ص(} - 2)}{\text{ه}}$$

$$(4) \text{ ص = س}^4 - (س^2 + 2) \text{ ، عندما س = 1}$$

*** قاعدة (٦) : مشتقة قسمة اقترانين**

$$\frac{(س)^٢ \times ل - (س)^٢ \times ل}{((س)^٢)^٢} = (س)^٢ \lll \frac{(س)^٢}{(س)^٢} = (س)^٢$$

(المقام x مشتقة البسط) - (البسط x مشتقة المقام)
بمعنى اخر
مربع المقام

* مثال :

$$\frac{(س٢)(١ + ٣س) - (٢س٣)(٤ + ٢س)}{(٤ + ٢س)^٢} = \frac{ص}{س} \leftarrow \frac{١ + ٣س}{٤ + ٢س} = ص$$

$$\frac{س٢ - ٢س١٢ + ٤س٣}{(٤ + ٢س)^٢} = \frac{(س٢ - ٤س٢ - ٢س١٢ + ٤س٣)}{(٤ + ٢س)^٢} = \frac{(س٢ + ٤س٢) - ٢س١٢ + ٤س٣}{(٤ + ٢س)^٢} =$$

* سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :

$$(١) \frac{٥ - س٣}{٣ - س٨} = ص$$

، عندما $s = 1$

$$(2) \text{ ق (س)} = \frac{1+s^2}{1+s^3}$$



$$(3) \text{ ق (س)} = \frac{1+s}{s^2}$$



$$(4) \text{ ق (س)} = \frac{s^3-1}{4}$$



$$* \text{ قاعدة (٧) : إذا كانت ص} = \frac{ج}{(س)^2} \leftarrow \frac{ص}{س} = \frac{-ج \times (س)^2}{(س)^2}$$

* مثال :

$$ص = \frac{٥}{س^2 + ١} \leftarrow \frac{ص}{س} = \frac{-٥ \times س}{(س^2 + ١)^2} = \frac{-٥س}{(س^2 + ١)^2}$$

* سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :

$$(١) \text{ ق (س)} = \frac{٤}{س^2 - س - ٦}$$

(عند س = ١)

$$(٢) \text{ ص} = \frac{٣-}{س^٢ - ٣}$$

$$(٣) \text{ هـ (س)} = \frac{٢-}{س^٢ + ١٥س}$$

الدرس الرابع : قاعدة السلسلة

* قاعدة (١) : اذا كان $v = c(h(s))$ ، $c = h(s)$ فإن $\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dc} \times \frac{dc}{ds}$

(ع هو وسيط)

* مثال : اذا كان $v = 5e^2 + 3$ ، $c = s^2 + 4$ ، جد $\frac{dv}{ds}$ ؟

الحل :

$$\frac{dv}{dc} = 10e ، \quad \frac{dc}{ds} = 2s$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dc} \times \frac{dc}{ds} = 10e \times 2s = 20es$$

* سؤال : جد $\frac{dv}{ds}$ لكل مما يلي :

$$(١) \quad v = e^2 + 1 ، \quad c = 5s - 2$$

$$(2) \text{ ص} = \text{ع}^3 + \text{ع}^2 \quad , \quad \text{ع} = 3 - 2\text{س}^2 \quad , \quad \text{أوجد } \frac{\text{ص}}{\text{س}} \Big|_{\text{س}=1}$$

$$(3) \text{ ص} = \text{ع}^2 + 5 \quad , \quad \text{ع} = 4\text{س} \quad , \quad \text{عندما س} = 1$$

*** قاعدة (2) :** إذا كان $\text{ص} = (\text{هـ}(\text{س}))^n$ فإن $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = n(\text{هـ}(\text{س}))^{n-1} \times \text{هـ}'(\text{س})$

بمعنى آخر (اشتقاق القوة \times اشتقاق الاقتران)

* أمثلة :

$$(1) \text{ ص} = (\text{س}^2 - 3)^7 \lll \frac{\text{ص}}{\text{س}} = 7(\text{س}^2 - 3)^6 \times 2\text{س} = 14\text{س}(\text{س}^2 - 3)^6$$

$$(2) \text{ ق}(\text{س}) = \sqrt[3]{\text{س}^2 + 4} \lll \frac{\text{ق}}{\text{س}} = \frac{1}{3}(\text{س}^2 + 4)^{-\frac{2}{3}} \times 2\text{س} = \frac{2\text{س}}{3\sqrt[3]{(\text{س}^2 + 4)^2}}$$

$$(3) \text{ ص} = \frac{1}{(\text{س}^3 - 4)^2} \lll \frac{\text{ص}}{\text{س}} = -2(\text{س}^3 - 4)^{-3} \times 3\text{س}^2 = \frac{-6\text{س}^2}{(\text{س}^3 - 4)^3}$$

* سؤال : جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يلي :

$$(1) \text{ ص} = (س^2 + 4س + 6)^9 =$$

$$(2) \text{ ص} = \frac{3}{2} (س^3 + 5س^2) =$$

$$(3) \text{ ص} = \frac{2-}{3(4+س)} =$$

$$(4) \text{ ص} = \frac{3}{4(س^3 + 2س)} =$$

$$(5) \text{ ص} = \sqrt[3]{(س^6 + 3س^3)}$$

$$(6) \text{ ص} = \sqrt[3]{(س^2(6 - 3س^3))}$$

* قاعدة (3) : مشتقة الجذر التربيعي

$$\frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر نفسه}} = \frac{ل(س)}{2\sqrt{(س)}} = \sqrt{(س)} \leftarrow \sqrt{(س)} = ق(س)$$

$$\text{* مثال : ق(س) = } \sqrt[3]{س^3 + 5} \leftarrow \sqrt[3]{س^3 + 5} = \frac{3س^2}{3\sqrt[3]{س^3 + 5}}$$

* سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :

$$(1) \text{ ص} = \sqrt[3]{س^2 + 5}$$

$$(٢) هـ (س) = \sqrt[٣]{٣س٣ + ٢س} =$$

$$(٣) ق (س) = \sqrt[٣]{٣س٣ + ٢س} = س٢ ، س = ٢$$

$$(٤) ص = \sqrt[٣]{١+٤} ، ع = ١ - ٢س$$

الدرس الخامس :

مشتقات الاقترانات المثلثية

ملاحظة : ((منطابقات))

$$* \frac{١}{\text{جتاس}} = \text{قاس}$$

$$* \frac{١}{\text{جتاس}^٢} = \text{قاس}^٢$$

$$* \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \text{ظاس}$$

$$* \text{حالة (١) : } \lll \text{ق (س) = جاس} \lll \lll \text{ق (س) = جتاس}$$

$$\lll \lll \text{ق (س) = جتاس} \lll \lll \text{ق (س) = جاس}$$

$$\lll \lll \text{ق (س) = ظاس} \lll \lll \text{ق (س) = قاس}$$

* مثال :

$$\text{ص} = ٣ \text{ظاس} - ٥ \text{جتاس} + \text{جاس} \lll \lll \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٣ \text{قاس} + ٥ \text{جاس} + \text{جتاس}$$

* سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :

(١) ق (س) = ٢س^٢ - ٢ ظاس + ٤ جاس - جتاس

Blank area for the solution of question 1.

(٢) ص = ٣ جاس + ٢ جتاس - ٥ ظاس

Blank area for the solution of question 2.

(٣) ق (س) = ٥ × ٢س + $\frac{٢}{جتاس}$

Blank area for the solution of question 3.

(٤) ق (س) = ٣س جاس

Blank area for the solution of question 4.

$$\frac{\text{جاس}}{\text{جاس}+1} = \text{ق (س)}$$

Blank dashed box for writing the answer to question 5.

$$\frac{\text{جاس}}{\text{جاس}} + \text{جاس جتاس} = \text{ق (س)}$$

Blank dashed box for writing the answer to question 6.

$$\text{ص} = \text{ج ا ع} , \text{ع} = \text{س} , \text{أوجد} \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

Blank dashed box for writing the answer to question 7.

$$\text{ص} = \text{ص}^2 \text{جاس} + \text{جاس}^4 \text{جتاس}$$

Blank dashed box for writing the answer to question 8.

* حالة (٢) : مشتقة اقتران مثلثي بداخله اقتران

$$\text{ص} = \text{جاه}(\text{س}) \lll \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{ه}^{\text{س}} \times \text{جتاه}(\text{س})$$

$$\text{ص} = \text{جتاه}(\text{س}) \lll \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{ه}^{\text{س}} \times (-\text{جاه}(\text{س}))$$

$$\text{ص} = \text{ظاه}(\text{س}) \lll \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{ه}^{\text{س}} \times \text{قا}^{\text{ه}}(\text{س})$$

* مثال : $\text{ص} = \text{جا}^{\text{س}} \lll \frac{\text{ص}}{\text{س}} = 3 \times \text{جتا}^{\text{س}}$

سؤال : جد $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ لكل مما يلي :

(١) $\text{ص} = \text{جا}(\text{س}^{\text{٣}} + \text{س}^{\text{٤}}) =$

(٢) $\text{ص} = \text{ظا}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{س}^{\text{٦}}) =$

(٣) $\text{ص} = -\text{جتا}(\text{س}^{\text{٤}} + \text{س}^{\text{٧}}) =$

(٤) $\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} \text{جتا}(\text{س}^{\text{٣}} - \text{س}^{\text{٢}}) =$

(٥) ص = (جاس - جتاس)^٢

(٦) ص = (س جاس)^٢ ظاس

* حالة (٣) : مشتقة اقتران مثلثي بداخله اقتران مرفوع لقوة

$$\text{ص} = (\text{جان}(\text{س}))^{\text{ن}} \lll \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{ن}(\text{جان}(\text{س})) \times \text{جتان}(\text{س}) \times \text{ن}(\text{س})$$

$$\text{ص} = (\text{جتان}(\text{س}))^{\text{ن}} \lll \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{ن}(\text{جتان}(\text{س})) \times (-\text{جان}(\text{س})) \times \text{ن}(\text{س})$$

$$\text{ص} = (\text{ظان}(\text{س}))^{\text{ن}} \lll \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{ن}(\text{ظان}(\text{س})) \times \text{قا}^{\text{ن}}(\text{س}) \times \text{ن}(\text{س})$$

* أمثلة :

$$(١) \text{ص} = (\text{جا٦س})^{\text{٤}} \lll \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{٤}(\text{جا٦س}) \times \text{جتا٦س} \times \text{٦}$$

$$(٢) \text{ص} = (\text{جتا٢س})^{\text{٣}} \lll \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{٣}(\text{جتا٢س}) \times (-\text{جا٢س}) \times \text{٤س}$$

$$(٣) \text{ص} = (\text{ظاس})^{\text{٦}} \lll \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{٦}(\text{ظاس}) \times \text{قا}^{\text{٥}}(\text{س}) \times \text{٤س}^{\text{٣}}$$

* سؤال : جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يلي :

(١) ص = (جا٩س^٢)^٤ =

(٢) ص = (جتاس^٥)^٢ =

(٣) ص = (ظاهس^٧)^٣ =

(٤) ص = جتا^٣س =

(٥) ص = ظا^٣س =

(٦) ص = جا^٣س (١ - جتاس) =

*** أسئلة إضافية للوحدة الثانية (مهمة جداً) :

(١) إذا كان (هـ) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عندما $s = -2$ ، $h(-2) = 1$ ، $h'(-2) = 2$ فأوجد $h'(-2)$ في كل مما يأتي :

$$(أ) \quad h'(s) = \sqrt{s+6} \times h(s)$$

$$(ب) \quad h'(s) = h(s) - \frac{h(s)}{s}$$

$$(ج) \quad h'(s) = \frac{h(s)}{2} - \frac{5}{h(s)}$$

د) اذا كان ق (س) = $\frac{1}{س+2}$ ، و كان معدل تغير الاقتران (ق) يساوي (-1) ،

عندما تتغير (س) من (0) إلى (3) ، فجد قيمة الثابت (أ) ؟

هـ) اذا كان ق (1) = 4 ، و (1) = 2- ، هـ (1) = 2- ، هـ (1) = 1 ، فأوجد :

(1) (1) (س × هـ) (2) (1) (س × هـ) (3) (1) (س × هـ)

(4) (1) (س × هـ) (5) (1) (س + هـ) (6) (1) (س × هـ - 2)

أسئلة ضع دائرة للوحدة الثانية

١) يتحرك جسيم حسب العلاقة $v = 9 + 2t$ ، فإن السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١ ، ٤] هي:

- (أ) ٥ (ب) ٧ (ج) ٥ (د) ٧

٢) إذا كان $q = 3t^2$ س ، و كان (م) عدداً ثابتاً ، فإن v (س) يساوي :

- (أ) $6t$ س (ب) $2t^3$ (ج) س (د) صفر

٣) إذا كان $q = 2t^2 - 4$ س ، و كان (ج) عدداً ثابتاً ، فإن v (س) يساوي :

- (أ) $4t$ (ب) $4t - 4$ (ج) $2t$ (د) $4 - 4$

٤) إذا كان $q = 3t + 7$ ، و كان (أ) عدداً ثابتاً ، فإن v (س) يساوي :

- (أ) $2t^3$ (ب) صفر (ج) ٧ (د) $7 + 2t^3$

٥) إذا كان $v = 3t - 7$ ، فإن ميل القاطع المار بالنقطتين (٠ ، ٧) ، (١ ، ٦) هو :

- (أ) ١ (ب) ٣ (ج) ١ - (د) ٣ -

٦) إذا $q = 3t^2 + 5$ س ، فإن $\frac{q(1-h) - (h+1)q}{h}$ تساوي:

- (أ) ١ (ب) ١١ (ج) ١ - (د) ١١ -

٧) إذا $q = 7 - 6t^2$ س ، فإن $\frac{q(s+\Delta) - (s)q}{\Delta}$ تساوي:

- (أ) $18t^2$ (ب) $7 - 6t^2$ (ج) $18t^2$ (د) $36t^3$

٨) إذا كان $q = \text{جاس} - \text{جتاس}$ ، فإن v (س) يساوي :

- (أ) جتاس - جاس (ب) جتاس - جاس
(ج) جتاس + جاس (د) جتاس + جاس

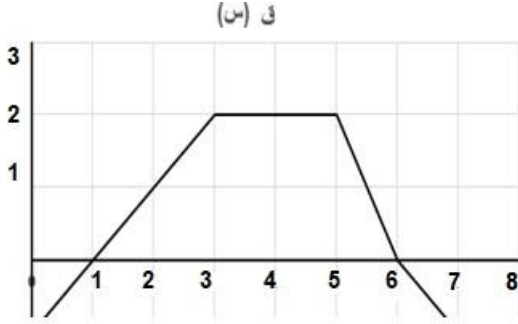
٩) إذا كان $q = 2t + 4$ ، وتغيرت (س) من ١ إلى ٥ ، فإن مقدار التغير في (س) يساوي :

- (أ) ٦ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٣

١٠) إذا علمت أن $q = 2t^3$ س ، فإن v (س) يساوي :

- (أ) $6t^3$ س (ب) $2t^3$ س (ج) $6t^3$ س (د) $2t^3$ س

١١) معتمداً على الشكل المجاور و الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) ، أي الفترات الآتية يكون فيها دائماً $ق(س) = صفر$ ؟؟



- (أ) (٦، ١) (ب) (٣، ١)
 (ب) (٥، ٣) (ج) (٦، ٥)

١٢) إذا كان $ص = ق(س) = ٤س^٢$ ، و تغيرت قيمة (س) من ١ إلى ٢ ، فإن مقدار التغير في (ص) هو:

(أ) ٤- (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٣-

١٣) إذا كان ق (س) قابلاً للاشتقاق ، فأی مما يلي يمثل $ق'(٣)$ ؟؟

- (أ) $\frac{ق(س) - (س + هـ)ق(س)}{هـ}$ (ب) $\frac{ق(س) - (س + هـ)ق(س)}{هـ}$
 (ج) $\frac{ق(س) - (هـ + ٣)ق(٣)}{هـ}$ (د) $\frac{ق(س) - (هـ + ٣)ق(٣)}{هـ}$

١٤) إذا علمت أن ق (س) كثير حدود ، فإن $\frac{ق(س) - (س + ١)ق(١)}{هـ}$ تساوي :

- (أ) ق (٠) (ب) ق (١) (ج) ق (١) (د) ق (٠)

١٥) إذا كان ق (س) = $٣س^٣ - ٢س^٢$ ، و تغيرت (س) من ٢ إلى ٤ ، فإن معدل التغير للاقتران ق (س) هو :

- (أ) ١- (ب) ٢- (ج) ٦- (د) ٣-

١٦) إذا كان ق (١) = ٢ ، هـ (١) = ٣ ، $ق'(١) = ٢$ ، هـ (١) = ١ ، فإن $(ق(١) \times هـ(١))'$ تساوي :

- (أ) ١- (ب) صفر (ج) ٤- (د) ٤

١٧) إذا كان ق (١) = ٢ ، هـ (١) = ٣ ، $ق'(١) = ٢$ ، هـ (١) = ١ ، فإن $(ق(١) \times هـ(١))'$ تساوي :

- (أ) ١- (ب) صفر (ج) ٤- (د) ٤

١٨) إذا كان ق (س) = $٣ + ٢\sqrt{س}$ ، فإن $ق'(١)$ تساوي :

- (أ) ٢ (ب) صفر (ج) ٢- (د) ١



الوحدة الثالثة

(تطبيقات التفاضل)



الدرس الأول : التفسير الهندسي للمشتقة

* التفسير الهندسي للمشتقة : ميل المماس (م) = $u'(s)$ (المشتقة الأولى)

* مثال : اذا كان $v = 10 - 3s$ عند $s = 10$.

أوجد :
(١) ميل المماس لمنحنى الاقتران (ق) عند $s = 3$.
(٢) معادلة المماس لمنحنى الاقتران (ق) عند النقطة $(3, 8)$.

الحل :

$$(١) \quad u'(s) = 3s^2 - 10 = 3(3)^2 - 10 = 27 - 10 = 17 \quad (م)$$

$$(٢) \quad \text{معادلة المماس} \lll v - v_1 = m(s - s_1) \lll v - 8 = 17(s - 3)$$

$$v - 8 = 17(s - 3) \lll v = 17s - 51 + 8 \lll v = 17s - 43$$

* سؤال (١) : جد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية :

، النقطة $(2, 5)$ ،

$$(١) \quad v = 1 + 2s$$

$$س = ٢ ،$$

$$٢) ق (س) = ٤س - ١ + ٩س$$

$$س = ١ ،$$

$$٣) ق (س) = (٣ - س)(٥ - س)$$

، النقطة (٢ ، ٣)

$$\sqrt{5 + 2s} = \text{ق (س)}$$

، س = صفر

$$\frac{2 + 2s}{1 + 2s} = \text{ق (س)}$$

$$٦) \text{ ق (س) } = \frac{٤}{س} , \text{ س} = ٢$$



$$٧) \text{ ق (س) } = \text{س} (١ - ٣س) , \text{ س} = ١$$



عند النقطة (١-، ق (١-)) ،

$$٨) ق (س) = (٣س٢ - ٢) ٤$$

* سؤال (٢) : اذا كان ق (س) = $٢س٢ + ٥$ ، وكان ميل المماس عند $س = ٢$ يساوي (١٨) أوجد قيمة (أ) ؟؟

* سؤال (٣) : اذا كان ق (س) = $٢س٢ + ٤س - ٣$ ، وكان ميل المماس عند $س = ٣$ يساوي (٢٢) أوجد قيمة (ك) ؟؟

الدرس الثاني : التفسير الفيزيائي للمشتقة

(ف) : المسافة بالمتر ، (ن) : الزمن بالثانية ، (ع) : السرعة (م / ث) ، (ت) : التسارع (م / ث^٢)

$$\begin{aligned} * \text{ المسافة} = \text{ف}(\text{ن}) & \\ * \text{ التسارع} = \text{ت}(\text{ن}) & \\ * \text{ السرعة} = \text{ع}(\text{ن}) & \\ * \text{ ف}(\text{ن}) & \\ * \text{ ع}(\text{ن}) & \\ * \text{ ت}(\text{ن}) & \end{aligned}$$

* أمثلة :

١) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ٣ن^٢ - ٥ ،
جد سرعة الجسيم بعد مرور (٤) ثواني من بدء الحركة ؟

الحل :

$$\text{ع}(\text{ن}) = \text{ف}'(\text{ن}) = ٢ن - ٣ \lll \text{ع}(\text{٤}) = ٢ \times ٤ - ٣ = ٥ \text{ م / ث}$$

٢) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ٢ن^٢ + ٧ ،
جد تسارع الجسيم بعد مرور (٤) ثواني من بدء الحركة ؟

الحل :

$$\begin{aligned} \text{ع}(\text{ن}) = \text{ف}'(\text{ن}) &= ٢ن - ٢ \\ \text{ت}(\text{ن}) = \text{ع}'(\text{ن}) &= \text{ف}''(\text{ن}) = ٢ \lll \text{ت}(\text{٤}) = ٢ \text{ م / ث}^٢ \end{aligned}$$

* سؤال (١)

١) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ٣ن^٢ + ٧ ،
احسب سرعة الجسيم بعد مرور (٣) ثواني من بدء الحركة ؟

٢) يتحرك جسيم حسب العلاقة $v = \frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 1 - t$ ، جد تسارع الجسيم عندما $t = 2$ ثانية ؟

Blank area for the solution to question 2.

٣) يتحرك جسيم وفق العلاقة $v = 6t^2 - 5t + 5$ ، احسب تسارع الجسيم عندما تكون سرعته (42) م / ث ؟

Blank area for the solution to question 3.

٤) اذا متل الاقتران $v = 6t^2 - 5t + 5$ (ن) المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتر بعد (ن) ثانية من بدء الحركة ،
و كان $v = 42$ م / ث ؟

Blank area for the solution to question 4.

٥) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف $(ن) = ٢ن^٣ - ٦ن - ٧$ ، احسب تسارع الجسيم عندما تكون سرعته (١٨) م/ث؟

Blank area for the solution to question 5.

٦) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف $(ن) = ٣ن^٢ - ١٢ن + ٣$ ، احسب سرعة الجسيم عندما ينعدم التسارع؟

Blank area for the solution to question 6.

٧) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف $(ن) = ٣ن^٣ - ٣ن + ٦$ ، احسب تسارع الجسيم عندما تنعدم السرعة؟

Blank area for the solution to question 7.

* سؤال (٢) : تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة : $v = 2n^2$ ، إذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠ ، ١٠] تساوي سرعته اللحظية بعد مرور (٣) ثواني ، فأوجد قيمة (أ) ؟؟

Blank area for the solution to Question 2.

* سؤال (٣) : تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة : $v = n^2 + 4$ ، متى تساوي سرعته المتوسطة سرعته في اللحظة التي يكون فيها الزمن (٤) ثواني ؟؟

Blank area for the solution to Question 3.

الدرس الثالث : التزايد و التناقص للاقتران

*** نظرية :** اذا كان الاقتران (ق) متصلاً على الفترة [أ ، ب] ،
و قابلاً للاشتقاق في الفترة المفتوحة (أ ، ب) فإن :

- (١) ق (س) متزايد على الفترة [أ ، ب] اذا كان $ق'(س) > ٠$ ، لجميع قيم (س) $\in (أ ، ب)$
- (٢) ق (س) متناقص على الفترة [أ ، ب] اذا كان $ق'(س) < ٠$ ، لجميع قيم (س) $\in (أ ، ب)$
- (٣) ق (س) ثابت في الفترة [أ ، ب] اذا كان $ق'(س) = ٠$ ، لجميع قيم (س) $\in (أ ، ب)$

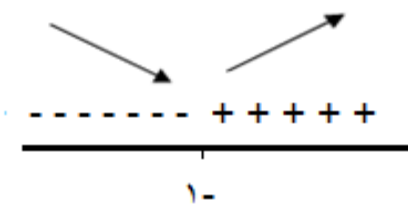
*** الخطوات الإجرائية لإيجاد فترات التزايد و التناقص للاقتران ق (س) باستخدام اختبار المشتقة الأولى :**

- (١) إيجاد المشتقة الأولى $ق'(س)$ للاقتران (ق)
- (٢) إيجاد أصفار المشتقة الأولى بوضع $ق'(س) = ٠$ و تسمى القيم الحرجة
- (٣) نضع قيم (س) على خط الأعداد (الموجب = تزايد ، السالب = تناقص)

*** أمثلة :**

(١) جد فترات التزايد و التناقص للاقتران ق (س) = $س^٢ + ٢س + ١$ ؟

الحل : $ق'(س) = ٢س + ٢ = ٠ \lll ٢ = -٢س \lll ١ = -س$



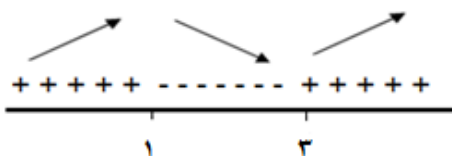
* ق (س) متناقص في الفترة $(-\infty ، ١)$

* ق (س) متزايد في الفترة $(١ ، \infty)$

(٢) جد فترات التزايد و التناقص للاقتران ق (س) = $س^٣ - ٢س^٢ + ٩س - ٦$ ؟

الحل : ق (س) = $٣س^٢ - ٤س + ٩ = ٠ \lll ٣س^٢ - ٤س + ٩ = ٠$

$(س - ١)(٣ - س) = ٠ \lll ١ = س ، ٣ = س$



* ق (س) متناقص في الفترة $[١ ، ٣]$

* ق (س) متزايد في الفترتين $(-\infty ، ١)$ ، $(٣ ، \infty)$

* سؤال (١) : جد فترات التزايد و التناقص لكل مما يلي :

$$(١) \text{ ق (س)} = ٨ + ٦س - ٢س^٢$$

$$(٢) \text{ ق (س)} = ٤ + ٢س - ٢س^٢$$

$$(٣) \text{ ق (س)} = ١ + ٣س - ٣س^٢$$

$$٤) \text{ ق (س) = - س}^٣ - ٦\text{س}^٢ + ١٥\text{س} - ٦$$

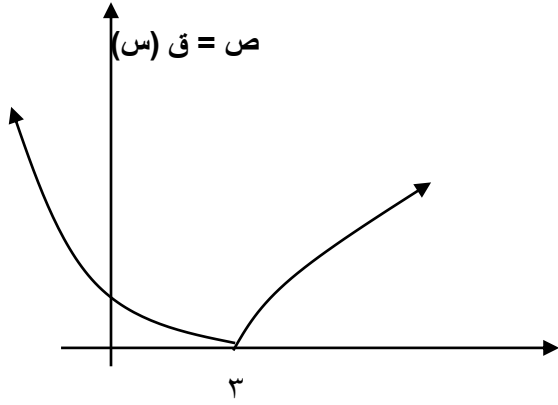
$$٥) \text{ ق (س) = (س+١)(س+٢)}$$

$$(6) \quad ق (س) = (س^2 - 4)^2$$

$$(7) \quad ق (س) = 1 - س^2$$

* سؤال (2) : بيّن أن الاقتران ق (س) = س³ + س² + 5 يكون متزايد لقيم (س) جميعها؟؟

* سؤال (٣) : أوجد فترات التزايد و التناقص للاقتران (ق) :

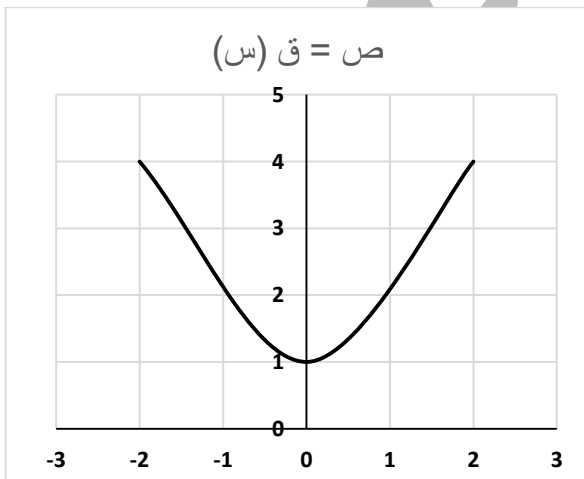


* سؤال (٤) : اذا كان $v = f(s)$ ، $h = f(s)$ ، فأثبت أن $q = f(s) + j$ ، ج : عدد ثابت .

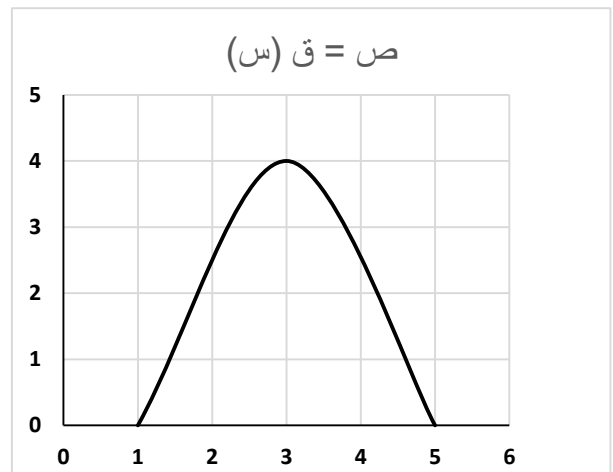


الدرس الرابع : القيم القصوى للاقتران

الشكل (٢)



الشكل (١)



* الشكل (١) يوجد نقطة عظمى عند النقطة (٣ ، ٤) (قمة)

* الشكل (٢) يوجد نقطة صغرى عند النقطة (٠ ، ١) (قاع)

* اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى :

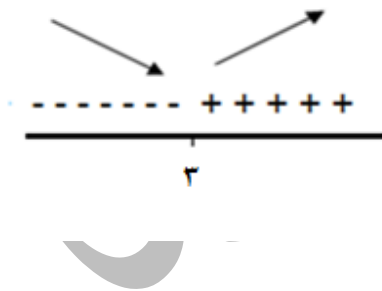
- الخطوات الإجرائية لإيجاد القيم الصغرى و العظمى للاقتران ص = ق (س) (المشتقة الأولى)

- ١) إيجاد المشتقة الأولى $ق'(س)$ للاقتران (ق)
- ٢) إيجاد أصفار المشتقة الأولى بوضع $ق'(س) = صفر$ و تسمى القيم الحرجة
- ٣) نضع قيم (س) على خط الأعداد (الموجب = تزايد ، السالب = تناقص)
- ٤) اذا تحول الاقتران من متزايد إلى متناقص (يكون قيمة عظمى)
و اذا من متناقص إلى متزايد (يكون قيمة صغرى)

* أمثلة :

١) جد النقط الحرجة و القيم الصغرى و العظمى (ان وجدت) للاقتران : ق (س) = $س^٢ - ٦س$

الحل :



$$* ق'(س) = ٢س - ٦ = ٠$$

$$٢س = ٦ \lll س = ٣$$

* نقطة حرجة عند $س = ٣$

* قيمة صغرى عند $س = ٣$

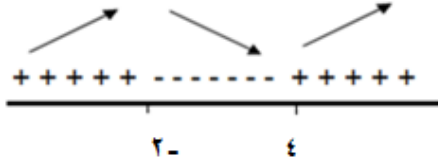
$$\text{و قيمتها : ق (٣) = } (٣)^٢ - ٦ \times ٣ = ٩ - ١٨ = -٩$$

* النقطة (٣ ، -٩)

٢) جد النقط الحرجة و القيم الصغرى و العظمى (ان وجدت)

$$\text{للاقتران : م (س) = س}^3 - \text{س}^2 - ٢٤\text{س} + ١٢$$

الحل :



$$* \text{ م (س) = س}^3 - \text{س}^2 - ٢٤\text{س} + ١٢$$

$$\text{س}^3 - \text{س}^2 - ٢٤\text{س} + ١٢ = ٠$$

$$\text{س}(\text{س}^2 - \text{س} - ٢٤) + ١٢ = ٠$$

$$\underline{\text{س} = ٢-} , \underline{\text{س} = ٤}$$

* نقط حرجة عند $\text{س} = ٢-$ ، $\text{س} = ٤$ ، * قيمة عظمى عند $\text{س} = ٢-$

$$\text{و قيمتها : م (٢-) = (٢-)}^3 - \text{(٢-)}^2 - ٢٤(٢-) + ١٢ = ٤٠$$

النقطة (٢- ، ٤٠)

* قيمة صغرى عند $\text{س} = ٤$

$$\text{و قيمتها : م (٤) = (٤)}^3 - \text{(٤)}^2 - ٢٤(٤) + ١٢ = ٦٨- ، \text{النقطة (٤ ، ٦٨-)}$$

* سؤال : جد النقط الحرجة و فترات التزايد و التناقص و القيم القصوى لكل مما يلي :

$$(١) \text{ ق (س) = س}^٢ - ٨\text{س} + ٥$$

$$(٢) \text{ ق (س) = س}^٢ - \text{س}^٣ + ٤$$

$$(٣) \text{ ق (س) = س}^٢ + ٥\text{س} - ٤$$

$$(٤) \text{ هـ (س)} = ٦ \text{ اس} - \frac{\text{س}^٢}{٣}$$

$$(٥) \text{ ق (س)} = ٢ \text{ اس} (١٢ - \text{س}^٢)$$

$$(٦) \text{ ل (س) = س}^٢ + ١$$

$$(٧) \text{ ق (س) = ١٠ - س}^٣$$

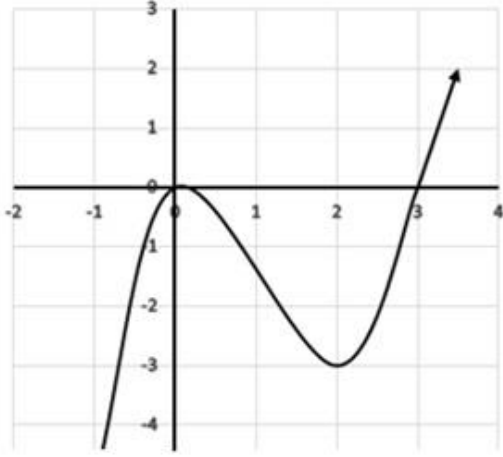
* سؤال (٢) : اذا كان للاقتران ق (س) = $٣س^٢ - أس + ٤$ قيمة حرجة عند $س = ٢$ ، أوجد قيمة (أ)؟؟

إيجاد القيم القصوى بالرسم البياني

* رسمة ق (س)

* سؤال (١) : جد فترات التزايد و التناقص ، القيم الحرجة ، النقط القصوى ؟

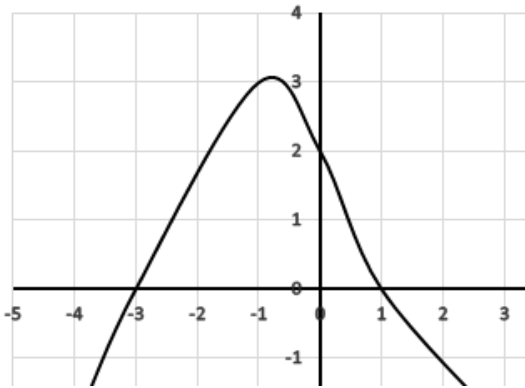
ق (س)



* رسمة ن (س):

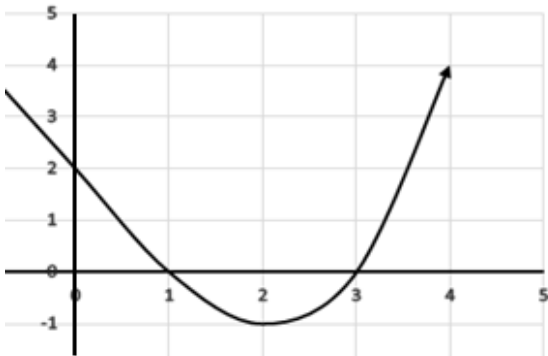
* سؤال (٢) : جد فترات التزايد و التناقص ، القيم الحرجة ، النقط القصوى ؟

ق (س)



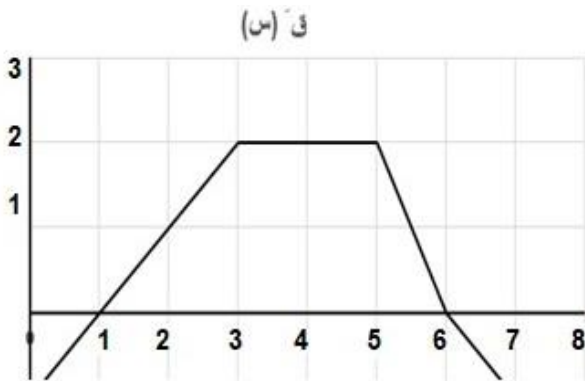
* سؤال (٣) : جد فترات التزايد و التناقص ، القيم الحرجة ، النقط القصوى ؟

ق (س)



* سؤال (٤) : اعتماداً على الشكل أدناه الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران (ق) ، أجب عما يلي :

* فرع (أ) : جد فترات التزايد و التناقص ، القيم الحرجة ، النقط القصوى ؟



* فرع (ب) : أوجد هنا $\frac{v(2) - (h+2)v}{h}$

* فرع (ج) : أوجد هنا $\frac{v(6) - (e)v}{6-e}$

* فرع (د) : أوجد $v'(5)$

* فرع (هـ) : أوجد ميل المماس عند $s = 3$ ؟؟

الدرس السادس :
تطبيقات اقتصادية على التفاضل

* **التعريف :** اذا كانت (س) هي عدد الوحدات المنتجة من سلعة معينة في فترة محددة في مصنع ما ، فإن :

$$(1) \text{ ك (س) = التكلفة الكلية = الإيراد الكلي - الربح الكلي = د (س) - ر (س)}$$

$$\text{ك}^{\wedge} \text{ (س) = التكلفة الحدية (معدل التغير في التكلفة بالنسبة لعدد الوحدات المباعة)}$$

$$(2) \text{ د (س) = الإيراد الكلي = التكلفة الكلية + الربح = ك (س) + ر (س)}$$

$$\text{د}^{\wedge} \text{ (س) = الإيراد الحدي (معدل التغير في الإيراد بالنسبة لعدد الوحدات المباعة)}$$

$$(3) \text{ ر (س) = الربح = الإيراد الكلي - التكلفة الكلية = د (س) - ك (س)}$$

$$\text{ر}^{\wedge} \text{ (س) = الربح الحدي = د}^{\wedge} \text{ (س) - ك}^{\wedge} \text{ (س) (معدل التغير في الربح بالنسبة لعدد الوحدات المباعة)}$$

* **مثال :** اذا كان اقتران التكلفة الكلية لإنتاج (س) لعبة هو $\text{ك (س) = } 200 - 0,5 \text{ س} + 0,0001 \text{ س}^2$ ،
و أن اقتران الربح الناتج من بيع (س) لعبة هو $\text{ر (س) = } 0,20 \text{ س}$ ،

جد : (1) التكلفة الحدية (2) الإيراد الحدي (3) الربح الحدي

الحل :

$$(1) \text{ التكلفة الحدية = ك}^{\wedge} \text{ (س) = } -0,5 + 0,0002 \text{ س}$$

$$(2) \text{ الإيراد الكلي = د (س) = ك (س) + ر (س)}$$

$$\text{د (س) = } 200 - 0,5 \text{ س} + 0,0001 \text{ س}^2 + 0,20 \text{ س}$$

$$\text{د (س) = } 200 + 0,15 \text{ س} + 0,0001 \text{ س}^2$$

$$\text{د}^{\wedge} \text{ (س) = } 0,15 + 0,0002 \text{ س}$$

$$(3) \text{ الربح الحدي = ر}^{\wedge} \text{ (س) = } 0,20$$

* أسئلة :

(١) اذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو د (س) = ٦٠س - س^٢ ، و اقتران التكلفة الكلية هو ك (س) = ٢٠ + ٨س ، حيث (س) عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما ، فجد الربح الحدي ؟

(٢) اذا كان اقتران الربح الكلي هو ر (س) = ٤٠س - س^٢ ، و اقتران الإيراد الكلي هو د (س) = ٥٠س - س^٢ عن بيع (س) وحدة من منتج ما ، فأوجد التكلفة الحدية؟؟

(٣) يبيع مصنع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بسعر (١٠٠) دينار ، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدنانير لإنتاج (س) وحدة من هذه السلعة أسبوعياً تُعطى بالعلاقة : ك (س) = ٣س^٢ + ٦٠س + ٧٠ ، جد الربح الحدي ؟

٤) إذا كان سعر الوحدة الواحدة ع (س) = $5س^2 + 2س$ ، و تكلفة القطعة الواحدة = $4س + 3$ ،
جد الربح الحدي عند $س = 1$ ؟

* إيجاد أكبر إيراد ، أكبر ربح ، أقل تكلفة

* مثال : وجد مصنع أثاث أن التكلفة الكلية بالدينار للإنتاج الأسبوعي لغرف نوم عددها (س) تقدر بالاقتران :
ك (س) = $س^2 - 3س^3 - 80س + 500$ ، فإذا بيعت كل غرفة نوم ب (٢٨٠٠ دينار) ،
فما الإنتاج الأسبوعي للشركة الذي يجعل الربح أكبر ما يمكن ؟

الحل :

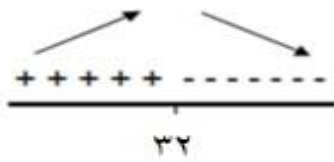
الإيراد الكلي = عدد القطع × سعر القطعة الواحدة <<< د (س) = $2800 × س = 2800س$

الربح الكلي = ر (س) = د (س) - ك (س) = $2800س - (س^2 - 3س^3 - 80س + 500) = 2880س - س^2 + 3س^3 - 500$

ر (س) = $2880س - س^2 + 3س^3 - 500$

الربح الحدي = ر' (س) = $2880 + 6س^2 - 2س = 960 - 2س + 6س^2$

(س - 32) (س + 30) = 0 <<< س = 32 ، س = -30 (تُهمل)



• يكون الربح أكبر ما يمكن عند $س = 32$

* أسئلة :

(١) اذا كانت تكلفة قطعة واحدة هي س - ٤ ، جد عدد القطع حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن ؟

Blank area for the solution to question 1.

(٢) اذا كان اقتران التكلفة الكلية هو $ك(س) = ٦٠٠٠ + ٥٠س + ٠,٠٠٢٥س^٢$ ، ويتم بيع الوحدة الواحدة بسعر (٧٠) دينار ، فما عدد الوحدات التي يجب إنتاجها لتحقيق أكبر ربح ممكن ؟

Blank area for the solution to question 2.

٣) اذا كان د (س) = ٥٠س - س^٢ هو اقتران الإيراد الكلي الناتج عن بيع (س) وحدة من منتج ما ،
و ك (س) = ١٠س هو اقتران التكلفة الكلية ، جد قيمة (س) التي تجعل الربح أكبر ما يمكن ؟

٤) اذا كان ر (س) = ٣س + س^٢ هو اقتران الربح الكلي الناتج عن بيع (س) وحدة من منتج ما ،
و ك (س) = ١ - $\frac{س^٣}{٣}$ هو اقتران التكلفة الكلية ، جد قيمة (س) التي تجعل الإيراد أكبر ما يمكن ؟

٥) ينتج مصنع (س) من الوحدات في الأسبوع من بضاعة معينة ، و يبيع الوحدة بمقدار (ص) ديناراً ،
إذا كانت كلفة الإنتاج لهذه الوحدات هي : $٠,٢س + ١٥س + ٥٠٠$ دينار ،
و كانت العلاقة بين س ، ص هي : $٣٨١ - ٣ص = ٥س$ ،
فبرهن أن أكبر ربح يحصل عليه هذا المصنع هو عندما يكون الإنتاج الأسبوعي (٣٠) وحدة ؟

٦) اذا كان $ك (س) = ٣٦٠٠٠ + ٤س + ٢س$ هو اقتران التكلفة الكلية لإنتاج (س) ثلاجة ،
و يتم بيع الثلاجة الواحدة بسعر (٥٠٠ دينار) ، جد : (١) الإيراد الكلي
(٢) عدد الثلاجات التي يجب أن يتم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن .

أسئلة ضع دائرة للوحدة الثالثة

(١) إذا كان ق (س) = ك س^٢ - ٤ س - ٣ ، وكان ميل المماس عند س = ٣ يساوي (٢٠) ، فإن (ك) تساوي:

- (أ) ٦ (ب) -٤ (ج) ٤ (د) -٦

(٢) إذا كان للاقتران ق (س) = ٢س^٢ - ٣س + ٤ قيمة حرجة عند س = ٣ ، فإن قيمة الثابت (أ) هي:

- (أ) ٤ (ب) صفر (ج) -٤ (د) ١٢

(٣) إذا كان ق (س) = ٣ - $\frac{٣}{٢}$ س ، فإن للاقتران ق (س) قيمة حرجة عند (س) تساوي:

- (أ) ٢ (ب) ٣ (ج) -٢ (د) صفر

(٤) إذا كان ك (س) اقتران التكلفة الكلية ، د (س) اقتران الإيراد الكلي لمصنع حيث (س) عدد الوحدات المنتجة أسبوعياً ، فيكون الربح الأسبوعي أكبر ما يمكن عندما:

- (أ) د^١ (س) = صفر (ب) د^١ (س) = ك^١ (س)
(ج) د^١ (س) < صفر (د) ك^١ (س) = د^١ (س)

(٥) إذا كان (ق) معرفاً على (ح) ، وكان ق (١) = ٣ ، و د^١ (٢) = صفر ، ق (٤) = ٩ ، فإن للاقتران (ق) قيمة حرجة عند (س) تساوي:

- (أ) ٩ (ب) صفر (ج) ١ (د) ٢

(٦) إذا كان (س) ر = $\frac{٥}{٣}$ س^٢ + ٤س هو اقتران الإيراد الكلي من بيع (س) قطعة من سلعة ما فإن الربح الحدي من بيع (٦) قطع من السلعة نفسها هو:

- (أ) ١٠ (ب) ٣٠ (ج) ٢٥ (د) ٢٤

(٧) إذا ق (س) = ٢س^٢ + ٧٠ ، فإن ميل المماس لمنحنى الاقتران (ق) عند س = ٢ هو:

- (أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٤ (ج) $\frac{١}{٢}$ - (د) ٤ -

(٨) إذا كان ف (ن) = م (ن - ١) المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء الحركة ، وإذا كانت سرعة هذا الجسيم بعد (٤) ثواني تساوي (١٢) م / ث فإن قيمة الثابت (م) تساوي:

- (أ) -٤ (ب) صفر (ج) ٥ (د) ٢

تم بحمد الله و بالتوفيق يا مبدعين ☺