مراجعة عامة

إن أهم ما نريد أن نعرفه لإزالة حالة عدم تعين من الشكل $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ هو تحليل البسط والمقام إن أمكن ذلك والاختصار

ويمكن أن نحلل بعدة طرق منها

١- المتطابقات التربيعية

فرق مربعي حدين = مجموعهما ضرب فرقهما

$$س^{٢} - ﺃ^{٢} = (س - ﺃ)(س + ﺃ)$$

$$س^{٢} - ٢٥ = (س - ٥)(س + ٥)$$

$$٢٥س^{٢} - ٩ = (\quad - ٣)(٥س + \quad)$$

$$٣س^{٢} - ٤ = \left(\sqrt{٣}\quad - \quad\right)\left(\sqrt{٣}س + ٢\right)$$

$$س - ٢٥ = \left(\sqrt{س} - ٥\right)\left(\sqrt{س} + ٥\right)$$

٢- التحليل بإخراج عامل مشترك

$$س^{٢} + ٣س = س(س - ٣)$$

- التحليل بتجميع الحدود

$$بس^{٢} - ٣س + ٢بس - ٦ = \left(بس^{٢} - ٣س\right) + (٢بس - ٦) = س(بس - ٣) + ٢(بس - ٣)$$

$$بس^{٢} - ٣س + ٢بس - ٦ = (\cdots\cdots - ٣)(\cdots\cdots + ٢)$$

المتطابقات التكعيبية

$$س^{٣} - ﺃ^{٣} = (س - ﺃ)\left(س^{٢} + ﺃس + ﺃ^{٢}\right)$$

$$س^{٣} + ﺃ^{٣} = (س + ﺃ)\left(س^{٢} - ﺃس + ﺃ^{٢}\right)$$

مثال $س^{٣} - ٢^{٣} = (س - ٢)(\cdots\cdots + ٢س + \cdots\cdots)$

مثال $٨س^{٣} - ١^{٣} = (٢س)^{٣} - (١)^{٣} = (\cdots\cdots - ١)\left(٤س^{٢} + ٢س + ١^{٢}\right)$

التحليل المباشر لثلاثي الحدود

$$س^{٢} + ٣س + ٢ = (س + ٢)(س + ١)$$

$$س^{٢} - ٣س + ٢ = (\cdots\cdots - ٢)(س - \cdots\cdots)$$

$$س^{٢} - س - ٢ = (س - \cdots\cdots)(س \cdots\cdots)$$

$$٢س^{٢} - ٣س + ١ = (\cdots\cdots - ١)(\cdots\cdots - ١)$$

تحليل ثلاثي الحدود $ﺃس^{٢} + بس + جـ$ باستخدام المميز $\Delta$

نحسب $\Delta = ب^{٢} - ٤ﺃجـ$

اذا كان $ب^{٢} - ٤ﺃجـ \succ ٠$ عندئذ لثلاثي الحدود جذران مختلفان هما

$$س_{٢} = \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤ﺃجـ}}{٢ﺃ} \quad و \quad س_{١} = \frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤ﺃجـ}}{٢ﺃ}$$ وبالتالي

$$ﺃس^{٢} + بس + جـ = ﺃ\left(س - س_{١}\right)\left(س - س_{٢}\right)$$

حلل التركيب

$٣س^{٢} + ٢س - ٥$

$\Delta = ب^{٢} - ٤أجـ = ٤ - ٤(٣)(-٥) = ٦٤$

$\Delta \succ ٠$

$\sqrt{\Delta} = ٨$

$س_{١} = \frac{-٢ - \sqrt{٦٤}}{٢(٣)} = -\frac{٥}{٣}$

$س_{٢} = \frac{-٢ + \sqrt{٦٤}}{٢(٣)} = ١$

$٣س^{٢} + ٢س - ٥ = ٣(\ldots - ١)(س + \ldots) = (س - ١)(٣س + ٥)$

ملاحظه ادخلنا العدد ة ٣ فقط على قوس واحد فقط عملية الضرب ليست توزيعية على نفسها

اذا كان $\Delta = ب^{٢} - ٤أجـ = ٠$

للتركيب جذر مضاعف وهو مربع كامل $س_{١} = س_{٢} = \frac{-ب}{٢أ}$

$أس^{٢} + بس + جـ = أ(س - س_{١})^{٢}$

$س^{٢} - ٤س + ٤ = (س - \ldots)^{٢}$

اذا كان $\Delta = ب^{٢} - ٤أجـ \prec ٠$

التركيب غير قابل للتحليل

ملاحظة قد نستخدم التحليل بالمتطابقات اكثر من مرة

$س^{٤} - ٦٤ = (س^{٢})^{٢} - ٨^{٢} = (س^{٢} - ٨)(س^{٢} + ٨) = \left((س^{٢}) - (\sqrt{٨})^{٢}\right)(س^{٢} + ٨)$

$= \left((س + (\sqrt{٨}))(س - (\sqrt{٨}))\right)(س^{٢} + ٨) = \left((س + (٢\sqrt{٢}))(س - (٢\sqrt{٢}))\right)(س^{٢} + ٨)$

لاحظ ان $س^{٢} + ٨$ لا تمتلك جذرا وبالتالي لا تحلل

اذا أي تركيب $ق(س)$ يمتلك جذرا ( صفرا) حلا $أ$ يمكن ان يحلل الى حاصل ضرب

$ق(س) = (س - أ)ل(س)$

هنا $ل(س)$ هو ناتج قسمة $ق(س)$ على $(س - أ)$

كيف نقسم كثير ات الحدود

ملاحظه يجب ان ترتب كثيرات الحدود وتوضع بالشكل

$$
\begin{array}{r|l}
س^{٢} - ٣س + ٣ & \\
\hline
س^{٣} - ٤س^{٢} + ٦س - ٣ & س - ١ \\
\mp س^{٣} \pm س^{٢} & \\
\ldots - ٣س^{٢} + ٦س - ٣ & \\
\ldots \pm ٣س^{٢} \mp ٣س & \\
\ldots\ldots ٣س - ٣ & \\
\ldots\ldots \mp ٣س \pm ٣ & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & 
\end{array}
$$

لاحظ بما ان الواحد جذر لكثير الحدود فان باقي القسمه هو صفر دوما

ملاحظه هنالك حالات خاصة

مثال حلل $س\sqrt[3]{س} - ٣س + ٨$

لاحظ ان هذا التركيب يقبل ٨ جذرا له وهذا نحصل عليه بالتجريب

لناخذ $س\sqrt[3]{س}$ ونعوض ٨ في احد الحدين فنحصل على $س\sqrt[3]{٨} = ٢س$ نضيف ونطرح هذا الحد

$$س\sqrt[3]{س} - ٢س + ٢س - ٣س + ٨ = \left(س\sqrt[3]{س} - ٢س\right) + \left(-س + ٨\right)$$

$$\left(س\sqrt[3]{س} - ٢س\right) - \left(س - ٨\right) = س\left(\sqrt[3]{س} - ٢\right) - \left(س - ٨\right)$$

$$س\left(\sqrt[3]{س} - ٢\right) - \left(\left(\sqrt[3]{س}\right)^{٣} - ٢^{٣}\right) = س\left(\sqrt[3]{س} - ٢\right) - \left(\left(\sqrt[3]{س}\right) - ٢\right)\left(\sqrt[3]{س^{٢}} + ٢\sqrt[3]{س} + ٤\right)$$

$$= \left(\left(\sqrt[3]{س}\right) - ٢\right)\left(س - \sqrt[3]{س^{٢}} - ٢\sqrt[3]{س} - ٤\right)$$

عمليات النشر حفظ

وهي عكس عملية التحليل

$$(س + ا)^{٢} = س^{٢} + ٢اس + ا^{٢}$$

$$(س - ا)^{٢} = س^{٢} - ٢اس + ا^{٢}$$

$$(س + ا)^{٣} = س^{٣} + ٣اس^{٢} + ٣ا^{٢}س + ا^{٣}$$

$$(س - ا)^{٣} = س^{٣} - ٣اس^{٢} + ٣ا^{٢}س - ا^{٣}$$

حل المعادلات

المعادلة $ن(س) = ٠$ تمتلك حلا هو $س = هـ$ اذا تحقق $ن(هـ) = ٠$

المعادلة $اس + ب = ٠$ بشرط $ا \neq ٠$ حل وحيد

$$اس = -ب$$

$$س = \frac{-ب}{ا}$$

مثال حل المعادلة

$$\frac{١}{٢}س + ٤ = ٠$$

$$\frac{١}{٢}س = -٤$$

$$س = -٤ \times ٢ = -٨$$

المعادلة

$$\text{ٲس}^{٢} + \text{بس} + \text{ج} = ٠$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{ٲج}}$$

$$\text{س}_{٢} = \frac{-\text{ب} - \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{ٲج}}}{٢\text{ٲ}} \quad \text{و} \quad \text{س}_{١} = \frac{-\text{ب} + \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{ٲج}}}{٢\text{ٲ}}$$

اما المعادلة $\text{ٲس}^{٣} + \text{بس}^{٢} + \text{جس} + \text{د} = ٠$

نحصل على الحل الحقيقي ان وجد بشكل تجريبي وليكن $\text{س} = \text{هـ}$ ثم نقسم كثير الحدود على $\text{س} - \text{هـ}$

وباقي القسمة يجب إن يكون الصفر طبعا

الإتمام إلى مربع كامل

لإتمام التركيب $\text{ٲس}^{٢} + \text{بس} + \text{ج}$ الى مربع كامل

$$\text{ٲس}^{٢} + \text{بس} + \text{ج} = \text{ٲ}\left(\text{س}^{٢} + \frac{\text{ب}}{\text{ٲ}}\text{س}\right) + \text{ج}$$

$$\text{ٲس}^{٢} + \text{بس} + \text{ج} = \text{ٲ}\left(\text{س}^{٢} + \frac{\text{ب}}{\text{ٲ}}\text{س} + \frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{ٲ}^{٢}} - \frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{ٲ}^{٢}}\right) + \text{ج}$$

$$\text{ٲس}^{٢} + \text{بس} + \text{ج} = \text{ٲ}\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{٢\text{ٲ}}\right)^{٢} - \frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{ٲ}} + \text{ج}$$

$$\text{ٲس}^{٢} + \text{بس} + \text{ج} = \text{ٲ}\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{٢\text{ٲ}}\right)^{٢} - \frac{\text{ب}^{٢} - ٤\text{ٲج}}{٤\text{ٲ}}$$

$$\text{ٲس}^{٢} + \text{بس} + \text{ج} = \text{ٲ}\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{٢\text{ٲ}}\right)^{٢} - \frac{\Delta}{٤\text{ٲ}}$$

مثال اتمم الى مربع كامل

$$٣\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٢$$

$$\text{ٲ} = ٣ \text{ و } \text{ب} = ٦ \text{ و } \text{ج} = ٢$$

$$\Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\text{ٲج} = ٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ = ١٢$$

$$\text{و } \frac{\text{ب}}{٢\text{ٲ}} = \frac{٦}{٢ \times ٣} = ١$$

$$٣\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٢ = ٣(\text{س} + ١)^{٢} - \frac{١٢}{١٢}$$

او

$$٣\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٢ = ٣\left(\text{س}^{٢} + ٢\text{س}\right) + ٢ = ٣\left(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١ - ١\right) + ٢ = ٣(\text{س} + ١)^{٢} - ٣ + ٢$$

$$= ٣(\text{س} + ١)^{٢} - ١$$

## القيمة المطلقة

القيمة المطلقة للعدد س هي اكبر العددين $(\text{س})$ و $(-\text{س})$

نرمز لها ب

$$|\text{س}| = \begin{cases} -\text{س} & \text{س} \le ٠ \\ \text{س} & \text{س} > ٠ \end{cases}$$

المساواة توضع عند اكبر او اصغر لان الاقتران متصل

مثال

$|٣| = ٣$

$|-٥| = ٥$

خواص القيمة المطلقة

$|ا^{٢}| = |ا|^{٢} = ا^{٢}$

$\sqrt{ا^{٢}} = |ا|$

$\sqrt{(-٤)^{٢}} = |-٤| = ٤$

$\sqrt{(س-١)^{٢}} = |س-١| = \begin{cases} -س+١ & س \le ١ \\ س-١ & س \succ ١ \end{cases}$

حل المعادلات التي تحوي قيم مطلقة

$|ص| = ا$

$ا \prec ٠$ مستحيلة

$|ص| = ٠ \Leftrightarrow ص = ٠$

$ا \succ ٠$ اما $ص = ا$ أو $ص = -ا$

مثال حل المعادلة

$|٢س - ٣| = ٥$

إما $\begin{cases} ٢س - ٣ = ٥ \\ ٢س = ٣ + ٥ \\ ٢س = ٨ \end{cases}$ $س = ٤$ أو $\begin{cases} ٢س - ٣ = -٥ \\ ٢س = ٣ - ٥ \\ ٢س = -٢ \end{cases}$ $س = -١$

المعادلة $|ص| = |ب|$

إما $ص = ب$ أو $ص = -ب$

المتباينات المتراجحات

$|ص| \prec ا \Leftrightarrow -ا \prec ص \prec ا$ بشرط $ا \succ ٠$

مثال حل المتباينة

$|٢س + ٤| \prec ٨$

$-٨ \prec ٢س + ٤ \prec ٨$

$-٨ - ٤ \prec ٢س + ٤ - ٤ \prec ٨ - ٤$

$-١٢ \prec ٢س \prec ٤$

$\frac{-١٢}{٢} \prec \frac{٢س}{٢} \prec \frac{٤}{٢}$

$-٦ \prec س \prec ٢$

مجموعة الحلول هي الفترة المفتوحة $س \in (-٦، ٢)$

$|ص| \succ ا$

مجموعة الحلول $\{ص \prec -ا\} \cup \{ص \succ ا\}$ او $ص \in (-\infty، -ا) \cup (ا، \infty)$

مثال اوجد مجموعة حلول المتباينة

$|س - ١| \ge ٤$

$س - ١ \le -٤ \vee س - ١ \ge ٤$

$س \le -٣ \vee س \ge ٥$

مجموعة الحلول هي $(-\infty ، -٣] \cup [٥ ، \infty)$

| |
|---|
| دراسة إشارة تركيب جبري |

$ق(س) = أس + ب$ $أ \neq ٠$

$ق(س) = ٠ \Leftrightarrow س = \frac{-ب}{أ}$ قبل الجذر اشارة $ق(س)$ تخالف اشارة أ وبعد الجذر توافق اشارة أ

٢- $ق(س) = أس^{٢} + بس + جـ$ ، $أ \neq ٠$ لهذا التركيب اشارة أ دوما الا اذا كان له جذران مختلفان بينهما يخالف اشارة أ

$\begin{cases} ق(س) = أس^{٢} + بس + جـ & ، أ \neq ٠ \\ & \Delta \succ ٠ \end{cases}$ بين الجذرين مخالف وخارج الجذرين موافق لاشارة أ

$\begin{cases} ق(س) = أس^{٢} + بس + جـ & ، أ \neq ٠ \\ & \Delta = ٠ \end{cases}$ جذر وحيد اشارة التركيب من اشارة أ

$\begin{cases} ق(س) = أس^{٢} + بس + جـ & ، أ \neq ٠ \\ & \Delta \prec ٠ \end{cases}$ ليس للتركيب جذور و اشارة التركيب من اشارة أ

٣- بشكل عام لدراسة اشارة تركيب $ق(س)$ في مجموعة تعربفه علينا ان نجد جذور التركيب في هذه المجموعة ونعوض قيم اختيارية لمعرفة اشارة التركيب في تلك الفترة (والشرط هوان يكون الاقتران متصل )

مثال ادرس اشارة التركيب $ق(س) = \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٥س + ٤}$

الحل

$ق(س) = ٠ \Leftrightarrow س - ٣ = ٠ \Leftrightarrow س = ٣$ ينعدم الكسر اذا انعدم البسط فقط

تحذف القيم التي تعدم المقام $س^{٢} - ٥س + ٤ = ٠ \Leftrightarrow (س - ١)(س - ٤) = ٠ \Leftrightarrow س = ١ \vee س = ٤$

يمكن ان نشكل جدول

| س | $-\infty$ ١ ٣ ٤ $\infty$ | | |
|---|---|---|---|
| إشارة $س - ٣$ | --------- -------------- -- ٠ + + +++ | | |
| إشارة $س^{٢} - ٥س + ٤$ | + ++++++ ٠ - -- - ٠ + | | |
| $ق(س) = \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٥س + ٤}$ | --------------- | + + ٠ - - | + |

$+\infty \xrightarrow{+} ٤ \xrightarrow{---} ٣ \xrightarrow{+} ١ \xrightarrow{---} -\infty$ وهذه اشارة التركيب على محور الاعداد

تم تعويض بعض القيم

لذلك لحل المتباينات او اعادة تعريف القيمة المطلقة لابد من دراسة اشارة التركيب

لاعادة تعريف $|ق(س)|$ اعادة كتابة اقتران القيمة المطلقة ( كتابة الاقتران على فترات ) اعادة تعريفه

نعلم ان $|ص| = \begin{cases} -ص & ص \le ٠ \\ ص & ص \succ ٠ \end{cases}$

١- نجد جذور المعادلة $ق(س) = ٠$

٢- ندرس اشارة $ق(س)$ ونحدد متى يكون موجب ومتى يكون سالب عندما

$ق(س) \succ ٠ \Leftarrow |ق(س)| = ق(س)$

$ق(س) \prec ٠ \Leftarrow |ق(س)| = -ق(س)$

مثال :اعد تعريف الاقتران $ق(س) = |٢س - ٦|$

الحل ينعدم الاقتران عندما $س = ٣$

| س | الكبرمن ٣ | ٣ | اصغر من ٣ |
|---|---|---|---|
| $٢س - ٦$ | موجب | ٠ | سالب |
| $ق(س) = \|٢س - ٦\|$ | $٢س - ٦$ | | $-٢س + ٦$ |

$$ق(س) = |٢س - ٦| = \begin{cases} -٢س + ٦ & س \le ٣ \\ ٢س - ٦ & س \succ ٣ \end{cases}$$

مثال اعد تعريف

$ق(س) = |٢س^٢ + س - ٣| = |(٢س + ٣)(س - ١)|$ جذور التركيب $س = \frac{-٣}{٢} \vee س = ١$

$$\xrightarrow[٢س^٢+س-٣]{++++} \frac{-٣}{٢} \xrightarrow[-٢س^٢-س+٣]{-----} ١ \xrightarrow[٢س^٢+س-٣]{+++++}$$

$$ق(س) = |٢س^٢ + س - ٣| = \begin{cases} ٢س^٢ + س - ٣ & س \le \frac{-٣}{٢} \\ -٢س^٢ - س + ٣ & \frac{-٣}{٢} \prec س \prec ١ \\ ٢س^٢ + س - ٣ & س \ge ١ \end{cases}$$

| |
|---|
| ملاحظات |

حول خواص المتباينات

١- يمكن ان ننقل حد من طرف لطرف اخر نغير اشارة الحد ولا نغير اتجاه المتباينه

٢- يمكن ان نضرب احد طرفي المتباينه بعدد موجب تماما او نقسم الطرفين عليه دون تغير اتجاه المتباينة

٣- نغير اتجاه المتباينة اذا كان العدد السابق سالب تماما

٤- اذا كان الطرفان موجبين نستطيع ان نربع الطرفين دون ان نغير الاتجاه

| |
|---|
| دالة اقتران اكبر عدد صحيح اصغر او يساوي س او (اقتران الجزء الصحيح) |

العدد الصحيح الذي لا يتجاوز س

[س]

مثال :اوجد قيمة كل مما يلي

$[١٫٤] = ١$

$\left[\frac{١}{٢}\right] = ٠$

$[١] = ١$

$[-٢٫١] = -٢$

$[٣٫٠] = ٠$

$-٢ \xrightarrow[-٢]{-٢ \le س < -١} -١ \xrightarrow[-١]{-١ \le س < ٠} ٠ \xrightarrow[٠]{٠ \le س < ١} ١ \xrightarrow[١]{١ \le س < ٢} ٢ \xrightarrow[٢]{٢ \le س < ٣} ٣ \xrightarrow[٣]{٣ \le س < ٤} ٤$

$$[س] = \begin{cases} -٢ & -٢ \le س < -١ \\ -١ & -١ \le س < ٠ \\ ٠ & ٠ \le س < ١ \\ ١ & ١ \le س < ٢ \\ ٢ & ٢ \le س < ٣ \\ ٣ & ٣ \le س < ٤ \end{cases}$$

الاقتران [أس] اقتران درجي طول الدرجة $ل = \frac{١}{|أ|}$ بشرط $أ \ne ٠$

اعد تعريف [٢س] طول الدرجة نصف

$$[٢س] = \begin{cases} -٢ & -١ \le س < \frac{-١}{٢} \\ -١ & \frac{-١}{٢} \le س < ٠ \\ ٠ & ٠ \le س < \frac{١}{٢} \\ ١ & \frac{١}{٢} \le س < ١ \\ ٢ & ١ \le س < \frac{٣}{٢} \\ ٣ & \frac{٣}{٢} \le س < ٢ \end{cases}$$

و

$$\left[\frac{-١}{٣}س\right] = \begin{cases} -٢ & ٣ < س \le ٦ \\ -١ & ٠ < س \le ٣ \\ ٠ & -٣ < س \le ٠ \\ ١ & -٦ < س \le -٣ \\ ٢ & -٩ < س \le -٦ \\ ٣ & -١٢ < س \le -٩ \end{cases}$$

فاذا كانت $ب \in ص$ فان $[أس + ب] = [أس] + ب$

$$\left[\frac{-١}{٣}س + ٣\right] = \begin{cases} ١ & ٣ < س \le ٦ \\ ٢ & ٠ < س \le ٣ \\ ٣ & -٣ < س \le ٠ \\ ٤ & -٦ < س \le -٣ \\ ٥ & -٩ < س \le -٦ \\ ٦ & -١٢ < س \le -٩ \end{cases}$$

لإعادة كتابة $[\text{أس}+\text{ب}]$ حيث $\text{ب}\in\text{ص}$ فان $[\text{أس}+\text{ب}]=[\text{أس}]+\text{ب}$

١- ناخذ $[\text{س}]$

٢- نضرب اطراف الفترات بالعدد $\frac{\text{١}}{\text{أ}}$ مع قلب اتجاه المتباينات اذا كان هذا العدد سالب نحصل على $[\text{أس}]$

٣- نضيف الى كل قيمة العدد ب نحصل على $[\text{أس}+\text{ب}]$

٤- او نضع $[\text{أس}+\text{ب}]=\text{ن}$ حيث $\text{ن}\in\text{ص}$ ونكتب

$$\text{ن}\le\text{أس}+\text{ب}<\text{ن}+\text{١}$$

$$\text{ن}-\text{١}\le\text{أس}+\text{ب}-\text{١}<\text{ن}$$

فاذا كانت $\text{أ}>\text{٠}$ نجد $\frac{\text{ن}-\text{١}}{\text{أ}}-\frac{\text{ب}-\text{١}}{\text{أ}}\le\text{س}<\frac{\text{ن}}{\text{أ}}-\frac{\text{ب}-\text{١}}{\text{أ}}$

واذا كانت $\text{أ}<\text{٠}$ نجد $\frac{\text{ن}-\text{١}}{\text{أ}}-\frac{\text{ب}-\text{١}}{\text{أ}}\ge\text{س}>\frac{\text{ن}}{\text{أ}}-\frac{\text{ب}-\text{١}}{\text{أ}}$

ملاحظة

$$[\text{س}]=\begin{cases}-\text{١} & -\text{١}\le\text{س}<\text{٠}\\ \text{٠} & \text{٠}\le\text{س}<\text{١}\\ \text{١} & \text{١}\le\text{س}<\text{٢}\\ \text{٢} & \text{٢}\le\text{س}<\text{٣}\end{cases}\;\rightarrow\;-[\text{س}]=\begin{cases}\text{١} & -\text{١}\le\text{س}<\text{٠}\\ \text{٠} & \text{٠}\le\text{س}<\text{١}\\ -\text{١} & \text{١}\le\text{س}<\text{٢}\\ -\text{٢} & \text{٢}\le\text{س}<\text{٣}\end{cases}$$

$$[-\text{س}]=\begin{cases}-\text{١} & \text{٠}<\text{س}\le\text{١}\\ \text{٠} & -\text{١}<\text{س}\le\text{٠}\\ \text{١} & -\text{٢}<\text{س}\le-\text{١}\\ \text{٢} & -\text{٣}<\text{س}\le-\text{٢}\end{cases}$$

نتيجة $[-\text{س}]\ne-[\text{س}]$ وبالتالي $[\text{س}]+[-\text{س}]\ne\text{٠}$

حل المعادلة $[\text{س}]=\text{جـ}\Leftrightarrow\text{جـ}\le\text{س}<\text{١}+\text{جـ}$ $\quad\text{جـ}\in\text{ص}$

مثال اوجد مجموعة حلول المعادلة

$$\left[\text{٢س}+\frac{\text{١}}{\text{٣}}\right]=-\text{٢}$$

$$-\text{٢}\le\text{٢س}+\frac{\text{١}}{\text{٣}}<-\text{٢}+\text{١}$$

$$-\text{٢}-\frac{\text{١}}{\text{٣}}\le\text{٢س}+\frac{\text{١}}{\text{٣}}-\frac{\text{١}}{\text{٣}}<-\text{١}-\frac{\text{١}}{\text{٣}}$$

$$\frac{-\text{٧}}{\text{٣}}\le\text{٢س}<\frac{-\text{٤}}{\text{٣}}$$

$$\frac{-\text{٧}}{\text{٦}}\le\text{س}<\frac{-\text{٤}}{\text{٦}}$$

مثال اعد تعريف

$ق(س) = \left[\frac{١}{٢}س + ١\right]$

$[س]$ : $٢ \xrightarrow[١]{١ \le س < ٢} ١ \xrightarrow[٠]{٠ \le س < ١} ٠ \xrightarrow[-١]{-١ \le س < ٠} -١$

$\left[\frac{١}{٢}س + ١\right]$ : $٤ \xrightarrow[٢]{٢ \le س < ٤} ٢ \xrightarrow[١]{٠ \le س < ٢} ٠ \xrightarrow[٠]{-٢ \le س < ٠} -٢$

$$\left[\frac{١}{٢}س + ١\right] = \begin{cases} ٠ & -٢ \le س < ٠ \\ ١ & ٠ \le س < ٢ \\ ٢ & ٢ \le س < ٤ \end{cases}$$

ضربنا الأعداد بين الأسهم بالعدد $\frac{١}{أ} = ٢$ وجمعنا الى كل عدد تحت السهم العدد ب = ١ لاحظ ب عدد صحيح

$\left[\frac{١}{٢}س + ١\right] = ن$

$ن \le \frac{١}{٢}س + ١ < ن + ١$

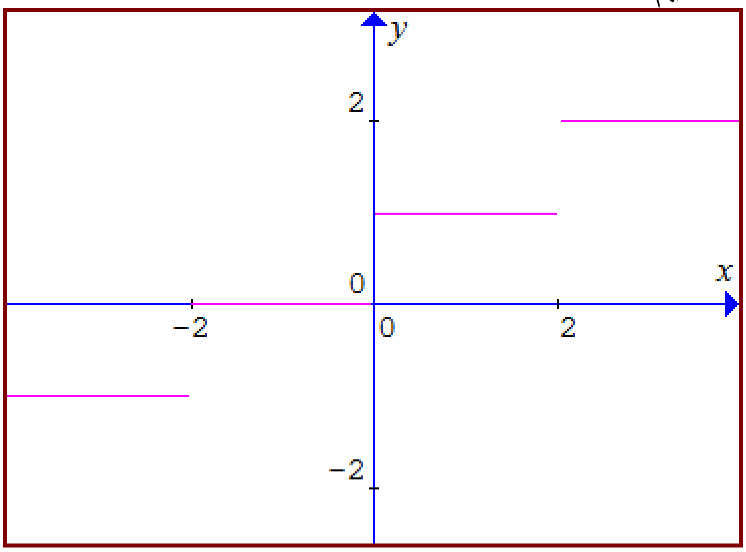
او $ن - ١ \le \frac{١}{٢}س < ن$

$٢ن - ٢ \le س < ٢ن$

$\left[\frac{١}{٢}س + ١\right] = \{ن \quad : \quad ٢ن - ٢ \le س < ٢ن\}$

نعطي ن القيم ٣،٢،١،٠،-١

الرسم




رسم الخطوط البيانية للاقتران

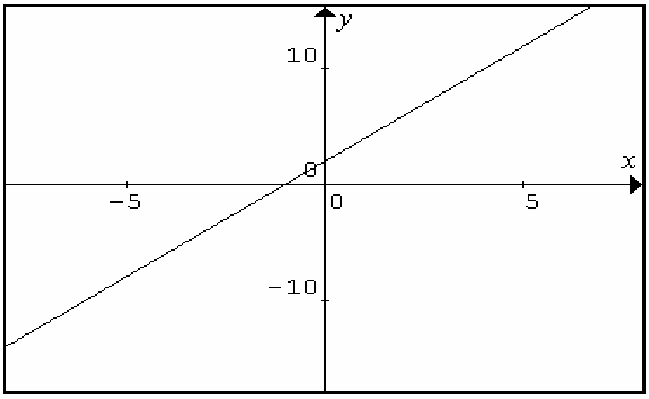
١- اقتران من الشكل $ق(س) = أس + ب$ $\quad أ \ne ٠$ أو $أس + ب ص + جـ = ٠$ الخط البياني مستقيم يتعين بنقطتين

يمكن ان ناخذ أي قيمتين ل س ونجد المجهول الاخر

ارسم خط $٢س - ص + ٢ = ٠$

من اجل س = ٠ نجد ص = ٢ النقطة (٠،٢)

من اجل ص = ٠ نجد س = -١ النقطة (-١،٠)




ملاحظة الخط البياني للاقتران ص = ب مستقيم يوازي محور السينات يمر من (٠،ب)

٢- ق(س) = أس$^{٢}$ + ب س + جـ        أ ≠ ٠

أ ≻ ٠ خطه البياني قطع مكافئ يتقعر ( يتجه ) نحو الصادات الموجبه نحو الاعلى

أ ≺ ٠ خطه البياني قطع مكافئ يتقعر نحو الصادات السالبه نحو الادنى

لرسم الخط نعين رأس القطع سينات الرأس س = $\frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}}$ ونجد ق$\left(\frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}}\right)$

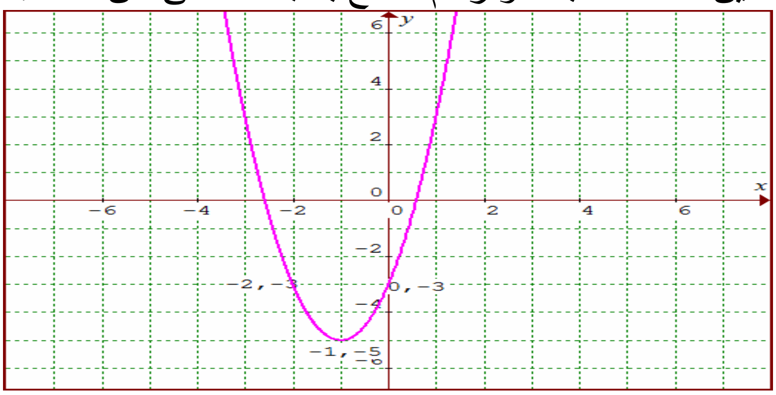
ونأخذ قيمتين واحدة اصغر والأخرى اكبر من سينات الرأس ونجد صورهما

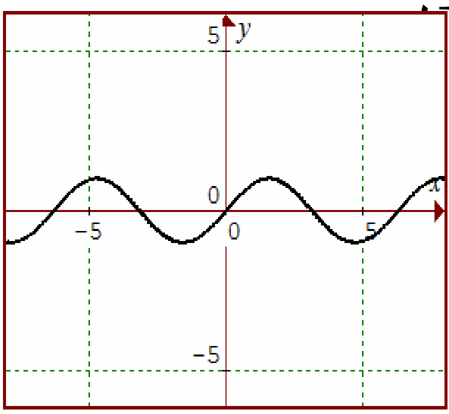
مثال ارسم الخط البياني للاقتران ق(س) = ٢س$^{٢}$ + ٤س − ٣

الحل أ = ٢      ، ب = ٤      ، جـ = −٣ الرأس س = $\frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}}$ = $\frac{-٤}{٤}$ = −١ ⟸ ق(−١) = −٥

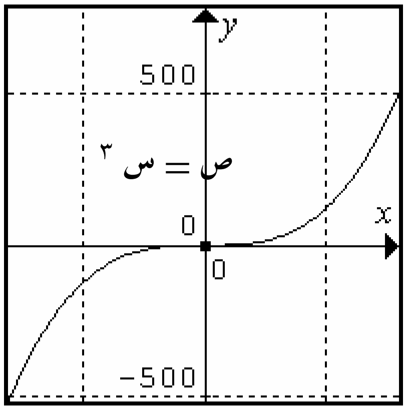
| | | | |
|---|---|---|---|
| س | −٢ | الراس −١ | ٠ |
| ق(س) | −٣ | −٥ | −٣ |
| النقاط | (−٢،−٣) | (−١،−٥) | (٠،−٣) |

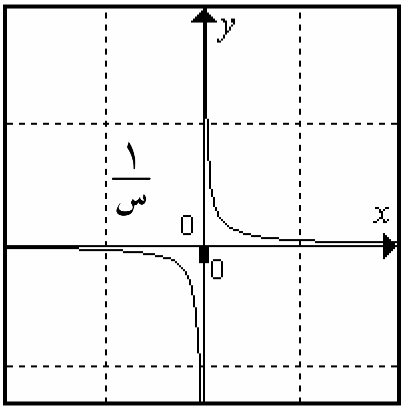
نعين النقط السابقة ونرسم القطع باتجاه الاعلى لان أ = ٢ ≻ ٠

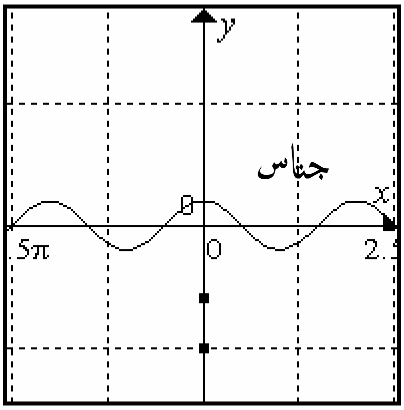



جاس




مثلثات

$$\text{جا}^{٢}\text{هـ}+\text{جتا}^{٢}\text{هـ}=١$$

$$\text{ظاهـ}=\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$$

$$\text{ظتاهـ}=\frac{\text{جتاهـ}}{\text{جاهـ}}$$

$$\frac{١}{\text{جتاهـ}}=\text{قاهـ}$$

$$\frac{١}{\text{جاهـ}}=\text{قتاهـ}$$

$$\text{ظاهـ ظتاهـ}=١$$

$$١+\text{ظا}^{٢}\text{هـ}=\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}=\text{قا}^{٢}\text{هـ}$$

$$١+\text{ظتا}^{٢}\text{هـ}=\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{هـ}}=\text{قتا}^{٢}\text{هـ}$$

النسب المثلثية للزوايا الشهيرة

| س | ٠= ٠ راديان | $٣٠=\frac{\pi}{٦}$ | $٤٥=\frac{\pi}{٤}$ | $٦٠=\frac{\pi}{٣}$ | $٩٠=\frac{\pi}{٢}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| جا | ٠ | $\frac{١}{٢}$ | $\frac{\sqrt{٢}}{٢}=\frac{١}{\sqrt{٢}}$ | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | ١ |
| جتا | ١ | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $\frac{\sqrt{٢}}{٢}=\frac{١}{\sqrt{٢}}$ | $\frac{١}{٢}$ | ٠ |
| ظا | ٠ | $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ | ١ | $\sqrt{٣}$ | غير معرف |

$$\text{جا}(\text{جـ}+\text{ى})=\text{جاجـ جتاى}+\text{جتاجـ جاى}$$

$$\text{جا}(\text{جـ}-\text{ى})=\text{جاجـ جتاى}-\text{جتاجـ جاى}$$

$$\text{جتا}(\text{جـ}-\text{ى})=\text{جتاجـ جتاى}+\text{جاجـ جاى}$$

$$\text{جتا}(\text{جـ}+\text{ى})=\text{جتاجـ جتاى}-\text{جاجـ جاى}$$

$$\text{جا}^{٢}\frac{\text{جـ}}{٢}=\frac{١-\text{جتاجـ}}{٢}$$

$$\text{جتا}^{٢}\frac{\text{جـ}}{٢}=\frac{١+\text{جتاجـ}}{٢}$$

$$\text{جا}^{٢}\frac{\text{جـ}}{٢}=\frac{١-\text{جتاجـ}}{٢}$$

$$\text{جتاجـ}=١-٢\,\text{جتا}^{٢}\frac{\text{جـ}}{٢}$$

$$\text{جتاجـ}=٢\,\text{جتا}^{٢}\frac{\text{جـ}}{٢}-١$$

$$\text{جتاجـ}=\text{جتا}^{٢}\frac{\text{جـ}}{٢}-\text{جا}^{٢}\frac{\text{جـ}}{٢}$$

$$\text{ظا}(\text{جـ}-\text{ى})=\frac{\text{ظاجـ}-\text{ظاى}}{١+\text{ظاجـ ظاى}}$$

$$\text{جاجـ}=٢\,\text{جا}\frac{\text{جـ}}{٢}\text{جتا}\frac{\text{جـ}}{٢}$$

$$\text{ظا}^{٢}\frac{\text{جـ}}{٢}=\frac{١-\text{جتا}^{٢}\text{جـ}}{١+\text{جتا}^{٢}\text{جـ}}$$

وهنالك قوانين التحويل من مجموع الى ضرب

$$\text{جاجـ}+\text{جاى}=٢\,\text{جا}\frac{\text{جـ}+\text{ى}}{٢}\text{جتا}\frac{\text{جـ}-\text{ى}}{٢}$$

$$\text{جاجـ}-\text{جاى}=٢\,\text{جتا}\frac{\text{جـ}+\text{ى}}{٢}\text{جا}\frac{\text{جـ}-\text{ى}}{٢}$$

$$\text{جتاجـ}+\text{جتاى}=٢\,\text{جتا}\frac{\text{جـ}+\text{ى}}{٢}\text{جتا}\frac{\text{جـ}-\text{ى}}{٢}$$

$$\text{جتاجـ}-\text{جتاى}=-٢\,\text{جا}\frac{\text{جـ}+\text{ى}}{٢}\text{جا}\frac{\text{جـ}-\text{ى}}{٢}$$

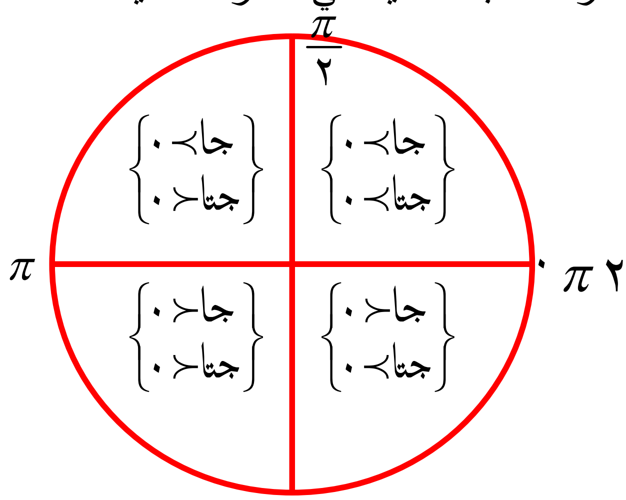

$$\text{جاجـ}+\text{جاى}=٢\,\text{جا}\frac{\text{جـ}+\text{ى}}{٢}\text{جتا}\frac{\text{جـ}-\text{ى}}{٢}$$

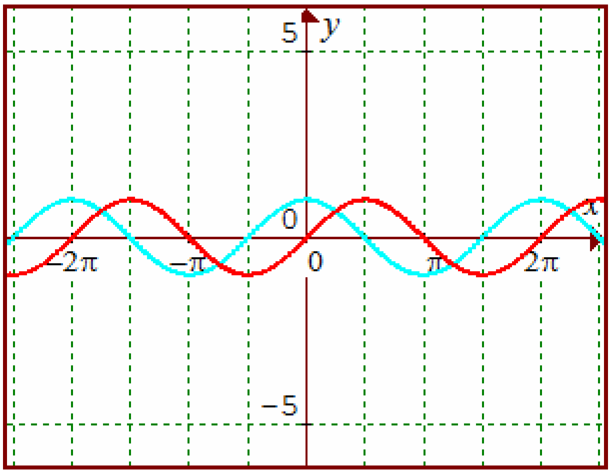
$$\text{جاجـ}-\text{جاى}=٢\,\text{جتا}\frac{\text{جـ}+\text{ى}}{٢}\text{جا}\frac{\text{جـ}-\text{ى}}{٢}$$

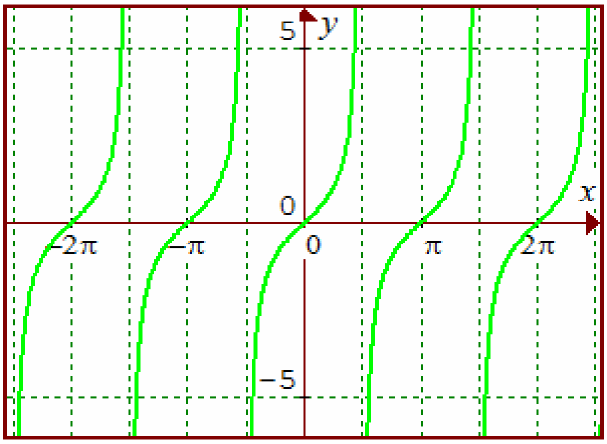
$$\text{جتاجـ}+\text{جتاى}=٢\,\text{جتا}\frac{\text{جـ}+\text{ى}}{٢}\text{جتا}\frac{\text{جـ}-\text{ى}}{٢}$$

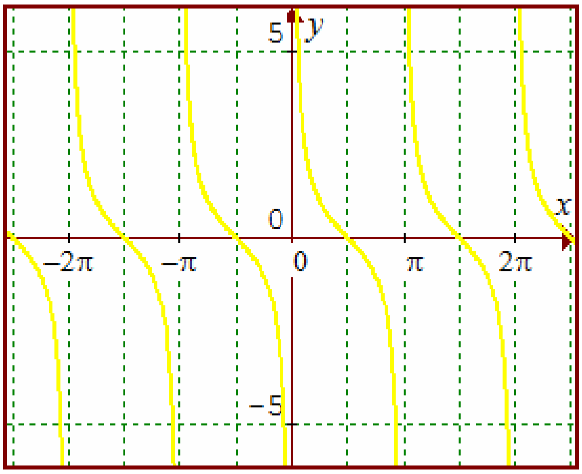
$$\text{جتاجـ}-\text{جتاى}=-٢\,\text{جا}\frac{\text{جـ}+\text{ى}}{٢}\text{جا}\frac{\text{جـ}-\text{ى}}{٢}$$


اشارة النسب المثلثية في الدائرة المثلثية






$\frac{٣\pi}{٢}$

حل بعض المعادلات المثلثية البسيطة

جاس = جاهـ $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = \text{هـ} + ٢\pi\text{ن} \\ \text{س} = \pi - \text{هـ} + ٢\pi\text{ن} \end{cases}$

جتاس = جتاهـ $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = \text{هـ} + ٢\pi\text{ن} \\ \text{س} = -\text{هـ} + ٢\pi\text{ن} \end{cases}$

ظاس = ظاهـ $\Leftrightarrow \{\text{س} = \text{هـ} + \pi\text{ن}\}$

ظتاس = ظتاهـ $\Leftrightarrow \{\text{س} = \text{هـ} + \pi\text{ن}\}$

جاس = -جاهـ $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = -\text{هـ} + ٢\pi\text{ن} \\ \text{س} = \pi + \text{هـ} + ٢\pi\text{ن} \end{cases}$

جتاس = -جتاهـ $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = \pi - \text{هـ} + ٢\pi\text{ن} \\ \text{س} = \pi + \text{هـ} + ٢\pi\text{ن} \end{cases}$

ظاس = ظاهـ $\Leftrightarrow \{\text{س} = -\text{هـ} + \pi\text{ن}\}$

ظتاس = ظتاهـ $\Leftrightarrow \{\text{س} = -\text{هـ} + \pi\text{ن}\}$

حالات خاصة

جاس = ٠ $\Leftrightarrow \{\text{س} = \pi\text{ن}\}$

جتاس = ٠ $\Leftrightarrow \left\{\text{س} = \frac{\pi}{٢} + \pi\text{ن}\right\}$

ظاس = ٠ $\Leftrightarrow \{\text{س} = \pi\text{ن}\}$

ظتاس = ٠ $\Leftrightarrow \left\{\text{س} = \frac{\pi}{٢} + \pi\text{ن}\right\}$

جاس = ١ $\Leftrightarrow \left\{\text{س} = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi\text{ن}\right\}$

جتاس = ١ $\Leftrightarrow \{\text{س} = ٢\pi\text{ن}\}$

ظاس = ١ $\Leftrightarrow \left\{\text{س} = \frac{\pi}{٤} + \pi\text{ن}\right\}$

ظتاس = ١ $\Leftrightarrow \text{س} = \frac{\pi}{٤} + \pi\text{ن}$

$\text{جاس} = -1 \Leftrightarrow \left\{\text{س} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi\text{ن}\right\}$

$\text{جتاس} = -1 \Leftrightarrow \left\{\text{س} = \pi + 2\pi\text{ن}\right\}$

$\text{ظاس} = -1 \Leftrightarrow \left\{\text{س} = \frac{3\pi}{4} + \pi\text{ن}\right\}$

$\text{ظتاس} = -1 \Leftrightarrow \text{س} = \frac{3\pi}{4} + \pi\text{ن}$

حيث ن هي عدد صحيح نختاره حسب الفترة المعطاة

مثال حل المعادلة

$\text{جا}2\text{س} = -\frac{1}{2}$

نعلم ان

$\left\{\text{جاس} = -\text{جاهـ} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{س} = -\text{هـ} + 2\pi\text{ن} \\ \text{س} = \pi + \text{هـ} + 2\pi\text{ن}\end{array}\right.\right\}$

$\text{جا}2\text{س} = -\frac{1}{2}$

$\text{جا}2\text{س} = -\text{جا}\frac{\pi}{6}$

$2\text{س} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi\text{ن}$

$\text{س} = -\frac{\pi}{12} + \pi\text{ن}$

$2\text{س} = \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi\text{ن}$

$\text{س} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + \pi\text{ن}$

$\text{س} = \frac{7\pi}{12} + \pi\text{ن}$

حل المعادلة في الفترة $[-\pi، \pi]$

$\text{جتا}\left(3\text{س} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

الحل :

نعلم ان $\text{جتاس} = \text{جتاهـ} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{س} = \text{هـ} + 2\pi\text{ن} \\ \text{س} = -\text{هـ} + 2\pi\text{ن}\end{array}\right.$

$\text{جتا}\left(٣\text{س}-\frac{\pi}{٤}\right)=\frac{١}{٢}$

$\text{جتا}\left(٣\text{س}-\frac{\pi}{٤}\right)=\text{جتا}\frac{\pi}{٣}$

$٣\text{س}-\frac{\pi}{٤}=\frac{\pi}{٣}+٢\pi\text{ن}$

$٣\text{س}=\frac{\pi}{٤}+\frac{\pi}{٣}+٢\pi\text{ن}$

$\text{س}=\frac{\pi}{١٢}+\frac{\pi}{٩}+\frac{٢\pi\text{ن}}{٣}$

$\text{س}=\frac{٧\pi}{٣٦}+\frac{٢}{٣}\pi\text{ن}$

من اجل ن=٠ نجد $\text{س}=\frac{٧\pi}{٣٦}\in[-\pi،\pi]$ مقبول

من اجل ن=١ نجد $\text{س}=\frac{٧\pi}{٣٦}+\frac{٢\pi}{٣}=\frac{٣١\pi}{٣٦}\in[-\pi،\pi]$ مقبول

من اجل ن=٢ نجد $\text{س}=\frac{٧\pi}{٣٦}+\frac{٤\pi}{٣}=\frac{٥٥\pi}{٣٦}\notin[-\pi،\pi]$ مرفوض

من اجل ن=-١ نجد $\text{س}=\frac{٧\pi}{٣٦}-\frac{٢\pi}{٣}=\frac{-١٧\pi}{٣٦}\in[-\pi،\pi]$ مقبول

من اجل ن=-٢ نجد $\text{س}=\frac{٧\pi}{٣٦}-\frac{٤\pi}{٣}=\frac{-٤١\pi}{٣٦}\notin[-\pi،\pi]$ مرفوض

او

$٣\text{س}-\frac{\pi}{٤}=-\frac{\pi}{٣}+٢\pi\text{ن}$

$٣\text{س}=\frac{\pi}{٤}-\frac{\pi}{٣}+٢\pi\text{ن}$

$\text{س}=-\frac{\pi}{١٢}+\frac{٢}{٣}\pi\text{ن}$

من اجل ن=٠ نجد $\text{س}=\frac{-\pi}{١٢}\in[-\pi،\pi]$ مقبول

من اجل ن=١ نجد $\text{س}=\frac{-\pi}{١٢}+\frac{٢\pi}{٣}=\frac{٢٣\pi}{٣٦}\in[-\pi،\pi]$ مقبول

من اجل ن=٢ نجد $\text{س}=\frac{-\pi}{١٢}+\frac{٤\pi}{٣}=\frac{٤٧\pi}{٣٦}\notin[-\pi،\pi]$ مرفوض

من اجل ن=-١ نجد $\text{س}=\frac{-\pi}{١٢}-\frac{٢\pi}{٣}=\frac{٢٥\pi}{٣٦}\in[-\pi،\pi]$ مقبول

من اجل ن=-٢ نجد $\text{س}=\frac{-\pi}{١٢}-\frac{٤\pi}{٣}=\frac{-٤٩\pi}{٣٦}\notin[-\pi،\pi]$مرفوض

ملاحظة نأخذ قيم ن من مجموعة الأعداد الصحيحة ونعوض في الصيغة العامة للحل ونقبل كل القيم التي تنتمي للفترة المعطاة ونرفض أول قيمة لا تنتمي لتلك الفترة ونتوقف عندها

مجموعة الأعداد الصحيحة $\text{ص}=\{\ldots،-٢،-١،٠،١،٢،\ldots\}$

حل المعادلة :

$جا٢س - \sqrt{٣}جتا٢س = ١$

نضرب ونقسم الطرف الاول على العدد ٢

$$٢\left(\frac{١}{٢}جا٢س - \frac{\sqrt{٣}}{٢}جتا٢س\right) = ١$$

$$٢\left(جتا\frac{\pi}{٣}جا٢س - جا\frac{\pi}{٣}جتا٢س\right) = ١$$

$$٢جا\left(٢س - \frac{\pi}{٣}\right) = ١$$

$$جا\left(٢س - \frac{\pi}{٣}\right) = \frac{١}{٢}$$

$$جا\left(٢س - \frac{\pi}{٣}\right) = جا\frac{\pi}{٦}$$

$$٢س - \frac{\pi}{٣} = \frac{\pi}{٦} + ٢\pi ن$$

$$٢س = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$$

$$س = \frac{\pi}{٤} + \pi ن$$

نعطي قيم ن من ص القيم ٠،١ نحصل على الحلول في الفترة $[٠،٢\pi]$

$$٢س - \frac{\pi}{٣} = \pi - \frac{\pi}{٦} + ٢\pi ن$$

$$٢س = \frac{٧\pi}{٦} + ٢\pi ن$$

$$س = \frac{٧\pi}{١٢} + \pi ن$$

نعطي قيم ن من ص القيم ٠،١

مجوعة تعريف الاقتران

مجوعة تعريف اقتران :هي أوسع مجوعة محتواة في مجموعة الأعداد الحقيقية يكون لكل منها صورة وفق الاقتران

مثال : الاقتران الذي قاعدته $ق(س) = \sqrt{س - ١}$ مجموعة تعريفه هي القيم التي تجعل له معنى

ونعلم انه لا يوجد للأعداد السالبة جذرا ربيعيا وبالتالي ناخذ حلول المتباينة $س - ١ \geq ٠ \Leftrightarrow س \geq ١$

اذا مجموعة تعريفه[١، +∞)

وهذه هي بعض القواعد

١- الاقتران كثير الحدود من الدرج ن من الشكل ق(س) = أ$_{ن}$ س$^{ن}$ + أ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + ٠٠٠٠٠٠ + أ$_{٠}$

مجموعة تعريفه هي مجموعة الاعداد الحقيقية ح

٢-الاقتران النسبي من الشكل ق(س) = $\dfrac{\text{أ}_{ن}\text{س}^{ن} + \text{أ}_{ن-١}\text{س}^{ن-١} + ٠٠٠٠٠٠ + \text{أ}_{٠}}{\text{ب}_{ك}\text{س}^{ك} + \text{ب}_{ك-١}\text{س}^{ك-١} + ٠٠٠٠٠٠ + \text{ب}_{٠}}$ هي ح

باستثناء القيم التي تعدم المقم وهي جذور المعادلة ب$_{ك}$ س$^{ك}$ + ب$_{ك-١}$ س$^{ك-١}$ + ٠٠٠٠٠٠ + ب$_{٠}$ = ٠

٣- الاقتران الكسري من الشكل ق(س) = $\dfrac{\text{ل(س)}}{\text{هـ(س)}}$

مجموعة تعريفه هي مجموعة تعريف البسط ولتكن م$_{١}$ تقاطع مجموعة تعرف المقام ولتكن م$_{٢}$ فرق جذور المقام( حلول المعادلة هـ(س) = ٠ ولتكن ك اذا مجموعة التعريف هي م = م$_{١}$ $\cap$ م$_{٢}$ − ك

٥- مجموعة تعريف الاقتران الجذري من الشكل ق(س) = $\sqrt[ن]{\text{ل(س)}}$ وهنا نميز الحالات التالية

أ- ن عدد فردي الاقتران معرف حيث ما تحت الجذر معرف للاقتران ق نفس مجموعة تعريف ل

ب- ن عدد زوجي عندئذ الاقتران ق معرف حيث حيث ل معرف وموجب ل(س) ≥ ٠

٦- الاقترانات المثلثية ق(س) =جاس،ق(س) =جتاس معرفه على ح والاقترانات

ق(س) =جال(س) ،ق(س) =جال(س) لها نفس مجموعة تعريف الاقتران ل(س)

٧- الاقتران ق(س) =ظاس مجموعة تعريفه م = ح − $\left\{\frac{\pi}{٢} + \pi ن : ن \in ط\right\}$

اما الاقتران ق(س) =ظال(س) مجموعة تعريفه ح فرق جذور المعادلة جتال(س) = ٠

٨- الاقتران ق(س) =ظتاس مجموعة تعريفه م = ح − $\{\pi ن : ن \in ط\}$

اما الاقتران ق(س) =ظتال(س) مجموعة تعريفه ح فرق جذور المعادلة جال(س) = ٠

٩- الاقتران ق(س) =قا(س) = $\dfrac{١}{\text{جتاس}}$ مجموعة تعريفه ح فرق جذور المعادلة جتا(س) = ٠

١٠- الاقتران ق(س) =قتا(س) = $\dfrac{١}{\text{جاس}}$ مجموعة تعريفه ح فرق جذور المعادلة جا(س) = ٠

| |
|---|
| هذه مجموعة تعريف الاقتران إذا أعطيت فقط قاعدة الاقتران<br>أما إذا أعطي مجال الاقتران فيصبح هذا المجال مجموعة تعريف الاقتران |

## النهايات

نهاية اقتران حقيقي ق(س) عندما يقترب (يسعى) المتغير (المتحول المجهول) س الى قيمة أ ويكتب (س ← أ) (حيث أ هي قيمة من فترة مغلقة او طرف لفترة مفتوحة محتواة في مجموعة تعريف الاقتران)

علينا هنا ان نبدل كل س بالعدد أ (تجاوزا) اما ان نحصل على قيمة ما من

$[-\infty، +\infty] = ح \cup \{-\infty، \infty\}$

او نحصل على احد حالات عدم التعين التالية $\frac{٠}{٠}$، $\frac{\mp\infty}{\mp\infty}$، $\infty - \infty$، $٠ \times \infty$، $(٠)^{٠}$، $١^{+\infty}$

وبعد حذف كثير من مواضيع الكتاب تبقى حالة واحدة فقط هي $\frac{٠}{٠}$ وسوف نستعرض هذه الحالة بشكل مفصل لأنها الموضوع الأساسي في هذا الدرس

مثال اوجد نهاية الاقتران $ق(س) = \frac{٢س}{س^{٢} - ١}$ عندما تقترب س من ٢ نعبر عن هذه الكتابة بالشكل التالي

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{٢س}{س^{٢} - ١} = \frac{٤}{٣}$ لاحظ بدلنا كل س ب ٢ فحصلنا على العدد الحقيقي $\frac{٤}{٣}$ وهو نهاية الاقتران المطلوب

مثال:

اوجد نهاية الاقتران $ق(س) = \frac{٢ - س}{س^{٢} - ١}$ عندما تقترب س من ١ لنعوض فنجد

$\lim_{س \to ١} ق(س) = \lim_{س \to ١} \frac{٢ - س}{س^{٢} - ١} = \frac{١}{٠}$ لن نعالج هذه الحالة مستقبلا (تم حذف هذه الحالة من الكتاب)

ملاحظة نهاية الاقتران ق عندما س ← أ تجاوزا صورة العدد الذي يسبق او يلي أ مباشرة

مثال:

اوجد نهاية الاقتران $ق(س) = \frac{١ - س^{٢}}{س + ١}$ عندما تقترب س من - ١ لنعوض فنجد

$\lim_{س \to -١} ق(س) = \lim_{س \to -١} \frac{١ - س^{٢}}{١ + س} = \frac{٠}{٠}$ سنعالج حالة عدم التعين هذه بشكل مفصل فهذا الجواب ليس حلا

مثال

اقتران على فترات

اوجد نهاية الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ١ & \text{س} < ١ \\ ٣ & \text{س} = ١ \\ \text{س}^{٢} - \text{س} & \text{س} > ١ \end{cases}$ عندما تقترب س من ١ وهي قيمة تشعب (يغير الاقتران عندها قاعدته)

$$+\infty \xrightarrow[\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{س}^{٢} - \text{س} = ٠]{\binom{\text{س} > ١}{\text{س} \to ١^{+}}} ١ \xleftarrow[\underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{س} - ١ = ٠]{\binom{\text{س} < ١}{\text{س} \to ١^{-}}} -\infty \qquad \text{لاحظ ان } \text{ق}(١) = ٣$$

جعلنا س تقترب من الواحد بقيم الكبر من الواحد (تتناقص قيم س ) وقلنا انه يقترب من الواحد من اليمين ورمزنا له ب $\text{س} \to ١^{+}$ وعوضنا الواحد بقاعدة الربط المقابلة وهي $\text{س}^{٢} - \text{س}$ وكانت $\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{س}^{٢} - \text{س} = ٠$ وهذه تدعى النهاية عند الواحد من اليمين

وجعلنا س تقترب من الواحد بقيم اصغر من الواحد (تتزايد قيم س ) وقلنا انه يقترب من الواحد من اليسار ورمزنا له ب $\text{س} \to ١^{-}$ وعوضنا الواحد بقاعدة الربط المقابلة وهي $\text{س} - ١$ وكانت $\underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{س} - ١ = ٠$ وهذه تدعى النهاية عند الواحد من اليسار

ملاحظة نستخدم هذه الطريقة ان كان الاقتران متشعب على فترات

وعند تساوي النهايتين نقول ان للاقتران نهاية عند تلك النقطة

اذا $\underset{\text{س}\to \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to \text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) \Leftrightarrow$ نهاية الاقتران موجودة عندما تقترب س من أ

$\underset{\text{س}\to \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) \neq \underset{\text{س}\to \text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) \Leftrightarrow$ نهاية الاقتران غير موجودة عندما تقترب س من أ

مثال : ابحث في نهاية الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ١}$ عند ٢

الحل اقتران جذري اصم الشرط ما تحت الجذر موجب $\text{س} - ١ \geq ٠ \Leftrightarrow \text{س} \geq ١$ مجال الاقتران هو $[١، +\infty)$

$\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ \sqrt{\text{س} - ١} = ٠$ الاقتران هنا معرف على يمين الواحد

اما النهاية عندما تقترب س من الواحد من اليسار فهي غير موجودة لان الاقتران غير معرف على يسار الواحد

اذا النهايه غير موجودة عند الواحد

ملاحظة ان أي عدد من الفترة $(١، +\infty)$ كون للاقتران عنده نهاية لناخذ عندما $\text{س} \to ٣$

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \sqrt{\text{س} - ١} = \sqrt{٢}$ نهاية موجودة

مثال ابحث في نهاية الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & \text{س} \leq ٠ \\ \text{س}^{٢} + ١ & \text{س} > ٠ \end{cases}$ عند الصفر

الحل

$$\underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ ٢\text{س} = ٠$$

$$\underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{س}^{٢} + ١ = ١$$

بما ان $٠ \neq ١$ فان النهاية غير موجودة عندما $\text{س} \to ٠$

مثال ابحث في نهاية الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \left[\frac{١}{٢}\text{س} - ١\right]$ عند ٢،١،٠

$$\text{ق}(\text{س}) = \left[\frac{١}{٢}\text{س} - ١\right]$$

$$[\text{س}] \qquad -١ \xrightarrow{-١} ٠ \xrightarrow{٠} ١ \xrightarrow{١} ٢$$

نعيد تعريف $\left[\frac{١}{٢}\text{س} - ١\right]$ $\qquad -٢ \xrightarrow{-٢} ٠ \xrightarrow{-١} ٢ \xrightarrow{٠} ٤$

$$\text{ق}(\text{س}) = \left[\frac{١}{٢}\text{س} - ١\right] = \begin{cases} -٢ & -٢ \le \text{س} < ٠ \\ -١ & ٠ \le \text{س} < ٢ \\ ٠ & ٢ \le \text{س} < ٤ \end{cases}$$

$\underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = -٢$

نهاية غير موجودة عندما س ← ٠

$\underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = -١$

عند الواحد لاحظ ان الاقتران لايغير قاعدتة في فترة تضم الواحد وهي [٠،٢)

لذلك $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = -١$

عند ٢ نقطة تشعب

$\underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = -١$

نهاية غير موجودة عند ٢

$\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٠$

وعليه نستنتج القاعدة التالية

نهاية $\text{ق}(\text{س}) = [\text{ل}(\text{س})]$ عندما س تقترب من أ

١- اذا كانت $\text{ل}(\text{أ})$ عدد صحيح فان النهاية غير موجودة لعدم تساوي النهايتين

٢- اذا كانت $\text{ل}(\text{أ})$ عدد غير صحيح فان النهاية موجودة وتساوي العدد الصحيح الذي يسبق $\text{ل}(\text{أ})$

مثال اوجد

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \left[\frac{-١}{٣}\text{س} + ٢\right]$$

نعوض في المضمون نجد $\frac{-١}{٣}(-٢) + ٢ = \frac{٨}{٣} = ٢\frac{١}{٣}$ وهو عدد غير صحيح وبالتالي

$$\left[٢\frac{١}{٣}\right] = ٢$$

اذا $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \left[\frac{-١}{٣}\text{س} + ٢\right] = ٢$

وعند $\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\left[\frac{-\text{١}}{\text{٣}}\text{س}+\text{٢}\right]$

نعوض في المضمون نجد $\frac{-\text{١}}{\text{٣}}(\text{٣})+\text{٢}=\text{١}$ وهو عدد صحيح لذلك سنجد ان النهايتين غير متساويتين

وبالتالي النهاية غير موجودة

من الأفضل أن نعرف الاقتران عند ٣ نأخذ قاعدتين

$$\left\{\begin{array}{l}
\left[\frac{-\text{١}}{\text{٣}}\text{س}+\text{٢}\right]= \\
\text{٠}\xrightarrow{-\text{١}}-\text{١}\xrightarrow{-\text{٢}}-\text{٢} \\
\text{٠}\xrightarrow{\text{١}}\text{٣}\xrightarrow{\text{٠}}\text{٦} \\
\left[\frac{-\text{١}}{\text{٣}}\text{س}+\text{٢}\right]=\left\{\begin{array}{ll}\text{٠} & \text{٣}<\text{س}\le\text{٦}\\ \text{١} & \text{٠}<\text{س}\le\text{٣}\end{array}\right. \\
\underset{\text{س}\to\text{٣}^{+}}{\text{نهـا}}\left[\frac{-\text{١}}{\text{٣}}\text{س}+\text{٢}\right]=\text{٠} \\
\underset{\text{س}\to\text{٣}^{-}}{\text{نهـا}}\left[\frac{-\text{١}}{\text{٣}}\text{س}+\text{٢}\right]=\text{١}
\end{array}\right\}$$

وبالتالي النهاية عندا ٣ غير موجودة

ملاحظة مهمة النهاية عند ال ٣ من اليمن ناخذ عدد اكبر بقليل من ال ٣ ونعوض فنجد الناتج

$$\underset{\text{س}\to\text{٣}^{+}}{\text{نهـا}}\left[\frac{-\text{١}}{\text{٣}}\text{س}+\text{٢}\right]=\text{٠}$$

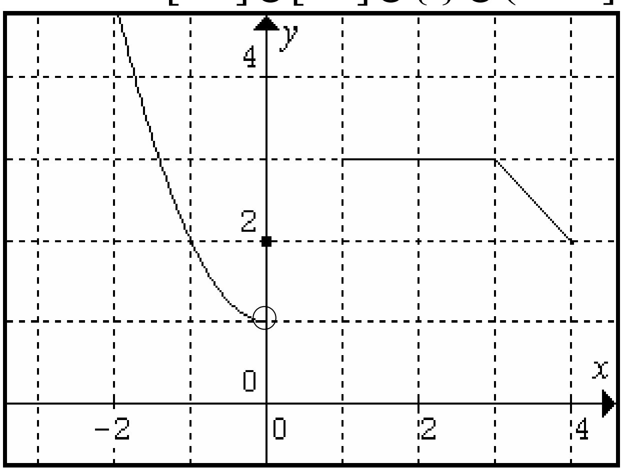
والنهاية عند ال ٣ من اليسار ناخذ عدد اصغر بقليل من ال ٣ ونعوض فنجد الناتج

$$\underset{\text{س}\to\text{٣}^{-}}{\text{نهـا}}\left[\frac{-\text{١}}{\text{٣}}\text{س}+\text{٢}\right]=\text{١}$$

كيف نجد النهايات للاقتران من خلال الخط البياني للاقتران

مثال في الشكل المرسوم اوجد اوجد نهاية الاقتران عند كل من ٠ و ١ و ٣ علما ان مجموعة تعريفه هي

$$[-\text{٢}،\text{٠})\cup\{\text{٠}\}\cup[\text{١}،\text{٣}]\cup[\text{٣}،\text{٤}]$$




ثم عين القيم التي تجعل النهاية عندها موجودة

$\lim_{س \to ٠^-} ق(س) = \cdots\cdots$

$\lim_{س \to ٠^+} ق(س)$ عير موجودة لانه غير معرف على يمين الصفر

$\lim_{س \to ١^-} ق(س) \quad \cdots\cdots$

$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \cdots\cdots$

$\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = \lim_{س \to ٣^+} ق(س) = ٣$

هو متصل على كل فترة خطه المرسوم متصل او يمتلك قاعدة ربط واحدة في تلك الفترة
وعلينا ان ندرس النهايات عند نقط انقطاع الخط او نقط التشعب والاطراف المغلقة للفترات
وعليه
النهاية موجودة عندما $أ \in (-٢،٠) \cup (١،٣) \cup (٣،٤)$

و عند $أ = ٣$

مثال : ليكن الاقتران

$ق(س) = \begin{cases} [س+١] & س < أ \\ |س^٢ - س| & س > أ \end{cases}$ عين قيم $أ$ اذا علمت ان نهاية الاقتران موجودة عندها

اذا كان $أ$ عدد صحيح

$ق(س) = \begin{cases} [س+١] & س < أ \\ |س^٢ - س| & س > أ \end{cases}$

$\lim_{س \to أ^-} [س+١] = \lim_{س \to أ^+} |س^٢ - س|$

$أ = |أ^٢ - أ|$

$أ^٢ - ٢أ = ٠$

$أ = ٠ \vee أ = ٢$

$أ = -أ^٢ + أ$

$أ = ٠$

اذا كان $أ$ عدد غير صحيح

$$و(س) = \begin{cases} [س+1] & س < أ \\ |س^2 - س| & س > أ \end{cases}$$

$$\lim_{س \to أ^-} [س+1] = \lim_{س \to أ^+} |س^2 - س|$$

$$\lim_{س \to أ^-} [س] + 1 = \lim_{س \to أ^+} |س^2 - س|$$

$$[أ^-] - 1 = |أ^2 - أ|$$

$$[أ^-] - 1 = أ^2 - أ$$

$$[أ] = أ^2 - أ + 1$$

$$أ^2 - أ + 1 \le أ < أ^2 - أ + 2$$

$$أ^2 - 2أ + 1 \le 0$$

$$(أ-1)^2 \le 0$$

$أ = 1 \in ص$ وهو مرفوض وبالتالي مجموعة الحلول الاولى هي المجموعة الخالية

اما المتباينة الثانية فهي

$$أ^2 - 2أ + 2 > 0$$

وهي محققة دوما لان $\Delta < 0$ ومجموعة حلول هذه المتباينه هو ح

نقاطع مع المجموعة السابقة وهي الخالية نجد الخالية نجد المجموعة الخالية

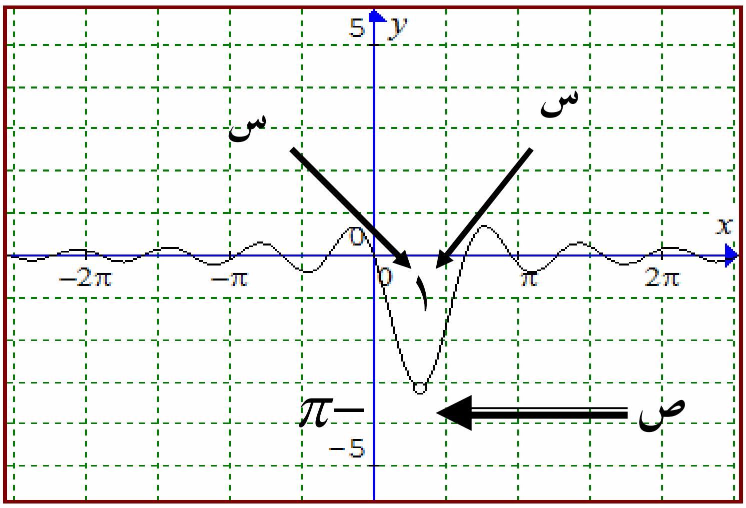
اذا الحل هو $أ = 0$

مثال :

اوجد نهاية الاقتران $ن(س) = \frac{جا(\pi س)}{س-1}$ عندما $س \to 1$

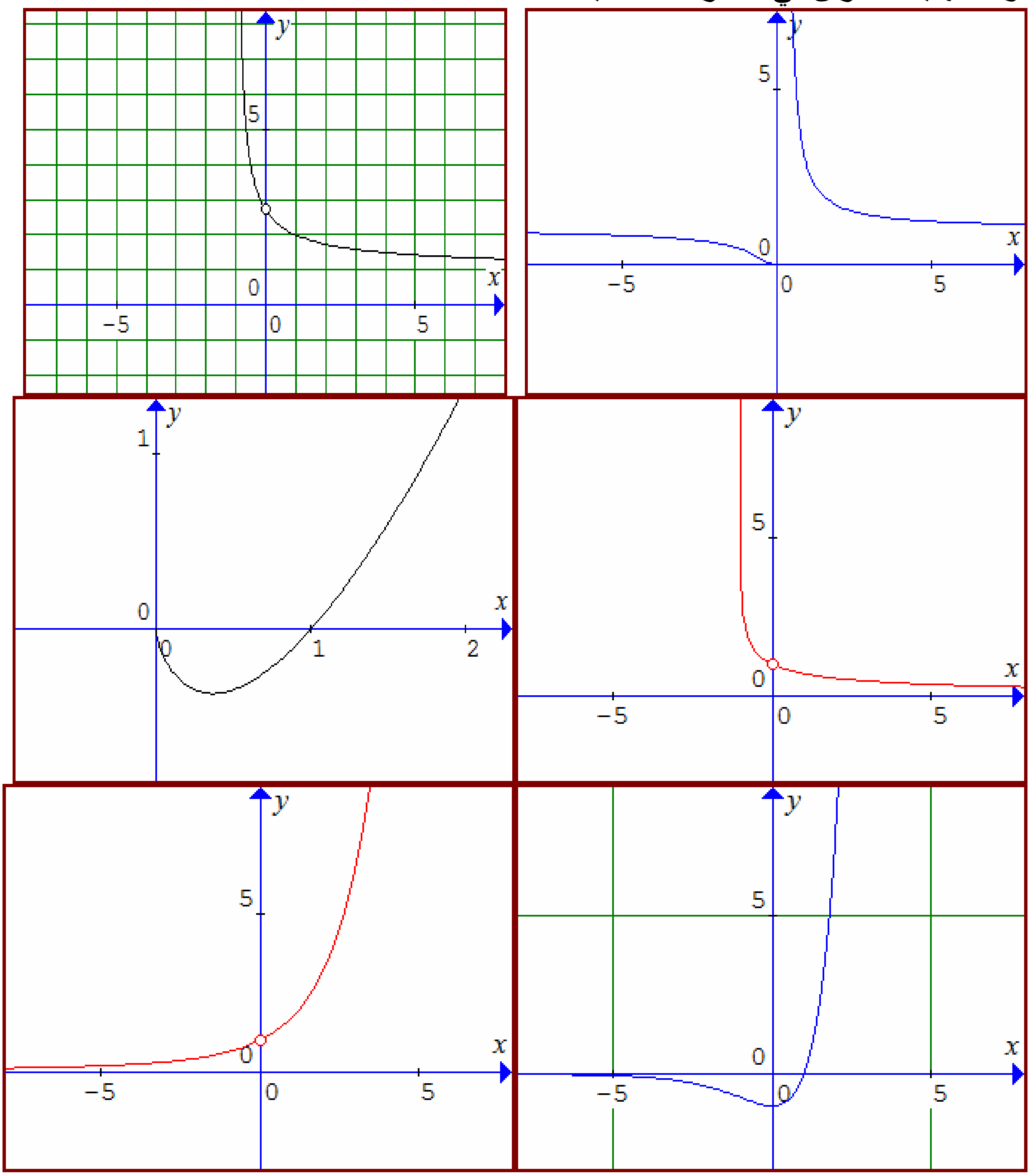
الحل نفرض $س - 1 = ص \Leftarrow س = ص + 1$ وعندما $س \to 1 \Leftarrow ص \to 0$

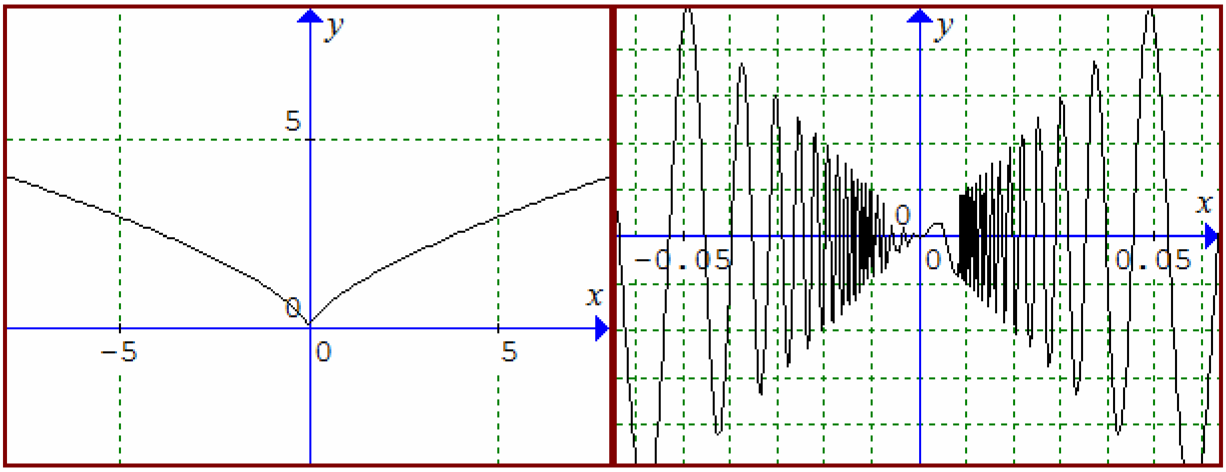
$$\lim_{س \to 1} \frac{جا(\pi س)}{س-1} = \lim_{ص \to 0} \frac{جا\pi(\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)}{ص} = \lim_{ص \to 0} \frac{جا(\pi ص + \pi)}{ص} = \lim_{ص \to 0} \frac{1جا(\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)}{ص} = -\pi$$




$$ن(س) = \frac{جا(\pi س)}{س-1}$$

اوجد نهاية الاقتران في الاقترانات التالية عندما س ← ٠






اوجد نهاي الاقتران عندما س ← ٢

$$ق(س) = \begin{cases} س - [س] & [س] \in \{٢ن + ١\} \\ ١ + [س] - س & [س] \in \{٢ن\} \end{cases}$$

الحالة الاولى [س] فردي والثانية زوجي

## نهايات الاقترانات الكسرية

هنا نصادف الحالات التالية

صفر على عدد غير معدوم   الجواب صفر

العكس عدد غير معدوم على صفر يساوي $\mp\infty$ حذفت هذه الحالة من الكتاب

حالة عدم تعين من الشكل $\frac{\cdot}{\cdot}$ صفر على صفر  نزيل هذه الحالة بالتحليل والاختصار

مثال : اوجد

$$\text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{س}{٣ - س}$$

الحل نعوض كل س ب ٤ نجد $\text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{س}{٣ - س} = \frac{٤}{-١} = -٤$

مثال :

اوجد $\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٤س + ٣}{س - ٣}$   ح ع ت $\frac{\cdot}{\cdot}$   هنا نحلل ونختصر

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٤س + ٣}{س - ٣} = \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{(س - ١)(س - ٣)}{س - ٣} = \text{نهـا}_{س \to ٣} (س - ١) = ٢$$

مثال :

اوجد $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{(س + ١)^{٢}} - ١\right)$   ح ع ت   $\infty \times ٠$   نوحد المقامات

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{(س + ١)^{٢}} - ١\right) = \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١}{س}\left(\frac{١ - (س + ١)^{٢}}{(س + ١)^{٢}}\right) = \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١}{س}\left(\frac{(١ - س - ١)(٠٠٠٠٠)}{(س + ١)^{٢}}\right)$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١}{س}\left(\frac{(س + ٢)(- س)}{(س + ١)^{٢}}\right) = \text{نهـا}_{س \to ٠} \left(\frac{-٠٠٠٠٠}{(س + ١)^{٢}}\right) = -٢$$

مثال :

$\text{نهـا}_{س \to ٥} \left(\frac{٢}{س} - \frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{س^{٢} - ٢٥}\right)$   ح ع ت  $\infty \times ٠$   نوحد المقامات

$$\text{نهـا}_{س \to ٥} \left(\frac{٢}{س} - \frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{س^{٢} - ٢٥}\right) = \text{نهـا}_{س \to ٥} \left(\frac{١٠ - ٢س}{٥س}\right)\left(\frac{١}{(س - ٥)(س + ٥)}\right) =$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٥} \left(\frac{٢(٥ - س)}{٥س}\right)\left(\frac{١}{(س - ٥)(س + ٥)}\right) = \text{نهـا}_{س \to ٥} \left(\frac{-٢}{٥س}\right)\left(\frac{١}{(س + ٥)}\right) = \frac{-٢}{٢٥٠}$$

تدريب

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٣س - ٢}{س^{٣} - ٨} = \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{(٠٠٠٠٠)(٠٠٠٠٠)^{٢}}{(س - ٢)(س^{٢} + ٤س + ٢)} = \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{(٠٠٠٠٠ + ١)^{٢}}{(س^{٢} + ٤س + ٢)} = \frac{٩}{١٤}$$

مثال: في هذا المثال نضرب ونقسم على المرافق

$$\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt{س^{٢}+١}-\sqrt{١-س^{٢}}}{س^{٢}}=\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt{س^{٢}+١}-\sqrt{١-س^{٢}}}{س^{٢}}\times\frac{\sqrt{س^{٢}+١}+\sqrt{١-س^{٢}}}{\sqrt{س^{٢}+١}+\sqrt{١-س^{٢}}}$$

$$\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}}\ \frac{س^{٢}+\ldots\ldots-\ldots\ldots}{س^{٢}\left(\sqrt{س^{٢}+١}+\sqrt{١-س^{٢}}\right)}=\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}}\ \frac{٢}{\left(\sqrt{س^{٢}+١}+\sqrt{١-س^{٢}}\right)}=١$$

مثال : هنا نستخدم متطابقة فرق مكعبي عددين او نضرب البسط والمقام ليصبح مكعب فرق عددين

$$\underset{س\to ٧}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt[٣]{س+١}-٢}{س-٧}=\underset{س\to ٧}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt[٣]{س+١}-٢}{(س+١)-٨}=\underset{س\to ٧}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt[٣]{س+١}-٢}{\left(\sqrt[٣]{س+١}\right)^{٣}-٢^{٣}}=$$

$$\underset{س\to ٧}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt[٣]{س+١}-٢}{\left(\sqrt[٣]{س+١}\right)^{٣}-٢^{٣}}=\underset{س\to ٧}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt[٣]{س+١}-٢}{\left(\sqrt[٣]{س+١}-٢\right)\left(\sqrt[٣]{(س+١)^{٢}}+٢\sqrt[٣]{س+١}+٤\right)}=$$

$$\underset{س\to ٧}{\text{نهـا}}\ \frac{١}{\left(\ldots\ldots+٢\sqrt[٣]{س+١}+\ldots\ldots\right)}=\frac{١}{١٢}$$

تمارين

ا-

جد نهاية كل من

$$\underset{س\to ٨}{\text{نهـا}}\ \frac{(س+١)^{٢}-٨١}{٨-س}=\underset{س\to ٨}{\text{نهـا}}\ \frac{(س+١-٩)(س+١+٩)}{٨-س}=\underset{س\to ٨}{\text{نهـا}}\ \frac{(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)}{-(س-٨)}$$

$$\underset{س\to ٨}{\text{نهـا}}-(س+١٠)=-١٨$$

ب-

$$\underset{س\to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{٨س^{٣}-١}{س-\frac{١}{٢}}=\underset{س\to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{(٢س-١)(\ldots\ldots+٢س+١)}{\frac{١}{٢}(٢س-١)}=\underset{س\to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{(٤س^{٢}+\ldots\ldots+١)}{\frac{١}{٢}}=٦$$

ج-

$$\underset{س\to \frac{٧}{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt{٢س+٩}-٤}{(٢س-٧)}=\underset{س\to \frac{٧}{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt{٢س+٩}-٤}{(٢س+٩)-١٦}=\underset{س\to \frac{٧}{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt{٢س+٩}-٤}{\left(\sqrt{٢س+٩}-\ldots\ldots\right)(\ldots\ldots+٤)}$$

$$\underset{س\to \frac{٧}{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{١}{\left(\sqrt{٢س+٩}+٤\right)}=\frac{١}{٨}$$

د- $$\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt[٣]{س+٢٥}-٣}{س-٢}=\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt[٣]{س+٢٥}-٣}{س+٢٥-٢٧}=$$

$$\underset{س\to ٧}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt[٣]{س+٢٥}-٣}{\left(\sqrt[٣]{س+٢٥}-٣\right)\left(\sqrt[٣]{(س+٢٥)^{٢}}+٣\sqrt[٣]{س+٢٥}+٩\right)}=$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٧} \frac{١}{\left(\sqrt[٣]{(س+٢٥)^{٢}} + ٣\sqrt[٣]{س+٢٥} + ٩\right)} = \frac{١}{١٨}$$

٥- توحيد
مقامات

$$\text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{٥+س} - \frac{١}{٥-س}\right) = \text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{١}{س}\left(\frac{٥-س-٥-س}{(٥+س)(٥-س)}\right) = \text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{١}{س}\left(\frac{-٢س}{(٥+س)(٥-س)}\right)$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٠} \left(\frac{-٢}{(٥+س)(٥-س)}\right) = \frac{-٢}{٢٥}$$

٢- اذا كان

$$ل(س) = \begin{cases} \dfrac{٣س^{٢}-٥س+٢}{٢س^{٢}-٣س+١} & ، س > ١ \\ ب & ، س \leq ١ \end{cases}$$ جد قيمة ب علما بان $\text{نهـا}_{س\to ١} ل(س)$ موجودة

الحل : بما ان النهاية موجودة فان

$$\text{نهـا}_{س\to ١^{+}} ل(س) = \text{نهـا}_{س\to ١^{-}} ل(س)$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١^{+}} \frac{٣س^{٢}-٥س+٢}{٢س^{٢}-٣س+١} = \text{نهـا}_{س\to ١^{-}} ب$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١^{+}} \frac{(٣س-٢)(س-١)}{(٢س-١)(س-١)} = ب$$

$$١ = ب$$

٣- جد كل من

| ا- نعيد تعريف القيمة المطلقة في كل تدريب ترد فيه |
|---|

$$\text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{|س-٣|-١}{س-٢}$$

$$|س-٢| = \begin{cases} س-٢ & ، س \geq ٢ \\ -(س-٢) & ، س < ٢ \end{cases}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٢^{-}} \frac{٣-س-١}{س-٢} = \text{نهـا}_{س\to ٢^{-}} \frac{٢-س}{س-٢} = -١$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٢^{-}} \frac{س-٣-١}{س-٢} = \text{نهـا}_{س\to ٢^{-}} \frac{س-٤}{س-٢} = -\infty$$

ب- $\text{نهـا}_{س\to \frac{٥}{٢}} \dfrac{٢س-[٢س]}{٤س^{٢}-٢٥} =$

$$\text{نهـا}_{س\to \frac{٥}{٢}^{+}} \frac{٢س-[٢س]}{٤س^{٢}-٢٥} = \text{نهـا}_{س\to \frac{٥}{٢}^{+}} \frac{٢س-٥}{٤س^{٢}-٢٥} = \text{نهـا}_{س\to \frac{٥}{٢}^{+}} \frac{٢س-٥}{(٢س-٥)(٢س+٥)} = \frac{١}{١٠}$$

| نعيد تعريف الاقتران [س] في أي تدريب |
|---|

$$\underset{\text{س}\to \frac{5}{2}^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢س} - [\text{٢س}]}{\text{٤س}^{2} - 25} = \underset{\text{س}\to \frac{5}{2}^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢س} - \ldots\ldots}{\text{٤س}^{2} - 25} = \underset{\text{س}\to \frac{5}{2}^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢س} - \ldots\ldots}{(\text{٢س} - 5)(\text{٢س} + 5)} = \infty$$

اذا النهاية غير موجودة

ج-

$$\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{4 - \text{٤س} + \text{س}^{2}}}{2 - \text{س}} = \underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{(\text{س} - 2)^{2}}}{2 - \text{س}} = \underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \frac{|\text{س} - 2|}{2 - \text{س}}$$

$$\underset{\text{س}\to 2^+}{\text{نهـا}} \frac{\ldots\ldots}{2 - \text{س}} = -1$$

النهاية غير موجودة

$$\underset{\text{س}\to 2^-}{\text{نهـا}} \frac{\ldots\ldots}{2 - \text{س}} = 1$$

هـ- اذ لم تستطع تحليل البسط افرض $\sqrt{\text{ص}} = \text{س}$

$$\underset{\text{ص}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص} - 4\sqrt{\text{ص}} + 3}{\text{ص}^{2} - 1} = \underset{\text{ص}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\left(\sqrt{\text{ص}} - \ldots\ldots\right)\left(\sqrt{\text{ص}} - \ldots\ldots\right)}{(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)}$$

$$= \underset{\text{ص}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\left(\sqrt{\text{ص}} - 3\right)\left(\sqrt{\text{ص}} - 1\right)}{\left(\sqrt{\text{ص}} + 1\right)\left(\sqrt{\text{ص}} - 1\right)(\text{ص} + 1)} = \underset{\text{ص}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\left(\sqrt{\text{ص}} - 3\right)}{\left(\sqrt{\text{ص}} + 1\right)(\text{ص} + 1)} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

٤-

$$\underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}\sqrt[3]{\text{س}} - 16}{\text{س} - 8} = \underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}\sqrt[3]{\text{س}} - \text{٢س} + \text{٢س} - 16}{\text{س} - 8} = \underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}\left(\sqrt[3]{\text{س}} - 2\right) + 2(\text{س} - 8)}{\text{س} - 8}$$

$$\underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}\left(\sqrt[3]{\text{س}} - 2\right)}{\left(\sqrt[3]{\text{س}} - 2\right)\left(\sqrt[3]{\text{س}^{2}} + 2\sqrt[3]{\text{س}} + 4\right)} + 2 = \underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\left(\sqrt[3]{\text{س}^{2}} + 2\sqrt[3]{\text{س}} + 4\right)} + 2 = \frac{8}{12} + 2$$

٨-

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{(49)^{\text{س}} - 7^{\text{س}}}{1 - 7^{\text{س}}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{(7)^{\text{٢س}} - 7^{\text{س}}}{1 - 7^{\text{س}}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{(7)^{\text{س}}\left(7^{\text{س}} - 1\right)}{1 - 7^{\text{س}}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \left(-(7)^{\text{س}}\right) = -1$$

ملاحظة هذا التدريب بحاجة لدرس كامل للوصول لهذه النتيجة ليس لمجرد ان نعوض كل س ب صفر

ماذا لو كان التدريب هو اوجد $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{(7)^{\text{٢س}} - 1}{\text{س} - 1}$

١٠- اذا كان $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{ا}\text{س}^{2} - \text{ب}\text{س} - 6}{\text{س} - 2} = 5$ جد ا،ب

نلاحظ ان ٢ هوجذر للبسط اذا يجب ان يكون جذر للمقام أي ان البسط يقبل القسمة على المقام والباقي صفر

$\text{٤ا} - \text{٢ب} - 6 = 0 \Leftarrow \text{٤ا} - 6 = \text{٢ب} \Leftarrow \text{ب} = \text{٢ا} - 3$

$$\lim_{س\to ٢} \frac{أس^{٢} - (٢أ - ٣)س - ٦}{س - ٢} = ٥ \Leftarrow \lim_{س\to ٢} \frac{أس^{٢} - ٢أس + ٣س - ٦}{س - ٢} = ٥$$

$$\lim_{س\to ٢} \frac{أس(س - ٢) + ٣(س - ٢)}{س - ٢} = ٥ \Leftarrow \lim_{س\to ٢}(أس + ٣) = ٥ \Leftarrow ٢أ + ٣ = ٥ \Leftarrow أ = ١، ب = -١$$

١١- اذا كانت

$\lim_{س\to -٢} \frac{ق(س) + ٥}{س + ٢} = ٩$ وكان $ق(س)$ كثير حدود جد $\lim_{س\to -٢}(ق(س) + ٢س)$ و

$\lim_{س\to -٢}\left(ق^{٢}(س) + ٢س\right)$

الحل :

$$\lim_{س\to -٢}(ق(س) + ٢س) = \lim_{س\to -٢} \frac{(ق(س) + ٥ + ٢س - ٥)}{س + ٢}(س + ٢) =$$

$$\lim_{س\to -٢} \frac{(ق(س) + ٥)}{س + ٢}(س + ٢) + ٢س - ٥ = -٩$$

او بما ان $\lim_{س\to -٢} \frac{ق(س) + ٥}{س + ٢} = ٩$ فان العدد-٢ هو جذر للبسط وبالتالي يوجد كثير حدود من درجة اقل وليكن $ل(س)$ بحيث $ق(س) + ٥ = ل(س)(س + ٢)$ أي ان

$$\lim_{س\to -٢} ق(س) + ٥ = \lim_{س\to -٢} ل(س)(س + ٢) = ٠ \Leftarrow \lim_{س\to -٢} ق(س) = -٥$$

$$\lim_{س\to -٢}(ق(س) + ٢س) = \lim_{س\to -٢} ق(س) + \lim_{س\to -٢} ٢س = -٥ - ٤ = -٩$$

$$\lim_{س\to -٢}\left(ق^{٢}(س) + ٢س\right) = \lim_{س\to -٢} ق^{٢}(س) + \lim_{س\to -٢} ٢س = ٢٥ - ٤ = ٢١$$

تدريب

اذا كان $\lim_{س\to ١} \frac{ق(س) - ٦}{س - ١} = ٦$ اوجد $\lim_{س\to ١} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{ق(س) - ٦}$

الحل :لناخذ

$$\lim_{س\to ١} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{ق(س) - ٦} = \lim_{س\to ١} \frac{(س - ١)(س + ٣)}{ق(س) - ٦} = \lim_{س\to ١} \frac{(س - ١)}{ق(س) - ٦} \lim_{س\to ١}(س + ٣)$$

$$\lim_{س\to ١} \frac{١}{\frac{ق(س) - ٦}{(س - ١)}} \lim_{س\to ١}(س + ٣) = \frac{١}{٦} \times ٦ = ١$$

## نهايات الاقترانات الدائرية

نظرية $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = ١$

قواعد
$$\left\{\begin{array}{l} \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهــا}} \text{جاس} = \text{جاأ} \\ \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهــا}} \text{جتاس} = \text{جتاأ} \\ \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهــا}} \text{ظاس} = \text{ظاأ} \end{array}\right\}$$
لانها متصلة
$$\left\{\begin{array}{l} \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = ١ \\ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جاأس}}{\text{بس}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \\ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{بس}}{\text{جاأس}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \\ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ظاأس}}{\text{بس}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \\ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{بس}}{\text{ظاأس}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \end{array}\right\}$$

ملاحظة كل قواعد نهايات الاقترانات الدائرية فيها س تقترب من الصفر دوما
لذلك اذا لم تقترب س من الصفر علينا ان نفرض متغير جديد ليقترب من الصفر
الشرط ان تكون الزاويه مقدرة بالراديان
اوجد نهاية كل من
مثال

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جاس} - \text{ظا٢س}}{\text{جا٢س} - ٥\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{س}} - \frac{\text{ظا٢س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا٢س}}{\text{س}} - \frac{٥\text{س}}{\text{س}}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{س}} - \frac{\text{ظا٢س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا٢س}}{\text{س}} - ٥} = \frac{١-٢}{٢-٥} = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$$

تدريب :

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{١-\text{جاس}}{\text{س}^٢} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{٢\,\text{جا}^٢\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}^٢} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}^٢\frac{\text{س}}{٢}}{٢\,\frac{\text{س}^٢}{٤}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}}{\frac{\text{س}}{٢}}\right)^٢ = \frac{١}{٢} \times ١^٢ = \frac{١}{٢}$$

تدريب

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{قا٢س} - ١}{\text{س}^٢} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\frac{١}{\text{جتا٢س}} - ١}{\text{س}^٢} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\frac{١-\text{جتا٢س}}{\text{جتا٢س}}}{\text{س}^٢} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{٢\,\text{جا}^٢\text{س}}{\text{س}^٢\,\text{جتا٢س}}$$

$$٢\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \left(\frac{\text{جاس}}{\text{س}}\right)^٢ \frac{١}{\text{جتا٢س}} = ٢\times١\times١ = ٢$$

تدريب :

جد $\underset{س\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}}\frac{\text{جاس}-\text{جتاس}}{س-\frac{\pi}{٤}}=\underset{س\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}}\frac{\text{جاس}-\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢}-س\right)}{س-\frac{\pi}{٤}}=$

$\text{جاس}-\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢}-س\right)=٢\,\text{جتا}\frac{س+\frac{\pi}{٢}-س}{٢}\,\text{جا}\frac{س-\frac{\pi}{٢}+س}{٢}=٢\,\text{جتا}\frac{\pi}{٤}\,\text{جا}\left(س-\frac{\pi}{٤}\right)$

$=\sqrt{٢}\,\text{جا}\left(س-\frac{\pi}{٤}\right)$

نفرض $\left\{\begin{array}{l} س-\frac{\pi}{٤}=ص\Leftarrow س=ص+\frac{\pi}{٤} \\ س\to\frac{\pi}{٤}\Leftarrow ص\to ٠ \end{array}\right\}$

$\underset{س\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}}\frac{\text{جاس}-\text{جتاس}}{س-\frac{\pi}{٤}}=\underset{س\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}}\frac{\sqrt{٢}\,\text{جا}\left(س-\frac{\pi}{٤}\right)}{س-\frac{\pi}{٤}}=\underset{ص\to٠}{\text{نهـا}}\frac{\sqrt{٢}\,\text{جاص}}{ص}=\sqrt{٢}$

تدريب اوجد نهاية (حاله خاصة)

$\underset{س\to\frac{\pi}{٣}}{\text{نهـا}}\frac{\sqrt{٣}\,\text{جاس}-\text{جتاس}}{س-\frac{\pi}{٣}}=\underset{س\to\frac{\pi}{٣}}{\text{نهـا}}\frac{٢\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{جاس}-\frac{١}{٢}\text{جتاس}\right)}{س-\frac{\pi}{٣}}=\underset{س\to\frac{\pi}{٣}}{\text{نهـا}}\frac{٢\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٣}\text{جاس}-\text{جا}\frac{\pi}{٣}\text{جتاس}\right)}{س-\frac{\pi}{٣}}$

$\underset{س\to\frac{\pi}{٣}}{\text{نهـا}}\frac{٢\,\text{جا}\left(س-\frac{\pi}{٣}\right)}{س-\frac{\pi}{٣}}=\underset{ص\to٠}{\text{نهـا}}\frac{٢\,\text{جاص}}{ص}=٢$ ، $س-\frac{\pi}{٣}=ص$ ، $س\to\frac{\pi}{٣}\Leftarrow ص\to٠$

تمارين ومسائل

٢- $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}}\left(\text{قاس}+\text{ظا٤س}\right)=١$ نعوض مباشرة نجد الجواب

٦- $\underset{س\to-٥}{\text{نهـا}}\frac{\text{جا}(س+٥)}{٢٥-س^{٢}}=\underset{س\to-٥}{\text{نهـا}}\frac{\text{جا}(س+٥)}{(٥+س)}\,\underset{س\to-٥}{\text{نهـا}}\frac{١}{٥-س}$

لما كانت $\underset{س\to-٥}{\text{نهـا}}\frac{\text{جا}(س+٥)}{(٥+س)}=\underset{ص\to٠}{\text{نهـا}}\frac{\text{جاص}}{ص}=١$ فرضنا $\left\{\begin{array}{l} س+٥=ص\Leftarrow س=ص-٥ \\ س\to-٥\Leftarrow ص\to٠ \end{array}\right\}$

وكانت $\underset{س\to-٥}{\text{نهـا}}\frac{١}{٥-س}=\frac{١}{١٠}$

كانت $\underset{س\to-٥}{\text{نهـا}}\frac{\text{جا}(س+٥)}{٢٥-س^{٢}}=١\times\frac{١}{١٠}=\frac{١}{١٠}$

١١- $\lim\limits_{س\to ٠} \frac{\sqrt{١-\text{جتاس}}}{س} = \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\sqrt{٢\text{جا}^{٢}\frac{س}{٢}}}{س} = \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\sqrt{٢}\left|\text{جا}\frac{س}{٢}\right|}{س}$

$\lim\limits_{س\to ٠^{+}} \frac{\sqrt{٢}\left|\text{جا}\frac{س}{٢}\right|}{س} = \lim\limits_{س\to ٠^{+}} \frac{\sqrt{٢}\text{جا}\frac{س}{٢}}{س} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

نهاية غير موجودة لعدم تساوي النهايتين

$\lim\limits_{س\to ٠^{-}} \frac{\sqrt{٢}\left|\text{جا}\frac{س}{٢}\right|}{س} = \lim\limits_{س\to ٠^{-}} \frac{-\sqrt{٢}\text{جا}\frac{س}{٢}}{س} = -\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

١٢- $\lim\limits_{س\to ٨} \frac{\text{جا}(س^{٢}-٦٤)}{س-٨} = \lim\limits_{س\to ٨} \frac{\text{جا}(س^{٢}-٦٤)}{(س^{٢}-٦٤)} \times \frac{س+٨}{١} = ١٦$

١٣-

$\lim\limits_{س\to ٠} \frac{١+\text{جا}٤س-\text{جتا}^{٢}(٢س)}{س} = \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٤س+١-\text{جتا}^{٢}(٢س)}{س} = \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٤س+٢\text{جا}^{٢}٤س}{س}$

$= \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٤س(١+٢\text{جا}٤س)}{س} == \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٤س}{س}(١+٢\text{جا}٤س) = ٤\times١ = ٤$

١٥- اذا كانت $\lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{جا}\,اس}{٦س} = \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{ظا}٥س}{بس-س} = ٢$ جد كل من ا،ب

الحل $\frac{ا}{٦} = \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{ظا}٥س}{بس-س} = ٢ \Leftarrow ا = ١٢$

$\lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{ظا}٥س}{بس-س} = ٢ \Leftarrow \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\text{ظا}٥س}{(ب-١)س} = ٢ \Leftarrow \frac{٥}{ب-١} = ٢ \Leftarrow ٥ = ٢ب-٢ \Leftarrow ب = \frac{٧}{٢}$

تدريب اوجد نهاية $ق(س) = [\text{جاس}]$ عندما $س \to \frac{\pi}{٢}$

$\text{جاس} \in [-١،١] = [-١،٠) \cup [٠،١) \{١\}$

$$[\text{جاس}] = \begin{cases} -١ \quad ، & \pi < س < ٢\pi \\ ٠ \quad ، & س \in [٠،\frac{\pi}{٢}) \cup (\frac{\pi}{٢}،\pi] \cup \{٢\pi\} \\ ١ \quad ، & س = \frac{\pi}{٢} \end{cases}$$

$\lim\limits_{س\to \frac{\pi}{٢}} ق(س) = \lim\limits_{س\to \frac{\pi}{٢}} [\text{جاس}] = ٠$

$ق\left(\frac{\pi}{٢}\right) = \left[\text{جا}\frac{\pi}{٢}\right] = ١$

اوجد نهاية كل من الاقترانات التالية

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س^{٢} - ٥س + ٦}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{|س|^{٣} - س^{٢}}{س^{٣} + س^{٢}}$$

$$\lim_{س \to ٣} \left( \frac{١}{س - ٣} - \frac{٦}{س^{٢} - ٩} \right)$$

$$\lim_{س \to \frac{١}{٢٧}} \frac{س^{\frac{٢}{٣}} - \frac{١}{٩}}{س^{\frac{١}{٣}} - \frac{١}{٣}}$$

$$\lim_{س \to ٣^{+}} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٩}}{س - ٣}$$

$$\lim_{س \to ٠^{+}} \frac{\sqrt{١ + س^{٢}} - \sqrt{١ - س^{٢}}}{س^{٣}}$$

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{١ - جاس}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{قاس - ١}{س}$$

$$\lim_{س \to \pi} \frac{ظا^{٢}س}{١ + قاس}$$

$\lim_{س \to ٢} \frac{جتا\frac{\pi}{س}}{س - ٢}$ افرض $\frac{\pi}{س} = ص$ ثم تابع الحل

ملاحظة اذا لم تكن الزاويه مقدرة بالراديان في الاقترانات المثلثية علينا ان نجري التحويل التالي

كل ١٨٠ درجه تقابل $\pi$ راديان

وكل س درجة تقابل هـ راديان

اذا $س = \frac{١٨٠ هـ}{\pi} \Leftrightarrow هـ = \frac{\pi س}{١٨٠}$

نعوض ثم نجد النهاية

## التغير

ليكن $ص = ق(س)$ اقتران يتبع المتغير س

فاذا كانت قيمة س هي $س_{١}$ ثم تغيرت الى $س_{٢}$ نقول ان مقدار التغير في س هو

$\Delta س = س_{٢} - س_{١}$ التغير في س

وهذا يوافق تغير في الاقتران هو

$\Delta ق(س) = ق(س_{٢}) - ق(س_{١})$ التغير في الاقتران

$\Delta ص = ص_{٢} - ص_{١}$

مثال :

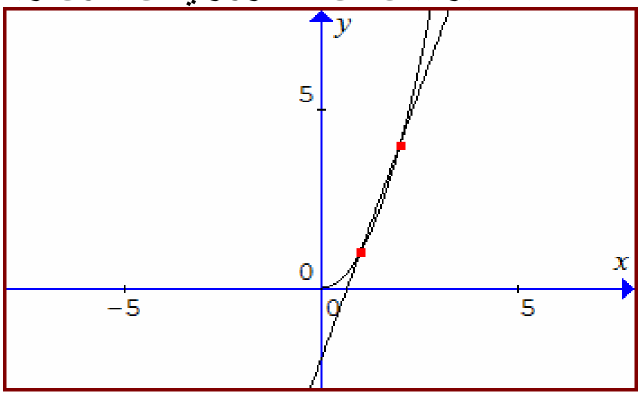
اذا كانت لدينا صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها س عندئذ مساحة هذه القطعة

$م = س^{٢}$

اذا وضعت هذه القطعة على النار فان طول ضلع هذه القطعة يتمدد من $س_{١}$ الى $س_{٢}$ وبالتالي

فان التمدد الذي يطرأ على الصفيحة هو $\Delta م = س_{٢}^{٢} - س_{١}^{٢}$

ملاحظة التغير ليس من الضروري ان يكون زيادة قد يكون نقصان




مثال :

ليكن الاقتران $ق(س) = \frac{س}{س - ١}$

احسب التغير في س اذا تغيرت من س=٢ الى س=٣ واحسب التغير في الاقتران الموافق

$\Delta س = س_{٢} - س_{١}$

$\Delta س = ٣ - ٢ = ١$

$\Delta ق(س) = \frac{س_{٢}}{س_{٢} - ١} - \frac{س_{١}}{س_{١} - ١}$

$\Delta ق(س) = \frac{٣}{٣ - ١} - \frac{٢}{٢ - ١} = \frac{٣}{٢} - ٢ = \frac{-١}{٢}$

تعريف: ندعو

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$ بمعدل التغير

في المثال السابق متوسط التغير هو $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{\frac{-١}{٢}}{١} = \frac{-١}{٢}$

ملاحظة يمكن ان نستبدل الصيغة السابقة للمتوسط ب

$\Delta س = س_{٢} - س_{١} \Leftarrow س_{٢} = \Delta س + س_{١}$ وبالتالي متوسط التغير هو

$$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(س_{١} + \Delta س) - ق(س_{١})}{\Delta س}$$

تدريب

ليكن الاقتران $ق(س) = \sqrt{س + ٢}$ احسب معدل التغير للاقتران اذا تغيرت س من ٢ الى ٢ + هـ

$\Delta س = ٢ + هـ - ٢ = هـ$

$$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{هـ}$$

$$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{\sqrt{٢ + هـ + ٢} - \sqrt{٢ + ٢}}{هـ}$$

$$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{\sqrt{٤ + هـ} - \sqrt{٤}}{هـ}$$

$$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{\sqrt{٤ + هـ} - ٢}{هـ}$$

$$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{\sqrt{٤ + هـ} - ٢}{(هـ + ٤) - ٤}$$

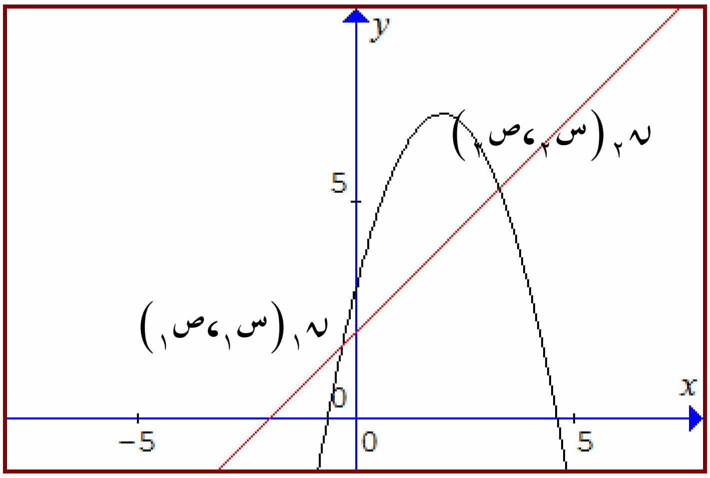
اضفنا الى المقام ٤ وطرحنا ٤ ليصبح المقام مساويا ما تحت الجذر ( او قد نضرب ونقسم على المرافق )

$$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{\sqrt{٤ + هـ} - ٢}{\left(\sqrt{٤ + هـ}\right)^{٢} - ٢^{٢}}$$

$$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{\sqrt{٤ + هـ} - ٢}{\left(\sqrt{٤ + هـ} - ٢\right)\left(\sqrt{٤ + هـ} + ٢\right)} = \frac{١}{\sqrt{٤ + هـ} + ٢}$$

المعنى الهندسي لمعدل التغير

قلنا اذا تغيرت س من $س_{١}$ الى $س_{٢}$ فان ص تتغير من $ص_{١}$ الى $ص_{٢}$ وهذا يعني النقطة $ن$ الواقعة على منحني الاقتران تتحول من $ن_{١}(س_{١}،ص_{١})$ الى $ن_{٢}(س_{٢}،ص_{٢})$




وبالتالي معدل التغير

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = م$$ وهذا ميل المستقيم القاطع

تذكر ميل المستقيم اذا كانت معادلة اقتران هي $ق(س) = م س + ب$ هنا م ميل المستقيم المائل المار من النقطة (٠،ب) الواقعة على الصادات

المعادلة من الشكل $أس + ب ص + جـ = ٠$ وهي علاقة ليست اقتران ميل هذا المستقيم هو $م = \frac{-أ}{ب}$

اما ميل مستقيم مار من نقطتين $ن_1(س_1،ص_1)$ و $ن_2(س_2،ص_2)$ هو

$$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

ومعادلة هذا المستقيم هي $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

تدريب :

اذا كانت النقطة ن تتحرك على منحني الاقتران $ق(س)$ من الموضع $ن_1(-١،٢)$ الى $ن_2(٢،٥)$

اوجد معادلة المستقيم القاطع المار بالنقطتين

الحل ميل القاطع هو $م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = م = \frac{٥ - ٢}{٢ + ١} = \frac{٣}{٣} = ١$

ومعادلة القاطع هي

$ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ص - ٢ = ١ \times (س + ١)$

$ص = س + ٣$

تدريب اذا علمت ان معادلة القاطع لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^٢ - ب س + ٣$ هو $ص = -س + ١$ فعين الثابت ب اذا علمت ان التغير في س هو $\Delta س = ١$ ثم اوجد نقطتي التقاطع

الحل ميل القاطع $م = -١$

ومتوسط التغير

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$\frac{ص_٢ - ص_١}{١} = -١$$

$$ص_٢ - ص_١ = -١$$

$$\left(س_٢^٢ - بس_٢ + ٣\right) - \left(س_١^٢ - بس_١ + ٣\right) = -١$$

$$س_٢^٢ - س_١^٢ - بس_٢ + بس_١ = -١$$

$$\left(س_٢ - س_١\right)\left(س_٢ + س_١\right) - ب\left(س_٢ - س_١\right) = -١$$

$$\Delta س\left(س_٢ + س_١ - ب\right) = -١$$

$$١\left(س_٢ + س_١ - ب\right) = -١$$

$$س_٢ + س_١ - ب = -١$$

$$س_٢ + س_١ = ب - ١$$

$$س_٢ - س_١ = ١$$

$$٢س_٢ = ب$$

$$س_٢ = \frac{ب}{٢}$$

$$س_١ = \frac{ب}{٢} - ١$$

ومن التقاطع حل مشترك لمعادلتي القاطع والقطع المكافئ

$$-س + ١ = س^٢ - بس + ٣$$

$$س^٢ - (ب - ١)س + ٢ = ٠$$

ومن هذه المعادلة نجد ان $س_١ س_٢ = ٢$ نعوض كل من $س_١ = \frac{ب}{٢} - ١$ ، $س_٢ = \frac{ب}{٢}$

$$س_٢ \times س_١ = \left(\frac{ب}{٢} - ١\right)\left(\frac{ب}{٢}\right) = ٢$$

$$(ب - ٢)(ب) = ٨$$

$$ب^٢ - ٢ب - ٨ = ٠$$

$$(ب - ٤)(ب + ٢) = ٠ \Leftrightarrow ب = ٤ \lor ب = -٢$$

من اجل $ب = ٤$ الاقتران $ق(س) = س^٢ - ٤س + ٣$ ونقطتي التقاطع

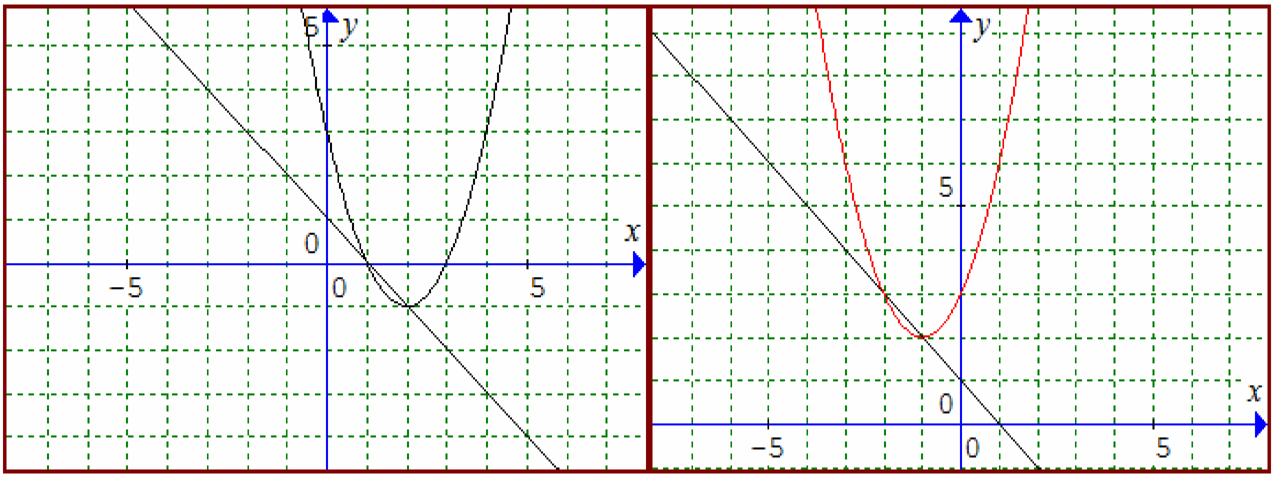
$$\begin{pmatrix} س_١ = \frac{٤}{٢} - ١ = ١ \\ ق(١) = ٠ \\ (١،٠) \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} س_٢ = \frac{٤}{٢} = ٢ \\ ق(٢) = -١ \\ (٢،-١) \end{pmatrix}$$

من اجل $ب = -٢$ الاقتران $ق(س) = س^٢ + ٢س + ٣$

ونقط التقاطع

$$\left( \begin{array}{r} \text{س}_1 = \frac{-٢}{٢} - ١ = -٢ \\ \text{ق}(-٢) = ٣ \\ (-٢،٣) \end{array} \right) ، \left( \begin{array}{r} \text{س}_2 = \frac{-٢}{٢} = -١ \\ \text{ق}(-١) = ٢ \\ (-١،٢) \end{array} \right)$$

نرسم للتوضيح فقط




تدريب :

احسب متوسط التغير للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٣}\,\text{جاس} - \text{جتاس}$ في الفترة $\left[٠، \frac{\pi}{٣}\right]$

الحل : $$\frac{\Delta \text{ق}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{ق}\left(\frac{\pi}{٣}\right) - \text{ق}(٠)}{\frac{\pi}{٣} - ٠} = \frac{٢}{\frac{\pi}{٣}} = \frac{٦}{\pi}$$

تدريب:

عين الثابت أ اذا علمت ان متوسط تغير الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{أس}^{٣}$ في الفترة $[٠،\text{أ}]$ هو ٨

الحل :

$$\frac{\Delta \text{ق}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{ق}(\text{أ}) - \text{ق}(٠)}{\text{أ} - ٠} = \frac{\text{أ}^{٤}}{\text{أ}} = \text{أ}^{٣} = ٨$$

$\text{أ} = ٢$

المعنى الفيزيائي لمتوسط التغير

ليكن ف(ن) القانون الزمني للحركة في الفترة الزمنية $[\text{ن}_1، \text{ن}_2]$

المعنى الفيزيائي لمتوسط التغير للاقتران ف(ن) هو السرعة المتوسطة للمتحرك الذي قانونه الزمني ف(ن)

السرعة المتوسطة للمتحرك $$\bar{\text{ع}} = \frac{\Delta \text{ف}(\text{ن})}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}(\text{ن}_2) - \text{ف}(\text{ن}_1)}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1}$$

مثال : تتحرك نقطة ط حركة مستقيمة وفق القانون الزمني $\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{٢} - \text{ن}^{٣}$ اوجد السرعة الوسطى للمتحرك في الفترة $[١،٢]$

الحل : $\bar{ع} = \frac{\Delta ف(ن)}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١} = \frac{(-٤) - (٠)}{٢ - ١} = -٤$

مثال : يعطى القانون الزمني لحركة نقطة على مستقيم بالعلاقة $ف(ن) = ٢جا\left(٢س - \frac{\pi}{٤}\right)$ اوجد السرعة الوسطى في الفترة الزمنية $\left[\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢} + هـ\right]$

$$\bar{ع} = \frac{\Delta ف(ن)}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$$

$$ف\left(\frac{\pi}{٢} + هـ\right) = ٢جا\left(٢\frac{\pi}{٢} + ٢هـ - \frac{\pi}{٤}\right) = -٢جا\left(٢هـ - \frac{\pi}{٤}\right)$$

$$ف\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ٢جا\left(٢\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٤}\right) = ٢جا\left(\frac{\pi}{٤}\right)$$

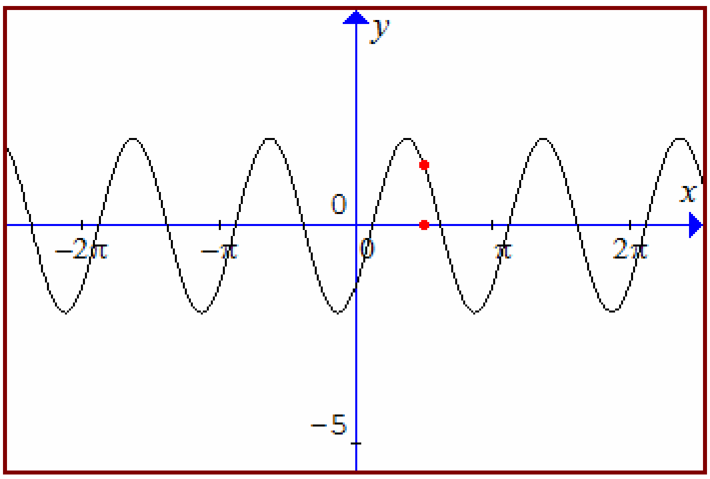
$$\bar{ع} = \frac{\Delta ف(ن)}{\Delta ن} = \frac{-٢جا\left(٢هـ - \frac{\pi}{٤}\right) - ٢جا\left(\frac{\pi}{٤}\right)}{\frac{\pi}{٢} + هـ - \frac{\pi}{٢}}$$

$$\bar{ع} = \frac{\Delta ف(ن)}{\Delta ن} = \frac{-٢\left(جا\left(٢هـ - \frac{\pi}{٤}\right) + جا\left(\frac{\pi}{٤}\right)\right)}{هـ}$$

$$\frac{\Delta ف(ن)}{\Delta ن} = \frac{-٢\left(٢جا\left(\frac{٢هـ - \frac{\pi}{٤} + \frac{\pi}{٤}}{٢}\right) جتا\left(\frac{٢هـ - \frac{\pi}{٤} - \frac{\pi}{٤}}{٢}\right)\right)}{هـ}$$

$$\bar{ع} = \frac{\Delta ف(ن)}{\Delta ن} = \frac{-٢\left(٢جا(هـ)جتا\left(هـ - \frac{\pi}{٤}\right)\right)}{هـ}$$

$$\bar{ع} = \frac{\Delta ف(ن)}{\Delta ن} = -٤\frac{جا(هـ)}{هـ}جتا\left(هـ - \frac{\pi}{٤}\right)$$



الاتصال

تعريف : ليكن $\text{ق}(\text{س})$ اقتران مجاله $\text{ح}$

نقول عن هذا الاقتران انه متصل عند أ اذا وفقط اذا تحقق $\text{أ} \in \text{ح}$ اي ان الاقتران معرف عند أ

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{أ})$$

الاقتران ق متصل عند أ $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{أ} \in \text{ح} \\ \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{أ}) \end{array} \right\}$

وبالتالي لا يكون الاقتران ق متصل عند أ اذا تحقق واحدة على الاقل من الشروط التالية

١- $\text{أ} \notin \text{ح}$ أي ان $\text{ق}(\text{أ})$ غير موجودة

مثال $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س}-١}$ غير متصل عند الواحد لان $\text{ق}(١)$ غير موجودة لاحظ المجال $\text{ح} - \{١\}$

٢- $\underset{\text{س}\to\text{أ}^+}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) \neq \underset{\text{س}\to\text{أ}^-}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س})$

مثال $\text{ق}(\text{س}) = \left\{ \begin{array}{ll} ١-\text{س} & \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} & \text{س} \geq ١ \end{array} \right.$ لاحظ الشرط الاول محقق $\text{ق}(١) = ٢$ لكن الشرط الثاني غير محقق $\underset{\text{س}\to١^+}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٢ \neq \underset{\text{س}\to١^-}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٠$ غير متصل عند الواحد

٣- $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) \neq \text{ق}(\text{أ})$

مثال $\text{ق}(\text{س}) = \left\{ \begin{array}{ll} \text{س}^٢ & \text{س} > ٠ \\ ٢ & \text{س} = ٠ \\ ٣\text{س} & \text{س} < ٠ \end{array} \right.$ هذا الاقتران غير متصل عند الصفر على الرغم انه يحقق الشروط الاول والثاني

$\text{ق}(٠) = ٢$ موجود

$\underset{\text{س}\to٠^-}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to٠^-}{\text{نها}}\ ٣\text{س} = ٠$

النهاية موجودة عند الصفر

$\underset{\text{س}\to٠^+}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to٠^+}{\text{نها}}\ \text{س}^٢ = ٠$

لكن $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٠ \neq \text{ق}(٠) = ٢$

يكفي عدم تحقق شرط واحد ليكون الاقتران غير متصل

تدريب

ليكن الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}|\text{س}-١|$ تحقق ان الاقتران متصل عند الواحد

الحل نعيد تعريف الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}|\text{س}-١| = \left\{ \begin{array}{ll} \text{س}-\text{س}^٢ & \text{س} < ١ \\ ٠ & \text{س} = ١ \\ \text{س}^٢-\text{س} & \text{س} > ١ \end{array} \right.$

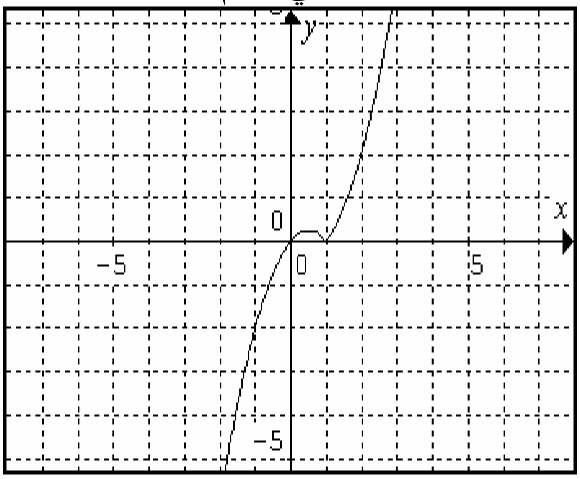
$\text{ق}(١) = ٠$

$\underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نهـا}}\ \text{س} - \text{س}^٢ = ٠$

$\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}}\ \text{س}^٢ - \text{س} = ٠$

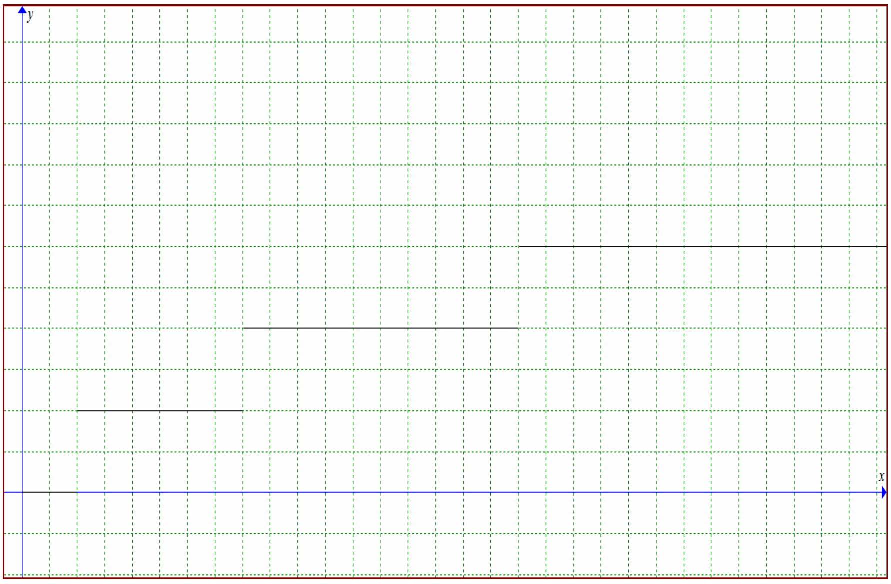
وبالتالي $\underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(١) = ٠$ اذا الاقتران متصل عند الواحد

ملاحظة هامة اذا كان الاقتران متصل عند نقطة فان خطه البياني متصل غير منقطع عند تلك النقطة
ملاحظة اشارة المساواة في القيم المطلقة توضع عند اكبر او اصغر ليست مشكلة لان هذا الاقتران متصل عند القيمة التي تعدم مضمون القيمة المطلقة




مثال

ليكن الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \left[\sqrt{\text{س}}\right]$ ابحث اتصال الاقتران عند نقط التشعب




نعيد تعريف الاقتران

$\text{ق}(\text{س}) = \left[\sqrt{\text{س}}\right]$ لاحظ ان طول الدرجة يتغير في كل مرة وهي بالشكل التالي

$$[\text{س}] = \begin{cases} ٠ & ٠ \leq \text{س} < ١ \\ ١ & ١ \leq \text{س} < ٢ \\ ٢ & ٢ \leq \text{س} < ٣ \\ ٣ & ٣ \leq \text{س} < ٤ \end{cases}$$

$$[\sqrt{\text{س}}\,] = \begin{cases} ٠ & ٠ \leq \sqrt{\text{س}} < ١ \\ ١ & ١ \leq \sqrt{\text{س}} < ٢ \\ ٢ & ٢ \leq \sqrt{\text{س}} < ٣ \\ ٣ & ٣ \leq \sqrt{\text{س}} < ٤ \end{cases}$$

لاحظ هنا أن $\text{س} \geq ٠$ اقتران أصم $\sqrt{\text{س}}$ ثم ربعنا

$$\text{ق}(\text{س}) = [\sqrt{\text{س}}\,] = \begin{cases} ٠ & ٠ \leq \text{س} < ١ \\ ١ & ١ \leq \text{س} < ٤ \\ ٢ & ٤ \leq \text{س} < ٩ \\ ٣ & ٩ \leq \text{س} < ١٦ \end{cases}$$

لاحظ هذا الاقتران متصل عند أ من الفترة المفتوحة وغير متصل عند نقط التشعب لعدم تساوي النهايتين عند نقط التشعب وهي {٠،١،٢،٣،....}

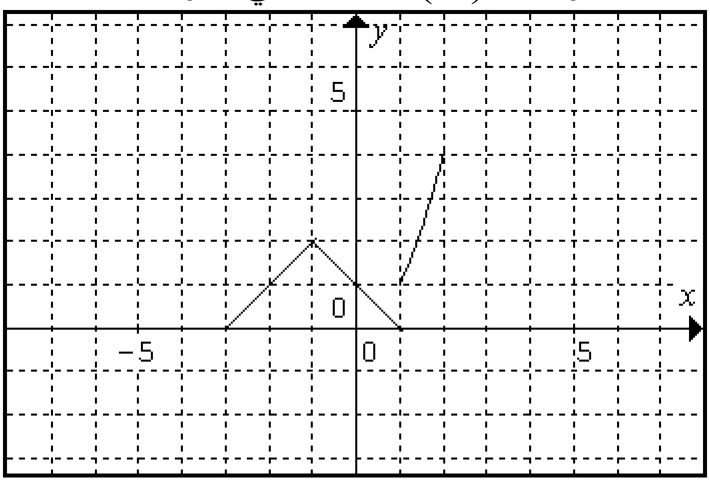
الاتصال من اليسار واليمين عند نقطة

ق(س) متصل عند أ من اليمين اذا وفقط اذا تحقق $\lim_{\text{س} \to \text{أ}^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{أ})$ و ق(أ) موجودة

ق(س) متصل عند أ من اليسار اذا وفقط اذا تحقق $\lim_{\text{س} \to \text{أ}^{-}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{أ})$ و ق(أ) موجودة

التعرف على الاتصال من خلال الرسم

ليكن الاقتران ق(س) خطه البياني ادرس الاتصال عند الاطراف




عند -٣ متصل من اليمين لان $\lim_{\text{س} \to -٣^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(-٣) = ٠$

عند -٣ من اليسار الاقتران غير معرف النهاية غير موجودة من اليسار

عند -١ متصل من اليمين لان $\lim_{\text{س} \to -١^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(-١) = ٢$ عند -١ متصل من اليسار لان

$\lim_{\text{س} \to -١^{-}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(-١) = ٢$ وبالتالي الاقتران متصل عند -١

عند الواحد متصل عند الواحد من اليسار لان $\underset{\text{س}\leftarrow ١^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(١) = ٠$

لكن من اليمين نجد $\underset{\text{س}\leftarrow ١^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ١ \neq \text{ق}(١) = ٠$ غير متصل عند الواحد من اليمين وبالتالي غير متصل عند الواحد

عند ال٢ متصل من اليسار لان $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(٢) = ٤$

وغير متصل من اليمين غير معرف على يمين ال ٢

غير متصل عند ال٢

كيف نعين الثوابت في حالة الاقترانات المتصلة

مثال عين الثوابت أ،ب اذا علمت ان الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ متصل عند الواحد

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + \text{أس} + ٢\text{ب} & \text{س} \succ ١ \\ \text{أس} - \text{ب} & \text{س} \leq ١ \end{cases}$$

الحل : بما ان الاقتران متصل عند الواحد يجب ان يتحقق

$$\underset{\text{س}\leftarrow ١^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow ١^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(١)$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow ١^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow ١^+}{\text{نهـا}}\left(\text{س}^٢ + \text{أس} + ٢\text{ب}\right) = ١ + \text{أ} + ٢\text{ب}$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow ١^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow ١^-}{\text{نهـا}}\left(\text{أس} - \text{ب}\right) = \text{أ} - \text{ب} = \text{ق}(١)$$

$$١ + \text{أ} + ٢\text{ب} = \text{أ} - \text{ب}$$

حل جملة المعادلتين $\quad -١ = ٣\text{ب}$

$$\text{ب} = \frac{-١}{٣}$$

وهذه المعادلة محققة ايا كانت قيم أمن مجموعة الأعداد الحقيقية

مثال :عين الثوابت أ،ب اذا علمت ان الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ متصل عند الواحد

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ + \text{أس} + \text{ب}}{\text{س} - ١} & \text{س} \neq ١ \\ ٢ & \text{س} = ١ \end{cases}$$

الحل : : بما ان الاقتران متصل عند الواحد يجب ان يتحقق $\underset{\text{س}\leftarrow ١^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow ١^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(١)$

لناخذ نهاية $\dfrac{\text{س}^٢ + \text{أس} + \text{ب}}{\text{س} - ١}$ عند الواحد من اليمين نجد ان المقام ينعدم عند الواحد وبالتالي سيكون الواحد جذرا للبسط ايضا وعليه (نعوض واحد في البسط ) $١ + \text{أ} + \text{ب} = ٠ \Leftarrow \text{ب} = -\text{أ} - ١$

نعوض في النهاية

$$\underset{\text{س}\leftarrow ١^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ + \text{أس} + \text{ب}}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\leftarrow ١^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ + \text{أس} - \text{أ} - ١}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\leftarrow ١^+}{\text{نهـا}} \frac{\left(\text{س}^٢ - ١\right) + \left(\text{أس} - \text{أ}\right)}{\text{س} - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١^+} \frac{(س^٢ - ١) + (أس - أ)}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١^+} \frac{(س - ١)(س + ١) + أ(س - ١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^+} \frac{(س - ١)(س + ١ + أ)}{س - ١} = ٢ + أ$$

لكن $ق(١) = ٢$

اذا

$٢ + أ = ٢$

$أ = ٠$

وبالتالي $ب = -٠ - ١$

$ب = -١$

يصبح الاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} & س \neq ١ \\ ٢ & س = ١ \end{cases}$$

يمكن حل هذا التدريب بقسمة البسط على المقام وجعل باقي القسمة صفر

مثال عين الثابت أ ليكون الاقتران متصل عند $\pi$

$$ق(س) = \begin{cases} أجا\frac{١}{٢}س + جتاس & س \leq \pi \\ \frac{١ - جتا٢س}{جاس} & س > \pi \end{cases}$$

$$\lim_{س \to \pi^-} \left(أجا\frac{١}{٢}س + جتاس\right) = أ - ١$$

$$ق(\pi) = أ - ١$$

$$\lim_{س \to \pi^+} \frac{١ - جتا٢س}{جاس} = \lim_{س \to \pi^+} \frac{٢جا^٢س}{جاس} = \lim_{س \to \pi^+} ٢جاس = ٠$$

اذا $أ - ١ = ٠$

$أ = ١$

مبرهنات الاتصال عند نقطة

١- مجموع او فرق اقترانين متصلين عند نقطة هو اقتران متصل عند تلك النقطة

٢- حاصل ضرب اقترانين متصلين عند نقطة هو اقتران متصل عند تلك النقطة

٣- حاصل قسمة اقترانين متصلين عند نقطة هو اقتران متصل عند تلك النقطة بشرط ان لاانعدم المقام عند نقطة الاتصال

٤- نتيجة يمكن ان تطبق في حل التدريبات الاقتران النسبي المعرف عند نقطة متصل عند تلك النقطة

٥- الاقتران الجذري (الاصم ) $ق(س) = \sqrt[ر]{ل(س)}$ اذا كان $ل(س)$ موجب ومتصل عند نقطة أ فان $ق(س)$ متصل عند أ اذا وجدت فترة مفتوحة تظم أ محتواة في مجال $ق(س)$

٦- لم يذكر في الكتاب ان حاصل تركيب اقترانين متصلين عند نقطة هو اقتران متصل عند تلك النقطة لايجوز الاعتماد على هذه المبرهنة فقط استرشد بها

٧- لم يذكر في الكتاب انه اذا كان مضمون القيمة المطلقة اقتران متصل عند نقطة فان اقتران القيمة المطلقة متصل عند تلك النقطة لا يجوز الاعتماد على هذه المبرهنة فقط استرشد بها

ملاحظة مهمة الشروط السابقة هي شروط كافية غير لازمة

بمعنى اذا كان كل من الاقترانين ل،ى متصل عند النقطة أ فان $ل + ى$ متصل عند أ

اما اذا كان احدهما على الاقل غير متصل عند أ فليس من الضروري ان يكون $ل + ى$ غير متصل عن أ قد يكون متصل عندها

وهذا ينطبق على حاصل الضرب والقسمة أيضا

مثال :

ليكن $ى(س) = \frac{س}{س - ١}$ ، $ل(س) = \sqrt{س + ١}$ اثبت ان الاقتران ى.ل ، $ى + ل$ متصل عند ٢

الحل : $ى(س) = \frac{س}{س - ١}$ مجاله ح $- \{١\}$ $ل(س) = \sqrt{س + ١}$ مجاله $[-١، \infty)$

ق اقتران نسبي معرف عند ال ٢ فهو متصل عندها

ما تحت الجذر $س + ١$ متصل عند ٢ (كثير حدود ) وموجب ويوجد فترة مفتوحة مثل $٢ \in (٠، ٥) \subset (١، \infty)$ اذا الاقتران ل متصل عند ال ٢

وبالتالي فان ى.ل ، $ى + ل$ متصل عند ال ٢

مثال ليكن الاقترانين $ى(س) = [س - ١]$ ، $ل(س) = س - ١$ اثبت ان الاقتران ى.ل متصل عند الواحد

الحل $ل(س) = س - ١$ متصل عن الواحد كثير حدود

$$ى(س) = [س - ١] = \begin{cases} -١ & ٠ \le س < ١ \\ ٠ & ١ \le س < ٢ \end{cases}$$

$$\lim_{س \to ١^-} ى(س) = -١$$

$$\lim_{س \to ١^+} ى(س) = ٠$$

$$\lim_{س \to ١^-} ى(س) = -١ \ne \lim_{س \to ١^+} ى(س) = ٠$$

اذا الاقتران ل غير متصل عند الواحد ( لاحظ ان ناتج التعويض واحد بمضمون القوس هو عدد صحيح ٠ وبالتالي غير متصل عند الواحد )

الان لنعيد تعريف ى.ل

$$\text{ق}(\text{س}) = [\text{س} - ١] = \begin{cases} -١ & ٠ \le \text{س} < ١ \\ ٠ & ١ \le \text{س} < ٢ \end{cases}$$

$$\text{ق}(\text{س})\,\text{ل}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س}+١ & ٠ \le \text{س} < ١ \\ ٠ & ١ \le \text{س} < ٢ \end{cases}$$

$$\underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ل}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نها}} (-\text{س}+١) = ٠$$ اذا الاقتران ق.ل متصل عن الواحد

$$\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ل}(\text{س}) = ٠$$

$$\text{ق}(٠)\,\text{ل}(٠) = ٠$$

$$\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ل}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ل}(\text{س}) = ٠$$

الاتصال على فترة

تعريف

الاقتران ق(س) المعرف على الفترة المفتوحة (أ،ب) متصل على هذه الفترة اذا وفقط اذا كان متصل عند كل نقطة من هذه الفترة

مثال اثبت ان الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{١}{\sqrt{١ - \text{س}^٢}}$ متصل على مجاله (−١،١)

حسب التعريف متصل عند أ يكافئ $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{أ}) \Leftrightarrow \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} [\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})] = ٠$

ليكن أ قيمة اختيارية من الفترة (−١،١)

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \left[\frac{١}{\sqrt{١-\text{س}^٢}} - \frac{١}{\sqrt{١-\text{أ}^٢}}\right] = \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \left[\frac{\sqrt{١-\text{أ}^٢} - \sqrt{١-\text{س}^٢}}{\sqrt{١-\text{س}^٢}\,\sqrt{١-\text{أ}^٢}}\right]$$ نضرب ونقسم على المرافق

$$= \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \left[\frac{\sqrt{١-\text{أ}^٢} - \sqrt{١-\text{س}^٢}}{\sqrt{١-\text{س}^٢}\,\sqrt{١-\text{أ}^٢}} \times \frac{\sqrt{١-\text{أ}^٢} + \sqrt{١-\text{س}^٢}}{\sqrt{١-\text{أ}^٢} + \sqrt{١-\text{س}^٢}}\right] =$$

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \frac{١ - \text{أ}^٢ - ١ + \text{س}^٢}{\left(\sqrt{١-\text{أ}^٢} \times \sqrt{١-\text{س}^٢}\right)\left(\sqrt{١-\text{أ}^٢} + \sqrt{١-\text{س}^٢}\right)} =$$

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - \text{أ})(\text{س} + \text{أ})}{\left(\sqrt{١-\text{أ}^٢} \times \sqrt{١-\text{س}^٢}\right)\left(\sqrt{١-\text{أ}^٢} + \sqrt{١-\text{س}^٢}\right)}$$

$$= \frac{٠(٢\text{أ})}{(١-\text{أ}^٢)\,٢\sqrt{١-\text{أ}^٢}} = ٠$$

اذا الاقتران متصل على مجاله

لن نستخدم هذه الطريقة في الحل مستقبلا نستخدم نظريات أسهل في حل التدريبات

تعريف

الاقتران $ق(س)$ المعرف على الفترة المغلقة $[أ،ب]$ متصل على هذه الفترة اذا وفقط اذا كان متصل على الفترة المفتوحة $(أ،ب)$ومتصل عند أ من اليمين وعند ب من اليسار
كذلك نعرف الاتصال على كل من الفترة نصف المفتوحة $(أ،ب]$،$[أ،ب)$
مبرهنات في الاتصال على فترة مفتوحة
١- اقتران كثير الحدود $ق(س) = أ_ن س^ن + أ_{ن-١} س^{ن-١} + ...... + أ_١ س + أ_٠$ المعاملات اعداد حقيقية والأس ن هو عدد طبيعي متصل على ح
مثال $ق(س) = ٥س^٣ - ٣س + ٤$ اقتران كثير حدود متصل على مجاله ح
اقتران متصل على مجموعة الأعداد الحقيقية ح وعلى كل فترة جزئية منها
٢- الاقتران النسبي متصل على كل فترة لا ينعدم المقام فيها
مثال : $ق(س) = \frac{١-س}{س^٢ - ٤}$ مجاله $(-\infty،-٢)\cup(-٢،+٢)\cup(+٢،\infty)$
هذا الاقتران متصل على $(-\infty،-٢)$ السبب اقتران نسبي لا ينعدم المقام في هذه الفترة
هذا الاقتران متصل على $(-٢،٢)$ السبب اقتران نسبي لا ينعدم المقام في هذه الفترة
هذا الاقتران متصل على $(+٢،+\infty)$ السبب اقتران نسبي لا ينعدم المقام في هذه الفترة
وبالتالي هذا الاقتران متصل على كل من الفترات $(-\infty،-٢)$،$(-٢،+٢)$،$(+٢،\infty)$
ملاحظة لم أضع إشارة الاتحاد $\cup$ بين الفترات عندما ذكرت انه متصل لان اتحاد الفترات لا يشكل فترة والاتصال معرف فقط على فترة
٣- الاقتران الاصم $ق(س) = \sqrt{ل(س)}$ الشرط $ل(س) \geq ٠$
متصل على كل فترة جزئية مفتوحة من مجموعة حلول المتباينه $ل(س) \succ ٠$
مثال : الاقتران $ق(س) = \sqrt{١-س^٢}$ المجال $[-١،١]$ ادرس اتصال الاقتران على مجاله
الحل مضمون الجذر $١-س^٢$ اقتران كثير حدود وموجب تماما على الفترة $(-١،١)$ اذا ق متصل على هذه الفترة
ندرس الاتصال عند -١ من اليمين $\lim_{س\to-١^+} ق(س) = \lim_{س\to-١^+} \sqrt{١-س^٢} = ٠ = ق(-١)$ محققه
ندرس الاتصال عند ١ من اليسار $\lim_{س\to+١^-} ق(س) = \lim_{س\to+١^-} \sqrt{١-س^٢} = ٠ = ق(+١)$ محققه
اذا الاقتران متصل على مجاله
مثال :
$ق(س) = \sqrt{س(س-١)}$ لاحظ مجال الاقتران هو $\{٠\}\cup[١،\infty)$ و حلول المتباينه $س(س-١) \geq ٠$
مضمون الجذر كثير حدود موجب تماما على الفترة $(١،\infty)$ فهو متصل عليها
$\lim_{س\to+١^+} ق(س) = \lim_{س\to+١^+} \sqrt{س(س-١)} = ٠ = ق(+١)$ متصل عند الواحد من اليمين
أما عند الصفر فهي نقطة منعزلة فلا يوجد للاقتران نهاية عندها من اليمين او اليسار فهو غير معرف على طرفيها
اذا الاقتران متصل على الفترة $[١،\infty)$

مثال :

ليكن الاقتران $ق(س) = \frac{س - ١}{س^٢ + أس + ١}$

عين قيم أ في الحالات التالية

١- ق متصل على ح

٢- ق متصل على $(-\infty، ١)، (١، \infty)$

الحل

١ –اقتران نسبي لكي يكون متصل على ح يجب الا ينعدم المقام على هذه الفترة وبالتالي

$س^٢ + أس + ١ \neq ٠$ وهذا يعني

$\Delta = ب^٢ - ٤أجـ \prec ٠$

$\Delta = أ^٢ - ٤ \times ١ \times ١ = أ^٢ - ٤ \prec ٠$

$أ^٢ \prec ٤$

$|أ| \prec ٢$

$-٢ \prec أ \prec ٢$

اذا عندما $أ \in (-٢، ٢)$ لا ينعدم المقام وبالتالي الاقتران متصل على ح

٢- غير متصل عند الواحد هذا يعني ان الواحد جذر مضاعف للمقام

$١^٢ + أ + ١ = ٠$

$أ = -٢$

نعوض في $\Delta$ نجد ان $\Delta = ٠$

مما يعني ان الواحد جذر مضاعف للمقام من اجل $أ = -٢$

$ق(س) = \frac{س - ١}{س^٢ - ٢س + ١} = \frac{س - ١}{(س - ١)^٢}$ وهو اقتران نسبي متصل على كل من

$(-\infty، ١)، (١، \infty)$

ملاحظة هامه

(لا تستخدم في حل المسائل طرق او عبارات غير موجودة في الكتاب)

ملاحظة :كل اقتران كتب بقاعدة ر بط واحدة ( غير متشعب على تلك الفترة )على فترة متصل على هذه الفترة ( استرشد بها ولا تستخدمها)

تدريب ادرس اتصال الاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{جا\frac{\pi}{٢}س}{س - ٢} & س \neq ٢ \\ \frac{-\pi}{٢} & س = ٢ \end{cases}$$

ادرس اتصال الاقتران على مجموعة الأعداد الحقيقية

الحل :

ندرس الاتصال عند ال ٢

$ق(٢) = \frac{-\pi}{٢}$

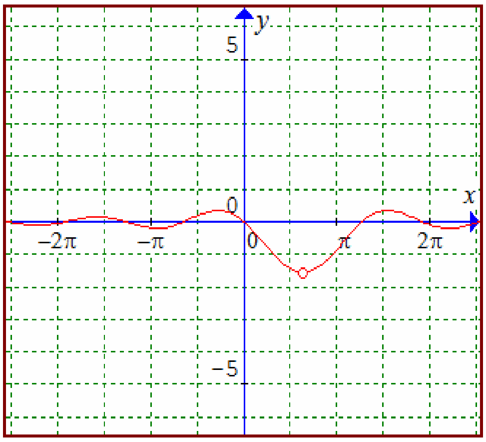
نفرض

$س - ٢ = ص \Leftarrow س = ص + ٢$

$س \leftarrow ٢ \Leftrightarrow ص \leftarrow ٠$

$$\lim_{\text{س}\to ٢}\frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}\text{س}}{\text{س}-٢}=\lim_{\text{ص}\to ٠}\frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}(\text{ص}+٢)}{\text{ص}}=\lim_{\text{ص}\to ٠}\frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢}\text{ص}+\pi)}{\text{ص}}$$

$$\lim_{\text{ص}\to ٠}\frac{-\text{جا}(\frac{\pi}{٢}\text{ص})}{\text{ص}}=-\frac{\pi}{٢}$$




اذا ق متصل عند ال٢

ندرس اتصال الاقتران الكسري $\frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}\text{س}}{\text{س}-٢}$

المقام $\text{س}-٢$ كير حدود متصل على ع

وبالتالي على كل من الفترتين $(-\infty،٢)،(٢،\infty)$

البسط $\text{جا}\frac{\pi}{٢}\text{س}$ لنثبت انة متصل على ع

لتكن أ نقطة اختيارية من ع

$$\lim_{\text{س}\to \text{أ}}\left(\text{جا}\frac{\pi}{٢}\text{س}-\text{جا}\frac{\pi}{٢}\text{أ}\right)=\lim_{\text{س}\to \text{أ}}\left(٢\text{جتا}\frac{\frac{\pi}{٢}\text{س}+\frac{\pi}{٢}\text{أ}}{٢}\text{جا}\frac{\frac{\pi}{٢}\text{س}-\frac{\pi}{٢}\text{أ}}{٢}\right)$$

$$\lim_{\text{س}\to \text{أ}}٢\text{جتا}\frac{\frac{\pi}{٢}(\text{س}+\text{أ})}{٢}\text{جا}\frac{\frac{\pi}{٢}(\text{س}-\text{أ})}{٢}=٢\text{جتا}\frac{\pi\text{أ}}{٢}\times ٠=٠$$

اذا $\text{جا}\frac{\pi}{٢}\text{س}$ متصل على ع وبالتالي متصل على كل من $(-\infty،٢)،(٢،\infty)$

اذا الاقتران $\frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}\text{س}}{\text{س}-٢}$ متصل على كل من $(-\infty،٢)،(٢،\infty)$ لانه حاصل قسمة اقترانين متصلين على كل منهما ولا ينعدم المقام فيهما

اذا الاقتران المطلوب ق متصل على ع

ملاحظة الاقتران $\text{ف}(\text{س})=\text{جتال}(\text{س})$ ، $\text{ن}(\text{س})=\text{جال}(\text{س})$ متصل حيث الاقتران $\text{ل}(\text{س})$ متصل

وبالتالي الاقتران $\text{جا}\frac{\pi}{٢}\text{س}$ متصل على ع وبالتالي متصل على كل من الفترتين $(-\infty،٢)،(٢،\infty)$

مثال :

الاقتران $\text{ن}(\text{س})=\text{جتا}\frac{\pi}{\text{س}-١}$ متصل على كل من الفترتين $(-\infty،١)،(١،\infty)$

لان الاقتران $\text{ل}(\text{س})=\frac{\pi}{\text{س}-١}$ متصل على كل من الفترتين $(-\infty،١)،(١،\infty)$

وبالتالي الاقتران $\text{ن}(\text{س})=\text{جتا}\frac{\pi}{\text{س}-١}$ متصل على كل من الفترتين $(-\infty،١)،(١،\infty)$

التفاضل

١- ليكن الاقتران ق(س) المعرف عند النقطة أ حيث أ نقطة من فترة مفتوحة محتواة في مجموعة تعريف الاقتران ق(س)

نشكل الاقتران $\frac{\Delta \text{ق}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}}$ إذا كانت نهاية هذا الاقتران موجودة ومحدودة

عندما تقترب س من أ بمعنى $\underset{\Delta \text{س} \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\Delta \text{ق}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ل} \in \text{ح}$

نقول ان الاقتران ق(س) قابل للاشتقاق عند أ ويدعى ل العدد المشتق ونرمز له ب

$$\text{ق}'(\text{أ}) = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ل} \in \text{ح}$$

صيغة أخرى

$\Delta \text{س} = \text{س} - \text{أ}$

$\text{س} = \text{أ} + \Delta \text{س}$

$\text{س} \to \text{أ} \Leftrightarrow \Delta \text{س} \to 0$

$$\text{ق}'(\text{أ}) = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \underset{\Delta \text{س} \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{أ} + \Delta \text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\Delta \text{س}} = \text{ل} \in \text{ح}$$

٢- واذا كانت أ نقطة من فترة من الشكل $[\text{أ}, \text{أ} + \text{هـ})$ هـ $> 0$ وهذه الفترة محتواة في مجموعة تعريف الاقتران

وكانت $\underset{\text{س} \to \text{أ}^+}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ل}_1 \in \text{ح}$ قلنا ان الاقتران ق قابل للاشتقاق عند ا من اليمين وان المشتقة من اليمين هي

$$ق'_{+}(ا) = \frac{ءص}{ءس} = \lim_{س \leftarrow ا^{+}} \frac{ق(س) - ق(ا)}{س - ا} = ل_{١} \in ع$$

٣-- واذا كانت ا نقطة من فترة من الشكل $(ا - هـ ، ا]$ هـ $\succ$ ٠ وهذه الفترة محتواة في مجموعة تعريف الاقتران

وكانت $\lim_{س \leftarrow ا^{-}} \frac{ق(س) - ق(ا)}{س - ا} = ل_{٢} \in ع$ قلنا ان الاقتران ق قابل للاشتقاق عند ا من اليسار وان المشتقة من اليسار هي

$$ق'_{-}(ا) = \frac{ءص}{ءس} = \lim_{س \leftarrow ا^{-}} \frac{ق(س) - ق(ا)}{س - ا} = ل_{٢} \in ع$$

٤- الاقتران $ق(س)$ قابل للاشتقاق عند ا اذا وفقط اذا تحقق $ق'_{-}(ا) = ق'_{+}(ا) = ق'(ا) = ل \in ع$

ملاحظة (لغويا اذا كان ق قابل للاشتقاق يقال له اشتقاقي)

مثال : اثبت ان الاقتران $ق(س) = س^{٢}$ قابل للاشتقاق عند $س = ٣$ الحل نشكل الاقتران $\frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣}$ المعرف على $ع - \{٣\}$ وناخذ نهايته عندما $س \leftarrow ٣$

$$\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} = \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣} = \lim_{س \leftarrow ٣} (س + ٣) = ٦$$

اذا ق قابل للاشتقاق عند ال ٣ وان المشتقة عند ال ٣ هي $ق'(٣) = ٦ \in ع$

(ملاحظة هامة جدا دوما سنجد حالة عدم تعين من الشكل $\frac{صفر}{صفر}$ )

مثال هل الاقتران ق قابل للاشتقاق عند الواحد ولماذا

$$ق(س) = \begin{cases} [\frac{١}{٢}س + ١] & س \prec ١ \\ |٢س - ١| & س \geq ١ \end{cases}$$

الحل :

شرط قابلية الاشتقاق $ق'_{-}(ا) = ق'_{+}(ا) = ل \in ع$

نعيد تعريف $ق(س) = \begin{cases} ١ & ٠ \leq س \prec ١ \\ ٢س - ١ & س \geq ١ \end{cases}$

$$ق'_{-}(١) = \lim_{س \leftarrow ١^{-}} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = \lim_{س \leftarrow ١^{-}} \frac{١ - ١}{س - ١} = ٠$$ العدد المشتق من اليسار

$$ق'_{+}(١) = \lim_{س \leftarrow ١^{+}} \frac{ق(س) - ق(ا)}{س - ١} = \lim_{س \leftarrow ١^{+}} \frac{٢س - ١ - ١}{س - ١} = \lim_{س \leftarrow ١^{+}} \frac{٢س - ٢}{س - ١} = ٢ \in ع$$

بما ان $ق'_{-}(١) \neq ق'_{+}(١)$

فان ق غير قابل للاشتقاق عن الواحد

مثال : ليكن الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\sqrt{\text{س}}$ اوجد $\text{ق}'(\text{٤})$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{٤}) = \lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{٤})}{\text{س} - \text{٤}} = \lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}} - \text{٨}}{\text{س} - \text{٤}} = \lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}} - \text{٢س} + \text{٢س} - \text{٨}}{\text{س} - \text{٤}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{\left(\text{س}\sqrt{\text{س}} - \text{٢س}\right) + (\text{٢س} - \text{٨})}{\text{س} - \text{٤}} = \lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{\text{س}\left(\sqrt{\text{س}} - \text{٢}\right) + \text{٢}(\text{س} - \text{٤})}{\text{س} - \text{٤}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{\text{س}\left(\sqrt{\text{س}} - \text{٢}\right)}{\text{س} - \text{٤}} + \frac{\text{٢}(\text{س} - \text{٤})}{\text{س} - \text{٤}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to\text{٤}} \left\{ \frac{\text{س}\left(\sqrt{\text{س}} - \text{٢}\right)}{\left(\sqrt{\text{س}} - \text{٢}\right)\left(\sqrt{\text{س}} + \text{٢}\right)} + \frac{\text{٢}(\text{س} - \text{٤})}{\text{س} - \text{٤}} \right\} = \lim_{\text{س}\to\text{٤}} \left\{ \frac{\text{س}}{\left(\sqrt{\text{س}} + \text{٢}\right)} + \text{٢} \right\} = \frac{\text{٤}}{\text{٤}} + \text{٢} = \text{٣}$$

مثال ليكن الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} - \text{١}}$ اوجد $\text{ق}'(\text{٢})$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{٢}) = \lim_{\text{س}\to\text{٢}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{٢})}{\text{س} - \text{٢}} = \lim_{\text{س}\to\text{٢}} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س} - \text{١}} - \text{٢}}{\text{س} - \text{٢}} = \lim_{\text{س}\to\text{٢}} \frac{\frac{\text{س} - \text{٢س} + \text{٢}}{\text{س} - \text{١}}}{\text{س} - \text{٢}}$$

$$\text{ق}'(\text{٢}) = \lim_{\text{س}\to\text{٢}} \frac{-(\text{س} - \text{٢})}{(\text{س} - \text{٢})(\text{س} - \text{١})} = \lim_{\text{س}\to\text{٢}} \frac{-\text{١}}{(\text{س} - \text{١})} = -\text{١}$$

مثال ليكن الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٢}}|\text{س} - \text{١}|$ اوجد $\text{ق}'(\text{١})$ ان كان موجودا

الحل نعيد التعريف

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٢}}|\text{س} - \text{١}| = \begin{cases} \text{س}^{\text{٢}}(\text{س} - \text{١}) & : \text{س} > \text{١} \\ -\text{س}^{\text{٢}}(\text{س} - \text{١}) & : \text{س} \le \text{١} \end{cases}$$

$$\lim_{\text{س}\to\text{١}^+} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{١})}{\text{س} - \text{١}} = \lim_{\text{س}\to\text{١}^+} \frac{\text{س}^{\text{٢}}(\text{س} - \text{١}) - \text{٠}}{\text{س} - \text{١}} = \lim_{\text{س}\to\text{١}^+} \text{س}^{\text{٢}} = \text{١} = \text{ق}'_{+}(\text{١})$$

$$\lim_{\text{س}\to\text{١}^-} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{١})}{\text{س} - \text{١}} = \lim_{\text{س}\to\text{١}^-} \frac{-\text{س}^{\text{٢}}(\text{س} - \text{١}) - \text{٠}}{\text{س} - \text{١}} = \lim_{\text{س}\to\text{١}^-} -\text{س}^{\text{٢}} = -\text{١} = \text{ق}'_{-}(\text{١})$$

اذا الاقتران غير قابل للاشتقاق عند الواحد

يمكن التأكد أن هذا الاقتران قابل للاشتقاق عن الصفر

مثال ليكن الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[3]{\text{س}}$ نتحقق ان الاقتران غير قابل للاشتقاق عند الصفر

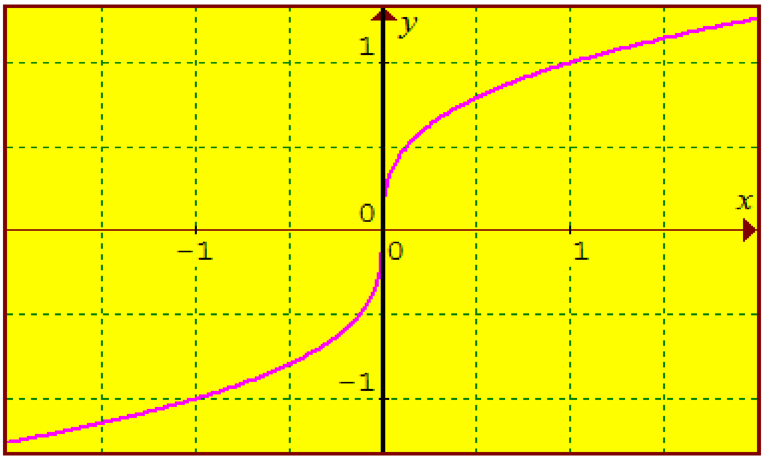
الحل : نشكل الاقتران $\frac{\Delta\text{ق}(\text{س})}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{٠})}{\text{س} - \text{٠}} = \frac{\sqrt[3]{\text{س}} - \text{٠}}{\text{س}} = \frac{\sqrt[3]{\text{س}}}{\text{س}}$

لناخذ النهاية $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\Delta \text{ق}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{\left(\sqrt[٣]{\text{س}}\right)^{٣}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\left(\sqrt[٣]{\text{س}}\right)^{٢}} = +\infty$

هنا نهاية غير محدودة غير قابل للاشتقاق عند الصفر

بما ان المعنى الهندسي للمشتق الاول هو ميل الماس في تلك النقطة

فهنا المماس مواز لمحور الصادات سنجد ذلك فيما بعد




تعريف المشتق على فترة كاقتران وكيف نجد قاعدة الاقتران المشتق

اذا كان الاقتران ق قابل للاشتقاق عند كل نقطة س من الفترة المفتوحة (أ،ب) فان

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\Delta\text{س}) - \text{ق}(\text{س})}{\Delta\text{س}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

ملاحظة إذا كان ق معرف على [أ،ب] فان $\text{ق}'(\text{أ})$ ، $\text{ق}'(\text{ب})$ غير موجودتين أطراف فترة مغلقة

تدريب ليكن الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{١-\text{س}}$ ، $\text{س} \neq ١$ اوجد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{ع}^{٢}}{١-\text{ع}} - \frac{\text{س}^{٢}}{١-\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{ع}^{٢}(١-\text{س}) - \text{س}^{٢}(١-\text{ع})}{(١-\text{ع})(١-\text{س})}}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{ع}^{٢} - \text{س}^{٢}) - (\text{ع}^{٢}\text{س} - \text{س}^{٢}\text{ع})}{(\text{ع}-\text{س})(١-\text{ع})(١-\text{س})} =$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}+\text{س}) - \text{س}\text{ع}(\text{ع}-\text{س})}{(\text{ع}-\text{س})(١-\text{ع})(١-\text{س})} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{ع}+\text{س}) - \text{س}\text{ع}}{(١-\text{ع})(١-\text{س})} = \frac{٢\text{س} - \text{س}^{٢}}{(١-\text{س})^{٢}}$$

اذا الاقتران ق قابل للاشتقاق على كل من الفترتين $(-\infty،١)$،$(١،\infty)$

ملاحظة هنالك مصطلح معدل التغير وهو $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ عندما تتغير س من $س_1$ الى $س_2$ ومصطلح معدل التغير في $س_1$ وهو المشتقة $\frac{ءص}{ءس}$ عند $س_1$

تدريب : ليكن الاقتران ق القابل للاشتقاق على ع و $ق(س) = قَ(س)$ لاجل كل س من ع وان $ق(٠) = ١$

اثبت ان $\lim_{س \to ٠} \frac{ق(س) - ١}{س} = ١$ ثم استنتج $\lim_{س \to ٠} \frac{ق(٤س) - ق(٢س)}{س + ١}$

الحل :

$$قَ(٠) = \lim_{س \to ٠} \frac{ق(س) - ق(٠)}{س} = ق(٠) = ١$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{ق(س) - ١}{س} = ١$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{ق(٤س) - ق(٢س)}{س + ١} = \lim_{س \to ٠} \frac{ق(٤س) - ١ + ١ - ق(٢س)}{س + ١} =$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{(ق(٤س) - ١) - (ق(٢س) - ١)}{س} \times \frac{س}{(س + ١)}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \left[ \frac{(ق(٤س) - ١)}{س} - \frac{(ق(٢س) - ١)}{س} \right] \lim_{س \to ٠} \frac{س}{(س + ١)}$$

$$\left[ ٤\lim_{س \to ٠} \frac{(ق(٤س) - ١)}{٤س} - ٢\lim_{س \to ٠} \frac{(ق(٢س) - ١)}{٢س} \right] \lim_{س \to ٠} \frac{س}{(س + ١)}$$

نبدل $٤س = ص$ وس $\to ٠ \Leftarrow ص \to ٠$ وكذلك نبدل $٢س = ع$ وس $\to ٠ \Leftarrow ع \to ٠$ ونعوض فنجد

لما كانت $\lim_{س \to ٠} ٤\frac{(ق(٤س) - ١)}{٤س} = \lim_{ص \to ٠} ٤\frac{(ق(ص) - ١)}{ص} = ٤ \times ١ = ٤$

وكانت $\lim_{س \to ٠} ٢\frac{(ق(٢س) - ١)}{٢س} = \lim_{ع \to ٠} ٢\frac{(ق(ع) - ١)}{ع} = ٢(١) = ٢$

وكانت $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{(س + ١)} = ٠$

كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{ق(٤س) - ق(٢س)}{س + ١} = [(٤) - (+٢)](٠) = ٠$

تدريب اذا كان ق قابل للاشتقاق اثبت ان

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س - هـ)}{هـ} = ٢قَ(س)$$

الحل :

$$\lim_{\text{هـ}\to ٠}\frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{هـ}}=\lim_{\text{هـ}\to ٠}\frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})+\text{ق}(\text{س})-\text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$$\lim_{\text{هـ}\to ٠}\frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}+\lim_{\text{هـ}\to ٠}\frac{\text{ق}(\text{س})-\text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

لما كانت $\lim_{\text{هـ}\to ٠}\frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}=\text{ق}'(\text{س})$

وكانت

$$\lim_{\text{هـ}\to ٠}\frac{\text{ق}(\text{س}-\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}=-\lim_{\text{هـ}\to ٠}\frac{\text{ق}(\text{س})-\text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{هـ}}=$$

$$\lim_{\text{هـ}\to ٠}\frac{\text{ق}(\text{ص}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{ص})}{\text{هـ}}=\text{ق}'(\text{ص})$$

وبما ان المتغير س فان هذه المشتقة هي $\text{ق}'(\text{س})$

اذا $\lim_{\text{هـ}\to ٠}\frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{هـ}}=\text{ق}'(\text{س})+\text{ق}'(\text{س})=٢\text{ق}'(\text{س})$

تدريب اثبت ان

$$\lim_{\text{ع}\to\text{س}}\frac{٣\text{ع ق}(\text{ع})-٣\text{س ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}=٣\text{ق}(\text{س})+٣\text{س ق}'(\text{س})$$ الحل

$$\lim_{\text{ع}\to\text{س}}\frac{٣\text{ع ق}(\text{ع})-٣\text{س ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}=\lim_{\text{ع}\to\text{س}}\frac{٣\text{ع ق}(\text{ع})-٣\text{س ق}(\text{ع})+٣\text{س ق}(\text{ع})+٣\text{س ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$=\lim_{\text{ع}\to\text{س}}\frac{٣\text{ع ق}(\text{ع})-٣\text{س ق}(\text{ع})+٣\text{س ق}(\text{ع})+٣\text{س ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}+\lim_{\text{ع}\to\text{س}}\frac{٣\text{س ق}(\text{ع})+٣\text{س ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$=\lim_{\text{ع}\to\text{س}}\frac{٣\text{ق}(\text{ع})(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}+\lim_{\text{ع}\to\text{س}}\frac{٣\text{س}(\text{ق}(\text{ع})+\text{ق}(\text{س}))}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$=٣\text{ق}(\text{س})+٣\text{س ق}(\text{س}')$$

تدريب : قشره كروية معدنية نصف قطرها $\text{ر}$ وضعت داخل فرن حراري احسب معدل تغير مساحتها بالنسبة لنصف قطرها

الحل مساحة سطح الكرة هو $\text{م}=٤\pi\text{ر}^٢$ عندما $\text{ر}=١٠$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ر}}=\lim_{\text{هـ}\to ٠}\frac{٤\pi(\text{ر}+\text{هـ})^٢-٤\pi(\text{ر})^٢}{\text{هـ}}=٤\pi\lim_{\text{هـ}\to ٠}\frac{(\text{ر}+\text{هـ})^٢-(\text{ر})^٢}{\text{هـ}}$$

$$٤\pi\lim_{\text{هـ}\to ٠}\frac{(\text{ر}+\text{هـ}+\text{ر})(\text{ر}+\text{هـ}-\text{ر})}{\text{هـ}}=٤\pi\lim_{\text{هـ}\to ٠}\frac{(٢\text{ر}+\text{هـ})(\text{هـ})}{\text{هـ}}=٤\pi(٢\text{ر})$$

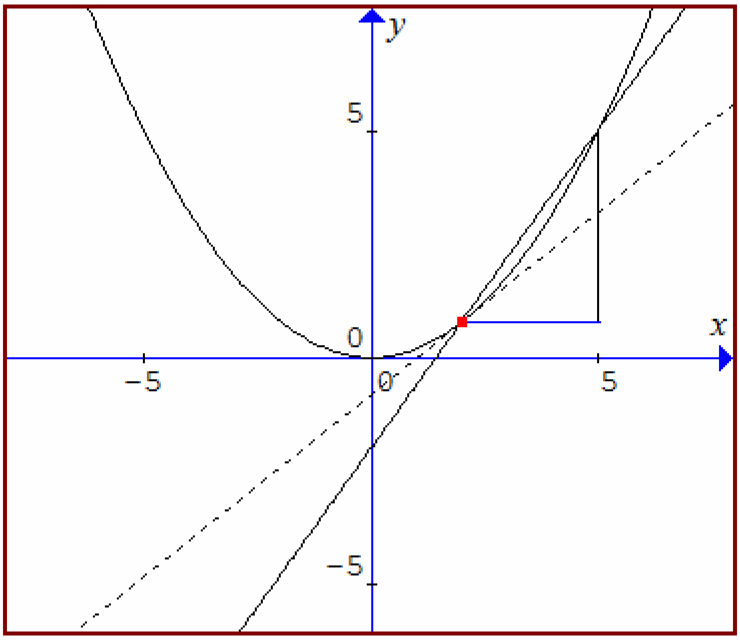
$$\frac{\text{د}م}{\text{د}ر}(١٠)=٤\pi(٢\times ١٠)=٨٠\pi$$

من الاسهل ان ناخذ

$$\frac{\text{د}م}{\text{د}ر}(١٠)=\lim_{\text{هـ}\to ٠}\frac{٤\pi(١٠+\text{هـ})^{٢}-٤\pi(١٠)^{٢}}{\text{هـ}}=\lim_{\text{هـ}\to ٠}٤\pi\frac{(١٠+\text{هـ})^{٢}-(١٠)^{٢}}{\text{هـ}}$$

$$\lim_{\text{هـ}\to ٠}٤\pi\frac{(١٠+\text{هـ}+١٠)(١٠+\text{هـ}-١٠)}{\text{هـ}}=\lim_{\text{هـ}\to ٠}٤\pi\frac{(٢٠+\text{هـ})(\text{هـ})}{\text{هـ}}=٨٠\pi$$

لاحظ هنا معدل تغير بالنسبة لنصف القطر  وسوف ندرس فيما بعد معدل التغير بالنسبة للزمن




الاتصال والاشتقاق

مبرهنة

الاقتران القابل للاشتقاق عند نقطة متصل عند تلك النقطة وكذلك على فترة

الا ان العكس ليس صحيح في الحالة العامة  أي ان ليس من الضروري اذا كان متصل عند نقطة ان كون قابل للاشتقاق عند تلك النقطة

واذا كان الاقتران غير متصل عند نقطة فهو حتما غير قابل للاشتقاق عندها

ق قابل للاشتقاق عند نقطة $س_١$ $\Leftarrow$ ق متصل عند $س_١$

الاثبات

ق قابل للاشتقاق عند نقطة $س_١$ لنثبت انه متصل عندها $ق'(س_١)=\lim_{س\to س_١}\frac{ق(س)-ق(س_١)}{س-س_١}$

$$\underset{س\leftarrow س_{1}}{\text{نهـا}}\left(ق(س)-ق(س_{1})\right)=\underset{س\leftarrow س_{1}}{\text{نهـا}}\frac{ق(س)-ق(س_{1})}{س-س_{1}}\times(س-س_{1})$$

$$=ق'(س_{1})\,\underset{س\leftarrow س_{1}}{\text{نهـا}}(س-س_{1})=ل\times ٠=٠$$

$$\underset{س\leftarrow س_{1}}{\text{نهـا}}ق(س)=ق(س_{1})$$

مثال

ليكن الاقتران $ق(س)=|س-١|$ اقتران متصل عند الواحد وغير قابل للاشتقاق عنده

$$ق(س)=|س-١|=\begin{cases}س-١ & س\succ ١\\ ١-س & س\leq ١\end{cases}$$

$$\underset{س\leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}ق(س)=\underset{س\leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}(س-١)=٠$$

$$ق(١)=٠$$

$$\underset{س\leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}ق(س)=\underset{س\leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}-(س-١)=٠$$

اذا متصل عند الواحد

لنبت انه غير قابل للاشتقاق عند الواحد

$$\underset{س\leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}\frac{ق(س)-ق(١)}{س-١}=\underset{س\leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}\frac{س-١-٠}{س-١}=١$$

$$\underset{س\leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}\frac{ق(س)-ق(١)}{س-١}=\underset{س\leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}\frac{-(س-١)-٠}{س-١}=-١$$

طبعا غير قابل للاشتقاق( المشتق من اليمين لا يساوي المشتق من اليسار

المعنى الهندسي لهذة النتيجة المنحني لايقبل مماس عند الواحد يقبل نصفي مماسين بينهما زاوية ليست مستقيمة وهنا الخط ينكسر عند هذه النقطة الزاوية

مثال : ليكن الاقتران $ق(س)=\begin{cases}س^{٢}+١ & س\succ ٠\\ س^{٣} & س\leq ٠\end{cases}$ هل ق قابل للاشتقاق عند الصفر ولماذا

$$\underset{س\leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}ق(س)=\underset{س\leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}(س^{٢}+١)=١$$

$$ق(٠)=٠$$

$$\underset{س\leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}}ق(س)=\underset{س\leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}}-(س^{٣})=٠$$

الاقتران غير متصل عند الصفر فهو غير قابل للاشتقاق عنده

مثال: ليكن الاقتران

$$ق(س)=\begin{cases}[\tfrac{1}{2}س+\tfrac{1}{2}] & -\tfrac{٢}{٣}\leq س\prec \tfrac{٤}{٣}\\ جا\dfrac{\pi س}{٢} & \tfrac{٤}{٣}\leq س\leq ٣\end{cases}$$

ادرس قابلية الاشتقاق على الفترة $\left[-\frac{٢}{٣} ، ٣\right]$ وفق التعريف

الحل :لنعيد التعريف

$-\frac{٢}{٣} \le س < \frac{٨}{٣} \Leftrightarrow -\frac{١}{٣} \le \frac{١}{٢}س < \frac{٤}{٣} \Leftrightarrow ٠ \le \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٣} < \frac{٥}{٣}$ اذا مجموعة قيم الاقتران الدرجي هي $\{٠،١\}$

$$\left[\frac{١}{٢}س + \frac{١}{٣}\right] = ٠ \Leftrightarrow ٠ \le \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٣} < ١ \Leftrightarrow -\frac{١}{٣} \le \frac{١}{٢}س < \frac{٢}{٣} \Leftrightarrow -\frac{٢}{٣} \le س < \frac{٤}{٣}$$

$$\left[\frac{١}{٢}س + \frac{١}{٣}\right] = ١ \Leftrightarrow ١ \le \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٣} < ٢ \Leftrightarrow \frac{٢}{٣} \le \frac{١}{٢}س < \frac{٥}{٣} \Leftrightarrow \frac{٤}{٣} \le س < \frac{١٠}{٣}$$

$$ق(س) = \begin{cases} ٠ & -\frac{٢}{٣} \le س < \frac{٤}{٣} \\ ١ & \frac{٤}{٣} \le س < \frac{٨}{٣} \\ جا\frac{\pi س}{٢} & \frac{٨}{٣} \le س \le ٣ \end{cases}$$

الاقتران غير قابل للاشتقاق عند $-\frac{٢}{٣}$ ، ٣ اطراف فترة

وكذلك عند $\frac{٤}{٣}$ لان

ندرس الاتصال عند $\frac{٨}{٣}$

$$\lim_{س \to \frac{٤}{٣}^-} ق(س) = ٠$$

غير متساويتين

$$\lim_{س \to \frac{٤}{٣}^+} ق(س) = ١$$

اذا غير متصل عند $\frac{٤}{٣}$ فهو غير قابل للاشتقاق عندها

ندرس الاتصال عند $\frac{٨}{٣}$

$$\lim_{س \to \frac{٨}{٣}^-} ق(س) = ٠$$

$$\lim_{س \to \frac{٨}{٣}^+} ق(س) = \lim_{س \to \frac{٨}{٣}^+} جا\frac{\pi س}{٢} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

اذا غير متصل عند $\frac{٨}{٣}$ فهو غير قابل للاشتقاق عندها

الان الدراسة على الفترة المفتوحة $\left(-\frac{٢}{٣}، \frac{٤}{٣}\right)$

لتكن س قيمة اختيارية من هذه الفترة لنشكل

$$ق'(س) = \underset{هـ\to ٠}{نهـــا} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} = \underset{هـ\to ٠}{نهـــا} \frac{٠-٠}{هـ} = ٠$$

على الفترة المفتوحة $\left(\frac{٤}{٣}، \frac{٨}{٣}\right)$

لتكن س قيمة اختيارية من هذه الفترة لنشكل

$$ق'(س) = \underset{هـ\to ٠}{نهـــا} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} = \underset{هـ\to ٠}{نهـــا} \frac{١-١}{هـ} = ٠$$

الدراسة على الفترة المفتوحة $\left(\frac{٨}{٣}، ٣\right)$

لتكن س قيمة اختيارية من هذه الفترة لنشكل

للسهولة سنستخدم الشكل التالي

$$ق'(س) = \underset{ع\to س}{نهـــا} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع-س} = \underset{ع\to س}{نهـــا} \frac{جا\frac{\pi ع}{٢} - جا\frac{\pi س}{٢}}{ع-س} = \underset{ع\to س}{نهـــا} \frac{٢ جتا\frac{\pi ع + \pi س}{٤} جا\frac{\pi ع - \pi س}{٤}}{ع-س}$$

$$\underset{ع\to س}{نهـــا} \frac{٢ جتا\frac{\pi ع + \pi س}{٤} جا\frac{\pi ع - \pi س}{٤}}{ع-س} = \underset{ع\to س}{نهـــا} \frac{٢ جتا\frac{\pi(ع+س)}{٤} جا\frac{\pi(ع-س)}{٤}}{ع-س}$$

$$= \underset{ع\to س}{نهـــا} ٢ جتا\frac{\pi(ع+س)}{٤} \underset{ع\to س}{نهـــا} \frac{جا\frac{\pi}{٤}(ع-س)}{ع-س} = ٢ جتا\frac{\pi س}{٢} \times \frac{\pi}{٤} = \frac{\pi}{٢} جتا\frac{\pi س}{٢}$$

اذا الاقتران المشتق

$$ق'(س) = \begin{cases} ٠ & -\frac{٢}{٣} \prec س \prec \frac{٨}{٣} \\ ٠ & \frac{٤}{٣} \prec س \prec \frac{٨}{٣} \\ \frac{\pi}{٢} جتا\frac{\pi س}{٢} & \frac{٨}{٣} \prec س \prec ٣ \end{cases}$$

كيف نحسب الثوابت

مثال لكن الاقتران $ق(س) = \begin{cases} س^٣ + ٢أس + ب & س \prec ١ \\ -س^٢ + أس + ٢ & س \geq ١ \end{cases}$ عين الثوابت الحقيقية أ،ب اذا

علمت ان هذا الاقتران قابل للاشتقاق عندا الواحد

الحل بما ان الاقتران اشتقاقي عند الواحد فهو متصل عنده وبالتالي

$$\underset{س\to ١^-}{نهـــا}(س^٣ + ٢أس + ب) = ١ + ٢أ + ب$$

$$\underset{س\to ١^+}{نهـــا}(-س^٢ + أس + ٢) = -١ + أ + ٢ = أ + ١$$

$$ق(١) = أ + ١$$

لكن

$$1+2أ+ب=أ+1$$
$$أ+ب=0$$
$$أ=-ب$$

$$\lim_{س\to1^-}\frac{\left(س^3+2أس+ب\right)-(أ+1)}{س-1}=\lim_{س\to1^-}\frac{س^3+2أس-أ-أ-1}{س-1}$$

$$\lim_{س\to1^-}\frac{س^3-1+2أس-2أ}{س-1}=\lim_{س\to1^-}\frac{(س-1)\left(س^2+س+1\right)+2أ(س-1)}{س-1}$$

$$\lim_{س\to1^-}\left(س^2+س+1+2أ\right)=3+2أ$$

$$\lim_{س\to1^+}\frac{\left(-س^2+أس+2\right)-(أ+1)}{س-1}=\lim_{س\to1^+}\frac{\left(-س^2+أس-أ+1\right)}{س-1}$$

$$\lim_{س\to1^+}\frac{\left(-س^2+1+أس-أ\right)}{س-1}=\lim_{س\to1^+}\frac{-\left(س^2-1\right)+أ(س-1)}{س-1}$$

$$\lim_{س\to1^+}\frac{-(س-1)(س+1)+أ(س-1)}{س-1}=\lim_{س\to1^+}(-س-1+أ)=-2+أ$$

لكن $2أ+3=-2+أ \Longleftarrow أ=-5$ اذا $ب=5$

الاقتران هو

$$ق(س)=\begin{cases} س^3-10س+5 & س<1 \\ -س^2-5س+2 & س\ge1 \end{cases}$$

قواعد الاشتقاق

1- مشتقة الاقتران $ق(س)=جـ$ ثابت هي $ق'(س)=0$ مشتقة الاقتران الثابت تساوي الصفر

2- $ق(س)=أس+جـ$ المشتقة $ق'(س)=أ$

3- $ق(س)=أس^{ن}$ المشتقة $ق'(س)=نأس^{ن-1}$

4- $ق(س)=جـل(س)$ المشتقة $ق'(س)=جـل'(س)$ ج ثابت

5- مشتق مجموع يساوي مجموع المشتقات

$ق=ل+م+\cdots ف$ المشتقة هي $ق'=م'+ل'+\cdots+ف'$

5- مشتق حاصل ضرب يساوي مشتق الاول ضرب الثاني +مشتق الثاني ضرب الاول

$$ق(س)=م(س)\times ل(س)\Longleftarrow ق'(س)=م'(س)\times ل(س)+ل'(س)\times م(س)$$

6- مشتق كسر يساوي مشتق البسط ضرب المقام ناقص مشتق المقام ضرب البسط على مربع المقام

$ق=\frac{ل}{م}$ المشتقة $ق'(س)=\frac{ل'(س)\times م(س)-م'(س)\times ل(س)}{م^2(س)}$

٧- $ن = \frac{1}{م} \Leftarrow ن^{\prime}(س) = \frac{-م^{\prime}(س)}{م^{2}(س)}$

٦-كثير الحدود المعرف على ح مجال اشتقاقه ح وقابل للاشتقاق على كل فترة جزئية منها

$ن(س) =$جاس $\Leftarrow ن^{\prime}(س) =$جتاس

$ن(س) =$جتاس $\Leftarrow ن^{\prime}(س) =-$جاس

$ن(س) =$ظاس $\Leftarrow ن^{\prime}(س) = 1+$ظا$^{2}$س $= \frac{1}{جتا^{2}س} =$قا$^{2}$س

$ن(س) =$ظتاس $\Leftarrow ن^{\prime}(س) = -(1+$ظتا$^{2}$س$) = \frac{-1}{جا^{2}س} =-$قتا$^{2}$س

$ن(س) =$قاس $\Leftarrow ن^{\prime}(س) =$قاس ظاس

$ن(س) =$قتاس $\Leftarrow ن^{\prime}(س) =-$قتاس ظتاس

ويمكن إعادة الاشتقاق مرة ثانية والثالثة .... وهكذا المشتق من المرتبة ن نرمز لهذه المشتقات

ب $\frac{ءص}{ءس}$ ، $\frac{ء^{2}ص}{ءس^{2}}$ ، $\frac{ء^{3}ص}{ءس^{3}}$ ، $\frac{ء^{ن}ص}{ءس^{ن}}$

او $ن^{\prime}$ ، $ن^{\prime\prime}$ ، $ن^{\prime\prime\prime} = ن^{(3)} \dots ن^{(ن)}$

قاعدة السلسلة

قاعدة حاصل تركيب اقترانين $(ن \circ هـ)(س) = ن(هـ(س))$

القاعدة $(ن \circ هـ)^{\prime}(س) = ن^{\prime}(هـ(س)) \times هـ^{\prime}(س)$

بفرض $هـ(س) = ع$

$(ن(ع))^{\prime} = ن^{\prime}(ع) \times ع^{\prime}(س)$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

$ص^{\prime}_{س} = ص^{\prime}_{ع} \times ع^{\prime}_{س}$

نتيجة تستخدم في الحل (كتاب)

$ن(س) = (ل(س))^{ن}$ المشتقة $ن^{\prime}(س) = ن \times ل^{\prime}(س) \times (ل(س))^{ن-1}$

مشتق قوس اس ن يساوي ن ضرب مشتق ما داخل القوس ضرب القوس اس (ن-١)

ملاحظة

لايجاد مشتقة كل من الاقترانات التالية نستخدم قاعدة السلسلة ويجب ان نفرض ولا نستخدم القواعد التالية لانها غير موجودة في الكتاب

مشتق جذر تربيعي = مشتق ما تحت الجذر التربيعي مقسوما على ضعفي الجذر

$ن(س) = \sqrt{ل(س)}$

$$\text{ق}(\text{س}) = \left(\text{ل}(\text{س})\right)^{\frac{١}{٢}}$$

$$\text{ع} = \text{ل}(\text{س})$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \left(\text{ع}\right)^{\frac{١}{٢}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٢}\,\text{ع}'\,\left(\text{ع}\right)^{\frac{١}{٢}-١}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ع}'}{٢\sqrt{\text{ع}}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ل}'(\text{س})}{٢\sqrt{\text{ل}(\text{س})}}$$

استنتاج مشتقة $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[\text{ن}]{\text{ل}(\text{س})}$ نفس الطريقة نستنتج

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{ن}}\,\text{ع}'\,\text{ع}^{\frac{١}{\text{ن}}-١}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ع}'\,\sqrt[\text{ن}]{\text{ع}}}{\text{ن}\,\text{ع}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ل}'(\text{س})\,\sqrt[\text{ن}]{\text{ل}(\text{س})}}{\text{ن}\,\text{ل}(\text{س})}$$

كذلك نتعامل مع

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}\,\text{ل}(\text{س}) \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \text{ل}'(\text{س})\,\text{جتا}\,\text{ل}(\text{س})$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا}\,\text{ل}(\text{س}) \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = -\text{ل}'(\text{س})\,\text{جا}\,\text{ل}(\text{س})$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{ظا}\,\text{ل}(\text{س}) \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \text{ل}'(\text{س})\left(١+\text{ظا}^{٢}\,\text{ل}(\text{س})\right) = \frac{\text{ل}'(\text{س})}{\text{جتا}^{٢}\,\text{ل}(\text{س})} = \text{ل}'(\text{س})\,\text{قا}^{٢}\,\text{ل}(\text{س})$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{ظتا}\,\text{ل}(\text{س}) \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = -\left(١+\text{ظتا}^{٢}\,\text{ل}(\text{س})\right) = \frac{-\text{ل}'(\text{س})}{\text{جا}^{٢}\,\text{ل}(\text{س})} = -\text{ل}'(\text{س})\,\text{قتا}^{٢}\,\text{ل}(\text{س})$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{قا}\,\text{ل}(\text{س}) \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \text{ل}'(\text{س})\,\text{قا}\,\text{ل}(\text{س})\,\text{ظا}\,\text{ل}(\text{س})$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{قتا}\,\text{ل}(\text{س}) \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = -\text{ل}'(\text{س})\,\text{قتا}\,\text{ل}(\text{س})\,\text{ظتا}\,\text{ل}(\text{س})$$

وكل تدريب يجب ان يبسط ويستخدم فيه قاعدة السلسلة

مثال

اوجد المشتقة الاولى للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\sqrt{\text{جا}(٢\text{س} - \frac{\pi}{٤})}}{\left(\text{جتا}^{٢}\,\sqrt[٣]{٣\text{س}}\right)}$

هذا كسر نطبق علية القاعدة $\text{م} = \left(\text{جتا}^{٢}\,\sqrt[٣]{٣\text{س}}\right)$ ، $\text{ل} = \sqrt{\text{جا}(٢\text{س} - \frac{\pi}{٤})}$ ، $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{ل}}{\text{م}}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ل}'(\text{س}) \times \text{م}(\text{س}) - \text{م}'(\text{س}) \times \text{ل}(\text{س})}{\text{م}^{٢}(\text{س})}$$

$$\text{ل}' = \left(\sqrt{\text{جا}\left(٢\text{س} - \tfrac{\pi}{٤}\right)}\right)' = \frac{٢\text{جتا}\left(٢\text{س} - \tfrac{\pi}{٤}\right)}{٢\sqrt{\text{جا}\left(٢\text{س} - \tfrac{\pi}{٤}\right)}}$$

$$\text{م} = \left(\text{جتا}\ \sqrt[٣]{٣\text{س}}\right)^{٢} = \left(\text{جتا}^{٢}\ \sqrt[٣]{٣\text{س}}\right)$$

$$\text{م}' = ٢\left(\text{جتا}\ \sqrt[٣]{٣\text{س}}\right)\left(\text{جتا}\ \sqrt[٣]{٣\text{س}}\right)'^{\ ٢-١}$$

$$\text{م}' = ٢\,\frac{٣}{٣\ \sqrt[٣]{(٣\text{س})^{٢}}}\left(\text{جتا}\ \sqrt[٣]{٣\text{س}}\right)\left(\text{جتا}\ \sqrt[٣]{٣\text{س}}\right)$$

$$\text{ن}(\text{س}') = \frac{\text{ل}(\text{س}') \times \text{م}(\text{س}) - \text{م}(\text{س}') \times \text{ل}(\text{س})}{\text{م}^{٢}(\text{س})}$$

$$\frac{\text{جتا}\left(٢\text{س} - \tfrac{\pi}{٤}\right)}{\sqrt{\text{جا}\left(٢\text{س} - \tfrac{\pi}{٤}\right)}}$$

$$\frac{٢}{\sqrt[٣]{(٣\text{س})^{٢}}}\left(\text{جتا}\ \sqrt[٣]{٣\text{س}}\right)\left(\text{جتا}\ \sqrt[٣]{٣\text{س}}\right)$$

$$\text{ن}(\text{س}') = \frac{\dfrac{\text{جتا}\left(٢\text{س} - \tfrac{\pi}{٤}\right)}{\sqrt{\text{جا}\left(٢\text{س} - \tfrac{\pi}{٤}\right)}}\left(\text{جتا}^{٢}\ \sqrt[٣]{٣\text{س}}\right) - \dfrac{٢}{\sqrt[٣]{(٣\text{س})^{٢}}}\left(\text{جتا}\ \sqrt[٣]{٣\text{س}}\right)\left(\text{جتا}^{٢}\ \sqrt[٣]{٣\text{س}}\right)}{\left(\text{جتا}^{٤}\ \sqrt[٣]{٣\text{س}}\right)}$$

تدريبات مختلفة على الاشتقاق

اوجد قاعة الربط للاقتران المشق لكل مما يلي

( ملاحظة اذا طلب الاقتران المشتق فهذا يعني تعين كل من المجال والمجال المقابل وقاعدة الربط )

-١ $\text{ن}(\text{س}) = ٤\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ٦$

$\text{ن}'(\text{س}) = ١٢\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٧$

-٢

$\text{ن}(\text{س}) = \left(\text{س}^{٣} + ٢\text{س}\right)\left(-٧\text{س} + ٥\right)$

$\text{ن}'(\text{س}) = \left(٣\text{س}^{٢} + ٢\right)\left(-٧\text{س} + ٥\right) + \left(\text{س}^{٣} + ٢\text{س}\right)(-٧)$

-٣

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٢\text{س}^{٢}}{٣\text{س} + ٥}$$

$$\text{ن}'(\text{س}) = \frac{(١ + ٤\text{س})(٣\text{س} + ٥) - (٣)\left(\text{س} + ٢\text{س}^{٢}\right)}{(٣\text{س} + ٥)^{٢}}$$

-٤

$$\text{ت}(\text{س}) = \sqrt{-١\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٧}$$

$$\text{ت}'(\text{س}) = \frac{-٢\text{س} + ٤}{٢\sqrt{-١\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٧}}$$

٥-

$$\text{ت}(\text{س}) = \sqrt[٥]{\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٢}}$$

$$\text{ت}(\text{س}) = \left(\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٢}\right)^{\frac{١}{٥}}$$

$$\text{ت}'(\text{س}) = \frac{١}{٥}\left(\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٢}\right)^{\frac{١}{٥}-١}\left(٤\text{س}^{٣} + ٦\text{س}\right)$$

$$\text{ت}'(\text{س}) = \frac{\frac{١}{٥}\left(٤\text{س}^{٣} + ٦\text{س}\right)}{\sqrt[٥]{\left(\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٢}\right)^{٤}}}$$

٦- $\text{ت}(\text{س}) = \text{جاس} - \text{جتاس}$

$\text{ت}'(\text{س}) = \text{جتاس} + \text{جاس}$

٧-

$$\text{ت}(\text{س}) = \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٤}\right)$$

$$\text{ص} = ٢\text{س} + \frac{\pi}{٤}$$

$$\text{ت}'(\text{س}) = \left(\text{جا}'\text{ص}\right)\text{ص}'(\text{س})$$

$$\text{ت}'(\text{س}) = ٢\,\text{جتا}\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٤}\right)$$

٨-

$$\text{ت}(\text{س}) = \text{ظا}^{٢}\left(٢\text{س}^{٢} - \text{س}\right)$$

$$\text{ت}(\text{س}) = \left(\text{ظا}\left(٢\text{س}^{٢} - \text{س}\right)\right)^{٢}$$

$$\text{ص} = ٢\text{س}^{٢} - \text{س}$$

$$\text{ص}' = ٤\text{س} - ١$$

$$\text{ت}(\text{س}) = \left(\text{ظا}(\text{ص})\right)^{٢}$$

$$\text{ت}'(\text{س}) = ٢\text{ص}'\left(١ + \text{ظا}^{٢}\text{ص}\right)\left(\text{ظا}(\text{ص})\right)$$

$$\text{ت}'(\text{س}) = ٢(٤\text{س} - ١)\left(١ + \text{ظا}^{٢}\left(٢\text{س}^{٢} - \text{س}\right)\right)\left(\text{ظا}\left(٢\text{س}^{٢} - \text{س}\right)\right)$$

٩- $\text{ت}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٢\text{س} - ١$ اوجد $(\text{ت} \circ \text{هـ})'(\text{س})$ الحل

$$(ن \circ هـ)'(س) = ن'(هـ(س))\, هـ'(س)$$
$$هـ'(س) = ٢$$
$$(ن \circ هـ)'(س) = ن'(٢س - ١) \times ٤$$
$$ص = ٢س - ١$$
$$ن'(ص) = ٢ص$$
$$ن'(٢س - ١) = ٢(٢س - ١)$$
$$(ن \circ هـ)'(س) = ٢(٢س - ١) \times ٤$$

نشتق كل من $ن(س)$ ، $هـ(س)$ وعلينا ان نبدل كل س من $ن'(س)$ ب $هـ(س)$

١٠ -

$$ن(س) = س^{٢} + ١ \qquad ، هـ(س) = \frac{١}{س}$$
$$(ن \circ هـ)'(س) =$$

$$ن(س) = س^{٢} + ١ \qquad ، هـ(س) = \frac{١}{س}$$
$$ن'(س) = ٢س \qquad ، هـ'(س) = \frac{-١}{س^{٢}}$$

الحل $(ن \circ هـ)'(س) = ن'(هـ(س))\, هـ'(س)$

$$(ن \circ هـ)'(س) = ن'\left(\frac{١}{س}\right) \times \frac{-١}{س^{٢}}$$
$$(ن \circ هـ)'(س) = ٢\left(\frac{١}{س}\right) \times \frac{-١}{س^{٢}}$$

طريقة ثانية $(ن \circ هـ)(س) = ن(هـ(س)) = ن\left(\frac{١}{س}\right) = \frac{١}{س^{٢}} + ١$

$$(ن \circ هـ)'(س) = -٢س^{-٣} = \frac{-٢}{س^{٣}}$$
$$(ن \circ هـ)(س) = ن(هـ(س)) = ن\left(\frac{١}{س}\right) = \left(\frac{١}{س^{٢}}\right) + ١ = س^{-٢} + ١$$

١١- اذا كان $ن\left(س^{٣}\right) = \frac{١}{س}$ جد $ن'(٨)$

الحل $س^{٣} = ٨ \Leftrightarrow س = ٢$

$$ن\left(س^{٣}\right) = \frac{١}{س}$$
$$٣س^{٢}\, ن'\left(س^{٣}\right) = \frac{-١}{س^{٢}}$$
$$٣(٢)^{٢}\, ن'\left(٢^{٣}\right) = \frac{-١}{٢^{٢}}$$
$$ن'(٨) = \frac{-١}{٤٨}$$

١٢- $\text{ص} = \text{س} - ٤\,\text{قتاس} + ٢\,\text{ظتاس}$ جد المشتقة الاولى

$\text{ص}' = ١ + ٤\,\text{قتاس ظتاس} - ٢\,\text{قتا}^{٢}\text{س}$

١٣- اذا كان $\text{ص} = \text{أجاس} + \text{بجتاس}$ اثبت ان $\left(\text{ص}'\right)^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$

الحل $\text{ص} = \text{أ}\left(\text{جاس} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{جتاس}\right)$ يوجد زاوية هـ بحيث

$$\text{ظاهـ} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \Leftarrow ١ + \text{ظا}^{٢}\text{هـ} = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}$$

$$١ + \frac{\text{ب}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}$$

$$\frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}$$

$$\text{جتاهـ} = \frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}$$

$$\text{ص} = \text{أ}\left(\text{جاس} + \text{ظاهـ جتاس}\right)$$

$$\text{ص} = \text{أ}\left(\text{جاس} + \frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}\text{جتاس}\right)$$

$$\text{ص} = \frac{\text{أ}}{\text{جتاهـ}}\left(\text{جاس جتاهـ} + \text{جاهـ جتاس}\right)$$

$$\text{ص} = \sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}\,\text{جا}(\text{س} + \text{هـ})$$

$$\text{ص} = \sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}\,\text{جا}(\text{س} + \text{هـ})$$

$$\text{ص}' = \sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}\,\text{جتا}(\text{س} + \text{هـ})$$

$$\left(\text{ص}'\right)^{٢} + (\text{ص})^{٢} = \left(\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}\right)\text{جا}^{٢}(\text{س} + \text{هـ}) + \left(\text{أ}^{٢} + \text{ب}\right)^{٢}\text{جتا}^{٢}(\text{س} + \text{هـ}) =$$

$$\left(\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}\right)\left(\text{جا}^{٢}(\text{س} + \text{هـ}) + \text{جتا}^{٢}(\text{س} + \text{هـ})\right) = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$$

تستطيع الحل مباشرة

تدريب :

ليكن الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس}$ اوجد المشتق من المرتبة ن ثم اوجد $\text{ق}^{(١٠)}\left(\frac{\pi}{٦}\right)$

$$ق(س) = \text{جاس}$$

$$ق'(س) = \text{جتاس} = \text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} + س\right)$$

$$ق''(س) = -\text{جاس} = \text{جا}\left(\frac{٢\pi}{٢} + س\right)$$

$$ق^{(٣)}(س) = -\text{جتاس} = \text{جا}\left(\frac{٣\pi}{٢} + س\right)$$

$$ق^{(٤)}(س) = \text{جاس} = \text{جا}\left(\frac{٤\pi}{٢} + س\right)$$

$$ق^{(ن)}(س) = \text{جا}\left(\frac{ن\pi}{٢} + س\right)$$

$$ق^{(١٠)}\left(\frac{\pi}{٦}\right) = \text{جا}\left(\frac{١٠\pi}{٢} + \frac{\pi}{٦}\right) = \text{جا}\left(٥\pi + \frac{\pi}{٦}\right) = \text{جا}\left(٤\pi + \pi + \frac{\pi}{٦}\right) = \text{جا}\left(\pi + \frac{\pi}{٦}\right)$$

$$= -\text{جا}\left(\frac{\pi}{٦}\right) = -\frac{١}{٢}$$

تدريب ليكن الاقتران $ق(س) = ق'(س)$ ، $ق(٠) = ١$ وكان $ل(س) = س \times ق(س)$

اثبت ان $ل^{(ن)}(س) = (س + ن)ق(س)$

الاثبات

$$ل(س) = س \times ق(س)$$

$$ل'(س) = ق(س) + س ق'(س) = ق(س) + س ق(س) = (س + ١)ق(س)$$

$$ل''(س) = ق(س) + (س + ١)ق'(س) = ق(س) + (س + ١)ق(س) = (س + ٢)ق(س)$$

$$ل^{(٣)}(س) = (س + ٣)ق(س)$$

$$ل^{(ن)}(س) = (س + ن)ق(س)$$

ولاثبات صحة هذه العلاقة ايا كانت $ن \in ط$ مجموعة الاعداد الطبيعية

١- لاحظ انها صحيحة من اجل $ن = ١$

$$ل'(س) = ق(س) + س ق'(س) = ق(س) + س ق(س) = (س + ١)ق(س)$$

٢- نفرض انها صحيحة من اجل ن أي ان $ل^{(ن)}(س) = (س + ن)ق(س)$

٣- لنثبت صحة العلاقة من اجل $ن + ١$ بمعنى هل اذا بدلنا كل ن ب $ن + ١$ تبقى العلاقة صحيحة لنبرهن صحة العلاقة $ل^{(ن+١)}(س) = (س + ن + ١)ق(س)$

الاثبات

$$ل^{(ن+١)}(س) == \left(ل^{ن}\right)' = \left((س + ن)ق(س)\right)' = ١ \times ق(س) + (س + ن)ق'(س)$$

$$= ١ \times ق(س) + (س + ن)ق(س)$$

$$= (س + ن + ١)ق(س)$$

وهو المطلوب

تدريب

اوجد الاقتران المشتق ومجاله

$$ق(س) = \left|س^{٢} - ٢س\right|$$

الحل غالبا ما يكون الاقتران غير اشتقاقي عند القيم التي تعدم مضمون القيمة المطلقة لكن هذه ليست قاعدة فهنالك تمارين عكس ذلك

نعيد التعريف

$$\text{ق}(\text{س}) = \left|\text{س}^{2} - 2\text{س}\right| = \begin{cases} \text{س}^{2} - 2\text{س} & \text{س} < 0 \\ -\left(\text{س}^{2} - 2\text{س}\right) & 0 \le \text{س} \le 2 \\ \text{س}^{2} - 2\text{س} & \text{س} > 2 \end{cases}$$

الحل نشتق حسب القاعدة مع فتح الفترات كل فرع هو كثير حدود اشتقاقي على الفترة المفتوحة الموافقة له

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} - 2 & \text{س} < 0 \\ -\left(2\text{س} - 2\right) & 0 < \text{س} < 2 \\ 2\text{س} - 2 & \text{س} > 2 \end{cases}$$

ندرس قابلية الاشتقاق عند ٠ و ٢ ( نلاحظ ان هذا الاقتران متصل عند كل من ٠ و ٢ يجب اثبات ذلك )

قابلية الاشتقاق وفق التعريف فقط

$$\text{ق}'_{-}(0) = \underset{\text{س}\to 0^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(0)}{\text{س} - 0} = \underset{\text{س}\to 0^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{2} - 2\text{س} - 0}{\text{س} - 0} = \underset{\text{س}\to 0^{-}}{\text{نهـا}} (\text{س} - 2) = -2$$

$$\text{ق}'_{+}(0) = \underset{\text{س}\to 0^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(0)}{\text{س} - 0} = \underset{\text{س}\to 0^{-}}{\text{نهـا}} \frac{-\left(\text{س}^{2} - 2\text{س}\right) - 0}{\text{س} - 0} = \underset{\text{س}\to 0^{+}}{\text{نهـا}} -(\text{س} - 2) = +2$$

النهاية غير موجودة اذا غير اشتقاق عند الصفر

عند ال ٢

$$\text{ق}'_{-}(2) = \underset{\text{س}\to 2^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(0)}{\text{س} - 2} = \underset{\text{س}\to 2^{-}}{\text{نهـا}} \frac{-\left(\text{س}^{2} - 2\text{س}\right) - 0}{\text{س} - 2} = \underset{\text{س}\to 2^{-}}{\text{نهـا}} -\text{س} = -2$$

$$\text{ق}'_{+}(2) = \underset{\text{س}\to 2^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(0)}{\text{س} - 2} = \underset{\text{س}\to 2^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\left(\text{س}^{2} - 2\text{س}\right) - 0}{\text{س} - 2} = \underset{\text{س}\to 2^{+}}{\text{نهـا}} +\text{س} = 2$$

النهاية غير موجودة اذا غير اشتقاق عند ال ٢

تدريب

اوجد الاقتران المشتق ومجاله

$\text{ق}(\text{س}) = \left[\frac{1}{3}\text{س} - 2\right]$ اوجد الاقتران المشتق

الحل نعيد التعريف

$$\text{ق}(\text{س}) = \left[\frac{1}{3}\text{س} - 2\right] = \begin{cases} -3 & -3 \le \text{س} < 0 \\ -2 & 0 \le \text{س} < 3 \\ -1 & 3 \le \text{س} < 6 \\ 0 & 6 \le \text{س} < 9 \end{cases}$$

نشتق مع فتح الفترات نجد كل فرع اقتران ثابت اشتقاقي على الفترة المفتوحة الموافقة له

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 0 & -3 < \text{س} < 0 \\ 0 & 0 < \text{س} < 3 \\ 0 & 3 < \text{س} < 6 \\ 0 & 6 < \text{س} < 9 \end{cases}$$

ونعلم انه غير متصل عند اطراف هذه الفترات فهو غير اشتقاقي عندها يجب اثبات ذلك في الامتحان

تدريب : اوجد الاقتران المشتق ومجاله

الحل نعيد التعريف

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}+\text{ظاس} & 0 \le \text{س} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{|\text{جاس}|}{\text{س}} & \frac{\pi}{2} \le \text{س} \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

الحل نعيد التعريف

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}+\text{ظاس} & 0 \le \text{س} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\text{جاس}}{\text{س}} & \frac{\pi}{2} \le \text{س} \le \pi \\ \frac{-\text{جاس}}{\text{س}} & \pi < \text{س} \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$ نشتق مع فتح الفترات

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 1+\text{قا}^2\text{س} & 0 < \text{س} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\text{سجتاس}-\text{جاس}}{\text{س}^2} & \frac{\pi}{2} < \text{س} < \pi \\ \frac{-\text{سجتاس}+\text{جاس}}{\text{س}^2} & \pi < \text{س} < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

الاشتقاق عند الاطراف ونقط التشعب

غير قابل للاشتقاق عند ٠ ، $\frac{3\pi}{2}$ اطراف فترة

عند $\frac{\pi}{2}$ حسب التعريف الاتصال

$$\lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\text{س}+\text{ظاس}\right)=-\infty$$

$$\lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{2}^+}\left(\frac{\text{جاس}}{\text{س}}\right)=\frac{٢}{\pi}$$

غير متصل عندها اذا غير قابل للاشتقاق

عند $\pi$ حسب التعريف يمكن ان نتحقق انه متصل عندها اذا علينا ان نثبت قابلية الاشتقاق

$$\text{س}-\pi=\text{ص}$$

فرضنا في الحالتين $\text{س}\to\pi^-\Leftarrow\text{ص}\to ٠^-$

$$\text{س}\to\pi^+\Leftarrow\text{ص}\to ٠^+$$

$$\text{ق}'_-(\pi)=\lim_{\text{س}\to\pi^-}\frac{\text{ق(س)}-\text{ق}(\pi)}{\text{س}-\pi}=\lim_{\text{س}\to\pi^-}\frac{\frac{\text{جا(س)}}{\text{س}}-٠}{\text{س}-\pi}=\lim_{\text{ص}\to ٠^-}\frac{\frac{\text{جا(ص}+\pi)}{\text{ص}+\pi}}{\text{ص}}$$

$$=\lim_{\text{ص}\to ٠^-}\frac{-\text{جاص}}{\text{ص}(\text{ص}+\pi)}=\frac{-١}{\pi}$$

$$\text{ق}'_+(\pi)=\lim_{\text{س}\to\pi^+}\frac{\text{ق(س)}-\text{ق}(\pi)}{\text{س}-\pi}=\lim_{\text{س}\to\pi^+}\frac{\frac{\text{جا(س)}}{\text{س}}-٠}{\text{س}-\pi}=\lim_{\text{ص}\to ٠^+}\frac{-\frac{\text{جا(ص}+\pi)}{\text{ص}+\pi}}{\text{ص}}$$

$$=\lim_{\text{ص}\to ٠^+}\frac{\text{جاص}}{\text{ص}(\text{ص}+\pi)}=\frac{١}{\pi}$$

اذا غير قابل للاشتقاق عند $\pi$ و $\frac{\pi}{٢}$

## اشتقاق اقتران ضمني

بعض الاقترانات تكتب بشكل ظاهري مثل $\text{ص}=\frac{\text{س}-١}{\text{س}+٣}$ وهنا المتحول في طرف والاقتران في طرف اخر

وهناك اقترانات كل من المتحول والتابع في نفس الطرف حتى ان بعضها لا يمكن فصله وبعضها لا يشكل اقتران وهو ما ندعوه متعدد القيم مثال ذلك $\text{أس}+\text{بص}+\text{جـ}=٠$ او $\text{س}=\text{ص}^٢$

من اجل اشتقاق هذه العلاقات

مشتق س بالنسبة ل س هو واحد $\frac{\text{ءس}}{\text{ءس}}=١$ ومشتق ص بانسبة ل س هو $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=\text{ص}'$

مثال اوجد مشتق العلاقة $\text{س}^٢+\text{ص}^٢=١$

الحل:

$$\text{س}^٢+\text{ص}^٢=١$$

$$٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءس}}+٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=٠$$

في التدريبات التالية لن نضع $\frac{\text{ءس}}{\text{ءس}}=١$ لأنها واحد

$$٢\text{س}+٢\text{صص}'=٠\Leftarrow\text{ص}'=\frac{-\text{س}}{\text{ص}}$$

مثال : اوجد المشتق الاول $(\text{س}-٢)^٢-(\text{ص}+١)^٢=٤$

الحل :

$$(س-٢)^{٢}-(ص+١)^{٢}=٤$$

$$٢(س-٢)-٢(ص+١)ص'=٠ \Rightarrow ص'=-\frac{(س-٢)}{(ص+١)}$$

مثال اوجد المشتق الاول

$$س ص^{٢}+\frac{ص}{س-٢}=\sqrt{ص}$$

الحل :

$$س ص^{٢}+\frac{ص}{س-٢}=\sqrt{ص}$$

$$١\times ص^{٢}+٢ص ص' س+\frac{ص'(س-٢)-ص}{(س-٢)^{٢}}=\frac{ص'}{٢\sqrt{ص}}$$

مثال : اوجد $ص'$ عند $س=٢$ للعلاقة

$$(ص-١)^{٢}=٤(س+٣)$$

الحل :

$$(ص-١)^{٢}=٤(س+٣)$$

$$٢(ص-١)ص'=٤$$

من اجل $س=١$ نجد

$$(ص-١)^{٢}=٤(١+٣)،(ص-١)^{٢}=١٦$$

$ص-١=٤$

$ص=٥$

او $ص-١=-٤$

$ص=-٣$

$٢(ص-١)ص'=٤$

من اجل $ص=٥$ نجد $٢(٥-١)ص'=٤$

$ص'=\frac{١}{٢}$

$٢(ص-١)ص'=٤$

ومن اجل $ص=-٣$ نجد $٢(-٣-١)ص'=٤$

$ص'=-\frac{١}{٢}$

اشتقاق بعض الاقترانات الوسيطية

مثال اوجد المشتق الاول $\frac{ءص}{ءس}$ علما ان $ص=ن^{٢}-ن$ ، $س=٢ن+١$

الحل $\frac{ءص}{ءس}=\frac{ءص}{ءن}\frac{ءن}{ءس}$

$$\frac{ءص}{ءن}=٢ن-١ \quad ، \quad \frac{ءس}{ءن}=٢ \text{ و } \frac{ءن}{ءس}=\frac{١}{٢}$$

$$\frac{ءص}{ءس}=\frac{ءص}{ءن}\frac{ءن}{ءس}=(٢ن-١)\times\frac{١}{٢}$$

$$\frac{ءص}{ءس}=\frac{(س-٢)}{٢}$$

مثال :اوجد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$

علما ان $ص=٢+جا٢ن$ ، $س=جتا٢ن+١$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \text{2جتا2ن} \quad ، \quad \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = -\text{2جا2ن}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \times \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}} = \frac{\text{2جتا2ن}}{-\text{2جا2ن}} = -\text{ظتا2ن}$$

$$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right) = \frac{\text{ء}}{\text{ءن}}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right) \times \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}} = \text{2قتا}^2\text{2ن} \frac{1}{-\text{2جا2ن}} = -\frac{\text{قتا}^2\text{2ن}}{\text{جا2ن}}$$

$$-\frac{1}{\text{جا}^3\text{2ن}} = -\frac{1}{(\text{ص}-2)^3}$$

ملاحظة اذا حذفنا الوسيط ن نجد

$\text{ص} = 2 + \text{جا2ن}$ ، $\text{س} = \text{جتا2ن} + 1$

$\text{ص} - 2 = \text{جا2ن}$ نربع ونجمع نجد $(\text{ص}-2)^2 + (\text{س}-1)^2 = 1$

$\text{س} - 1 = \text{جتا2ن}$

وبالاشتقاق مرتين نجد

$$2(\text{ص}-2)\text{ص}' + 2(\text{س}-1) = 0$$

$$\text{ص}' = \frac{-(\text{س}-1)}{(\text{ص}-2)}$$

$$\text{ص}' = \frac{-\text{جتا2ن}}{\text{جا2ن}} = -\text{ظتا2ن}$$

$$\text{ص}'' = \frac{-(\text{ص}-2) + \text{ص}'(\text{س}-1)}{(\text{ص}-2)^2}$$

$$\text{ص}'' = \frac{-(\text{جا2ن}) + (-\text{ظتا2ن})(\text{جتا2ن})}{\text{جا}^2\text{2ن}}$$

$$\text{ص}'' = \frac{-1}{\text{جا2ن}} - \frac{\text{ظتا}^2\text{2ن}}{\text{جا2ن}}$$

$\text{ص}'' = -\frac{\text{قتا}^2\text{2ن}}{\text{جا2ن}}$ ملاحظة هذه الطريقة غير مستخدمة في الفصل الاول ارجوان تتجنب استخدامها في الحل

تدريب اذا كان

$$\text{ق}\left(\text{جا٢س}\right)=\text{قتا٢س}$$

$$\left(\text{٠،}\frac{\pi}{٣}\right] \quad \text{،} \; \text{ق}'\left(\frac{١}{٢}\right)$$

$$\text{ق}'\left(\text{جا٢س}\right)\text{٢جتا٢س} = -\text{٢ قتا٢س ظتا٢س}$$

$$\text{جا٢س} = \frac{١}{٢} = \text{جا}\frac{\pi}{٦}$$

$$\text{٢س} = \frac{\pi}{٦}$$

$$\text{س} = \frac{\pi}{١٢}$$

$$\text{ق}'\left(\frac{١}{٢}\right)\text{٢}\frac{\sqrt{٣}}{٢} = -٢\times٢\times\sqrt{٣}$$

$$\text{ق}'\left(\frac{١}{٢}\right) = -٤$$

تدريب إذا كان $\text{ص} = \sqrt{٤+\text{٣جاس}}$ اثبت ان $\text{٢ص}\text{ص}'' + ٢\left(\text{ص}'\right)^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٤$

لحل مثل هذه التدريبات التي تحوي إذا كان فان والتي يعبر عنها باستخدام أداة الربط المنطقي يقتضي $(\Leftarrow)$ علينا أن نأخذ احد الطرفين في العلاقة الثانية ونستفيد أثناء الإثبات من صحة العلاقة الأولى

لنجد

$$\text{ص} = \sqrt{٤+\text{٣جاس}}$$

$$\text{ص}' = \frac{\text{٣جتاس}}{٢\sqrt{٤+\text{٣جاس}}}$$

$$\text{٢ص}\text{ص}' = \text{٣جتاس}$$

$$٢\left(\text{ص}'\right)^{٢} + \text{٢ص}\text{ص}'' = -\text{٣جاس}$$

$$٢\left(\text{ص}'\right)^{٢} + \text{٢ص}\text{ص}'' + \text{ص}^{٢} = -\text{٣جاس} + \text{ص}^{٢}$$

$$٢\left(\text{ص}'\right)^{٢} + \text{٢ص}\text{ص}'' + \text{ص}^{٢} = -\text{٣جاس} + \text{٣جاس} + ٤ = ٤$$

تدريب اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + \text{٢س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{٣س}^{٢}$

جد $\left(\text{ق}' \circ \text{هـ}\right)'(١)$ و $\left(\text{ق}' \circ \text{هـ}\right)''(١)$

الحل :

$$(ق' \circ هـ)'(س) = ق''(هـ(س))\,هـ'(س)$$
$$هـ'(س) = ٦س$$
$$ق'(س) = ٣س^{٢} + ٢$$
$$ق''(س) = ٦س$$
$$(ق' \circ هـ)'(س) = ١٨س^{٢} \times ٦س = ١٠٨س^{٣}$$
$$(ق' \circ هـ)'(١) = ١٠٨$$

او

$$(ق' \circ هـ)'(١) = ق''(هـ(١))\,هـ'(١)$$
$$هـ(١) = ٣$$
$$هـ'(١) = ٦$$
$$ق'(٣) = ٣ \times ٩ + ٢ = ٣١$$
$$ق''(٣) = ٦ \times ٣ = ١٨$$
$$(ق' \circ هـ)'(١) = ١٨ \times ٦ = ١٠٨$$
$$(ق' \circ هـ)'(١) = ١٠٨$$
$$هـ(س) = ٣س^{٢} ،\ ق'(س) = ٣س^{٢} + ٢$$
$$(ق' \circ هـ)(س) = ق'(هـ(س)) = ق'(٣س^{٢}) = ٣(٣س^{٢})^{٢} + ٢ = ٢٧س^{٤} + ٢$$
$$(ق' \circ هـ)'(س) = ١٠٨س^{٣}$$
$$(ق' \circ هـ)''(س) = ٣٢٤س^{٢}$$
$$(ق' \circ هـ)''(١) = ٣٢٤$$

المعنى الهندسي للمشتق الاول

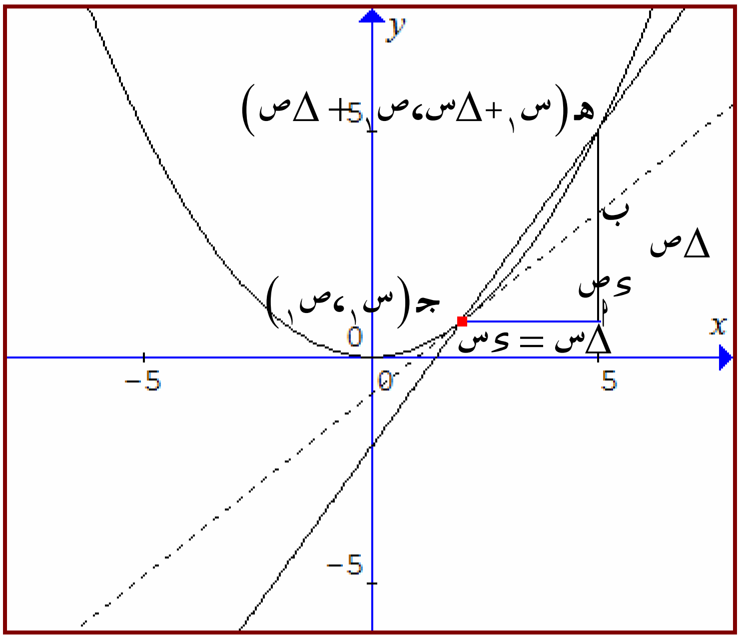
ق اقتران قابل للاشتقاق عن النقط $أ(س_{١}، ق(س_{١}))$

المعنى الهندسي للمشتق الاول هو ميل المماس في هذه النقطة $ق'(س_{١}) = م$ وبالتالي معادلة المماس في هذه النقط $أ(س_{١}، ق(س_{١}))$ هو

$$ص - ق(س_{١}) = ق'(س_{١})(س - س_{١})$$
$$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$$

لاحظ شرط اساسي ان تحقق احداثيا نقطة التماس معادلة الاقتران

اذا لم تحقق النقطة معادلة الاقتران فلا يصح العمل السابق هنالك طريقة اخرى




لاحظ ان $\left\{ \begin{array}{l} \overline{أهـ} = \Delta ص \\ \overline{أج} = \Delta س = ى س \\ \overline{أب} = ى ص \end{array} \right\}$

اذا $\Delta$ص هو الفرق بين صادات النقطتين **هـ** ،**جـ** من منحني الاقتران ق

اما الفرق بين صادات نقطتين من المماس في **جـ** فهو تفاضل ص أي ى ص = $\overline{أب}$

لاحظ ان $\Delta$ص $\neq$ ى ص

لكن ميل المماس في ج هو $\left.\frac{ى ص}{ى س}\right|_{س=س_١} = ق^{\prime}(س_١)$

أي ان $\frac{ى ص}{ى س}$ هو نسبة (كسر ) وبالتالي ى ص = ص$^{\prime}$ ى س و هذا هو التفاضل

كتبت هذا فقط لكي نميز بين التفاضل وبين المشتق

كيف نجد معادلة مماس لمنحني علاقة

١ـ اذا اعيطت نقطة التماس طبعا اذا لم يذكر انها تنتمي للمنحني علينا ان نتحقق من ذلك بالتعويض بالمعادلة

مثال اوجد معادلة المماس لمنحني العلاقة $ق(س) = \frac{س}{س-١}$ في النقطة (٢،٢)

الحل : نتحقق ان (٢،٢)تنتمي للمنحني $ق(٢) = \frac{٢}{٢-١} = ٢$ محققة

نشتق الاقتران وفق القاعدة

$$ق^{\prime}(س) = \frac{(س-١)-س}{(س-١)^٢} = \frac{-١}{(س-١)^٢}$$

$$م = ق^{\prime}(٢) = \frac{-١}{(٢-١)^٢} = -١$$

و هذا ميل المماس

معادلة المماس

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$ ، $ص - ٢ = -١(س - ٢)$ ، $ص = -س + ٤$

ملاحظة قد يطلب معادلة العمودي على المماس في نقطة التماس واختصارا يدعى العمودي او (الناظم)

فإذا كان ميل المماس $م \neq ٠$ فان ميل العمودي هو $م_١ = \frac{-١}{م}$ لان شرط التعامد هو $م_١ \times م = -١$

في المثال السابق معادلة العمودي

$ص - ص_١ = م_١(س - س_١)$ ، $ص - ٢ = ١(س - ٢)$ ، $ص = س + ٤$

مثال ليكن الاقتران $ق(س) = \sqrt[٣]{س}$ اوجد معادلة المماس في النقطة $(٠،٠)$ من منحني الاقتران

الحل :

ملاحظة عند تطبق قواعد الاشتقاق على الاقترانات التي تحوي جذور نستبعد اصفار مضمون الجذر من القاعدة لان $ق'(س) = \frac{١}{٣}س^{\frac{-٢}{٣}} = \frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$ غير معرف عند الصفر

لذلك نطبق التعريف $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٠}{س - ٠} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{\sqrt[٣]{س^٢}} = +\infty$ اذا غير قابل للاشتقاق عند الصفر

هذه الحالة متصل وغير قابل للاشتقاق بل النهاية هي $\infty$ المماس يوازي محور الصادات في $(٠،٠)$ معادلته $س = ٠$ ومعادلة العمودي الموازي لمحور السينات هو $ص = ٠$

ملاحظات

معادلة المستقيم المار من نقطة $(س_١،ص_١)$ وميله معلوم $م$ $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

معادلة المستقيم المار من نقطة $(س_١،ص_١)$ والموازي للسينات $ص = ص_١$ ميلة $م = ٠$ افقي

معادلة المستقيم المار من نقطة $(س_١،ص_١)$ والموازي للصادات $س = س_١$ ميلة غير معرف او تجاوزا $\infty$ شاقولي راسي

اما ميل المستقيم فهو ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

معادلة مستقيم مار من نقطتين مختلفتين $(س_١،ص_١)$،$(س_٢،ص_٢)$ $س_١ \neq س_٢$ الميل هو $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ومعادلة المستقيم هي $ص - ص_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}(س - س_١)$

والمعادلة العامة للمستقيم $أس + بص + جـ = ٠$ ، $أ \neq ٠$ ميله $م = \frac{-أ}{ب}$ اذا كنت تنسى الميل اشتق معادلة المستقيم

معادلة مماس علم ميله اما ان يعطى الميل بشكل صريح او ان يكون المماس مواز لمستقيم مفروض

مثال :

اوجد معادلة المماس لمنحني العلاقة $ص^٢ - ٤ص + س + ٥ = ٠$ الموازي للمستقيم $٢س - ص + ١ = ٠$

الحل : ميل المستقيم المفروض هو $م = \frac{-أ}{ب} = \frac{-٢}{-١} = ٢$

الان علينا ان نحدد نقطة التماس ولتكن $(س_١،ص_١)$ ومن المشتقة نجد

$$\text{ص}^{٢} - ٤\text{ص} + \text{س} + ٥ = ٠$$
$$٢\text{ص}_{١}\text{ص}' - ٤\text{ص}' + ١ = ٠$$
ثم نعوض $\text{م} = \text{ص}' = ٢$

$$٢\text{ص}_{١}\text{ص}' - ٤\text{ص}' + ١ = ٠$$
نجد $٢\text{ص}_{١}(٢) - ٤(٢) + ١ = ٠$
$$\text{ص}_{١} = \frac{٧}{٤}$$
نعوض في معادلة المنحني $\left(\frac{٧}{٤}\right)^{٢} - ٤\left(\frac{٧}{٤}\right) + \text{س}_{١} + ٥ = ٠$
$$\text{س}_{١} = -\left(\frac{٧}{٤}\right)^{٢} + ٢ = \frac{-١٧}{١٦}$$

نقطة التماس هي $\left(\frac{-١٧}{١٦} ، \frac{٧}{٤}\right)$ ومعادلة المماس هي $\text{ص} + \frac{١٧}{١٦} = ٢\left(\text{س} - \frac{٧}{٤}\right)$ ومعادلة العمودي $\text{ص} + \frac{١٧}{١٦} = \frac{-١}{٢}\left(\text{س} - \frac{٧}{٤}\right)$

معادلة مماس من نقطة لا تنتمي الى الخط البياني للعلاقة

مثال : اوجد معادلة المماس للخط البياني للدائرة التي معادلتها $(\text{س} - ١)^{٢} + (\text{ص} + ١)^{٢} = ٥$ المرسوم من النقطة $(-٢ ، ٠)$

الحل نتحقق ان هذه النقطة خارج الدائرة

ولتكن نقطة التماس $(\text{س}_{١} ، \text{ص}_{٢})$ وبالتالي ميل المستقيم المار من النقطتين هو $\frac{\text{ص}_{١} - ٠}{\text{س}_{١} + ٢}$

ومن المشتقة نجد
$$٢(\text{س} - ١) + ٢(\text{ص} + ١)\text{ص}' = ٠$$
$$\text{م} = \text{ص}' = \frac{-(\text{س}_{١} - ١)}{(\text{ص}_{١} + ١)}$$

$$\frac{\text{ص}_{١}}{\text{س}_{١} + ٢} = \frac{-(\text{س}_{١} - ١)}{(\text{ص}_{١} + ١)}$$
$$\text{ص}_{١}(\text{ص}_{١} + ١) = -(\text{س}_{١} - ١)(\text{س}_{١} + ٢)$$
$$\text{ص}_{١}^{٢} + \text{س}_{١}^{٢} + \text{س}_{١} + \text{ص}_{١} - ٢ = ٠$$
ومن معادلة الدائرة
$$(\text{س}_{١} - ١)^{٢} + (\text{ص}_{١} + ١)^{٢} = ٥$$
$$\text{ص}_{١}^{٢} + ٢\text{ص}_{١} + ١ + \text{س}_{١}^{٢} - ٢\text{س}_{١} + ١ = ٥$$
$$\text{ص}_{١}^{٢} + \text{س}_{١}^{٢} - ٢\text{س}_{١} + ٢\text{ص}_{١} - ٣ = ٠$$

$$\text{ص}_{١}^{٢} + \text{س}_{١}^{٢} + \text{س}_{١} + \text{ص}_{١} - ٢ = ٠$$
$$\text{ص}_{١}^{٢} + \text{س}_{١}^{٢} - ٢\text{س}_{١} + ٢\text{ص}_{١} - ٣ = ٠$$
$$٣\text{س}_{١} - \text{ص}_{١} + ١ = ٠$$
$$\text{ص}_{١} = ٣\text{س}_{١} + ١$$

$(س_١ - ١)^٢ + (٣س_١ + ١ + ١)^٢ = ٥$

$(س_١ - ١)^٢ + (٣س_١ + ٢)^٢ = ٥$

$س_١^٢ - ٢س_١ + ١ + ٩س_١^٢ + ١٢س_١ + ٤ = ٥$

$١٠س_١^٢ + ١٠س_١ = ٠$

$١٠س(س_١ + ١) = ٠$

اما $س = ٠ \Leftarrow ص = ١$ النقطة هي (٠،١) تحقق معادلة الدائرة ومعادلة المماس المار منها

$$م = ص' = \frac{-(س_١ - ١)}{(ص_١ + ١)}$$

$$م = ص' = \frac{-(٠ - ١)}{(١ + ١)} = \frac{١}{٢}$$

$$ص + ٢ = \frac{١}{٢}س$$

نتحقق انه مر من (٠،-٢) $ص = \frac{١}{٢}س + ٢$ ، $ص = \frac{١}{٢} \times ٠ + ٢ = ٢$ محققة

او $س = ٠ \Leftarrow ص = -٣$ النقطة هي (٠،-٣) ومعادلة المماس فيها $م = \frac{-١}{٢}$

$ص + ٣ = \frac{-١}{٢}س \Leftarrow ص = \frac{-١}{٢}س - ٣$ هل (٠،-٢) تحقق المعادلة

$ص = \frac{-١}{٢}(٠) - ٣ = -٣ \neq -٢$ لا تحقق مرفوض

من اجل $س = -١$ نجد $ص = ٠$ الميل $م = ٢$ المعادلة $ص = ٢س + ٢$

النقطة (٠،-٢) لا تحقق لان $ص = ٢س + ٢ \Leftarrow ص = -٤ + ٢ = -٢$

او $س = -١$ $ص = -٢$ النقطة (-١،-٢) الميل $م = -٢$ والمعادلة

$ص + ٢ = -(س + ١) \Leftarrow ص = -س - ٣$

نتحقق من النقطة(-١،-٢) $ص = ١ - ٣ = -٢$ محققة

شرط تعامد منحنيين

يتعامد منحنيا $ن(س)$،$هـ(س)$ عند النقطة $(س_١،ص_١)$ اذا

تحقق $ن'(س_١) \times هـ'(س_١) = -١$ هذا يعني تعامد المماسين

تدريب بين ان المماس ل $ن(س) = \frac{١}{س}$ ، و المستقيم $هـ(س) = س$ متعامدان عند نقط التقاطع

تدريب في الكتاب صفحة ١٥٥

نقطة التقاطع حل مشرك للمعادلتين $\frac{١}{س} = س \Leftarrow س^٢ = ١$ اما $س = ١$ نقطة التقاطع (١،١) او

$س = -١$ نقطة التقاطع (-١،-١)

المماس في(١،١) ميله $م = \frac{-١}{س^٢}$ و$م = -١$ لكن ميل المستقيم $هـ(س) = س$ هو الواحد وحاصل الضرب هو سالب واحد يحقق شرط التعامد

المماس في $(-1،-1)$ ميله $م = \frac{-1}{س^2}$ وم $= -1$ لكن ميل المستقيم هـ(س) = س هو الواحد
وحاصل الضرب هو سالب واحد يحقق شرط التعامد
هنالك تساؤل ما هو تعريف المماس لمنحني العلاقة
المماس مستقيم يشرك مع المنحني بنقطة مضاعفة هي شرط نقطة تجمع و( ليس للمستقيم مماس )
ملاحظة يعرف مماس القطع المكافئ بانه مستقيم لا يواز محور القطع ويشترك معه في نقطة واحدة
تدريب :
عين الثابت جـ في الاقتران ق(س) = جـس$^2$ اذا كان قياس زاوية ميل المماس لمنحنى ق عند س = ١ هو ٤٥°
الحل الميل هو ظل زاوية المستقيم مع محور السينات م = ظاهـ ⟸ م = ظا٤٥ = ١
المشتقة ق$'$(س) = ٢جـس وبفرض نقطة التماس هي (س$_1$،ص$_1$) فان

$$ص' = ٢جـس_1 \Leftarrow ١ = ٢جـس_1 \Leftarrow \frac{1}{2} = جـ(١) \Leftarrow جـ = \frac{1}{2}$$

لكن $ص_1 = جـس_1^2$ اذا $ص_1 = جـس_1س_1 \Leftarrow ص_1 = \frac{1}{2}$ نقطة التماس هي $\left(١،\frac{1}{2}\right)$

ميله م = ١ معادلته $ص - \frac{1}{2} = س - ١ \Leftarrow ص = س - \frac{1}{2}$

تدريب:
جد معادلة المماس للدائرة س$^2$ + ص$^2$ = ٢٥ عند نقطة التقاطع مع المستقيم س + ص = ١
الحل حل مشترك

$$س^2 + ص^2 = ٢٥ ، ص = -س + ١$$
$$س^2 + (-س + ١)^2 = ٢٥ \Leftarrow س^2 + س^2 - ٢س + ١ = ٢٥$$
$$٢س^2 - ٢س - ٢٤ = ٠ \Leftarrow س^2 - س - ١٢ = ٠$$
$$(س - ٤)(س + ٣) = ٠ \Leftarrow س = ٤ \lor س = -٣$$

نقط التقاطع (٤،-٣) و (-٣،٤)

ميل المماس نشتق $٢س + ٢صص' = ٠ \Leftarrow ص' = \frac{-س}{ص}$

(٤،-٣) الميل $ص' = \frac{-س}{ص} = \frac{-٤}{-٣} = \frac{٤}{٣}$ ، $(ص + ٣) = \frac{٤}{٣}(س - ٤)$

(-٣،٤) $ص' = \frac{-س}{ص} = \frac{٣}{٤} = \frac{٣}{٤}$ ، $(ص - ٤) = \frac{٣}{٤}(س + ٣)$

تدريب
اذا كان المستقيم أس + ٣ص = ١ يمس منحنى الاقتران ق(س) = ٤س$^2$ + أس + ب عند النقطة (١،ق(١)) جد قيمة كل من أ،ب
الحل بما ان المستقيم يمس المنحني في بنفس النقطة فان احداثيا النقطة تحقق معادلتي المستقبم والقطع معا

وميل المستقيم يساوي المشتقة في تلك النقطة $\text{ن}'(\text{س}) = \text{٨س} + \text{أ}$

$\text{م} = \text{ن}'(\text{١}) = \text{٨} + \text{أ}$

وميل المستقيم $\text{م} = \frac{-\text{أ}}{\text{٣}}$

$$\text{ن}'(\text{س}) = \text{٨س} + \text{أ}$$

$$\frac{-\text{أ}}{\text{٣}} = \text{٨} + \text{أ} \Leftarrow -\text{أ} = \text{٢٤} + \text{٣أ} \Leftarrow \text{٤أ} = -\text{٢٤} \Leftarrow \text{أ} = -\text{٦}$$

نعوض $\text{ن}(\text{س}) = \text{٤س}^{\text{٢}} - \text{٦س} + \text{ب}$ و $-\text{٦س} + \text{٣ص} = \text{١}$

من اجل س=١ نجد $-\text{٦}(\text{١}) + \text{٣ص} = \text{١} \Leftarrow \text{ص} = \frac{\text{٧}}{\text{٣}}$

وبالتالي النقطة $\left(\text{١}،\frac{\text{٧}}{\text{٣}}\right)$ تحقق المعادلة

$$\text{ن}(\text{س}) = \text{٤س}^{\text{٢}} - \text{٦س} + \text{ب} \Leftarrow \frac{\text{٧}}{\text{٣}} = \text{٤} - \text{٦} + \text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{\text{٧}}{\text{٣}} + \text{٢} = \frac{\text{١٣}}{\text{٣}}$$

$$\text{ن}(\text{س}) = \text{٤س}^{\text{٢}} - \text{٦س} + \frac{\text{١٣}}{\text{٣}}$$

تدريب

اثبت أن خطي الاقترانيين متماسين $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}^{\text{٣}}$ و$\text{ل}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}$

الحل بفرض نقطة التماس هي $(\text{س}_{\text{١}}،\text{ص}_{\text{١}})$

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}^{\text{٣}}$ و

$\text{ن}'(\text{س}) = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}}$

$\text{م} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{س}_{\text{١}}^{\text{٢}}$

$\text{ل}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}$

$\text{ل}'(\text{س}) = \text{٢س} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

$\text{م} = \text{٢س}_{\text{١}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

$\text{٢س}_{\text{١}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{س}_{\text{١}}^{\text{٢}}$

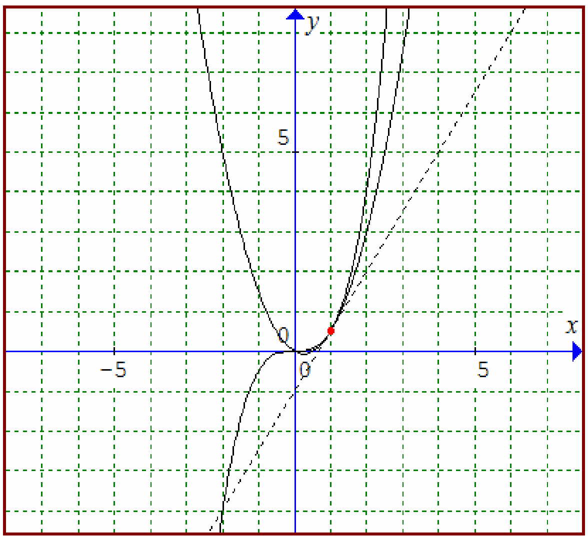
$\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{س}_{\text{١}}^{\text{٢}} - \text{٢س}_{\text{١}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}} = \text{٠}$

$\text{٣س}_{\text{١}}^{\text{٢}} - \text{٤س}_{\text{١}} + \text{١} = \text{٠}$

$(\text{٣س}_{\text{١}} - \text{١})(\text{س}_{\text{١}} - \text{١}) = \text{٠}$

$\text{س}_{\text{١}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}} \vee \text{س}_{\text{١}} = \text{١}$

$\left(\frac{\text{١}}{\text{٣}}،\frac{\text{١}}{\text{٥٤}}\right)\left(\text{١}،\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)$



النقاط المشتركة

$$\frac{1}{2}س^{3} = س^{2} - \frac{1}{2}س$$

$$\frac{1}{2}س^{3} - س^{2} + \frac{1}{2}س = 0$$

$$س\left(\frac{1}{2}س^{2} - س + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$2س\left(س^{2} - 2س + 1\right) = 0$$

$$2س\left(س - 1\right)^{2} = 0$$

$$س = 1 \vee س = 0$$

$\left(1،\frac{1}{2}\right)$،$(0،0)$ اذا النقطة المشتركة التي يكون المماس له نفس الميل عندها هي $\left(1،\frac{1}{2}\right)$ وميل هذا المماس $م = \frac{3}{2}(1)^{2} = \frac{3}{2}$ ومعادلة المماس المشترك $ص - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(س - 1)$

تدريب

اثبت ان المماس يعامد نصف قطر الدائرة عند نقطة التماس

الحل لتكن معادلة الدائرة

$$(س - ى)^{2} + (ص - هـ)^{2} = ر^{2}$$

$$2(س - ى) + 2ص^{\prime}(ص - هـ) = 0$$

$$ص^{\prime} = \frac{-(س - ى)}{(ص - هـ)}$$

فاذا كانت نقطة التماس $(س_1،ص_1)$ فان الميل هو $م = \frac{-(س_1 - ى)}{(ص_1 - هـ)}$ وميل نصف القطر المار من $(س_1،ص_1)$ ومركز الدائرة $(ى،هـ)$ $م_1 = \frac{ص_1 - هـ}{س_1 - ى}$

$م \times م_1 = \frac{-(س_1 - ى)}{(ص_1 - هـ)} \times \frac{ص_1 - هـ}{س_1 - ى} = -1$ اذا شرط التعامد محقق

تدريب

اذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(0،-2)$،$(2،6)$ يمس منحني الاقتران $ق(س) = أس^{2} + 2س - 1$ جد أ

الحل : ميل المستقيم المار بالنقطتين $م = \frac{6+2}{2-0} = 4$ والمشتقة $ق^{\prime}(س) = 2أس + 2$ نقطة التماس$(س_1،ص_1)$ وميله $م = ق^{\prime}(س_1) = 2أس_1 + 2$

$4 = 2أس_1 + 2 \Leftarrow 2أس_1 = 2 \Leftarrow أس_1 = 1$

معادلة المماس في $(س_1،ص_1)$ والمار من $(0،-2)$ $ص + 2 = 4(س) \Leftarrow ص = 4س + 2$ نعوض في معادلة الاقتران

$٤س_١ + ٢ = أس_١^٢ + ٢س_١ - ١ \Leftarrow أس_١^٢ - ٢س_١ - ٣ = ٠$

$أس_١ = ١$

$(أس_١)س_١ - ٢س_١ - ٣ = ٠$

$س_١ - ٢س_١ - ٣ = ٠$

$س_١ = -٣$

$-٣أ = ١$

$أ = \frac{-١}{٣}$

تدريب

جد مساحة المثلث المكون من المماس المرسوم من النقطة (٠،١) لمنحني الاقتران

$ق(س) = س^٣ + ٣$ والعمودي على المماس عند نقطة التماس والمستقيم $ص = ١$

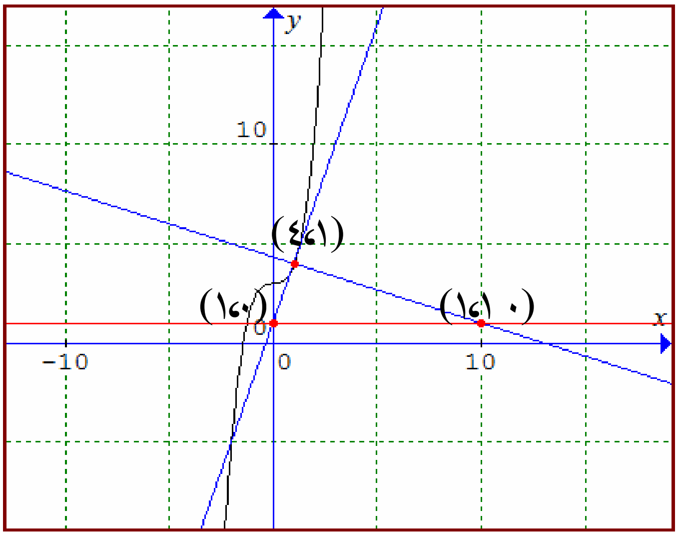
الحل التقاطع $ق(س) = س^٣ + ٣$ و $ص = ١$

معادلة المماس المرسوم من النقطة الغير واقعه على المنحني

بفرض نقطة التماس $(س_١،ص_١)$ المشتق $ق^{\prime}(س) = ٣س^٢$ الميل $م = ٣س_١^٢$

ومعادلة ميل المستقيم المار بالنقطتين

$م = \frac{ص_١ - ١}{س_١ - ٠}$




$٣س_١^٢ = \frac{ص_١ - ١}{س_١ - ٠} \Leftarrow ٣س_١^٣ = ص_١ - ١$

$٣س_١^٣ + ١ = ص_١$

نعوض في الاقتران

$٣س_١^٣ + ١ = س^٣ + ٣$

$٢س_١^٣ = ٢$

$س_١^٣ = ١$

$س = ١$

$ص_١ = ٤$

$(١،٤)$

الميل $م = \frac{٤ - ١}{١ - ٠} = ٣$ معادلة المماس $ص - ٤ = ٣(س - ١) \Leftarrow ص = ٣س + ١$

التقاطع مع $ص = ١$ نجد $١ = ٣س + ١ \Leftarrow س = ٠$

تقاطع $ص = ١$ و العمودي على المماس $ص - ٤ = \frac{-١}{٣}(س - ١) \Leftarrow ص = \frac{-١}{٣}س + \frac{١٣}{٣}$

$١ - ٤ = \frac{-١}{٣}(س - ١) \Leftarrow -٩ = -س + ١ \Leftarrow س = ١٠$ والنقطة هي $(١٠،١)$

لا تنسى ان المثلث قائم المماس يعامد العمودي عليه

مساحة المثلث تساوي نصف القاعدة ضرب الارتفاع

طول القاعدة ١٠–٠=١٠ والارتفاع ٤–١=٣

المساحة $= \frac{1}{2}\times 10\times 3 = 15$

تدريب

جد معادلة المماس الموازي للمماس المرسوم من النقطة (٦،٠) لمنحني الدائرة $س^2 + ص^2 = 18$

الحل نقطة التماس $(س_1،ص_1)$ ميل المماس المار من (٦،٠) $م = \frac{ص_1}{س_1 - 6}$ ومن المشتق

$$2س + 2ص ص' = 0 \Leftarrow م = ص' = \frac{-س_1}{ص_1}$$

$\frac{-س_1}{ص_1} = \frac{ص_1}{س_1 - 6} \Leftarrow ص_1^2 = -س_1^2 + 6س_1$ ومن معادلة الدائرة حل مشترك

$$ص_1^2 = -س_1^2 + 6س_1$$

$$ص_1^2 = -س_1^2 + 18$$

$$-س_1^2 + 6س_1 = -س_1^2 + 18$$

$$س = 3$$

$ص_1^2 = 9$ ونقط التماس هي (٣،–٣)(٣،٣)

$ص_2 = -3،ص_1 = 3$

ميل المماس المار من (٦،٠)(٣،٣) هو $م = \frac{-3}{3} = -1$ وميل الموازي له نفس الميل

$$م = \frac{-3}{3} = -1$$

نقطة التماس الاخرى $(س_2،ص_2)$ والميل في هذه النقطة

$م = \frac{-س_2}{ص_2} \Leftarrow -1 = \frac{-س_2}{ص_2} \Leftarrow ص_2 = س_2$ نعوض في الدائرة

$$س_2^2 + س_2^2 = 18$$

$2س_2^2 = 18$ والنقط (٣،٣) ، (–٣،–٣)

$$س_2 = 3 \vee س_2 = -3$$

ومعادلة المماس في (–٣،–٣) الموازي للمماس السابق هو $ص + 3 = -(س + 3)$

تطبيقات التفاضل

المعنى الفيزيائي للمشتقة

ليكن ف(ن) القانون الزمني للحركة المستقيمة

المعنى الفيزيائي للمشتق الاول لهذا الاقتران الزمني هو السرعة اللحظية( الانية )

$$ف'(ن) = ع$$

والمعنى الفيزيائي للمشتقة الثانية هي التسارع اللحظي

$\text{ف}''(\text{ن}) = \text{ع}' = \text{ت}$

ملاحظات

توقف المتحرك عن الحركة اذا انعدمت السرعة

اما اذا انعدم التسارع فهو يتحرك بحركة مستقيمة منتظمة

يغير المتحرك اتجاه الحركة اذا انعدمت السرعة وغير ت السرعة اشارتها

الحركة المستقيمة تتم على محور وهو مستقم اخذت عليه نقطة مبدا (الاصل) ووحدة (واحدة ) قياس واتجاه

اتجاه الحركة من اتجاه السرعة

فاذا كانت الحركة باتجاه المحور فان اشارة السرعة موجبة (حركة مباشرة ) واذا كانت السرعة عكس اتجاه المحو ر فان اشارة السرعة سالبة (حركة غير مباشرة)

واذا كانت كل من السرعة والتسارع من نفس الاشارة فالحركة متسارعة

واذا كانت كل من السرعة والتسارع من اشارتين مختلفتين فالحركة متباطئة

ملاحظة هامة جدا اذا اعطيت اكثر من قانون زمني لحركة اكثر من نقطة على محور يجب ان تاخذ المسافات المقطوعة بالنسبة لنفس نقطة المبدا المختارة

مثلا سقط جسم من سطح مبنى وفي نفس الوقت قذف جسم للاعلى هنا يجب ان تكون نقطة الاصل في القياس واحدة

عند قذف جسم نحو الاعلى فان اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عندما تنعدم السرعة

عند قذف جسم نحو الاعلى من الافضل ان نختار الارض كنقطة مبدا لقياس المسافة

هنالك نوعين من التلاقي

التقابل السرعتين من اشارتين مختلفين

تجاوز السرعتين من نفس الاشارة

تدريب احسب كل من السرعة والتسارع لمتحرك يعطى قانون الحركة له بالمعادلة

$\text{ف}(\text{ن}) = \sqrt{٣}\,\text{جا}٢\text{ن} + \text{جتا}٢\text{ن}$ في اللحظة $\text{ن} = \frac{\pi}{٦}$

$$\text{ف}(\text{ن}) = \sqrt{٣}\,\text{جا}٢\text{ن} + \text{جتا}٢\text{ن}$$

$$\text{ف}'(\text{ن}) = ٢\sqrt{٣}\,\text{جتا}٢\text{ن} - ٢\,\text{جا}٢\text{ن}$$

$$\text{ع} = \text{ف}'\left(\frac{\pi}{٦}\right) = ٢\sqrt{٣}\,\text{جتا}٢\frac{\pi}{٦} - ٢\,\text{جا}٢\frac{\pi}{٦}$$

$$\text{ع} = \text{ف}'\left(\frac{\pi}{٦}\right) = ٢\sqrt{٣}\,\frac{١}{٢} - ٢\frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٠$$

$$\text{ت} = \text{ف}''(\text{ن}) = -٤\sqrt{٣}\,\text{جا}٢\text{ن} - ٤\,\text{جتا}٢\text{ن}$$

$$\text{ت} = \text{ف}''\left(\frac{\pi}{٦}\right) = -٤\sqrt{٣}\,\text{جا}٢\frac{\pi}{٦} - ٤\,\text{جتا}٢\frac{\pi}{٦} = -٢\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣} = -٤\sqrt{٣}$$

تدريب :

يعطى القانون الزمني لحركة نقطة على محور بالعلاقة $\text{ف}(\text{ن}) = \frac{١}{٣}\text{ن}^{٣} - ٣\text{ن}^{٢} + ٥\text{ن}$

ونقطة الاصل مبدأ قياس المسافة احسب المسافة التي يقطعها قبل التوقف واحسب التسارع في تلك اللحظة هل تستطيع شرح طبيعة الحركة على هذا المحور

الحل : يتوقف المتحرك عندما تنعدم السرعة

$ف(ن) = \frac{١}{٣}ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٥ن$

$ف'(ن) = ن^{٢} - ٦ن + ٥ = (ن - ١)(ن - ٥)$

ينعدم المشتق الاول عندما ( يتوقف المتحرك عندما )

$ن = ١ \quad ف(١) = \frac{١}{٣} - ٣ + ٥ = \frac{٧}{٣}$ التسارع

$ف'(ن) = ن^{٢} - ٦ن + ٥ \Rightarrow ف''(ن) = ت = ٢ن - ٦ \Rightarrow ت = -٤$

$ن = ٥ \quad ف(٥) = \frac{١}{٣}١٢٥ - ٣ \times ٢٥ + ٢٥ = \frac{-٢٥}{٣}$

$ف'(ن) = ن^{٢} - ٦ن + ٥ \Rightarrow ف''(ن) = ت = ٢ن - ٦ \Rightarrow ت = +٤$

شرح وتفسير ما حدث

تدريب :

قذف جسم من سطح بناية راسيا الى اعلى بحيث ارتفاعه عنها بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالاقتران

$ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن^{٢}$ اذا كانت سرعتة لحظة وصوله الارض تساوي $-٦٠$م/ث جد ارتفاع البناية

الحل

لناخذ نقطة قياس المسافة سطح الارض فاذا كانت ارتفاع البناية ل فان القانون الزمني للحركة هو

$ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن^{٢} + ل$

$ع = ف'(ن) = ٣٠ - ١٠ن$

نشتق $-٦٠ = ٣٠ - ١٠ن$ زمن الوصول للارض

$ن = ٩$

وعند الوصول للارض فان

$ف(٩) = ٣٠ن - ٥ن^{٢} + ل = ٠$

$٢٧٠ - ٤٠٥ + ل = ٠$

$ل = ١٣٥$

ارتفاع البناية

وقد يكون المطلوب اقصى ارتفاع يصل اليه المتحرك وهذا يوافق انعدام السرعة

$ع = ف'(ن) = ٣٠ - ١٠ن$

$٠ = ٣٠ - ١٠ن$

$ن = ٣$

زمن وصول اقصى ارتفاع اما اقصى ارتفاع عن الارض هو

$ف(٣) = ٣٠(٣) - ٥(٣)^{٢} + ١٣٥ = ١٤٤$

يرتفع فوق البناية ب ٩ متر

اذا كان المطلوب حساب السرعة لحظة المرور بسطح البناية أي على ارتفاع ١٣٥ م

$ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن^{٢} + ١٣٥ = ١٣٥$

$٣٠ن - ٥ن^{٢} = ٠$

$ن(٣٠ - ٥ن) = ٠$

$ن = ٦ \vee ن = ٠$

من اجل $ن = ٠$ نجد السرعة الابتدائية $ع = ف'(ن) = ٣٠ - ١٠ن \Leftarrow ع = ٣٠$

من اجل $ن = ٦$ نجد السرعة في العودة $ع = ف'(٦) = ٣٠ - ١٠(٦) \Leftarrow ع = -٣٠$

لاحظ ان السرعة في الصعود هي ذاتها السرعة في الهبوط عند تلك النقطة فقط الاختلاف في الاشارة

تدريب:

يتحرك جسيم على خط مستقم بحيث ان بعده عن نقطة الاصل $ف(ن) = ن^{٣}$ اذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة [٠،أ] تساوي سرعته اللحظية عندما $٢ = ن$ جد قيمة أ

الحل السرعة المتوسطة متوسط تغير المسافة $\bar{ع} = \frac{ف(أ) - ف(٠)}{أ - ٠} = \frac{أ^{٣}}{أ} = أ^{٢}$

السرعة اللحظية $ف'(ن) = ٣ن^{٢} \Leftarrow ع = ف'(٢) = ١٢$

$أ^{٢} = ١٢ \Leftrightarrow أ = ٢\sqrt{٣} \vee أ = -٢\sqrt{٣}$

$٢\sqrt{٣}$ مقبول و $-٢\sqrt{٣}$ مرفوض لاحظ في الفترة $أ \succ ٠$

تمرين ٥ صفحة ١٦٥

يتحرك جسيم بسرعة حسب العلاقة $ع^{٢} = ١ - ف^{٣}$ بين ان تسارع الجسم يساوي $-\frac{٣}{٢}$ في حالة السكون اللحظي

الحل $ع^{٢} = ١ - ف^{٣}$ نشتق هذه العلاقة بالنسبة للزمن

$٢عع' = -٣ف^{٢}ف'$

$٢عع' + ٣ف^{٢}ف' = ٠$

$٢عت + ٣ف^{٢}ع = ٠$

$ع(٢ت + ٣ف^{٢}) = ٠$

اما $ع = ٠$ وهذا يعني ان $٢ت + ٣ف^{٢}$ محققة ايا كانت قيمة هذا المقدار وليس من الضروري ان يكون الصفر

او ان يكون $٢ت + ٣ف^{٢} = ٠$ وبالتالي العبارة $ع(٢ت + ٣ف^{٢}) = ٠$ محققة ايا كانت ع

او كل من $ع = ٠$ و $٢ت + ٣ف^{٢} = ٠$ وبالتاليي $٠ = ١ - ف^{٣} \Leftarrow ف = ١$

$(٢ت + ٣) = ٠ \Leftarrow ت = \frac{-٣}{٢}$

ملاحظة كان من الافضل ان يكون النص بالشكل التالي برهن انه اذا كان التسارع $ت = \frac{-٣}{٢}$ فان الجسم في حالة سكون لحظي

وبالتالي الحل

$$٢ع\,ع^{\prime} = -٣ف^{٢}\,ف^{\prime}$$

$$٢ع\,ع^{\prime} + ٣ف^{٢}\,ف^{\prime} = ٠$$

$$٢ع\,ت + ٣ف^{٢}\,ع = ٠$$

بما ان $ت = \frac{-٣}{٢}$ فان

$$ع\left(-٢\frac{٣}{٢} + ٣ف^{٢}\right) = ٠$$

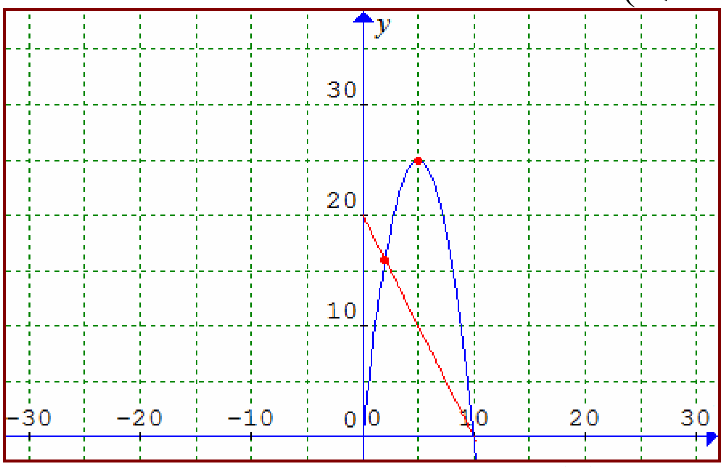
$$-٣ع\left(١ - ف^{٢}\right) = ٠$$

$$-٣ع\,ع^{٢} = ٠$$

$$-٣ع^{٣} = ٠ \Leftrightarrow ع = ٠$$

تدريب :

جسيمان يتحركان على مستقيم (عامودي)(شاقولي) الاول القانون الزمني لحركته خطه البياني المستقيم والاخر القانون الزمني له خطه البياني القطع المكافئ (ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية )




وهذا مخطط قانون حركة كل منهما

والمطلوب : اوجد المجال الزمني لكل متحرك

اوجد لحظات تلاقي المتحركين وزمن تحليق كل منهما

اوجد اقصى ارتفاع يصله المتحرك الثاني

اوجد القانون الزمني لكل منهما

تدريب سقط جسم من سطح بناية قانونه الزمني $ف(ن) = ١٦ن^{٢}$ وبنفس اللحظة قذف جسم ثان الى اسفل بسرعة ابتدائية ٢٠ وفق الاقتران $ف(ن) = ٢٠ن + ١٦ن^{٢}$ فاذا وصل الجسم الاول بعد الثاني بنصف ثانية جد

اوجد سرعة كل من الجسمين عند الارض وارتفاع البناية

الحل زمن الجسم الاول يساوي زمن الثاني +نصف ثانية

$$١٦\left(ن + \frac{١}{٢}\right)^{٢} = ٢٠ن + ١٦ن^{٢}$$

وبالتالي $١٦ن^{٢} + ١٦ن + ٤ = ٢٠ن + ١٦ن^{٢}$

$$١ = ن$$

وهذ زمن وصول الجسم الثاني للارض فيكون زمن الاول هو $\frac{٣}{٢}$

وسرعة الاول $ف^{\prime}(ن) = ٣٢ن \Leftarrow ع = ف^{\prime}\left(\frac{٣}{٢}\right) = ٣٢\,\frac{٣}{٢} = ٤٨$

وسرعة الثاني $ف^{\prime}(ن) = ٢٠ + ٣٢ن \Leftarrow ع = ف^{\prime}(١) = ٢٠ + ٣٢(١) = ٥٢$

ارتفاع البناية $ف\left(\frac{٣}{٢}\right) = ١٦\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} = ٣٦$

## تطبيقات التفاضل

### التزايد والتناقص

تعريف ليكن الاقتران ق(س) المعرف على الفترة ف نقول عن ق انه متزايد على ف اذا تحقق لاجل كل $س_١، س_٢ \in ف$

$$س_٢ \succ س_١ \Leftarrow ق(س_٢) \succ ق(س_١)$$

نقول عن ق انه متناقص على الفترة ف اذا تحقق لاجل كل $س_١، س_٢ \in ف$

$$س_٢ \succ س_١ \Leftarrow ق(س_٢) \prec ق(س_١)$$

نظرية

ليكن الاقتران ق(س) قابل للاشتقاق على الفترة (أ،ب)

١- $ق^{\prime}(س) \succ ٠$ لأجل كل $س \in (أ،ب)$ فان ق(س) متزايد في الفترة (أ،ب)

٢- $ق^{\prime}(س) \prec ٠$ لأجل كل $س \in (أ،ب)$ فان ق(س) متناقص في الفترة (أ،ب)

٢- $ق^{\prime}(س) = ٠$ لأجل كل $س \in (أ،ب)$ فان ق(س) ثابت في الفترة (أ،ب)

واذا كان ق(س) متصل على [أ،ب] ومتزايد على (أ،ب) فهو متزايد على [أ،ب]

واذا كان ق(س) متصل على [أ،ب] ومتناقص على (أ،ب) فهو متناقص على [أ،ب]

واذا كان ق(س) متصل على [أ،ب] وثابت على (أ،ب) فهو ثابت على [أ،ب]

ملاحظة

> كان من الافضل ان تكتب النظرية بالشكل التالي
> ليكن الاقتران ق القابل للاشتقاق على الفترة (أ،ب)
> الشرط اللازم والكافي ليكون الاقتران ق متزايد على الفترة (أ،ب) هو ان يتحقق
> لاجل كل $س \in (أ،ب)$ $ق^{\prime}(س) \geq ٠$ ولا ينعدم على أي فترة جزئية منها

تدريب عين أ اذا علمت ان الاقتران $ق(س) = س^٣ + أس^٢ + ٣س - ١$ متزايد على ح

الحل بما ان الاقتران كثير حدود فهو قابل للاشتقاق على ح وبما انه متزايد عليها فان

$$ق^{\prime}(س) \geq ٠$$

$ق^{\prime}(س) = ٣س^٢ + ٢أس + ٣$ وهذا الاقتران يحافظ على إشارة واحدة هي اشارة امثال $س^٢$ وهي اشارة العدد ٣ عندما $\Delta \leq ٠$ أي ان

$$\Delta = أ^٢ - ٤(٣)(٣) \leq ٠ \Leftrightarrow أ^٢ \leq ٣٦ \Leftrightarrow أ \in [-٦،٦]$$

في الكتاب العكس (كتب اذا كانت المشتقه موجبة فالاقتران متزايد ولم يقل اذا كان متزايد فان المشتقة موجبة طبعا اذا كان قابل للاشتقاق على تلك الفترة)

ملاحظه هامه

كتب في الكتاب ($ق^{\prime}(س) \succ ٠$ لأجل كل $س \in (أ،ب)$ فان ق(س) متزايد في الفترة (أ،ب))

وهذا لا يعني اذا كانت $ق^{\prime}(س) \geq ٠$ الا يكون متزايد على تلك الفترة اذا يسمح للمشتق ان ينعدم عند بعض القيم من الفترة وليس على فترة جزئية منها

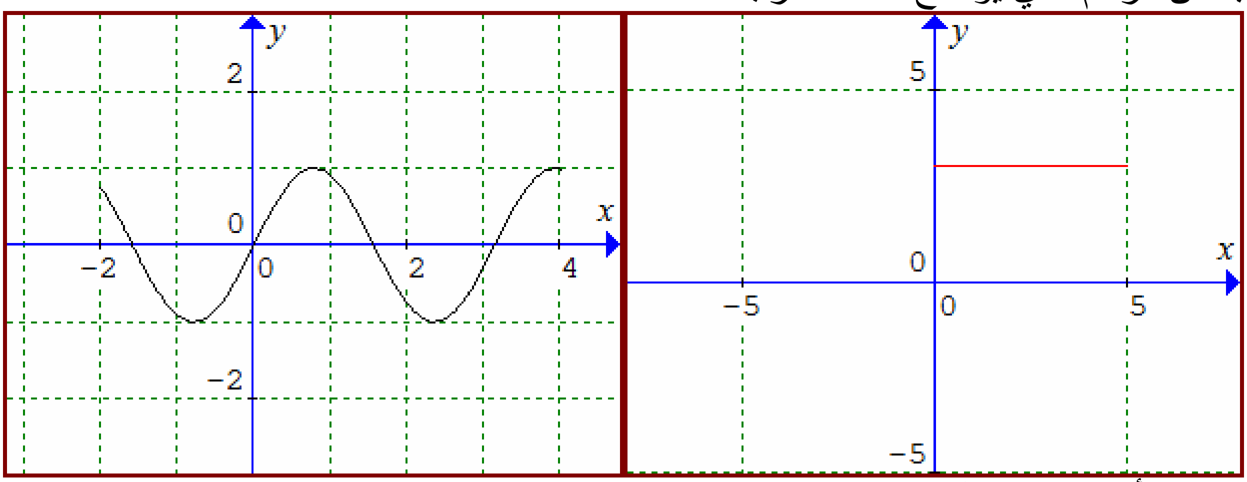
مثال ليكن الاقتران $ق(س) = س^٣$ وهو قابل للاشتقاق على ح ومشتقه
$ق'(س) = ٣س^٢ \geq ٠$ لأجل كل $س \in ح$ لاحظ المشتق ينعدم فقط عند الصفر وليس على فترة من ح
وهذا الاقتران متزايد على ح
ملاحظة اخرى
اذا كان اقتران ق متصل وقابل للاشتقاق ومتزايد او متناقص على الفترة $(١،٦)$ باستثناء النقطة $\{٤\}$ فلا يجوز ان نكتب اقتران ق متصل وقابل للاشتقاق ومتزايد او متناقص على الفترة $(١،٤) \cup (٤،٦)$
هذا خطاء لان اتحاد فترتين ليس فترة كما ان عبارة اتحاد فترتين غير موجودة في الكتاب ابدا
الصح نكتب متصل وقابل للاشتقاق ومتزايد على كل من الفترتين $(١،٤)$،$(٤،٦)$نضع فاصلة بينهما وليس اتحاد
ملاحظة اخرى
عند دراسة تزايد وتناقص اقتران نشكل جدول كما في الكتاب وليس محور يجب دوما ان نلتزم في كتاب الوزارة اما الجدول في الكتاب فهو عجيب غريب كتب بشكل مقلوب المنطق قيم س في السطر الاول وهي من اليسار لليمين وهي ليست محور موجه ونضع في هذا السطر القيم التي نريدها للمتغير س ثم نجد في السطر الثاني اشارة المشتق على الفترات التي وجدت في السطر الاول وفي السطر الثالث نجد قيم الاقتران الموافقه للمتحول س في السطر الاول يدعى هذا الجدول جدول تحولات الافتران
وجدت اثناء حل التدريبات يتم استخدام اشارة $\Leftarrow$،$\Leftrightarrow$ بشكل غير صحيح علينا ان نتجنب استخدام هذة الاشارات

مثلا يضع الطالب $ق'(س) = ٠ \Leftarrow س = ١$ نحن لا نعدم المشتق لكي نجد قيم س بل العكس نبحث عن قيم س التي تعدم المشتق
لذلك يجب ان نكتب العبارة التالية ينعدم $ق'(س) = ٠$ عندما $س = ١$
كما ان الاشارة $\Leftarrow$،$\Leftrightarrow$ ادوات ربط منطقيه تربط بين قضيتين
كيف ندرس تزايد وتناقص اقتران ( يدعى التزايد او التناقص ب اطراد )
١- علينا ان نجد مجال الاقتران ( مجموعة تعريفه ) اذا لم تذكر بشكل صريح
٢- علينا ان نحدد فترات الاتصال
٣- نشتق حسب القاعدة وندرس قابلية الاشتقاق وفق التعريف عند نقط التشعب ونبحث عن جذور المشتقة الاولى ونحدد فترات الاشتقاق
٤- نشكل جدول ونحدد فترات التزايد وفترات التناقص
ملاحظة سوف اضع اشارة || تحت كل قيمة غير قابل عندها الاقتران الاشتقاق او غير معرف في الصف الموافق واضع صور العناصر الموجودة في السطر الاول والمعرف عندها الاقتران في السطر الذي يحوي $ق(س)$
اما الغير معرف عندها سأضع نهاية الاقتران عندها
مثال : اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س) = س^٣ - ٣س$ على الفترة $[-٢،٤]$
الاقتران كثير حدود متصل على $[-٢،٤]$ وقابل للاشتقاق على$(-٢،٤)$ ومشتقه
$ق'(س) = ٣س^٢ - ٣ = ٣(س^٢ - ١) = ٣(س+١)(س-١)$ ينعدم $ق'(س)$ عندما

س = ١     ليس من الضروري ان نجد ق(١) = −٢
س = −١                           ق(−١) = +٢
ساجد صور الاطراف المغلقة والنهايات عند الاطراف المفتوحة لفترات الاتصال
ق(١) = −٢، ق(−٢) = −٢   و ق(٤) = ٥٢ وهذا ليس ضروري ايضا لكن لهذه الاشياء اهمية كبرى ستجدها فيما بعد

| س | ٤ | | ١ | | ١ - | | ٢- |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ق′(س) | ‖ | ++++ | ٠ | - -- | ٠ | +++++ | ‖ |
| ق(س) | ٥٢ | ↗ | ٢- | ↘ | ٢ | ↗ | ٢- |

من الجدول نجد ق′(س) ≻ ٠ لكل س∈(−١،−٢) اذا الاقتران متزايد على (−١،−٢) وبما انه متصل على [−١،−٢] فهو متزايد على هذه الفترة
من الجدول نجد ق′(س) ≻ ٠ لكل س∈(١،٤) اذا الاقتران متزايد على (١،٤) وبما انه متصل على [١،٤] فهو متزايد على هذه الفترة
من الجدول نجد ق′(س) ≺ ٠ لكل س∈(−١،١) اذا الاقتران متناقص على (−١،١) وبما انه متصل على [−١،١] فهو متناقص على هذه الفترة
القيم التي له عندها قيم حرجة −٢و ٤ اطراف فترة غير قابل للاشتقاق عندها و ١و -١ قابل للاشتقاق وينعدم المشتق عندها وبالتالي ان النقاط الحرجة هي (٤،٥٢)(١،−٢)(−١،٢)(−٢،−٢)
القيم القصوى ق(−١) = ٢ قيمة كبرى محلية ق(١) = −٢ قيمة صغرى محلية
ق(٤) = ٥٢ قيمة كبرى مطلقة ق(١) = −٢ قيمة صغرى مطلقة ق(−٢) = −٢ قيمة صغرى مطلقة
القيم القصوى
تعريف :اذا كانت النقطة جـ في مجال الاقتران ق فان النقطة (جـ،ق(جـ)) تسمى نقطة حرجة للاقتران ق اذا كانت ق′(جـ) = ٠ او ق′(جـ) غير موجودة
بعض الرسم الذي يوضح النقط الحرجة




السؤال أين نجد النقاط الحرجة
١- اذا كان الاقتران اشتقاقي على فترة مفتوحة كل النقاط التي يقبل فيها مماس موازٍ لمحور السينات هي نقط حرجة اما القيم المحليه نلاحظ من خلال الجدول ان الاقتران ينعدم عندها ويغير اشارته

٢- وهنالك قيم س ينعدم عندها المشتق الاول دون تغير اشارتة وهي ليست قيم محلي الا انها نقط حرجة (نقطة التسرج )مثال الاقتران $ق(س) = س^{٣}$ $ق^{/}(س) = ٣س^{٢}$ نجد ان $ق^{/}(٠) = ٠$ اذا (٠،٠) نقطة حرجة

٣- قد يحافظ المشتق على اشارة واحدة فقط دون ان ينعدم فيها في فترة مفتوحة ليس له نقط حرجة في هذه الفترة

٤- قد يكون اقتران ثابت على فترة مفتوحة فكل نقط هذه الفترة هي نقط حرجة

٥- النقاط التي يكون معرف عندها وغير متصل هي نقط حرجة

٦- النقاط التي يكون متصل عندها وغير اشتقاقي هي نقط حرجة

٧- النقط عند اطراف الفترات المغلقة معرف وغير اشتقاقي هي نقط حرجة اذا كان الاقتران معرف على مجموعة الاعداد الطبيعية الصحيحة النسبية فهو غير متصل عند ايا من هذه النقط وبالتالي كلها نقط حرجة

٨- الاقتران $ق(س) = [س]$ جميع نقاطه حرجة

مثال :

اوجد قيم س التي يكون للاقتران عندها نقط حرجة

$ق(س) = [٢س]$ على الفترة $[-١،١]$ الحل نعيد تعريف الاقتران

$-١ \leq س \leq ١$ اذا $-٢ \leq ٢س \leq ٢$

قيم الاقتران $-٢، -١، ٠، ١، ٢$

$$ق(س) = [٢س] = \begin{cases} -٢ & ،-١ \leq س < -\frac{١}{٢} \\ -١ & ،-\frac{١}{٢} \leq س < ٠ \\ ٠ & ،٠ \leq س < \frac{١}{٢} \\ ١ & ،\frac{١}{٢} \leq س < ١ \\ ٢ & ،س = ١ \end{cases} \qquad ق^{/}(س) = \begin{cases} ٠ & -١ < س < -\frac{١}{٢} \\ ٠ & -\frac{١}{٢} < س < ٠ \\ ٠ & ،٠ < س < \frac{١}{٢} \\ ٠ & ،\frac{١}{٢} < س < ١ \end{cases}$$

ق اشتقاقي على الفترات التالية والتي ينعدم عندها المشتقة الاولى $\left(-١،\frac{-١}{٢}\right)\left(\frac{-١}{٢}،٠\right)\left(٠،\frac{١}{٢}\right)\left(\frac{١}{٢}،١\right)$

وكل قيمة منها يكون للاقتران نقطة حرجة عندها

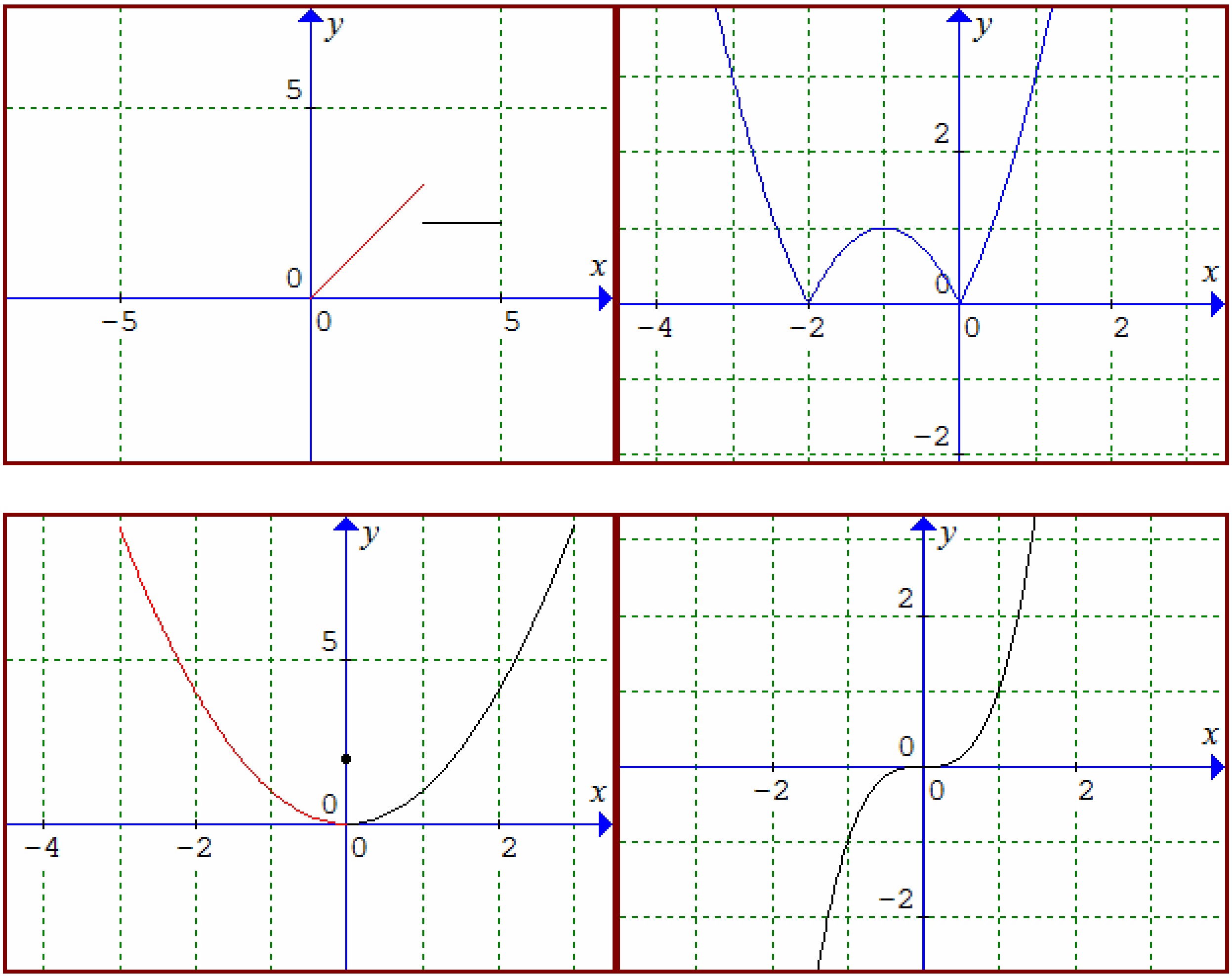
كما ان للاقتران نقط حرجة عند -١و١ اطراف فترة وعند $\frac{-١}{٢}،٠،\frac{١}{٢}$ غير قابل للاشتقاق عندها لان غير متصل

اذا جميع نقاط الفترة $[-١،١]$ يكون للاقتران عندها نقط حرجة

وكل نقاط الفترة $(-١،١)$ يكون للاقتران عندها قيم صغرى محلية وكبرى محلية في نفس الوقت اما -١و١ ليس للاقتران عندها قيم محلية وعند $\frac{-١}{٢}،٠،\frac{١}{٢}$له قيم كبرى محليا

له قيمة كبرى مطلقة هي $ق(١) = ٢$ وكل صور قيم الفترة $\left[-١،-\frac{١}{٢}\right)$ هي قيمة صغرى مطلقة

هذا الاقتران ثابت على كل من الفترات $\left(-١، \frac{-١}{٢}\right)\left(\frac{-١}{٢}، ٠\right)\left(٠، \frac{١}{٢}\right)\left(\frac{١}{٢}، ١\right)$




تعريف

اذا كان ق(س) اقتران معرف على الفترة [أ،ب] وكان $س_١$∈[أ،ب] واذا امكن ايجاد فترة مفتوحة ف حول العدد $س_١$ فعندئذ

١- يكون للاقتران ق قيمة عظمى محلي عند $س_١$ هي ق($س_١$) اذا كان ق($س_١$) ≥ ق(س) لكل س∈ف

٢- يكون للاقتران ق قيمة صغرى محلي عند $س_١$ هي ق($س_١$) اذا كان ق($س_١$) ≤ ق(س) لكل س∈ف

٣- يكون للاقتران ق قيمة عظمى مطلقة عند $س_١$ هي ق($س_١$) اذا كان ق($س_١$) ≥ ق(س) لكل س∈[أ،ب] س ≺ جـ

٤- يكون للاقتران ق قيمة صغرى مطلقة عند $س_١$ هي ق($س_١$) اذا كان ق($س_١$) ≤ ق(س) لكل س∈[أ،ب]

نظرية ق(س) معرف على [أ،ب] وكانت ق(جـ) قيمة قصوى فان ق$'$(جـ) اما معدوم او غير موجود

ملاحظة ليس من الضروري كل نقطة حرجة هي قيمة قصوى العكس كل قيمة قصوى هي نقطة حرجة

نظرية

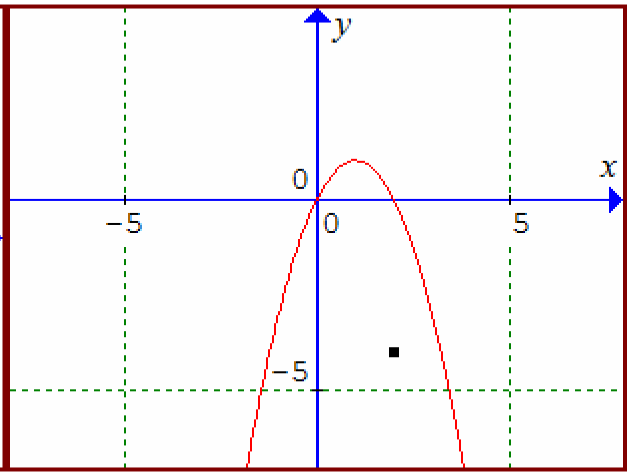
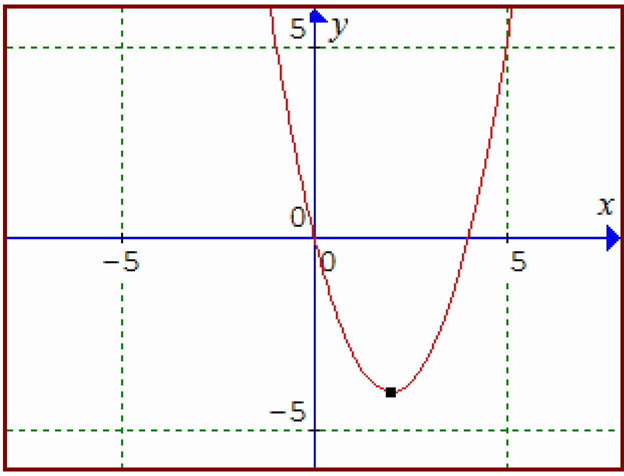
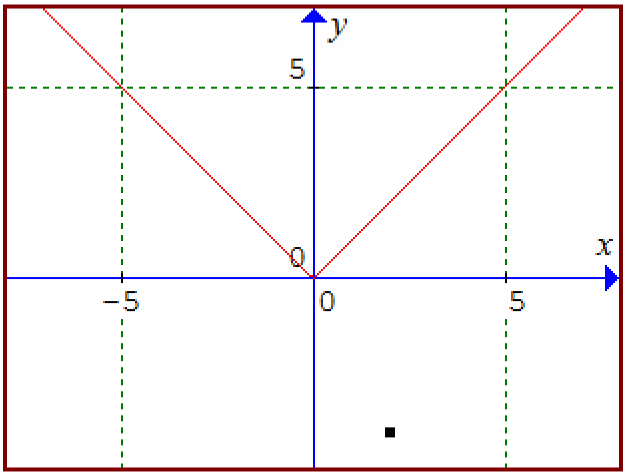
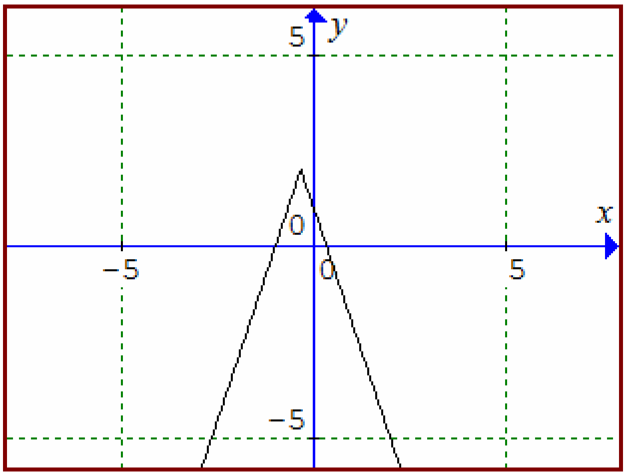
اذا كا ن ق(س) متصل على [أ،ب]وقابل للاشتقاق وكانت (جـ،ق(جـ))نقطة حرجة للاقترانق حيث جـ∈(أ،ب) عندئذ

١- اذا كان ق´(س) ≥ ٠ لكل س ≺ جـ وكان ق´(س) ≤ ٠ لكل س ≻ جـ فان ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق

٢- اذا كان ق´(س) ≤ ٠ لكل س ≺ جـ وكان ق´(س) ≥ ٠ لكل س ≻ جـ فان ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق

أي ان النقطة التي ينعدم عندها المشتق ويغير اشارتة من سالب الى موجب هي قيمة صغرى محليا ومن موجب الى سالب قيمة عظمى محليا

واذا لم يكن قابل للاشتقاق عند تلك النقطة الا انه قابل للاشتقاق قبل وبعد تلك النقطة وغير المشتق اشارتة قبل وبعد تلك النقطة للاقتران قيمة محلية عند تلك النقطة

كيفية قراءة الخط البياني لاقتران حقيقي

١- الاقتران المتزايد خطه يتجه نحوى الاعلى والمتناقص خطة يتجه نحوى الاسفل

٢- الاقتران الموجب خطه فوق محور السينات والسالب خطه تحت محور السينات

٣- سينات نقط تقاطع الخط مع محور السينات هي اصفار المعادلة ق(س) = ٠ ويتقاطع الخط مع محور الصادات في نقطة وحيدة ان وجدت هي (٠،ق(٠))

٤- الاقتران المتصل على فترة خطه متصل غير منقطع واذا انقطع الخط في نقطة فهو غير متصل عندها

٥- الاقتران القابل للاشتقاق خطه لا يعاني أي انكسار دوما يوجد لة مماس عند النقطة القابل للاشتقاق عندها

جد القيم القصوى للاقتران ق(س) = س$^{٣}$ − ٦س$^{٢}$ + ٩س على [−١،٥] وفترات التزايد والتناقص والنقط الحرجة

الحل اقتران كثير حدود متصل على [−١،٥] وقابل للاشتقاق على (−١،٥)

ق$^{/}$(س) = ٣س$^{٢}$ − ١٢س + ٩ = ٣(س$^{٢}$ − ٤س + ٣) = ٣(س − ١)(س − ٣)

ينعدم ق$^{/}$(س) عندما س = ١ ق(١) = ٤ او س = ٣ ق(٣) = ٠

| س | ٥ | | ٣ | | ١ | | ١- |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ق$^{/}$(س) | ‖ | ++++ | ٠ | - -- | ٠ | ++++++ | ‖ |
| ق(س) | ٢٥ | ↗ | ٠ | ↘ | ٤ | ↗ | ١٦- |

من الجدول نجد ق$^{/}$(س) ≻ ٠ لكل س∈(−١،١) اذا الاقتران متزايد على (−١،١) وبما انه متصل على [−١،١] فهو متزايد على هذه الفترة

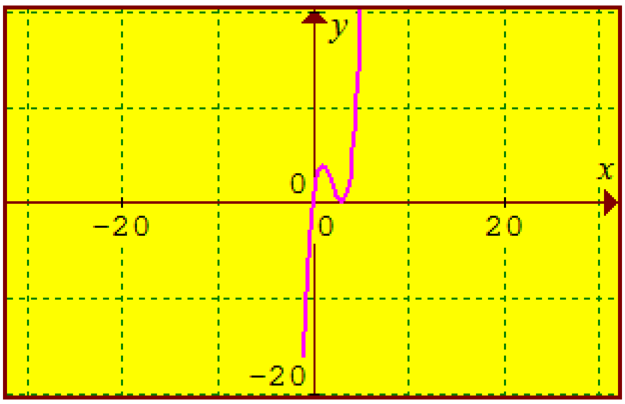
من الجدول نجد ق$^{/}$(س) ≻ ٠ لكل س∈(٣،٥) اذا الاقتران متزايد على (٣،٥) وبما انه متصل على [٣،٥] فهو متزايد على هذه الفترة

من الجدول نجد ق$^{/}$(س) ≺ ٠ لكل س∈(١،٣) اذا الاقتران متناقص على (١،٣) وبما انه متصل على [١،٣] فهو متناقص على هذه الفترة

القيم التي له عندها نقط حرجة - ١ و٥ اطراف فترة غير قابل للاشتقاق عندها و ١و ٣ قبل للاشتقاق وينعدم المشتق عندها وبالتالي ان النقاط الحرجة هي (٥،٢٥)(٣،٠)(١،٤)(−١،−١٦)

القيم القصوى ق(١) = ٤ قيمة كبرى محلية ق(٣) = ٠ قيمة صغرى محلية

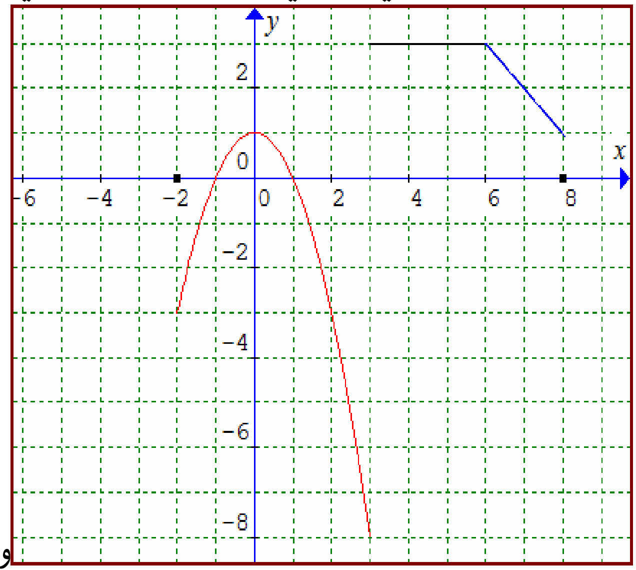
ق(٥) = ٢٥ قيمة كبرى مطلقة ق(−١) = −١٦ قيمة صغرى مطلقة




تدريب

ليكن الاقتران ق المعرف والمتصل على [−٢،٨]مشتقة الاولى على الفترة (−٢،٨)

ق $'$(س) المنحني البياني للمشتقة كما هو في الرسم




والمطلوب شكل جدول المشتقة واستنتج النقط الحرجة وفترات التزايد والتناقص والقيم القصوى

| | |
|---|---|
| س | ٨     ٦     ٣     ١     ١-     ٢- |
| ق $'$(س) | \|\| ++٣++ \|\| - - - ٠ +++ ٠------ \|\| |
| ق(س) | ↗ ↗ ↘ ↗ ↘ |

من الجدول نجد ق $'$(س) ≻ ٠ لكل س∈(−١،١) اذا الاقتران متزايد على (−١،١) وبما انه متصل على [−١،١] فهو متزايد على هذه الفترة

من الجدول نجد ق $'$(س) ≻ ٠ لكل س∈(٣،٨) اذا الاقتران متزايد على (٣،٨) وبما انه متصل على [٣،٨] فهو متزايد على هذه الفترة

من الجدول نجد ق $'$(س) ≺ ٠ لكل س∈(−٢،−١) اذا الاقتران متناقص على (−٢،−١) وبما انه متصل على [−٢،−١] فهو متناقص على هذه الفترة

من الجدول نجد ق $'$(س) ≺ ٠ لكل س∈(١،٣) اذا الاقتران متناقص على (١،٣) وبما انه متصل على [١،٣] فهو متناقص على هذه الفترة

القيم التي له عندها نقط حرجة - ١ و٨ اطراف فترة غير قابل للاشتقاق عندها و -١و ١ قبل للاشتقاق وينعدم المشتق عندها و٣ غير قابل للاشتقاق عندها المشتق من اليمين لايساوي المشتقة من اليسار

وبالتالي له نقط حرجة عند ٨،٣،١،−١،−٢

القيم القصوى ق(١) قيمة كبرى محلية ق(−١) قيمة صغرى محلية

وهنا يصعب تحديد القيم القصوى المطلقة

تدريب :

حدد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى والنقط الحرجة

ق(س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ [−٢،٢]

اقتران متصل على $(-1،1)$ مضمون الجذر كثير حدود موجب على الفترة $(-1،1)$ ومتصل عليها
اذا ق متصل على هذه الفترة

$\lim_{س\to -2^+}$ ق(س) $= \lim_{س\to -2^+} \sqrt{4 - س^2} = 0$ و ق$(-2) = 0$ متصل عند -2 من اليمين

$\lim_{س\to 2^-}$ ق(س) $= \lim_{س\to 2^-} \sqrt{4 - س^2} = 0$ و ق$(2) = 0$ متصل عند 2 من اليسار

اذا ق متصل على $[-2،2]$

ق قابل للاشتقاق على $(-2،2)$ والمشتقة الاولى ق$'$(س) $= \frac{-2س}{2\sqrt{4 - س^2}}$ ينعدم ق$'$(س)

عندما س $= 0$ و ق$(0) = 2$

ق$(-2) =$ ق$(2) = 0$

| س | 2 | | 0 | | -2 |
|---|---|---|---|---|---|
| ق$'$(س) | \|\| | --- - - | 0 | +++++ | \|\| |
| ق(س) | 0 | ↘ | 2 | ↗ | 0 |

من الجدول نجد ق$'$(س) $> 0$ لكل س$\in(-2،0)$ اذا الاقتران متزايد على $(-2،0)$ وبما انه متصل على $[-2،0]$ فهو متزايد على هذه الفترة

من الجدول نجد ق$'$(س) $< 0$ لكل س$\in(0،2)$ اذا الاقتران متناقص على $(0،2)$ وبما انه متصل على $[0،2]$ فهو متناقص على هذه الفترة

القيم التي له عندها نقط حرجة - 2 و 2 اطراف فترة غير قابل للاشتقاق عندها و 0 قبل للاشتقاق وينعدم المشتق عندها النقط الحرجة $(2،0)$،$(0،2)$،$(-2،0)$

ق$(0) = 2$ قيمة كبرى محلية انعدم عندها المشتق مغيرا اشارته من سالب الى موجب وهي قيمة كبرى مطلقة ق$(-2) =$ ق$(2) = 0$ قيمة صغرى مطلقة وهي ليست قيمة محلية اطراف فترة

تدريب ق(س) $=$ س$^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{س^3}$ جد فترات التزايد والتناقص

اقتران متصل على ح

ندرس قابلية الاشتقاق عند الصفر $\lim_{س\to 0} \frac{ق(س) - ق(0)}{س - 0} = \lim_{س\to 0} \frac{س^{\frac{3}{5}}}{س} = \lim_{س\to 0} \frac{1}{س^{\frac{2}{5}}} = +\infty$ غير

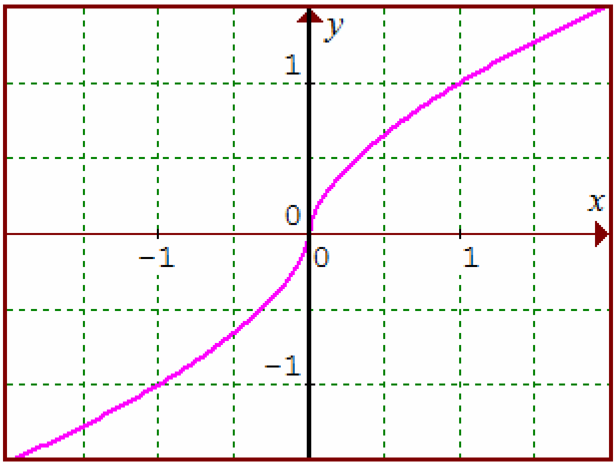
قابل للاشتقاق عند الصفر

قابل للاشتقاق على كل من الفترتين $(-\infty،0)$،$(0،\infty)$ والمشتقة على كل منهما

ق$'$(س) $= \frac{3}{5}$س$^{\frac{-2}{5}} = \frac{3}{5س^{\frac{2}{5}}}$

| س | $\infty$ | | 0 | | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ق$'$(س) | ++++++++ | | \|\| | | ++++ + + |
| ق(س) | | ↗ | 0 | ↗ | |

من الجدول $ق^{\prime}(س) > ٠$ على كل من الفترتين $(-\infty،٠)$،$(٠،\infty)$ فهو متزايد على كل منهما
وبما انه متصل عند الصفر فهو متزايد على ع




$(٠،٠)$ نقطة حرجة غير قابل للاشتقاق عندها

$ق^{\prime}(س)$ غير موجود عند الصفر والمشتقه لا تنعدم ابداعلى ح
اي ليست له أي قيمة محلية

تدر يب :
جد قيمة كل من الثابتين ب،أ التي تجعل للقتران $ق(س) = س^{٣} + أس^{٢} + ب س$ نقطتين حرجتين
الحل اقتران كثير حدود قابل للاشتقاق على ع اذا وجدت نقط حرجة يكون عندها المشتق معدوم
ويجب ان يكون للمشتقة صفرين مختلفين

$ق^{\prime}(س) = ٣س^{٢} + ٢أس + ب$

ولهذه المشتقة صفرين مختلفتين ٢ و−١

$ق^{\prime}(٢) = ١٢ + ٤أ + ب = ٠ \Leftarrow ١٢ + ٤أ + ب = ٠$

$ق^{\prime}(-١) = ٦ - ٤أ + ب = ٠ \Leftarrow ٦ - ٤أ + ب = ٠$

$ب = -١٨$

$١١ = أ$

تذكرة بسيطة

قانون البعد بين نقطتين $أ(س_{١}،ص_{١})$،$ب(س_{٢}،ص_{٢})$ هو $ل = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$

احداثيا منتصف القطعة المستقيمة $أ(س_{١}،ص_{١})$،$ب(س_{٢}،ص_{٢})$ هي $\left(\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}،\frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢}\right)$

ميل المستقيم المار من النقطتين $ظاهـ = م = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$ هـ زاوية المسقيم الموجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

معادلة مستقيم مائل مار من نقطة $أ(س_{١}،ص_{١})$ وميله معلوم م هو $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

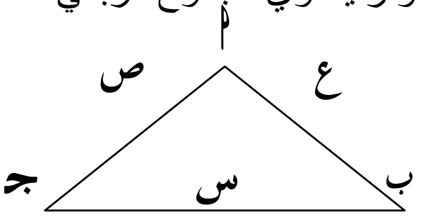
معادلة مستقيممائل مار من نقطتين أ$(س_1،ص_1)$،ب$(س_2،ص_2)$ هو

$$ص - ص_1 = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}\left(س - س_1\right)$$

معادلة مستقيم عمودي على محور السينات مار من أ$(س_1،ص_1)$ هي $س = س_1$

والموازي لمحور السينات والمار من أ$(س_1،ص_1)$ هي $ص = ص_1$ ميله م=الصفر

نظرية فيتاغورث في المثلث القائم مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمتين




طول ضلع في مثلث مقابل للزاوية أ

$$س^2 = ع^2 + ص^2 - 2\,ص\,ع\,جتاأ$$

علاقة الجيوب

$$\frac{س}{جاأ} = \frac{ص}{جاب} = \frac{ع}{جاجـ}$$

$$ظتاهـ = \frac{المجاور}{المقابل}،ظاهـ = \frac{المجاور}{الوتر}،جتاهـ = \frac{المجاور}{الوتر}،جاهـ = \frac{المقابل}{الوتر}$$

بعد نقطة $(س_1،ص_1)$ عن مستقيم أس + بص+جـ = ٠ هو $ل = \frac{|أس + بص + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$

$$ظا(\theta - \alpha) = \frac{ظا\theta - ظا\alpha}{1 + ظا\theta\, ظا\alpha}$$

ظل الزاوية بين مستقيمين ميل الاول والثاني $م_1،م_2$ على الترتيب

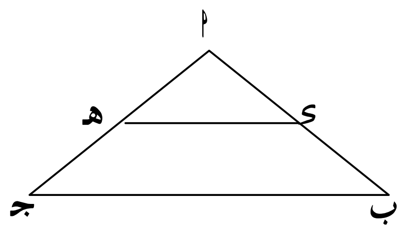
$$ظا(هـ) = \frac{م_2 - م_1}{1 + م_2 م_1}$$

المساحات

| | |
|---|---|
| مساحة سطح المثلث | نصف القاعد ضرب الارتفاع |
| مساحة سطح المثلث القائم | نصف حاصل ضرب الضلعين القائمين |
| مساحة المثلث المتساوي الاضلاع | $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$   $م = \frac{\sqrt{3}ل^2}{4}$ ل طول الضلع |
| مساحة سطح المثلث | $S = \frac{1}{2}b \times c \sin A$   $م = \frac{1}{2} ع \times ص جاأ$ |
| مساحة سطح المثلث | $S = \frac{a\,b\,c}{4R}$   $م = \frac{س \times ص \times ع}{4 نق}$ نق نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث |

| | |
|---|---|
| مساحة سطح المثلث | $S = r.p$ م= نوط نق نصف قطر الدائرة الماسة داخلا للمثلث<br>ط نصف محيط المثلث ٢ط =س+ص+ع |
| مساحة سطح المثلث | م = ٢ر ٢ جاأجابجاجـ |
| مساحة سطح المثلث | م = $\sqrt{ط(ط-س)(ط-ص)(ط-ع)}$ |
| مساحة سطح المثلث | $S = \frac{1}{2}c.h_c, \quad h_c = b \sin A$ |
| محيط مثلث | ط = $\frac{س + ص + ع}{٢}$ |
| مساحة شبه المنحرف | نصف مجموع القاعدتين ضرب الارتفاع |
| مساحة متوازي الاضلاع | القاعدة ضرب الارتفاع<br>أو حاصل ضرب ضلعين متجاورين ب جيب أحد زواياه |
| مساحة المعين | مربع طول ضلعه ضرب جيب أحد زواياه<br>نصف حاصل ضرب القطرين |
| مساحة المستطيل | الطول ضرب العرض |
| محيط المستطيل | ٢ (الطول +العرض ) |
| مساحة المربع | مربع طول ضلعه |
| محيط المربع | المحيط = ٤ ضرب طول الضلع |
| وكذلك مساحة الدائرة | م =$\pi$نو٢ |
| ومحيطها | ع = ٢$\pi$نو |

العامد هو بعد مركز المضلع المنتظم عن أي ضلع فيه رمزه عا
نظرية المستقيم الموازي لاحد اضلاع مثلث والقاطع للضلعين الاخري و لا يمر بالراس المقابله يحدد مع الضلعين الباقيتين مثلث يشابه المثلث الاصلي




نسبة التشابه $\frac{أى}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ} = \frac{ىهـ}{بجـ}$

| | مساحة السطح الجانبي | مساحة السطح الكلي | الحجم |
|---|---|---|---|
| الموشور القائم | = محيط القاعدة ضرب الارتفاع | =السطح الجانبي + ضعفي مساحة القاعدة | مساحة القاعدة ضرب الارتفاع |
| متوازي المستطيلات | الابعاد س ص ع = ٢س ص+٢س ع | ٢س ص+٢س ع +٢ع ص | س ع ص |
| المكعب | ٤س ٢ | ٦س ٢ | س ٣ |
| الاسطوانة | ٢πرع | ٢πر(ر + ع) | πر ٢ ع |
| الهرم | مجموع مساحات الأوجه الجانبية | المساحة الجانبية +مساحة القاعدة | ثلث مساحة القاعدة ضرب الارتفاع |
| جذع الهرم | مجموع مساحات الأوجه ألجانبيه | المساحة الجانبية +مساحة القاعدة الصغرى +مساحة القاعدة الكبرى | =ثلث الارتفاع (مساحة الصغرى+مساحة القاعدة الكبرى+الجذر التربيعي للصغرى ضرب الكبرى) |
| الهرم المنتظم | نصف محيط القاعدة ضرب ارتفاع الوجه الجانبي | المساحة الجانبية +مساحة القاعدة | ثلث مساحة القاعدة ضرب الارتفاع |
| جذع الهرم المنتظم | نصف محموع محيطي القاعدتين ضرب ارتفاع وجه جانبي | المساحة الجانبية +مجموع مساحتي القاعدتين | $V = \frac{1}{3}h\left(S + S' + \sqrt{SS'}\right)$ |
| المخروط | نصف محيط القاعدة ضرب المولد πنقل | πنق(ل+نق) | $\frac{\pi}{٣}$نق ٢ ع |
| جذع المخروط | $S_L = \pi(R+r)L$ | $S_T = \pi(R+r)L + \pi R^2 + \pi r^2$ | $V = \frac{\pi}{3}h\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$ |
| الكره | | ٤πنق ٢ | $\frac{٤}{٣}$πنق ٢ |
| القبة | | ٢πنق ع | $\frac{\pi}{٣}$ ع ٢ (٣نق − ع) |
| المنطقة الكروية | | ٢πنق ع | فرق حجمي قبتين لهما نفس الذروة وقاعدتا كل منهما الدائرة المقطع |

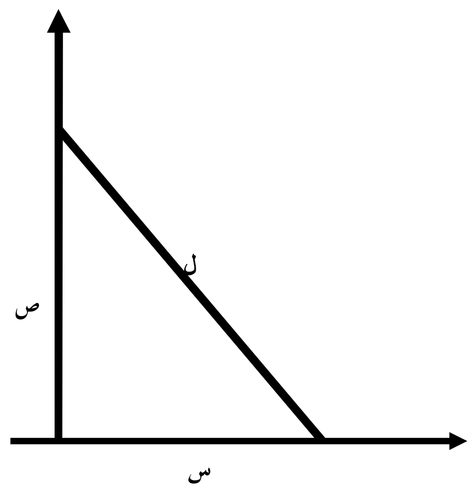
الارتفاع رمز له بالحرف ع
طول قوس ف من دائرة نصف قطرها نق وتقابل زاويه هـ مقدرة بالراديان هو $\boxed{\text{ف} = \text{نق هـ}}$

## المعدلات المرتبطة بالزمن

ندعو
الاشتقاق بالنسبة للزمن بمعدل تغير (معدل تغير مساحة بالنسبة للزمن هو $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ )
لحل المسائل هذه علينا ان نحدد

١- المتغيرات
٢- علاقة الربط بين هذه المتغيرات
٣- العلاقة التي تحوي المعدل المطلوب
٤- اشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن
٥- عندما يعطينا معدل تغير بالنسبة للزمن فهو سرعة التغير فاذا كانت قيمته ثابته فان القانون الزمني للحركه هو من الدرجة الاولى يدعى قانون خطي والسرعة لها اشارتها الموجبة اذا كانت مع المحور والسالبه اذا كانت عكس المحور
٦- اذا كانت سرعتة المتحرك ثابته ( معل تغير تغير بالنسبة للزمن ثابت) فان قانون المسافه للحركه هو $\text{س} = \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}\text{ن} + \text{س}_{٠}$ والمسافه المقطوعة $\text{س} - \text{س}_{٠} = \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}\text{ن}$ اما $\text{س}_{٠}$ المسافة الابتدائية

مثال يستند سلم طوله ل على ارض افقية وجدار عاموي على الارض ينزلق الطرف المستند على الارض مبتعدا عن الجدار $\frac{١}{٢}$ل بالثانية جد سرعة انخفاض الطرف العلوي عندما يكون طرفه السفلي على بعد $\frac{١}{٤}$ل من الجدار القائم




نحدد جملة محاور كما في الشكل

نفرض ان بعد راس السلم عن الجدار س وعن الارض ص
علاقة الربط بين المتغيرات هي فيتاغورث $\text{ل}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}$
نشتق هذه العلاقة بالنسبة للزمن $٠ = ٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$

لكن سرعة ابتعاد الطرف السفلي عن الحائط هو $\frac{دس}{دن}$ وهو موجب لان هذه السرعة باتجاه المحور المفروض $\frac{دس}{دن} = \frac{١}{٢}ل$

ومن اجل $س = \frac{١}{٤}ل$ نحسب ص من علاقة

فيتاغورث
$$ل^{٢} = \frac{١}{١٦}ل^{٢} + ص^{٢} \Rightarrow ص^{٢} = ل^{٢} - \frac{١}{١٦}ل^{٢} = \frac{١٥}{١٦}ل^{٢}$$
$$ص = \frac{\sqrt{١٥}}{٤}ل$$

نعوض في المشتقة

$$٠ = ٢\frac{١}{٤}ل\frac{١}{٢}ل + ٢\frac{\sqrt{١٥}}{٤}ل\frac{دص}{دن} \Rightarrow ٢\frac{\sqrt{١٥}}{٤}ل\frac{دص}{دن} = -٢\frac{١}{٤}ل\frac{١}{٢}ل \Rightarrow \frac{دص}{دن} = -\frac{ل}{\sqrt{١٥}}$$ وهذا يعني

ان الطرف العلوي للسلم يتحرك عكس المحور نحو الاسفل بهذه السرعة

قد يكون المطلوب هو معدل تغير مساحة المثلث الحاصل بين السلم والارض والجدار

هذا مثلث قائم مساحة $م = \frac{١}{٢}س ص$ (نصف حاصل ضرب الضلعين القائمتين )

$$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٢}\left(\frac{دس}{دن}ص + س\frac{دص}{دن}\right)$$

$$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٢}ل\frac{\sqrt{١٥}}{٤}ل + \frac{١}{٤}ل\frac{-ل}{\sqrt{١٥}}\right) = \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٢}ل\frac{\sqrt{١٥}}{٤}ل + \frac{١}{٤}ل\frac{-ل\sqrt{١٥}}{١٥}\right) = \frac{١٣\sqrt{١٥}}{١٢٠}ل^{٢}$$

واذا كان المطلوب معدل تغير الزاوية بالنسبة للزمن بين السلم والارض ولتكن هـ

$ظاهـ = \frac{ص}{س}$ ومن الافضل ان ناخذ $جتاهـ = \frac{س}{ل}$

$$-\frac{دهـ}{دن}جاهـ = \frac{١}{ل}\frac{دس}{دن} \Rightarrow \frac{دهـ}{دن} = -\frac{١}{لجاهـ}\frac{دس}{دن}$$

$$جاهـ = \frac{\frac{\sqrt{١٥}}{٤}ل}{ل} = \frac{\sqrt{١٥}}{٤}$$

$$-\frac{دهـ}{دن}جاهـ = \frac{١}{ل}\frac{دس}{دن} \Rightarrow \frac{دهـ}{دن} = -\frac{١}{ل\frac{\sqrt{١٥}}{٤}}\frac{دس}{دن} = -\frac{٤}{ل\sqrt{١٥}}\frac{١}{٢}ل = \frac{٢}{\sqrt{١٥}}$$

تدريب ٢

يتساقط الرمل مكونا كومة على شكل مخروط دائري قائم على الارض بمعدل ٠،٤٣٢ .اذا كان الرمل يشكل كومة ارتفاعها يساوي ربع طول قطر القاعدة جد سرعة ارتفاع كومة الرمل عندما يكون ارتفاعها ١,٢ من المتر

نصف قطر قاعدة المخروط $ر$ والارتفاع $ع$

لاحظ العدد٠،٤٣٢ هي سرعة تغير الحجم

حجم المخروط $ع = \frac{\pi}{٣} ر^{٢} ع$

$ع = \frac{١}{٤} ر \Leftarrow ر = ٤ع$

$\frac{دع}{دن} = \frac{١}{٤}\frac{در}{دن} \Leftarrow ٤\frac{دع}{دن} = \frac{در}{دن}$

$\frac{دع}{دن} = \frac{\pi}{٣}\left(٢\times ٤ع٤ع٤\frac{دع}{دن} + ١٦ع^{٢}\frac{دع}{دن}\right)$

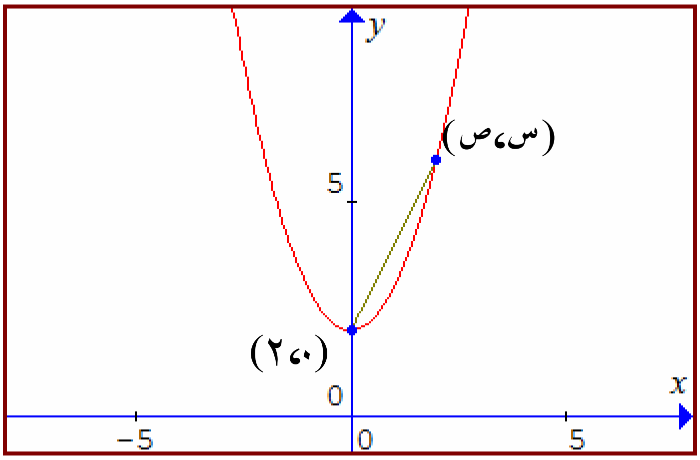
$\frac{دع}{دن} = \frac{\pi}{٣}\frac{دع}{دن}\left(٣٢ع^{٢} + ١٦ع^{٢}\right)$

$\frac{دع}{دن} = ١٦\pi ع^{٢}\frac{دع}{دن}$

$\frac{دع}{دن} = \frac{١}{١٦\pi ع^{٢}}\frac{دع}{دن}$

$\frac{دع}{دن} = \frac{١}{١٦\pi ١٫٤٤} \times ٠٫٤٣٢ = \frac{٤٣٢}{١٦٠\pi \times ١٤٤} = \frac{٣}{١٦٠\pi}$

تدريب تتحرك نقطة على منحني الاقتران $ص = س^{٢} + ٢$ وفي لحظة ما كان معدل تغير احداثيها السيني ٠,٢٥ وكان معدل التغير في احداثيها الصادي ٠,٤٣ جد بعد النقطة المتحركة على المنحني عندئذ عن النقطة (٠،٢)




بفرض ل بعد النقطة (س،ص) عن (٠،٢) حسب قانون البعد بين نقطتين نجد

$ل = \sqrt{س^{٢} + (ص - ٢)^{٢}}$ لكن $ص = س^{٢} + ٢$

اذا $\frac{دص}{دن} = ٢س\frac{دس}{دن} \Leftarrow ٠٫٤٣ = ٢س ٠٫٢٥ \Leftarrow س = \frac{٤٣}{٥٠} = \frac{٨٦}{١٠٠}$

وبالتالي

$ل = \sqrt{س^{٢} + (س^{٢} + ٢ - ٢)^{٢}}$

$ل = \sqrt{س^{٢} + س^{٤}} = |س|\sqrt{١ + س^{٢}}$

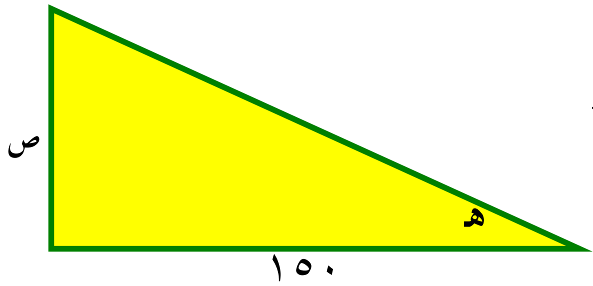
$ل = \frac{٨٦}{١٠٠}\sqrt{١ + \left(\frac{٨٦}{١٠٠}\right)^{٢}} =$

تدريب ٤

يرتفع بالون الى أعلى بمعدل ثابت قدره ٤٢م /د رصد البالون من مشاهد على الارض يبعد ١٥٠ متر عن الشاقول المار بالبالون جد معدل تغير زاوية ارتفاع البالون من عين الراصد عندما يكون البالون على ارتفاع ١٥٠ من سطح الارض

الحل نفرض ان بعد البالون عن الارض يساوي ص وزاوية النظر هـ

$\text{ظاهـ} = \frac{\text{ص}}{١٥٠}$ لكن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٤٢\text{م/د}$ عندما يكون ارتفاع البالون ١٥٠ فان الزاوية تساوي ٤٥ درجة مثلث قائم ومتساوي الساقين

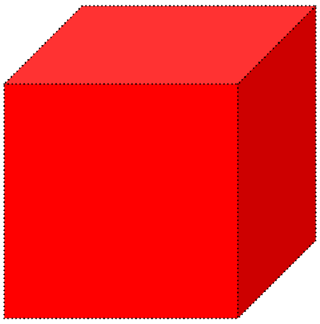



$\text{ظاهـ} = \frac{\text{ص}}{١٥٠} \Leftarrow (١+\text{ظا}^٢\text{هـ})\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{١}{١٥٠}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$

$(١+١)\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{١}{١٥٠}٤٢$

$\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{٢١}{١٥٠} = \frac{٧}{٥٠} = ٤\text{،}١٠$

تمارين ومسائل



١- مكعب من الثلج يتناقص طول ضلعه بعدل ١٠٠،٠سم\ث

جد معدل تناقص حجم المكعب عندما يكون طول ضلعه ١٠ سم

حجم المكعب الذي طول ضلعه س هو $\text{ع} = \text{س}^٣$

$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = -٠٠٠١\text{،}٠$

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = ٣\text{س}^٢ \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} \Leftarrow \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = ٣(١٠)^٢ \times - \frac{١}{١٠٠٠} = \frac{-٣}{١٠}$

٢-

ابعاد الماء ٢٠و ٨ والارتفاع ص

حجم الماء $\text{ع} = ٢٠ \times ٨ \times \text{ص}$

لكن $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = ٥$ اذا $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = ٢٠ \times ٨ \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ وبالتالي $٥ = ١٦٠\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{٥}{١٦٠} = \frac{١}{٣٢}$

٣-

٤- نفرض الارتفاع هو ع وطول القاعدة ل اذا $\text{ع} = \frac{١}{٢}\text{ل}$ اذا كانت المساحة م فان $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{٥}{١٠٠}$

جد معدل التغير في طول القاعدة عندما $\text{ل} = ١٠$

الحل $\text{م} = \frac{١}{٢}\text{ع} \times \text{ل} \Leftarrow \text{م} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}\text{ل} \times \text{ل} \Leftarrow \text{م} = \frac{١}{٤}\text{ل}^٢$

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{١}{٤}٢\text{ل}\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}} \Leftarrow \frac{٥}{١٠٠} = \frac{١}{٢} \times ١٠\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}} \Leftarrow \frac{\text{ءل}}{\text{ءن}} = \frac{١}{١٠٠}$

مسالة كرة حديدية نصف قطرها ٨سم مغطاة بطبقة من الجليد فاذا كان الجليد ينصهر بمعدل ١٠سم\دقيقة جد

١-اوجد سرعة تناقص سمك الجليد عندما يكون سمكه ٢ سم

٢- سرعة تناقص مساحة السطح الخارجي عند تلك اللحظة

و ٢ر = ٨ معدل انصهار الجليد هو ١٠

بفرض نصف قطر كرة الجليد والمعدن نق

سمك الجليد $ع = \frac{٤\pi}{٣}\text{نق}^{٣} - \frac{٤\pi}{٣}٤^{٣} \Leftarrow ع = \frac{٤\pi}{٣}\left(\text{نق}^{٣} - ٦٤\right)$

$$ع = \frac{٤\pi}{٣}\left(\text{نق}^{٣} - ٦٤\right)$$

$$\frac{دع}{دن} = \frac{٤\pi}{٣}٣\text{نق}^{٢}\frac{د\text{نق}}{دن} \Leftarrow \frac{دع}{دن} = ٤\pi\text{نق}^{٢}\frac{د\text{نق}}{دن}$$

$$-١٠ = ٤\pi \times ١٠\frac{د\text{نق}}{دن}$$

$$\frac{د\text{نق}}{دن} = \frac{-١}{٤\pi}$$

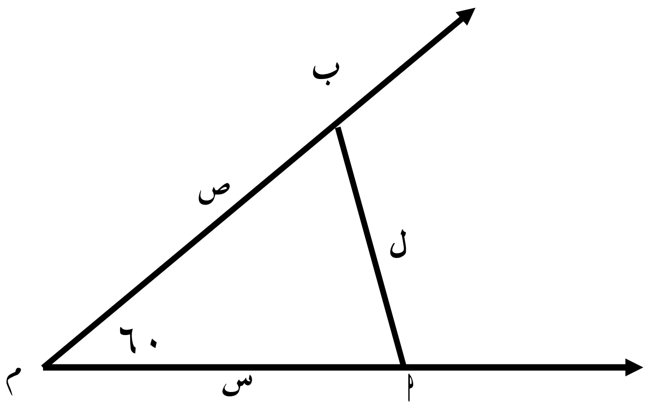
مساحة السطح الخارجي $م = ٤\pi\text{نق}^{٢} \Leftarrow \frac{دم}{دن} = ٨\pi\text{نق}\frac{د\text{نق}}{دن} \Leftarrow \frac{دم}{دن} = ٨\pi(١٠)\frac{-١}{٤\pi} = -٢٠$

مسالة :خطان حديديان يميل احدهما على الاخر بزاوية قياسها ٦٠ درجة ويلتقيان في في النقطة م ويسير القطار ا على احدهما بسرعة ٨٠ كم \سا مقتربا من م ويسير القطار ب على الخط الاخر مقتربا من م بسرعة ٥٠ كم \سا وعند الساعة التاسعة صباحا كان القطاران على بعد ٢١٠كم و١٨٠ كم على الترتيب من م جد معدل اقتراب القطارين من بعضهما عند الساعة الحادية عشرة صباحا

الحل

زاوية الخطين ٦٠ درجة سرعة القطار ا هي ٨٠ كم بالساعة نحو م والقطار ب ٥٠كم بالساعة عند الساعة التاسعة كانا على بعدين أ على بعد ٢١٠ والاخر ١٨٠

ت سرعة القطار ثابتة اذا المسافة = السرعة ضرب الزمن




نفرض بعد القطار ٲ عن م هو س وبعد ب عن م هو ص والمسافة اب = ل

عندئذ س = ٨٠ن وص = ٥٠ن

لكن المسافة بين دقيقتي

$$\text{ل}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{س ص جتا } ٦٠ \Leftarrow \text{ل}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{س ص}\frac{١}{٢}$$

$$\text{ل}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - \text{س ص} \Leftarrow \text{ل}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{س ص} + \text{س ص}$$

$$\text{س} = ٢١٠ - ٨٠\text{ن و ص} = ١٨٠ - ٥٠\text{ن}$$

$$\text{ل}^{٢} = (\text{س} - \text{ص})^{٢} + \text{س ص}$$

$$\text{ل}^{٢} = (٢١٠ - ٨٠\text{ن} - ١٨٠ + ٥٠\text{ن}) + (٢١٠ - ٨٠\text{ن}) \times (١٨٠ - ٥٠\text{ن})$$

$$\text{ل}^{٢} = (٣٠ - ٣٠\text{ن})^{٢} + ١٠٠(٢١ - ٨\text{ن})(١٨ - ٥\text{ن})$$

$$٢\text{ل}\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = ٢(-٣٠)(٣٠ - ٣٠\text{ن}) - ٨٠(١٨٠ - ٥٠\text{ن}) - ٥٠(٢١٠ - ٨٠\text{ن})$$

بعد ساعتين ن=٢

$$٢ \times ٧٠\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = ١٨٠٠ - ٦٤٠٠ - ٢٥٠٠ = -٧١٠٠$$

$$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = -\frac{٣٥٥}{٧}$$

$$\text{ل}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - \text{س ص}$$

$$٢\text{ل}\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = ٢\text{س}\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دن}} - \frac{\text{دس}}{\text{دن}}\text{ص} - \text{ص}\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$$

بعد ساعتين $\text{س} = ٢١٠ - ٨٠ \times ٢ = ٥٠ \text{ و ص} = ١٨٠ - ٥٠ \times ٢ = ٨٠$

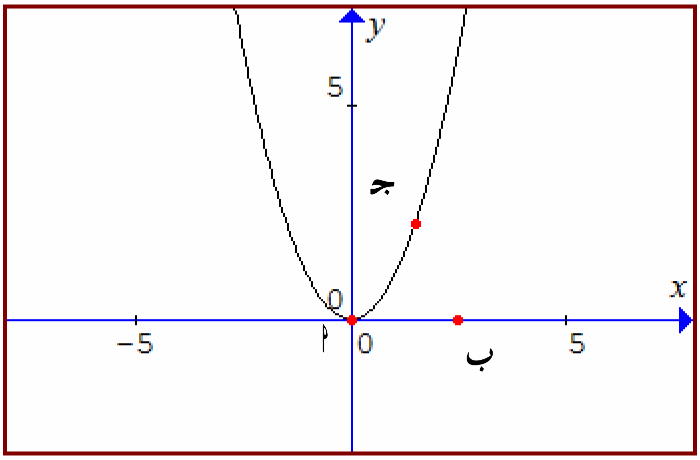
$$\text{ل}^{٢} = ٢٥٠٠ + ٦٤٠٠ - ٨٠ \times ٥٠ = ٤٩٠٠ \Leftarrow \text{ل} = ٧٠$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -٨٠ \text{ و } \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -٥٠$$

$$٢(٧٠)\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = ٢(٥٠)(-٨٠) + ٢(٨٠)(-٥٠) - (٥٠)(-٨٠) - ٨٠(-٥٠) = -٢ \times ٥٠ \times ٨٠$$

$$٢(٧٠)\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = -٢ \times ٥٠ \times ٨٠ \Leftarrow \frac{\text{دل}}{\text{دن}} = -\frac{٤٠٠}{٧}$$

مسألة- بدأت النقطتان ب، ج الحركة معا من نقطة الاصل (ا) بحيث تتحرك ب على محور السينات الموجب مبتعدة عن نقطة الاصل بسرعة ٤ وحدات\ث وتتحرك النقطة ج في الربع الاول وعلى القطع $\text{ص} = \text{س}^{٢}$ بحيث يبقى اج = بج جد معدل التغير في مساحة المثلث ابج بعد ثانيتين من البدء



احداثيا النقطة جـ(س،س$^{٢}$) وبما ان اجـ = بجـ المثلث ابجـ متساوي الساقين اذا احداثيا ب(٢س،٠) فاذا كانت بعد ب عن ا هي ع

و اجـ = بجـ   ع = ٢س سرعة النقطة ب   $\frac{دع}{دن} = ٢\frac{دس}{دن} \Rightarrow \frac{دس}{دن} = \frac{١}{٢} \times ٤ = ٢$

بعد ثانيتين ع = ٢ × ٤ = ٨ $\Rightarrow$ س = ٤

جد معدل التغير في مساحة المثلث ابجـ بعد ثانيتين من البدء

مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ ع × ص $\Rightarrow$ م = $\frac{١}{٢}$ × ٢س × س$^{٢}$ = س$^{٣}$

$\frac{دم}{دن} = ٣س^{٢}\frac{دس}{دن} \Rightarrow \frac{دم}{دن} = ٣ \times ١٦ \times ٢ = ٩٦$

مسألة:

معدل تغير حجم الكرة بالنسبة لنصف قطرها يساوي مساحة سطح الكرة

$ع = \frac{٤\pi}{٣} ر^{٣}$

$\frac{دع}{در} = \frac{٤\pi}{٣} ٣ر^{٢}$

$\frac{دع}{در} = ٤\pi ر^{٢} = م$

وهي مساحة سطح الكرة

مسألة- رجل طوله ١٨٠سم يقف امام مصباح يرتفع عن الارض ٥٤٠سم يقترب الرجل من المصباح بعدل ٣٠٠سم\ث جد معدل تغير الزاوية بي عمود المصباح والمستقيم الما بالمصباح ورأس الرجل

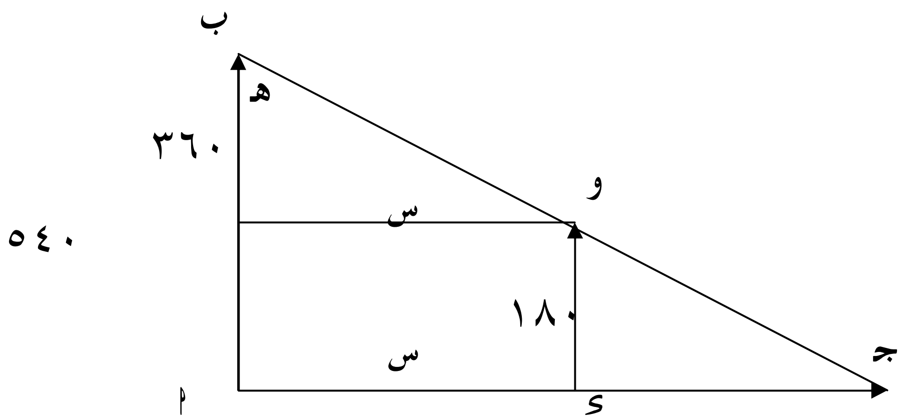
الحل :

$\frac{دس}{دن} = -٣٠٠$

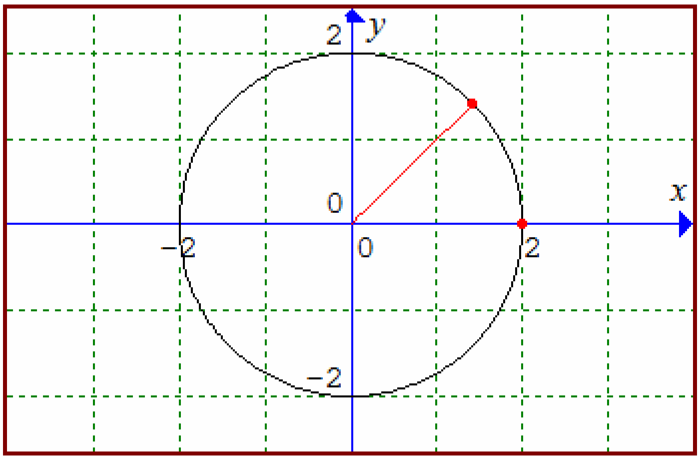
$ظاهـ = \frac{س}{٣٦٠} \Rightarrow (١+ظا^{٢}هـ) \times \frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{٣٦٠}\frac{دس}{دن}$

عندما س = ١٨٠ فان ظاهـ = $\frac{١٨٠}{٣٦٠} = \frac{١}{٢}$

$\left(١+\frac{١}{٤}\right)\frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{٣٦٠} \times (-٣٠٠) \Rightarrow \frac{دهـ}{دن} = \frac{-٥}{٦}\frac{٤}{٥} = \frac{-٢}{٣}$



مسألة : تتحرك نقطة على دائرة بعكس عقارب الساعة بدا من النقطة(ا،٠) اذا علمت ان القوس الذي ترسمه يزداد بمعدل ٨سم\ث جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن (ا،٠) اذا كانت زاوية القوس $\frac{\pi}{٣}$




الحل : طول القوس يساوي نصف القطر ضرب الزاوية مقدرة بالراديان لكن $\frac{دف}{دن} = -٨$

اذا ف = $ر \times هـ \Leftarrow \frac{دف}{دن} = ر\frac{دهـ}{دن} \Leftarrow \frac{دهـ}{دن} = \frac{-٨}{ر}$

$ل^٢ = ر^٢ + ر^٢ - ٢ر ر جتاهـ \Leftarrow ل^٢ = ٢ر^٢ - ٢ر^٢ جتاهـ = ٢ر^٢\left(١-جتاهـ\right) = ٢ر^٢ ٢جا^٢ \frac{هـ}{٢}$

$ل^٢ = ٤ر^٢ جا^٢ \frac{هـ}{٢} \Leftarrow ل = ٢ر جا\frac{هـ}{٢}$

لان $٠ < هـ < ٢\pi \Leftarrow ٠ < \frac{هـ}{٢} < \pi$ اذا $جا\frac{هـ}{٢} > ٠$ هذا التبرير لاننا جذرنا الطرفين وبالتالي يجب ان يكون الطرف الثاني موجب

$\frac{دل}{دن} = ٢ر \frac{١}{٢}\frac{دهـ}{دن} جتا\frac{هـ}{٢}$

وعندما $هـ = \frac{\pi}{٣} \Leftarrow جتا\frac{\pi}{٦} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\frac{دل}{دن} = ر\frac{دهـ}{دن} جتا\frac{هـ}{٢} = ر\frac{-٨}{ر}\frac{\sqrt{٣}}{٢} = -٤\sqrt{٣}$

مسألة جسر مشاة يرتفع عن مستوى الارض ٦م يسير عليه رجل بعدل ٣كم\سا وفي اللحظة نفسها مرت من تحته سيارة بسرعة ٦٠كم\سا جد معدل ابتعاد السيارة عن الرجل بعد دقيقة واحدة

الحل:

ناخذ النقطة ا وهي وجود الرجل فوق السيارة مباسرة نفرض السيارة هي د

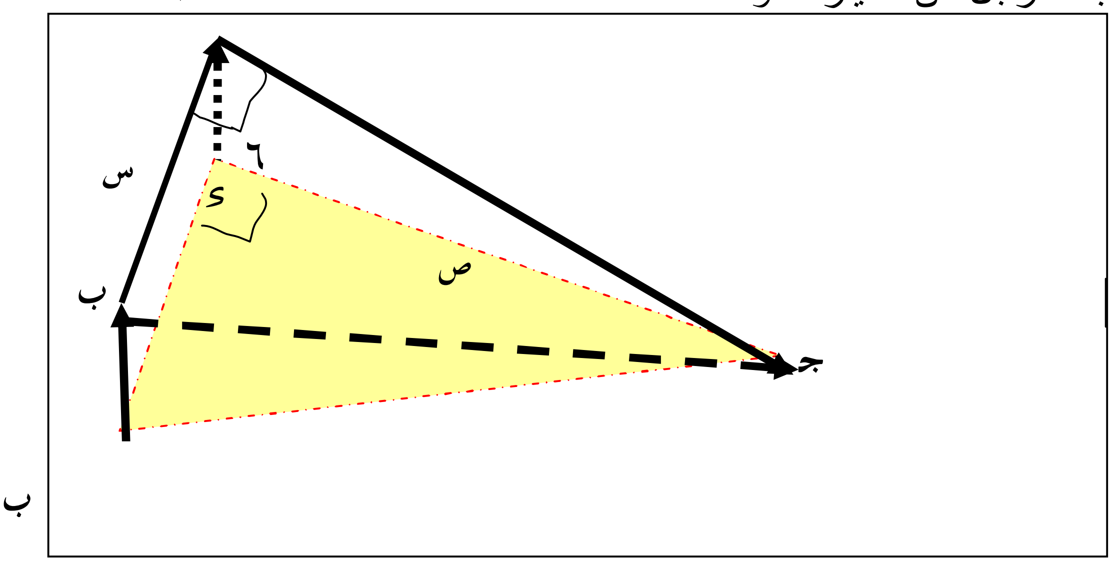
بعد الرجل عن ا هي س و $\frac{دس}{دن} = ٣$ وبعد السيارة عن د هي ص $\frac{دص}{دن} = ٦٠$

$ف^٢ = س^٢ + (اجـ)^٢$ لكن $(اجـ)^٢ = ٣٦ + ص^٢$

$ف^٢ = س^٢ + ص^٢ + ٣٦$ تذكر ان مربع قطر متوازي المستطيلات يساوي مجموع مربعات ابعاده الثلاث

$٢ف\frac{دف}{دن} = ٢س\frac{دس}{دن} + ٢ص\frac{دص}{دن}$

بعد الرجل عن السيارة هو ف




لكن بعد دقيقة

$$\text{س} = \frac{٣٠٠٠}{٦٠} = ٥٠ \text{، ص} = \frac{٦٠٠٠٠}{٦٠} = ١٠٠٠ \Leftarrow \text{ف}^{٢} = ٢٥٠٠ + ١٠٠٠٠٠٠ + ٣٦$$

$$= ١٠٠٢٥٣٦$$

$$٢\sqrt{١٠٠٢٥٣٦}\,\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٢(٥٠)(٥٠) + ٢(١٠٠٠)(١٠٠٠)$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٢٠٠٥٠٠٠}{٢\sqrt{١٠٠٢٥٣٦}}$$

مسألة مضمار سباق دائري يوجد على طرف قطره مصدر ضوء انطلق حصان من نهاية قطر اخر عمودي على القطر الاول مقتربا من المركز بسرعة ٤كم\دقيقة جد سرعة تغير ظل الحصان على المضمار عندما يقطع الحصان نصف المسافة

الحل : ملاحظة هنالك الكثير من الحلول لهذه المسألة وهي بكل صدق ليست مقنعة وهنا حاولت ان اقدم حلا اكثر دقة رغم انه صعب والشيء الاخر هو سرعة الحصان ٤كم\د = ٢٤٠ كم \سا سرعة تكفي الحصان للطيران جوا

بفرض ارتفاع الانارة أد وطول الشخص وك = مَف وبالتالي طول الخيال لحظة البدء مَب

نلاحظ ان النسبة $\frac{\text{مَف}}{\text{أد}}$ هي نسبة ثابتة

وحسب التشابه في كل من المثلثين القائمين د أب، د أجـ

$$\frac{\text{بَمَ}}{\text{بَأ}} = \frac{\text{مَف}}{\text{أد}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{جـو}}{\text{جـأ}} = \frac{\text{ك و}}{\text{أد}} \quad \text{لكن} \quad \frac{\text{مَف}}{\text{أد}} = \frac{\text{ك و}}{\text{أد}}$$

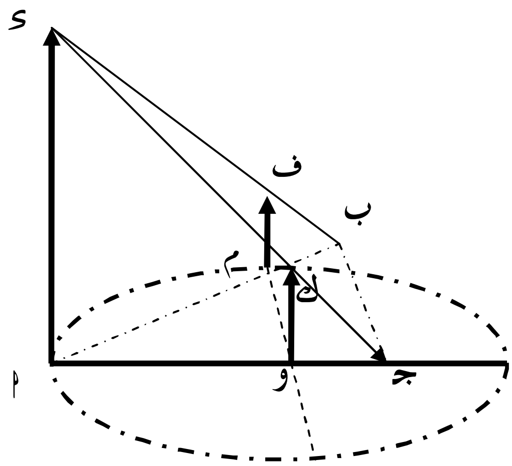
اذا $\frac{\text{بَمَ}}{\text{بَأ}} = \frac{\text{جـو}}{\text{جـأ}}$ وحسب نظرية العكس ل تالس فان جب يوازي وم مما يعني ان راس الخيال سوف يتحرك على مستقيم مواز للقطر الذي يسير عليه

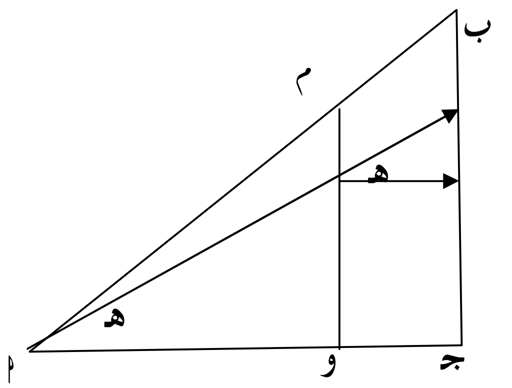
$\frac{\text{جو}}{\text{جو}+\text{نق}} = \frac{\text{وك}}{\text{أد}} = \text{ن}$ نسبة طول الحصان الى طول الانارة وهي نسبة ثابته

$$\frac{\text{جو}}{\text{جو}+\text{نق}} = \text{ن} \Leftarrow \text{وجـ} = \text{ن}(\text{جو}) + \text{ن نق} \Leftarrow (١-\text{ن})\text{وجـ} = \text{ن نق} \Leftarrow \text{وجـ} = \frac{\text{ن نق}}{١-\text{ن}}$$

لكن $\text{ل جتاهـ} = \text{وجـ}$ وبالتالي عندما $\text{س} = \frac{\text{نق}}{٢}$ فان $\text{ظاهـ} = \frac{١}{٢} \Leftarrow ١+\frac{١}{٤} = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}} \Leftarrow \text{جتاهـ} = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$

$\text{ل} = \frac{\sqrt{٥}}{٢}\,\frac{\text{ن نق}}{١-\text{ن}}$ حيث ل طول الخيال و هـ زاوية الظل مع قطر الدائرة




نلاحظ ان طول الخيال ضرب جتاهـ يساوي مقدار ثابت هو وجـ المرتسم فاذا فرضنا طول الخيال ل

اذا ل×جتاهـ = ثابت

نشتق بالنسبة للزمن

$$\frac{\text{دل}}{\text{دن}}\text{جتاهـ} - \text{ل}\times\text{جاهـ}\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = ٠ \Leftarrow \frac{\text{دل}}{\text{دن}}\text{جتاهـ} = \text{ل}\times\text{جاهـ}\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} \Leftarrow \frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \text{ل}\times\text{ظاهـ}\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$$

لكن $\text{ظاهـ} = \frac{\text{نق}-\text{س}}{\text{نق}} = ١-\frac{\text{س}}{\text{نق}}$ حيث نق نصف قطر الدائرة الملعب س المسافة المقطوعة

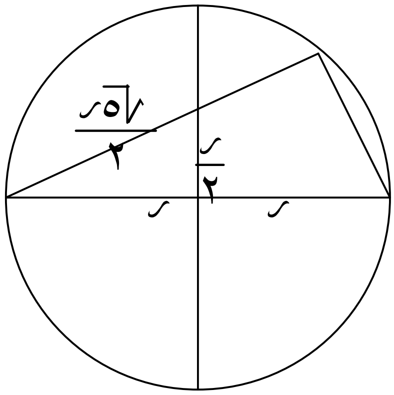
$$(١+\text{ظا}^{٢}\text{هـ})\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = -\frac{١}{\text{نق}}\frac{\text{دس}}{\text{دن}} \Leftarrow \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = -\frac{١}{\text{نق}(١+\text{ظا}^{٢}\text{هـ})}\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$$

$$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = -\frac{\text{ل}\times\text{ظاهـ}}{\text{نق}(١+\text{ظا}^{٢}\text{هـ})}\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$$

وعندما $\text{س} = \frac{١}{٢}\text{نق}$ فان $\text{ظاهـ} = \frac{١}{٢}$

$$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = -\frac{\text{ل}\times\frac{١}{٢}}{\text{نق}\left(١+\frac{١}{٤}\right)}\text{ع} = \frac{٨}{٥}\,\frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{٨}{٥\text{نق}}\,\frac{\sqrt{٥}}{٢}\,\frac{\text{ن نق}}{١-\text{ن}} = \frac{٤}{\sqrt{٥}}\,\frac{\text{ن}}{١-\text{ن}}$$

اذا كان راس ظل الحصان على المضمار عندما كان منتصف المسافة




فان نسبة طول الحصان الى طول المنارة

$$2\text{ر}\,\frac{\text{ر}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\text{ر}}-\frac{\sqrt{5}}{2}\text{ر}=\frac{4}{\sqrt{5}}\text{ر}-\frac{\sqrt{5}}{2}\text{ر}=\frac{3}{2\sqrt{5}}\text{ر}$$

$$\text{ن}=\frac{\frac{3}{2\sqrt{5}}\text{ر}}{\frac{4}{\sqrt{5}}\text{ر}}=\frac{3}{2\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{3}{8}$$

$$\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\,\frac{\text{ن}}{1-\text{ن}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\,\frac{\frac{3}{8}}{1-\frac{3}{8}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\times\frac{3}{8}\times\frac{8}{5}=\frac{12}{5\sqrt{5}}$$

٧- مساحة المربع (دائرة تمس مربع داخلا ) جد معدل تغير المساحة بينهما عندما يكون طول ضلع المرب ٢٠سم

$\text{م}=\text{س}^2$ و س طول ضلع المربع ونصف قطر الدائرة داخل المربع $\text{نق}=\frac{\text{س}}{2}$

المساحة بين المربع والدائرة $\text{ع}=\text{س}^2-\frac{\pi}{4}\text{س}^2=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\text{س}^2 \Leftarrow \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}=2\text{س}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$$\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}=2\text{س}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} \Leftarrow \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}=2\times20\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\times4=160(4-\pi)$$

تطبيق على النقط الحرجة

ليكن الاقتران $\text{ق(س)}=\text{أس}^3+\text{بس}^2+\text{جـس}+\text{ء}$ اثبت ان الشرط الازم والكافي ليكون لخطه البياني نقطة حرجة وحيدة $(1،\text{ق}(1))$ هي هو $\text{ب}=-3\text{أ}$ و $\text{جـ}=3\text{أ}$

الحل

لزوم الشرط ل ق نقطة حرجة وحيدة هي $(1،\text{ق}(1))$ عندئذ يتحقق $\text{ب}=-3\text{أ}$ و $\text{جـ}=3\text{أ}$

بما ان الاقتران كير حدود فانه قابل للاشتقاق على ح ومشتقة هو

$\text{ق}'(\text{س})=3\text{أس}^2+2\text{بس}+\text{جـ}$ وبما ان $(1،\text{ق}(1))$ نقطة حرجة وحيدة فان الواحد هو جذر مضاعف للمعادلة $\text{ق}'(\text{س})=0$ أي ان $\text{ق}'(1)=0$ تكافئ $3\text{أ}+2\text{ب}+\text{جـ}=0 \Leftrightarrow \text{جـ}=-3\text{أ}-2\text{ب}$

وجذر مضاعف $\Delta=4\text{ب}^2-4(3\text{أ})\text{جـ}=0$ نعوض قيمة جـ نجد $4\text{ب}^2-4(3\text{أ})(-3\text{أ}-2\text{ب})=0$

$4\text{ب}^2+36\text{أ}^2+24\text{أب}=0 \Leftrightarrow (2\text{ب}+6\text{أ})^2=0 \Leftrightarrow \text{ب}=-3\text{أ}$ نعوض نجد $\text{جـ}=3\text{أ}$

كفاية الشرط اذا كان $\text{ب}=-3\text{أ}$ و $\text{جـ}=3\text{أ}$ فان للاقتران نقطة حرجة وحيدة هي $(1،\text{ق}(1))$

وجدنا ان الاقتران اشتقاقي على ح $\text{ق}'(\text{س})=3\text{أس}^2+2\text{بس}+\text{جـ}$ نعوض قيم كل من جـ،ب

$\text{ق}'(\text{س})=3\text{أس}^2-6\text{أس}+3\text{أ}=3\text{أ}(\text{س}^2-2\text{س}+1)=3\text{أ}(\text{س}-1)^2$ ولهذة المعادلة جذر وحيد هو $\text{س}=1$ وبالتالي للخط البياني نقطة حرجة وحيدة هي $(1،\text{ق}(1))$

ملاحظة تتعلق بمؤلف الكتاب

ليكن الاقتران $ق(س) = \begin{cases} س\sqrt{س} & س \geq ٠ \\ -س\sqrt{-س} & س < ٠ \end{cases}$ هذا الاقتران قابل للاشتقاق على كل من الفترتين المفتوحتين $(-\infty، ٠)$،$(٠، +\infty)$ والمشتق

$ق'(س) = \begin{cases} \frac{٣س^{٢}}{٢\sqrt{س^{٣}}} & س > ٠ \\ \frac{٣س^{٢}}{٢\sqrt{-س^{٣}}} & س < ٠ \end{cases}$ طبعا هذا الاقتران حسب القاعدة غير قابل للاشتقاق

عند الصفر ولا يجوز ان نختصر البسط والمقام لنقول انه قابل للاشتقاق عند الصفر ولذلك علينا ان نبحث قابلية الاشتقاق عند الصفر وفق التعريف

$\lim_{س \to ٠^{+}} \frac{س\sqrt{س} - ٠}{س - ٠} = \lim_{س \to ٠^{+}} \sqrt{س} = ٠$

أي ان هذا الاقتران قابل للاشتقاق عند الصفر لذلك

$\lim_{س \to ٠^{-}} \frac{-س\sqrt{-س} - ٠}{س - ٠} = \lim_{س \to ٠^{-}} -\sqrt{س} = ٠$

ناخذ القواعد على فترات مفتوحة وندرس قابلية الاشتقاق عند نقط معينه وفق التعريف

اما القاعدة $ق(س) = (ل(س))^{ن}$ فنشترط $ل(س)$ قابل للاشتقاق على فترة مفتوحة محتواة في $(٠، +\infty)$ لتطبيق القاعدة $ق'(س) = ن\,ل'(س)(ل(س))^{ن-١}$

تدريب اوجد مشتقة الاقتران على ح

$ق(س) = \begin{cases} س^{٢}جا\frac{١}{س} & س \neq ٠ \\ ٠ & س = ٠ \end{cases}$

ملاحظة هامة جدا انا كتبت الكثير من قنعاتي التي اختلف فيها مع مؤلف الكتاب وزملائي ولدي الكثير جدا من الملاحظات الجوهرية على الكتاب وامتلك الحجة والمنطق ان شا الله لكن بالنسبة لك ايها الطالب لا تكتب الا ما هو مكتوب فقط بالكتاب التزم حرفيا بالكتاب حتى الجدول الذي كتبته انا اجعله مشابها للكتاب فقط

التقعر
لنعرف مفهوم فوق ومفهوم تحت
نقول عن النقطة $(س_1، ص_1)$ انها فوق النقطة $(س_1، ص_2)$ اذا كانت $ص_1 \succ ص_2$ لاحظ ان للنقطتين نفس الفاصلة وبالتالي منحنى الاقتران ه(س) فوق منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [أ،ب] لاجل كل $س_1 \in [أ،ب]$ فان $ه(س_1) \succ ق(س_1)$

تعريف ليكن ق اقتران معرفا على الفترة [أ،ب] وقابلا للاشتقاق على الفترة (أ،ب) فيكون منحنى ق
١- مقعرا للاسفل على الفترة [أ،ب] اذا وقعت جميع مماساته فوق منحني الاقتران ق في الفترة [أ،ب]
٢- مقعرا للأعلى على الفترة [أ،ب] اذا وقعت جميع مماساته تحت منحني الاقتران ق في الفترة [أ،ب]
ملاحظة حول التعريف (صحيح انه يحق للمعرف سرد التعريف الذي يريده لكن من الافضل ان يكون التعريف منسجم مع التعريف المتعارف عليه رياضيا )
في هذا التعريف يشرط فقط وجود مماسات عند كل نقط الفترة (أ،ب) وماذا عن النقطتين أ،ب المعرف عندها الاقتران فهي قد تقع فوق او تحت المماسات او قد تقبل احد النقطتين او كل منهما نصف مماس مواز لمحور الصادات عندها سيقع نصف المماس على يمين او يسار المنحنى وليس فوق او تحت المنحنى مثلا
الاقتران $ق(س) = \sqrt{٤ - س^٢}$ معرف ومتصل على الفترة [أ،ب] وقابل للاشتقاق على (أ،ب) وهو يقبل مماسات عند كل نقط الفترة (أ،ب) ويقبل نصفي مماسين عند كل من أ،ب وهما يقعان على يمين ويسار المنحنى
من الافضل ان نعرف التقعر في فترة مفتوحة يكون المنحني قابل للاشتقاق عليها
نظرية
اذا كان ق اقتران متصلا على الفترة [أ،ب] وكان ق قابل للاشتقاق مرتين على (أ،ب) فانه
١) يكون منحنى ق مقعرا للاسفل على الفترة [أ،ب] اذا كان $ق''(س) \prec ٠$ لكل $س \in (أ،ب)$
٢) يكون منحنى ق مقعرا للاعلى على الفترة [أ،ب] اذا كان $ق''(س) \succ ٠$ لكل $س \in (أ،ب)$
ملاحظة بالتعريف كان يشرط ان يكون معرف على الفترة [أ،ب] وفي النظرية يشترط الاتصال على الفترة [أ،ب]
ملاحظة في الكتاب بالجدول المقلوب للتقعر يضع في السطر الاول ق(س) ويضع مقابل له جهتة التقعر ان ق(س) هي قيم الاقتران اما التقعر فهو للخط البياني له من الافضل ان يكتب جهة تقعر ق
مثال:
حدد جهة تقعر منحني الاقتران ق المعرف على الفترة ح وفق العلاقة $ق(س) = س^٣ - ٦س^٢$
الاقتران كثير حدود قابل للاشتقاق مرتين على ح

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ١٢س$

$ق''(س) = ٦س - ١٢ = ٦(س - ٢)$

ينعدم المشتق الثاني عندما $س = ٢$

| س | $\infty$ | ٢ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $ق''(س)$ | +++++++++ | ٠ | ------------ |
| جهة تقعر الخط | $\cup$ | | $\cap$ |

نقط الانعطاف

تعريف اذا كان ق اقتران متصلا على فترة مفتوحة تحوي $س_١$ وكان منحنى ق يغير اتجاه تقعره عند $س_١$ النقطة $(س_١، ق(س_١))$ تسمى نقطة انعطاف لمنحنى ق

ملاحظة حول التعريف كلمة فترة تحوي $س_١$ يجب ان تكون كلمة تظم $س_١$ لان $س_١$ عنصر وهو ينتمي للمجموعة والمجموعة تحوي مجموعة ولا تحوي عنصر

المتعارف عليه رياضيا ان المنحني يمتلك مماسا يخترق المنحني في نقطة الانعطاف وان المنحنى يغير جهة تقعره على جانبي هذا المماس

لكن سنتعامل مع التعريف بالكتاب بشكل حرفي كما ورد

مثال : عين قاعدة الاقتران $ق(س) = أس^{٣} + بس^{٢} + جس + د$ $\quad أ \neq ٠ \{أ، ب، جـ، د\} \in ح$

اذا علمت ان منحناه يمر (١،٥) من ومعادلة المماس لمنحناه في نقطة الانعطاف (٢،١) هي

$ص + ٣س - ٧ = ٠$

الحل :اقتران كثير حدود قابل للاشتقاق مرتين على ح

$ق'(س) = ٣أس^{٢} + ٢بس + جـ$

$ق''(س) = ٦أس + ٢ب$

يمر منحناه من (١،٥) اذا $ق(١) = ٥$

$أ + ب + جـ + د = ٥ \qquad (١)$

له نقطة انعطاف في (٢،١) إذا $٨أ + ٤ب + ٢جـ + د = ١ \qquad (٢)$

ويتحقق أيضا $ق''(٢) = ٠$ أي ان $ق''(٢) = ١٢أ + ٢ب = ٠$

وميل المماس $م = -٣$ وهو $ق'(٢) = -٣$

$١٢أ + ٤ب + جـ = -٣ \qquad (٣)$

بحل هذه المعادلات نجد $أ = -١$، $ب = ٦$، $جـ = -١٥$، $د = ١٥$ ددد

$ق(س) = -س^{٣} + ٦س^{٢} - ١٥س + ١٥$

اختبار المشتقة الثانية للقيم المحلية

على فرض ان $ق'(س)$، $ق''(س)$ معرفتان عند $س_١ \in (أ، ب)$ عندئذ

١- اذا كان ق $'$(س$_١$) = ٠ و ق $''$(س$_١$) $\succ$ ٠ فان للاقتران ق قيمة صغرى محليه عند س$_١$ هي ق(س$_١$)

٢- اذا كان ق $'$(س$_١$) = ٠ و ق $''$(س$_١$) $\prec$ ٠ فان للاقتران ق قيمة عظمى محليه عند س$_١$ هي ق(س$_١$)

٣- اذا كان ق $'$(س$_١$) = ٠ و ق $''$(س$_١$) = ٠ ق(س$_١$) هنا يفشل الاختبار

ملاحظة : لا نطبق الاختبار اذا كان من الصعب الحصول على المشتقة الثانية ومن الافضل ان نستخدم اختبار المشتقة الاولى او التعريف

تدريب : اوجد القيم المحلية للاقتران ق(س) = $\frac{١}{٢}$س$^{٤}$ − س$^{٢}$ + ٣

الحل اقتران كثير حدود قابل للاشتقاق مرتين على ح

ق(س) = $\frac{١}{٢}$س$^{٤}$ − س$^{٢}$ + ٣

ق $'$(س) = ٢س$^{٣}$ − ٢س = ٢س(س$^{٢}$ − ١) = ٢س(س − ١)(س + ١)

ق $''$(س) = ٦س$^{٢}$ − ٢

ينعدم ق $'$(س) عندما س=٠ وهنا نجد ق $''$(س) = −٢ $\prec$ ٠ اذا ق(٠) = ٣ قيمة عظمى محلية

ينعدم ق $'$(س) عندما س=١ وهنا نجد ق $''$(س) = ٤ $\succ$ ٠ اذا ق(١) = $\frac{٥}{٢}$ قيمة صغرى محلية

ينعدم ق $'$(س) عندما س = −١ وهنا نجد ق $''$(س) = ٤ $\succ$ ٠ اذا ق(−١) = $\frac{٥}{٢}$ قيمة صغرى محلية

او من الجدول

| س | +∞ | | ١ | | ٠ | | -١ | | −∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ق $'$(س) | | ++++ | ٠ | -- - | ٠ | ++ ++ | ٠ | ----------- | |
| ق(س) | | ↗ | $\frac{٥}{٣}$ | ↘ | ٣ | ↗ | $\frac{٥}{٣}$ | ↘ | |

تدريب : ادرس جهة تقعر الخط البياني للاقتران ق(س) = س$^{٣}$ +جاس

الحل اقتران معرف ومتصل وقابل للاشتقاق مرتين على ح

ق(س) = س$^{٣}$ +جاس

ق $'$(س) = ٣س$^{٢}$ +جتاس

ق $''$(س) = ٦س−جاس

من الملاحظ ان المشتق الثاني ينعدم عندما س = ٠ ولاثبات انه جذر وحيد نشتق مرة اخرى

ق $'''$(س) = ٦−جاس $\succ$ ٠ مما يعني ان اقتران المشتق الثاني متزايد وبالتالي الجذر وحيد

| | | | |
|---|---|---|---|
| س | $\infty$ | ٠ | $-\infty$ |
| ص ً (س) | +++++++++ | ٠ | ------------ |
| جهة تقعر الخط | تقعر نحو الاعلى $\cup$ | | $\cap$ تقعر نحو الاسفل |

والنقطة (٠،٠) هي نقطة انعطاف لقد غير المنحنى عندها جهة تقعره

# تطبيقات القيم القصوى

كيف نحل هذه المسائل

لا شك أن هذه المسائل متنوعة ومختلفة وبالتالي هي بحاجة لمعرفة كبيرة في الرياضيات ولذلك على الطالب قراءة المراجعة بشكل جيد

ولحل هذه المسائل علينا ان نتبع الخطوات التالي

١- نحاول الرسم إن كان موجود

٢- أن نحدد المتغيرات المستقلة والمرتبطة منه

٣- ان نجد علاقة ربط بين المتغيرات استخدام ٠٠٠ تالس٠٠٠٠ فيثاغورث الخ

٤- ان نجد العلاقة المطلوبة ونحولها الى اقتران يتبع متحول مستقل واحد فقط

٥- ندرس تزايد وتناقص هذا الاقتران على مجاله المحدد مسبقا ونضع المعلومات في جدول ونحدد من خلاله متى يبلغ اكبر او اصغر قيمة له

تدريب اذا كان مجموع عدد مع ثلاثة امثال عدد اخر يساوي ٦٠ جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما اكبر ما يمكن

الحل نفرض ان العدد الاول س والثاني ص اذا س + ٣ص = ٦٠ ⟸ س = ٦٠ − ٣ص

حاصل ضرب العددين

ق(ص) = ع = ص(٦٠ − ٣ص)

ع = ٦٠ص − ٣ص$^{٢}$

المجال ح

الاقتران قابل للاشتقاق على ح ومشتقه ع$'$ = ٦٠ − ٦ص = ٦(١٠ − ص)

ينعدم المشتق عندما ص = ١٠ وبالتالي ق(١٠) = ٣٠٠

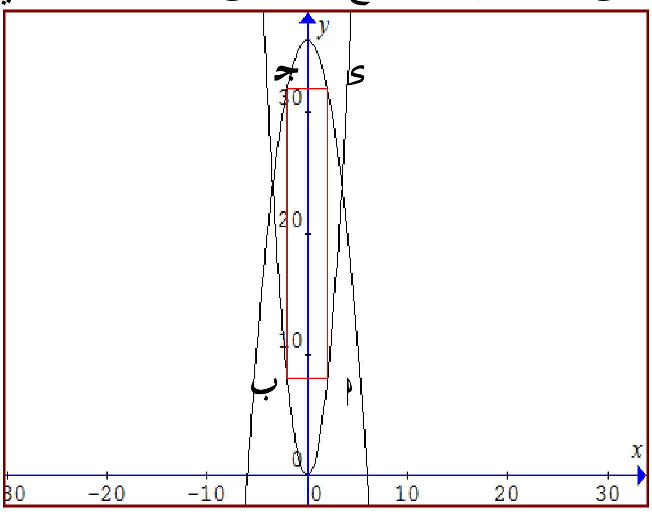
| ص | ∞ | ١٠ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| ع$'$ | --------------- | ٠ | +++++++++++++++ |
| ع | ↘ | ٣٠٠ | ↗ |

من الجدول ق(١٠) = ٣٠٠ قيمة كبرى محلية اذا ص = ١٠

س = ٦٠ − ٣٠ = ٣٠

او نستخدم معيار المشتق الثانية ع$''$ = −٦ < ٠ اذا ق(١٠) = ٣٠٠ قيمة كبرى محلية

تدريب : ابجد مستطيل يقع داخل المنحنين ق(س) = ٢س$^{٢}$ ،هـ(س) = ٣٦ − س$^{٢}$ يقع ا ، ب على ق والراسان ج ،د على هـ جد بعدي المستطيل ابجد لتكون مساحته اكبر ما يمكن



مساحة المستطيل تساوي الطول ضرب العرض $م = ق(س) = أب \times أد$

بفرض احداثيا $أ(س،٢س^{٢})$ الواقعة في الربع الأول وهذا يعني أن $س > ٠$

فيكون احداثيا $ب(-س،٢س^{٢})$ أما $د(س،٣٦ - س^{٢})$

وبالتالي $أد = ٣٦ - س^{٢} - ٢س^{٢} = ٣٦ - ٣س^{٢}$

$أب = ٢س$

$م = ق(س) = ٢س(٣٦ - ٣س^{٢})$

مجال الاقتران لنجد نقط التقاطع $٣٦ - س^{٢} = ٢س^{٢} \Leftarrow ٣٦ = ٣س^{٢} \Leftarrow س^{٢} = ١٢$

بما أن س موجب $٠ < س < ٢\sqrt{٣}$

الاقتران ق قابل للاشتقاق على $(٠، ٢\sqrt{٣})$ ومشتقه

$ق'(س) = ٢(٣٦ - ٣س^{٢}) + (-٦س)(٢س) = ٧٢ - ٦س^{٢} - ١٢س^{٢} = ٧٢ - ١٨س^{٢}$

$= ١٨(٤ - س^{٢}) = ١٨(٢ + س)(٢ - س)$

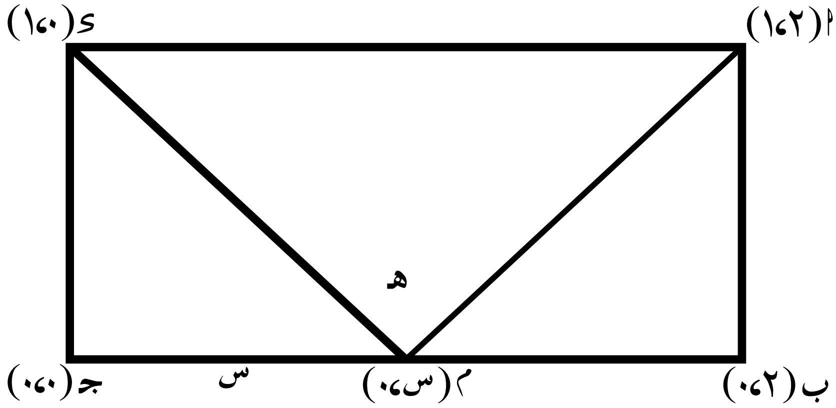
ينعدم المشتق عندما $س = -٢$ مرفوض و $س = ٢$ مقبول $ق(٢) = ٩٦$

| ص | $٢\sqrt{٣}$ | | ٢ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ق'(س)$ | || | --------------- | ٠ | ++++++++++++ | || |
| ق | || | ↘ | ٩٦ | ↗ | || |

يبلغ ق أعظم ما يمكن عندما $س=٢$

وبالتالي أبعاد المستطيل $أب = ٤$ ، $أد = ٢٤$ والمساحة $ق(٢) = ٩٦$

تدريب يمثل الشكل أبجد مستطيل حيث ب(٢،٠)د(٠،١) م نقطة مفروضة على الضلع بجـ وعلى بعد س من نقطة الأصل جـ ووصل م أ،م د فتكونت الزاوية هـ جد قيمة س التي تجعل الزاوية هـ اكبر ما يمكن




ملاحظة هامة جدا : إن فكرة الحل بالطريقة التالية بحيث يحسب

$$\text{ظاهـ} = \frac{٢}{(\text{س} - ١)^{٢}}$$

$$\text{قا}^{٢}\text{هـ} \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءس}} = \frac{-٤(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)^{٤}} \qquad \text{الشرط س} \neq ١$$

هي خاطئة لان ظاهـ غير معرف عند القيمة $\frac{\pi}{٢}$ وبالتالي غير قابل للاشتقاق عنده فكيف يبلغ اعظم ما يمكن عند هذه القيمة فهل هذه رياضيات

الحل المثلث ءجـم حسب فيتاغورث نجد م‌ء= $\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}$

ومن المثلث ابم نجد م‌ب = ٢ − س و ام = $\sqrt{١ + (٢ - \text{س})^{٢}} = \sqrt{٥ - ٤\text{س} + \text{س}^{٢}}$

ومساحة المثلث ام‌ء ثابتة وتساوي ع = $\frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ = ١$

لكن المساحة من جهة أخرى ع = $\frac{١}{٢}(\text{ام}) \times (\text{مء})\text{جاهـ} = \frac{١}{٢}\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} \times \sqrt{٥ - ٤\text{س} + \text{س}^{٢}}$

$$\frac{١}{٢}\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} \times \sqrt{٥ - ٤\text{س} + \text{س}^{٢}}\,\text{جاهـ} = ١$$

$$\text{جاهـ} = \frac{٢}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} \times \sqrt{٥ - ٤\text{س} + \text{س}^{٢}}}$$

$$\text{جاهـ} = \frac{٢}{\sqrt{(\text{س}^{٢} + ١)(٥ - ٤\text{س} + \text{س}^{٢})}} = \frac{٢}{\sqrt{\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٥}}$$

$$\text{جاهـ} = ٢(\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٥)^{\frac{-١}{٢}}$$

$$\text{جتاهـ}\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءس}} = -(٤\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}^{٢} + ١٢\text{س} - ٤)(\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٥)^{\frac{-٣}{٢}}$$

$$\text{جتاهـ}\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءس}} = \frac{-(٤\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}^{٢} + ١٢\text{س} - ٤)}{\sqrt{(\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٥)^{٣}}} = \frac{-٤(\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١)}{\sqrt{(\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٥)^{٣}}}$$

$$\text{جتاهـ}\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءس}} = \frac{-٤(\text{س} - ١)^{٣}}{\sqrt{(\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٥)^{٣}}} \qquad \text{تنعدم المشتقة عندما س} = ١$$

$$\text{جاهـ} = \frac{٢}{\sqrt{٢}\sqrt{٢}} = ١ \qquad \text{اذا} \qquad \text{هـ} = \frac{\pi}{٢}$$

| س | ٢ | | ١ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| هـ$'$(س) | \|\| | --------------- | ٠ | +++++++++++ | \|\| |
| هـ | \|\| | ↘ | $\frac{\pi}{٢}$ | ↗ | |

هـ اعظم ما يمكن عندما س=١

اما من اجل اصحاب الترف الرياضي واتمنى ان يكون عددهم كبير في هذا الوطن فيمكن حل المسألة بالشكل التالي

نحسب جاهـ = $\frac{٢}{\sqrt{س^{٤} - ٤س^{٣} + ٦س^{٢} - ٤س + ٥}}$ حيث س∈[٠،٢] ثم نأخذ الطرف الثاني ونعتبرة

اقتران ص = $\frac{٢}{\sqrt{س^{٤} - ٤س^{٣} + ٦س^{٢} - ٤س + ٥}}$ ثم نجد مدى هذا الاقترن عندما س∈[٠،٢]

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٤(س-١)^{٣}}{\sqrt{\left(س^{٤} - ٤س^{٣} + ٦س^{٢} - ٤س + ٥\right)^{٣}}}$ ينعدم المشتق عندما ١∈[٠،٢] وقيمة الاقتران عند

الواحد هي واحد ثم نشكل جدول

| س | ٢ | | ١ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| ص\ | \|\| | --------------- | ٠ | +++++++++++ | \|\| |
| ص | $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ | ↘ | ١ | ↗ | $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ |

من الجدول نجد ان مدى الاقتران ص هي الفترة $\left[\frac{٢}{\sqrt{٥}}،١\right]$ وهي مجوعة قيم ص =جاهـ وبالتالي فان هذا الاقتران يبلغ حده الاعلى وهو واحد عندما س = ١ وهذا يوافق هـ = $\frac{\pi}{٢}$

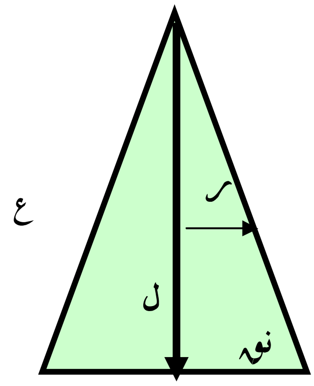
تدريب

اوجد اكبر اسطوانة يمكن ان توضع داخل مخروط

بفرض نصف قطر قاعدة المخروط نق وارتفاعه ع وهي ثوابت

ونصف قطر قاعدة الاسطوانة ر وارتفاعها ل متغيرات

حسب التشابه $\frac{\text{ر}}{\text{نق}} = \frac{\text{ع} - \text{ل}}{\text{ع}} \Rightarrow \text{ل} = \text{ع} - \frac{\text{ع ر}}{\text{نق}} = \text{ع}\left(١ - \frac{\text{ر}}{\text{نق}}\right)$




حجم الاسطوانة $\text{ح} = \pi \text{ر}^٢ \text{ل} = \pi \text{ر}^٢ \left(\text{ع} - \frac{\text{ع ر}}{\text{نق}}\right)$

$\text{ح} = \pi \text{ر}^٢ \text{ل} = \text{ع} \pi \text{ر}^٢ - \frac{\text{ع} \pi \text{ر}^٣}{\text{نق}}$ المتغير الوحيد هو ر

$\text{ح} = \text{ع} \pi \text{ر}^٢ - \frac{\text{ع} \pi \text{ر}^٣}{\text{نق}}$

$\text{ح}' = ٢\text{ع} \pi \text{ر} - \frac{٣\text{ع} \pi \text{ر}^٢}{\text{نق}}$

$\text{ح}' = \text{ع ر} \pi \left(٢ - \frac{٣\text{ر}}{\text{نق}}\right)$

ينعدم المشتق عندما $\text{ر} = ٠$ مرفوض

$٢ - \frac{٣\text{ر}}{\text{نق}} = ٠ \Rightarrow \text{ر} = \frac{٢\text{نق}}{٣}$ اذا $\text{ل} = \text{ع} - \frac{\text{ع}}{\text{نق}} \cdot \frac{٢\text{نق}}{٣} = \frac{١}{٣}\text{ع}$

$\text{ح} = \pi \frac{٤\text{نق}^٢}{٩} \cdot \frac{١}{٣}\text{ع} = \frac{٤}{٩} \cdot \frac{\pi}{٣} \text{نق}^٢ \text{ع} = \frac{٤}{٩}$ ضرب حجم المخروط

| ر | نق | | $\frac{٢\text{نق}}{٣}$ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| ح′ | \|\| | --------------- | ٠ | ++++++++++++ | \|\| |
| ح | \|\| | ↘ | $\frac{٤}{٩} \cdot \frac{\pi}{٣} \text{نق}^٢ \text{ع}$ | ↗ | \|\| |

حجم الاسطوانة أعظم ما يمكن عندما $\text{ر} = \frac{٢\text{نق}}{٣}$ و $\text{ح} = \frac{٤}{٩} \cdot \frac{\pi}{٣} \text{نق}^٢ \text{ع}$

تدريب ٢

صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها ١٢ قص من زواياها الأربع أربعة مربعات متساوية طول كل منها س ثم أصبحت علبة مفتوحة من الاعلى جد س ليكون حجم العلبة اكبر ما يمكن

الحل أبعاد العلبة هي ١٢-٢س و ١٢-٢س و س

الحجم ع = س(١٢ – ٢س)$^{٢}$ ⟸ ع = س(١٤٤ – ٤٨س + ٤س$^{٢}$) = ١٤٤س – ٤٨س$^{٢}$ + ٤س$^{٣}$

مجال الاقتران ح هو ٠ ≻ س ≻ ٦

ع$'$ = ١٤٤ – ٩٦س + ١٢س$^{٢}$ ⟸ ع$'$ = ١٢(١٢ – ٨س + س$^{٢}$) ⟸ ع$'$ = ٣(س – ٢)(س – ٦)

ينعدم المشتق عندما س=٦ مرفوض وس=٢ مقبول ينتمي للمجال و ع = ١٢٨

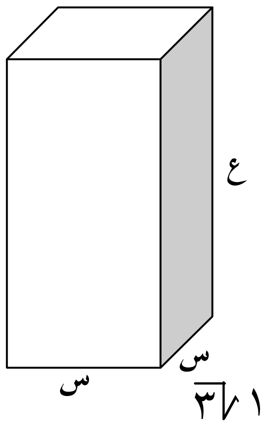
| س | ٦ | | ٢ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| ن$'$(س) | \|\| | --------------- | ٠ | ++++++++++++ | \|\| |
| ن | \|\| | ↘ | ١٢٨ | ↗ | |

حجم العلبة اكبرل ما مكن عندما س=٢ و ح= ١٢٨ لانها قيمة كبرى مطلقة

تدريب : كرة مصمتة قطرها ١٠ سم داخلها متوازي مستطيلات قاعدة مربع طول ضلعه س وارتفاعه ع جد ابعادة ليكون حجمه اكبر ما يمكن

الحل :

قطر متوازي الاضلاع ف = $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س}^{٢} + \text{ع}^{٢}}$ ⟸ ١٠٠ = ٢س$^{٢}$ + ع$^{٢}$




الحجم ع = س × س × ع ⟸ ع = س$^{٢}$ × ع

ع = $\frac{\text{١٠٠ – ع}^{٢}}{٢}$ × ع ⟸ ع = $\frac{١}{٢}$(١٠٠ع – ع$^{٣}$)

ع$'$ = $\frac{١}{٢}$(١٠٠ – ٣ع$^{٢}$) = $\frac{١}{٢}$(١٠ – $\sqrt{٣}$ع)(١٠ + $\sqrt{٣}$ع)

ينعدم المشتق عندما ع = $\frac{١٠}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$ مقبول

ع = $\frac{١}{٢}$(١٠٠ $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$ – $\frac{٣٠٠٠\sqrt{٣}}{٢٧}$) = $\frac{١}{٢}$ $\frac{٦٠٠٠\sqrt{٣}}{٢٧}$ = $\frac{١٠٠٠\sqrt{٣}}{٩}$

وعندما ع = $\frac{-١٠}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{-١٠\sqrt{٣}}{٣}$ مرفوض

مجال الاقتران ٠ ≻ س ≻ ٢٠ و ٠ ≻ ع ≻ ٢٠

| ع | ٢٠ | | $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| ع$'$(ع) | \|\| | --------------- | ٠ | ++++++++++++ | \|\| |
| ع | \|\| | ↘ | $\frac{١٠٠٠\sqrt{٣}}{٩}$ | ↗ | |

اذا ح أعظم ما يمكن عندما ع $= \frac{١٠}{\sqrt{٣}} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$ و

$١٠٠ = ٢س^{٢} + \frac{٣٠٠}{٩} \Leftarrow ٢س^{٢} = \frac{٦٠٠}{٩} = \frac{٢٠٠}{٣} \Leftarrow س^{٢} = \frac{١٠٠}{٣}$ اذا س $= \frac{١٠}{\sqrt{٣}}$

اعظم ما يمكن عندما يكون مكعب

تمارين ومسائل ص ٢١٠

١- مستطيلة الابعاد س و ص المحيط ح = ٦٠٠ جد البعدين لتكون المساحة اكبر ما يمكن

الحل

$٦٠٠ = ٢(س + ص) \Leftarrow س + ص = ٣٠٠ \Leftarrow ص = ٣٠٠ - س$

المساحة $م = س \times ص \Leftarrow م = س(٣٠٠ - س) = ٣٠٠س - س^{٢}$

مجال الاقتران $٠ \prec س \prec ٣٠٠$

$م' = ٣٠٠ - ٢س = ٢(١٥٠ - س)$ ينعدم المشتق عندما س = ١٥٠ $م = ٢٢٥٠٠$

| س | ٣٠٠ | | ١٥٠ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| م'(س) | ‖ | --------------- | ٠ | +++++++++++ | ‖ |
| م | ‖ | ↘ | ٢٢٥٠٠ | ↗ | |

المساحة اكبر ما يمكن عندما س=١٥٠ و ص= ١٥٠ أي ان الشكل مربع هو اكبر الإشكال المستطيلة

٢- مثلث طولا ضلعين فيه س=٥ و ص=٧ والزاوية بينهما هـ جد الزاوية هـ لتكون المساحة اكبر ما يمكن

الحل :

$م = \frac{١}{٢} س \times ص جاهـ$

المجال $٠ \prec هـ \prec \pi$

$م = \frac{١}{٢} ٥ \times ٧ جاهـ = \frac{٣٥}{٢} جاهـ$

هذا الاقتران يبلغ قيمة العظمى عندما $|جاهـ| = ١$ لكن $٠ \prec هـ \prec \pi$ اذا $جاهـ = ١$ اذا $هـ = \frac{\pi}{٢}$

$م = \frac{٣٥}{٢}$

٣- النقطة في الربع الاول $أ(س_{١}، ص_{١})$ معادلة المستقيم المار من $أ(س_{١}، ص_{١})$

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$ يتقطع مع محور السينات عندما ص=٠ $\frac{-ص_{١}}{م} + س_{١} = س$ ومع

محور الصادات من اجل س=٠ نجد $ص = -مس_{١} + ص_{١}$ ومساحة المثلث الحاصل هي

$ع = \frac{1}{2}\left(-مس_1 + ص_1\right)\left(\frac{-ص_1}{م} + س_1\right)$

$ع^{/} = \frac{-1}{2}س_1\left(\frac{-ص_1}{م} + س_1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ص_1}{م^2}\right)\left(-مس_1 + ص_1\right)$

$ع^{/} = \frac{1}{2}\left(\frac{س_1ص_1}{م} - س_1^2 + \frac{-س_1ص_1}{م} + \frac{ص_1^2}{م_1^2}\right)$

$ع^{/} = \frac{1}{2}\left(-س_1^2 + \frac{ص_1^2}{م_1^2}\right)$

ينعدم المشتق عندما $-س_1^2 + \frac{ص_1^2}{م_1^2} = 0 \Leftarrow م_1^2 = \frac{ص_1^2}{س_1^2} \Leftarrow م = \frac{ص_1}{س_1}$ مرفوض

او $م = \frac{-ص_1}{س_1}$ مقبول

$ع = \frac{1}{2}\left(-مس_1 + ص_1\right)\left(\frac{-ص_1}{م} + س_1\right)$

$ع = \frac{1}{2}\left(\frac{ص_1}{س_1}س_1 + ص_1\right)\left(\frac{ص_1س_1}{ص_1} + س_1\right) = ٢س_1ص_1$

| م | $\frac{-ص_1}{س_1}$ |
|---|---|
| $ع^{/}(م)$ | ‖ +++++++ 0 ----------- ‖ |
| ع | ‖ ↗ $٢س_1ص_1$ ↘ |

المساحة اقل ما يمكن عندما $م = \frac{-ص_1}{س_1}$

ومعادلة المستقيم المطلوب

$ص - ص_1 = \frac{-ص_1}{س_1}\left(س - س_1\right) \Leftarrow صس_1 - ص_1س_1 = \left(-ص_1س + ص_1س_1\right)$

$صس_1 + ص_1س = +٢ص_1س_1$

٤-

جد هـ الزاوية لتكون مساحة المثلث اكبر ما يمكن

$اب = ٤$ ، $جب = ٤جتاهـ$

$م = \frac{1}{2} \times ٤ \times ٤جتاهـ \times جاهـ = ٤ \times ٢جتاهـ \times جاهـ = ٤جا٢هـ$ المجال $0 \prec هـ \prec \frac{\pi}{2}$

$م^{/} = ٨جتا٢هـ$ ينعدم المشتق عندما $جتا٢هـ = 0$ اذا $٢هـ = \frac{\pi}{2} \Leftarrow هـ = \frac{\pi}{4}$ $م = ٤$

| هـ | $\frac{\pi}{٢}$ | | $\frac{\pi}{٤}$ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| م $'$(س) | $\|\|$ | --------------- | ٠ | ++++++++++++ | $\|\|$ |
| م | $\|\|$ | $\searrow$ | ٤ | $\nearrow$ | |

المساحة اكبر ما يمكن عندما هـ $= \frac{\pi}{٤}$ والمساحة م $= ٤$

٥- اكبر اسطوانة يمكن وضعها داخل كرة نصف قطرها نق

بفرض ر نصف قطر الاسطوانة ع ارتفاعها

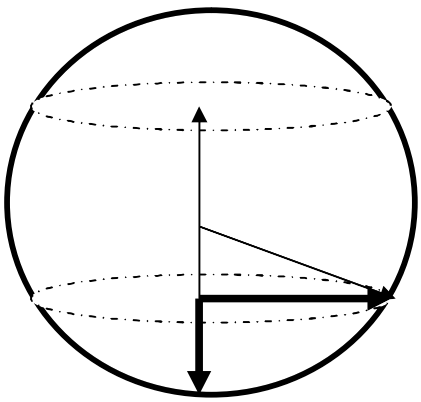
حجم الاسطوانة $ح = \pi ر^{٢} ع$

$ر^{٢} = نق^{٢} - \frac{ع^{٢}}{٤}$ اذا $ح = \pi\left(نق^{٢} - \frac{ع^{٢}}{٤}\right)ع \Leftarrow ح = \pi\left(نق^{٢} ع - \frac{ع^{٣}}{٤}\right)$

$ح' = \pi\left(نق^{٢} - \frac{٣ع^{٢}}{٤}\right)$ ينعدم المشتق عندما $نق^{٢} - \frac{٣ع^{٢}}{٤} = ٠ \Leftrightarrow ع^{٢} = \frac{٤نق^{٢}}{٣}$

اما $ع = \frac{٢نق}{\sqrt{٣}}$ مقبول

$ع = \frac{-٢نق}{\sqrt{٣}}$ مرفوض



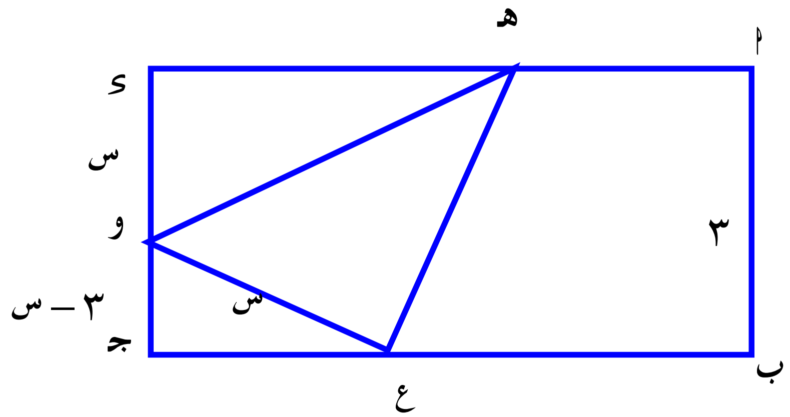
$$ح = ح = \pi\left(نق^{٢}\frac{٢نق}{\sqrt{٣}} - \frac{٨نق^{٣}}{٣\sqrt{٣}٤}\right) = \pi\left(\frac{٢٤نق^{٣} - ٨نق^{٣}}{١٢\sqrt{٣}}\right) = \frac{٤\pi نق^{٣}}{٣\sqrt{٣}}$$

| ر | نق | | $\frac{٢نق}{\sqrt{٣}}$ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| ح $'$ | $\|\|$ | --------------- | ٠ | ++++++++++++ | |
| ح | $\|\|$ | $\searrow$ | $\frac{٤\pi}{٣\sqrt{٣}}نق^{٣}$ | $\nearrow$ | |

الاسطوانة أعظم ما يمكن عندما $ع = \frac{٢نق}{\sqrt{٣}}$ و $ع = \frac{٢\times٣\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = ٦$

٦-

جد اكبر مساحة للمثلث ع جـ و




بفرض ء و = س اذا ع و = س وبالتالي و جـ = ٣ – س وحسب فيتاغورث

$$\text{ع جـ} = \sqrt{\text{س}^{٢} - (٣ - \text{س})^{٢}} = \sqrt{٦\text{س} - ٩}$$

$$\text{مساحة ع جـ و} = \text{م} = \frac{١}{٢}(٣ - \text{س})\left(\sqrt{٦\text{س} - ٩}\right)$$

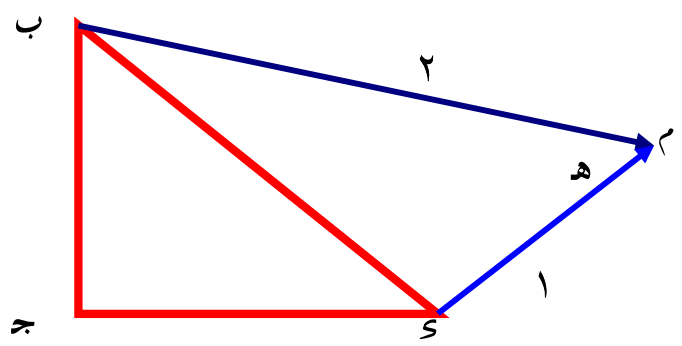
$$\text{م}' = -\frac{١}{٢}\left(\sqrt{٦\text{س} - ٩}\right) + \frac{١}{٢}(٣ - \text{س})\frac{٦}{٢\sqrt{٦\text{س} - ٩}} = \frac{١}{٢} \times \frac{-٦\text{س} + ٩ + ٩ - ٣\text{س}}{\sqrt{٦\text{س} - ٩}} = \times \frac{١٨ - ٩\text{س}}{٢\sqrt{٦\text{س} - ٩}}$$

ينعدم المشتق عندما س=٢ وبالتالي $\text{م} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

| س | ٣ | | ٢ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| م' (س) | \|\| | --------------- | ٠ | ++++++++++++ | \|\| |
| م | \|\| | ↘ | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | ↗ | |

المساحة أعظم ما يمكن عندما س=٢ واكبر مساحة هي $\text{م} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

-٧




م ء = ١ م ب = ٢ ء جـ = ب جـ

جد قيمة س التي تجعل مساحة الرباعي اكبر ما يمكن

مساحة الرباعي م ب جـ ء مساحة المثلث م ب ء +مساحة المثلث ب جـ ء

بفرض جـ ب = س اذا ء جـ = س و ب ء = س $\sqrt{٢}$

$(ءب)^{٢} = ١ + ٤ - ٢ \times ١ \times ٢ \text{جتاهـ}$

$٢\text{س}^{٢} = ٥ - ٤\text{جتاهـ} \Leftarrow \text{س}^{٢} = \frac{٥ - ٤\text{جتاهـ}}{٢}$

$\text{م} = \frac{١}{٢}(١)(٢)\text{جاهـ} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}$

$\text{م} = \text{جاهـ} + \frac{١}{٢}\frac{٥ - ٤\text{جتاهـ}}{٢} = \text{جاهـ} - \text{جتاهـ} + \frac{٥}{٤} = \sqrt{٢}\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\text{جاهـ} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\text{جتاهـ}\right) + \frac{٥}{٤} =$

$\text{م} = \sqrt{٢}\text{جا}\left(\text{هـ} - \frac{\pi}{٤}\right) + \frac{٥}{٤}$

هذا الاقتران اعظم ما يمكن عندما $\left|\text{جا}\left(\text{هـ} - \frac{\pi}{٤}\right)\right| = ١$ اذا $\text{هـ} - \frac{\pi}{٤} = \frac{\pi}{٢} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{٣\pi}{٤}$

$\text{س} = \sqrt{\frac{٥ + ٢\sqrt{٢}}{٢}}$

٦- يدفع كل شخص ٦٥ اذا كان عدد المشتركين ١٠٠

٧- اذا زاد العدد فان الشركة تخفض نصف دينار عن كل مشترك جديد ماعدد المشتركين ليكون إيراد الشركة اكبر ما يمكن

الحل

الإيراد م وليكن عدد المشتركين الجدد س

هنالك أكثر من فهم للمسالة

إذا زاد عدد المشتركين عن ٦٥ يخفض لكل مشرك مبلغ $\frac{١}{٢}\text{س}$ حيث س عدد المشتركين الجدد

وعلية ايراد الشركة هو العدد الكلي $(١٠٠ + \text{س})$ضرب ثمن اشتراك كل شخص $\left(٦٥ - \frac{١}{٢}\text{س}\right)$

$\text{م} = (١٠٠ + \text{س})\left(٦٥ - \frac{١}{٢}\text{س}\right)$

$\text{م}' = \left(٦٥ - \frac{١}{٢}\text{س}\right) - \frac{١}{٢}(١٠٠ + \text{س})$

$\text{م}' = ٦٥ - \frac{١}{٢}\text{س} - ٥٠ - \frac{١}{٢}\text{س} = ١٥ - \text{س}$

ينعدم المشتق عندما $\text{س} = ١٥$ و $\text{م} = ١١٥ \times ٥٧{,}٥ = ٦٦١٢{,}٥$

| س | ١٥ | ٠ |
|---|---|---|
| م′(س) | ǁ --------------- ٠ +++++++++++ | ǁ |
| م | ǁ ↘ ٦٦١٢,٥ ↗ | |

الإيراد أعظم ما يمكن عندما س=١٥ و

ملاحظة قد تكون كلمة كل مشترك جديد تعني ان التخفيض يجري فقط للجدد وعليه الإيراد هو

$\text{م} = ١٠٠ \times ٦٥ + \text{س}\left(٦٥ - \frac{١}{٢}\text{س}\right)$

$\text{م} = ١٠٠ \times ٦٥ + ٦٥\text{س} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}$

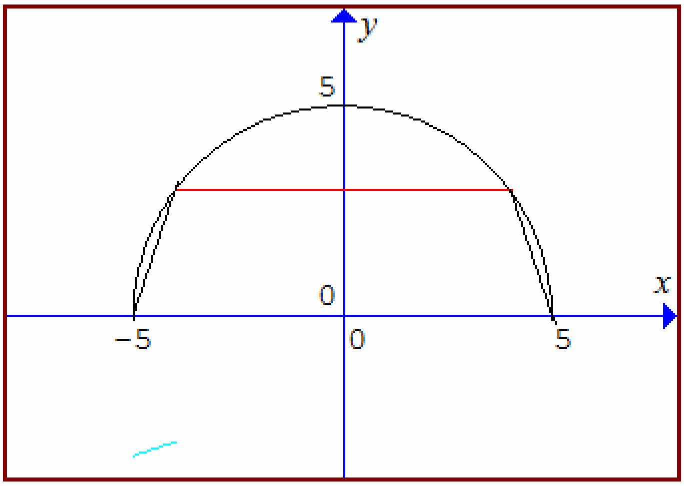
$\text{م}' = ٦٥ - \text{س}$

ينعدم المشتق عند ٦٥ = س ونلاحظ أن للاقتران قيمة عظمى عند هذه القيمة هي

$\text{م} = ٦٥٠٠ + ٦٥ \times ٥٧٫٥ = ١٠٢٣٧٫٥$

ملاحظة في الحل الاول لو كان العدد الزائد ١٣٠ لأصبح الدخل صفر
منطقي ان يكون عدد الافراد ٢٣٠ شخص
في حين في الحل الثاني لن يكون الايراد صفر ابدا اقل ما يمكن هو ٦٥٠٠
طبعا مسائل الامتحان يكون النص واضحا واذا لم يكن كذلك ياخذ في الحسبان كل الاحتمالات
تدريب - نرسم شبة المنحرف المتساوي الساقين داخل نصف الدائرة كما في الشكل اوجد اكبر مساحة لشبه المنحرف المرسوم
لناخذ النقطة في الربع الاول احداثيا النقطة $(\text{س}_{١}،\text{ص}_{١})$ طبعا كل منهما موجب ربع اول ويحققان
معادلة نصف الدائرة $\text{ص} = \sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢}}$ اخترت دائرة نصف قطرها نق
مساحة شبه المنحرف هي نصف مجموع القاعدتين ضرب الارتفاع

$\text{م} = \frac{٢\text{نق} + ٢\text{س}_{١}}{٢} \times \text{ص}_{١} \Leftarrow \text{م} = (\text{نق} + \text{س}_{١})\,\text{ص}_{١}$




$\text{م} = (\text{نق} + \text{س}_{١})\,\text{ص}_{١} = (\text{نق} + \text{س}_{١})\sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}_{١}^{٢}}$

$\text{م}' = \sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}_{١}^{٢}} + \frac{-٢\text{س}_{١}}{٢\sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}_{١}^{٢}}}(\text{نق} + \text{س}_{١})$

$\text{م}' = \frac{\text{نق}^{٢} - \text{س}_{١}^{٢}}{\sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}_{١}^{٢}}} + \frac{-٢\text{س}_{١}}{٢\sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}_{١}^{٢}}}(\text{نق} + \text{س}_{١}) = \frac{\text{نق}^{٢} - \text{س}_{١}^{٢} - \text{نق}\text{س}_{١} - \text{س}_{١}^{٢}}{\sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}_{١}^{٢}}}$

$$= \frac{\text{نق}^{٢} - \text{نق}\,\text{س}_{١} - ٢\text{س}_{١}^{٢}}{\sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}_{١}^{٢}}} = -\left(\frac{+٢\text{س}_{١}^{٢} + \text{نق}\,\text{س}_{١} - \text{نق}^{٢}}{\sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}_{١}^{٢}}}\right) = -\left(\frac{(٢\text{س}_{١} - \text{نق})(\text{س}_{١} + \text{نق})}{\sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}_{١}^{٢}}}\right)$$

ينعدم المشتق عندما $\text{س}_{١} = -\text{نق}$ مرفوض او $\text{س}_{١} = \frac{\text{نق}}{٢}$ و $\text{ص}_{١} = \frac{\text{نق}\sqrt{٣}}{٢}$ و $\text{م} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}\text{نق}^{٢}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\text{س}_{١}$ | | $\frac{\text{نق}}{٢}$ | ٠ |
| $\text{م}'(\text{س})$ | ‖ --------------- | ٠ | ++++++++++++ ‖ |
| م | ‖ ↘ | $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}\text{نق}^{٢}$ | ↗ |

يبلغ م اكبر ما يمكن عند $\text{س}_{١} = \frac{\text{نق}}{٢}$ و اكبر مساحة لشبه المنحرف هي $\text{م} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}\text{نق}^{٢}$

١٠- تكلفة س غرفة نوم $\text{ك}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} - ٨٠\text{س} + ٥٠٠$ سعر البيع للغرفة ٢٨٠٠
ما الانتاج الذي يجعل الربح اكبر ما مكن

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$\text{ر} = ٢٨٠٠\text{س} - \text{ك}(\text{س})$

$\text{ر} = ٢٨٠٠\text{س} - \text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} + ٨٠\text{س} - ٥٠٠$

$\text{ر} = -\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} + ٢٨٨٠\text{س} - ٥٠٠$

$\text{ر}' = -٣\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٢٨٨٠$

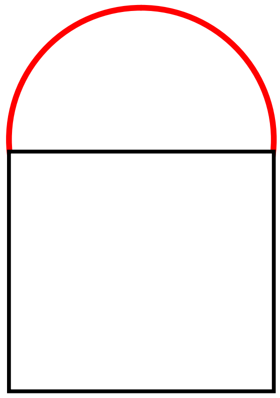
$\text{ر}' = -٣(\text{س} + ٣٠)(\text{س} - ٣٢)$

ينعدم المشتق عندما س=-٣٠ مرفوض او س=٣٢ مقبول عندئذ ر =

| | | | |
|---|---|---|---|
| س | | ٣٢ | ٠ |
| $\text{ر}'(\text{س})$ | ‖ --------------- | ٠ | ++++++++++++ ‖ |
| $\text{ر}(\text{س})$ | ‖ ↘ | | ↗ |

ر اكبر ما يمكن عندما س= ٣٢

١١-



المحيط ٦ نصف قطر الدائرة نق وابعاد المستطيل ٢نق والبعد الاخر ص

المحيط $٦ = ٢\text{ص} + ٢\text{نق} + \pi\text{نق} \Leftarrow ٢\text{ص} = ٦ - ٢\text{نق} - \pi\text{نق}$

كمية الضوء واحد ضرب مساحة المستطيل +نصف ضرب مساح نصف الدائرة

$\text{ك} = ١ \times ٢\text{نق ص} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}\pi\text{نق}^{٢}$

$\text{ك} = \text{نق}\left(٦ - ٢\text{نق} - \pi\text{نق}\right) + \frac{١}{٤}\pi\text{نق}^{٢}$

$\text{ك} = ٦\ \text{نق} - ٢\text{نق}^{٢} - \pi\text{نق}^{٢} + \frac{١}{٤}\pi\text{نق}^{٢}$

$\text{ك} = ٦\ \text{نق} - ٢\text{نق}^{٢} - \frac{٣}{٤}\pi\text{نق}^{٢}$

$\text{ك}' = \text{نق}\left(٦ - ٢\text{نق} - \frac{٣}{٤}\pi\text{نق}\right)$

ينعدم المشتق عندما

$٦ - ٢\text{نق} - \frac{٣}{٤}\pi\text{نق} = ٠ \Leftarrow ٢٤ - ٨\text{نق} - ٣\pi\text{نق} = ٠ \Leftarrow ٢٤ = (٨ + ٣\pi)\text{نق} \Leftarrow = \frac{٢٤}{٨ + ٣\pi}$ مقبول

نق= ٠ مرفوض يجب ان نتأكد أنها قيمة كبرى مطلقة وهكذا ص $= \frac{١٢ + ٣\pi}{٨ + ٣\pi}$

١٢ – زاوية القطاع هـ نصف قطر دائرته نق حول الى مخروط نصف قطر قاعدته نق$'$

جد قيمة هالتي التي تجعل المخروط اكبر ما يمكن

بفرض الارتفاع ع

حجم المخروط $\text{ح} = \frac{\pi}{٣}\left(\text{نق}'\right)^{٢}\text{ع}$

لكن $٢\pi\text{نق}' = \text{هـ نق} \Leftarrow \text{نق}' = \frac{\text{هـ نق}}{٢\pi}$

محيط قاعدة المخروط = مولد المخروط ضرب الزاوية مقدرة بالراديان

ومن نظرية فيتاغورث نجد

$$\text{ع}^2 + (\text{نق}')^2 = \text{نق}^2$$

$$\text{ع}^2 = \text{نق}^2 - (\text{نق}')^2$$

$$\text{ع}^2 = \text{نق}^2 - \frac{\text{نق}^2\text{هـ}^2}{4\pi^2} = \text{نق}^2\left(1 - \frac{\text{هـ}^2}{4\pi^2}\right) = \text{نق}^2\left(\frac{4\pi^2 - \text{هـ}^2}{4\pi^2}\right)$$

$$\text{ع} = \frac{\text{نق}}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \text{هـ}^2}$$

$$\text{ح} = \frac{\pi}{3}(\text{نق}')^2\,\text{ع}$$

$$\text{ح} = \frac{\pi}{3}\,\frac{\text{هـ}^2\text{نق}^2}{4\pi^2}\,\frac{\text{نق}}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \text{هـ}^2}$$

$$\text{ح} = \frac{\text{هـ}^2\text{نق}^3}{24\pi^3}\sqrt{4\pi^2 - \text{هـ}^2}$$

$$\text{ح} = \frac{\text{نق}^3}{24\pi^3}\sqrt{4\pi^2\text{هـ}^4 - \text{هـ}^6}$$

$$\text{ح}' = \frac{\text{نق}^3}{24\pi^3}\,\frac{16\pi^2\text{هـ}^3 - 6\text{هـ}^5}{2\sqrt{4\pi^2\text{هـ}^2 - \text{هـ}^4}}$$

$$\text{ح}' = \frac{\text{نق}^3}{24\pi^3}\,\frac{\text{هـ}^3(16\pi^2 - 6\text{هـ}^2)}{2\sqrt{4\pi^2\text{هـ}^2 - \text{هـ}^4}}$$

$$\text{ح}' = \frac{\text{نق}^3}{24\pi^3}\,\frac{4\text{هـ}^3(4\pi - \sqrt{6}\,\text{هـ})(4\pi + \sqrt{6}\,\text{هـ})}{2\sqrt{4\pi^2\text{هـ}^2 - \text{هـ}^4}}$$

ينعدم المشتق عندما $\text{هـ} = \frac{4\pi}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$ مقبول او $\text{هـ} = -\frac{4\pi}{\sqrt{6}}$ مرفوض او $\text{هـ} = 0$ مرفوض

$$\text{ح} = \frac{\pi}{3}\,\frac{16\pi^2}{6}\,\frac{\text{نق}^2}{4\pi^2}\,\frac{\text{نق}}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \frac{16\pi^2}{6}}$$

$$\text{ح} = \frac{2\,\text{نق}^3}{9}\,2\pi\sqrt{1 - \frac{4}{6}}$$

$$\text{ح} = \frac{2\pi\,\text{نق}^3}{9\sqrt{3}}$$

او حجم المخروط $\text{ح} = \frac{\pi}{3}(\text{نق}')^2\,\text{ع}$

لكن $2\pi\,\text{نق}' = \text{هـ}\,\text{نق} \Leftarrow \text{نق}' = \frac{\text{هـ}\,\text{نق}}{2\pi}$

محيط قاعدة المخروط = مولد المخروط ضرب الزاوية مقدرة بالراديان

ومن نظرية فيتاغورث نجد

$$\text{ع}^{2} + (\text{نق}')^{2} = \text{نق}^{2}$$

$$(\text{نق}')^{2} = \text{نق}^{2} - \text{ع}^{2}$$

$$\text{ح} = \frac{\pi}{3}\left(\text{نق}^{2} - \text{ع}^{2}\right)\text{ع}$$

$$\text{ح} = \frac{\pi}{3}\left(\text{نق}^{2}\,\text{ع} - \text{ع}^{3}\right)$$

$$\text{ح}' = \frac{\pi}{3}\left(\text{نق}^{2} - 3\,\text{ع}^{2}\right) = \frac{\pi}{3}\left(\text{نق} - \sqrt{3}\,\text{ع}\right)\left(\text{نق} + \sqrt{3}\,\text{ع}\right)$$

ينعدم المشتق عندما $\text{ع} = \frac{\text{نق}}{\sqrt{3}}$ مقبول او $\text{ع} = -\frac{\text{نق}}{\sqrt{3}}$ مرفوض

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ع | | | $\frac{\text{نق}}{\sqrt{3}}$ | | ٠ |
| ح′ | ‖ | --------------- | ٠ | +++++++++++ | |
| ح | ‖ | ↘ | | ↗ | |

الحجم اعظم ما يمكن عندما $\text{ع} = \frac{\text{نق}}{\sqrt{3}}$

$$(\text{نق}')^{2} = \text{نق}^{2} - \frac{\text{نق}^{2}}{3} = \frac{2\,\text{نق}^{2}}{3}$$

$$\text{نق}' = \frac{\sqrt{2}\,\text{نق}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{هـ} = \frac{2\pi\,\text{نق}'}{\text{نق}} = \frac{2\pi\,\frac{\sqrt{2}\,\text{نق}}{\sqrt{3}}}{\text{نق}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\pi$$

تدريب : اوجد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها نق

الحل

نفرض ابعاد المستطيل س ، ص حسب فيتاغورث نجد

$$\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} = 4\,\text{نق}^{2} \Longrightarrow \text{ص} = \sqrt{4\,\text{نق}^{2} - \text{س}^{2}} \quad ، \quad \text{س} \in (0, 2\,\text{نق})$$

مساحة المستطيل

$$\text{م} = \text{س}\,\text{ص} = \text{س}\sqrt{4\,\text{نق}^{2} - \text{س}^{2}}$$

$$\text{م}' = \sqrt{4\,\text{نق}^{2} - \text{س}^{2}} + \text{س}\,\frac{-2\,\text{س}}{2\sqrt{4\,\text{نق}^{2} - \text{س}^{2}}} = \frac{4\,\text{نق}^{2} - \text{س}^{2} - \text{س}^{2}}{\sqrt{4\,\text{نق}^{2} - \text{س}^{2}}}$$

$$= \frac{4\,\text{نق}^{2} - 2\,\text{س}^{2}}{\sqrt{4\,\text{نق}^{2} - \text{س}^{2}}} = \frac{2\left(2\,\text{نق}^{2} - \text{س}^{2}\right)}{\sqrt{4\,\text{نق}^{2} - \text{س}^{2}}} = \frac{2\left(2\,\text{نق} - \text{س}\right)\left(2\,\text{نق} + \text{س}\right)}{\sqrt{4\,\text{نق}^{2} - \text{س}^{2}}}$$

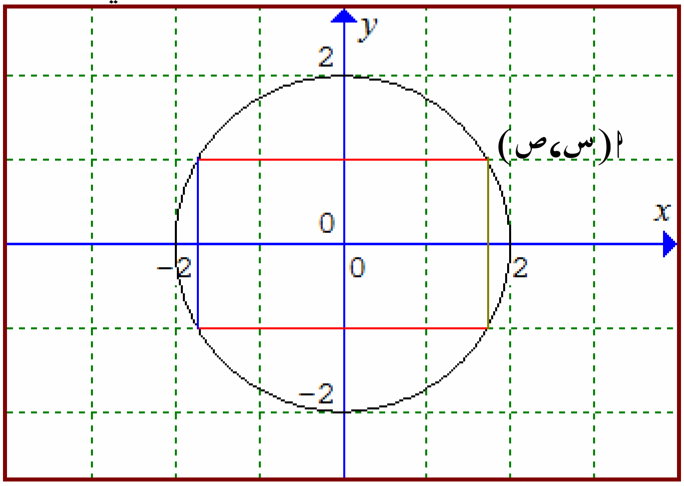
ينعدم المشتق عندما $\text{س} = \sqrt{2}\,\text{نق}$ مقبول $\text{ص} = \sqrt{2}\,\text{نق}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| س ٠ | ٢نو | $\sqrt{2}$نو | ٠ |
| م′ | || -------------- - | ٠ | +++++++++++ || |
| م | || ↘ | ٢ نو$^{2}$ | ↗ |

المساحة اكبر ما يمكن عندما س = $\sqrt{2}$نو ومساحة المستطيل عندئذ هي م = ٢نو$^{2}$

او س = − $\sqrt{2}$نو مرفوض

ملاحظة يمكن حل هذه المسالة بالشكل التالي




لتكن النقطة ا(س،ص) واقعة في الربع الاول معادلة الدائرة نصف قطرها

$\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} = \text{ر}^{2} \Leftarrow \text{ص} = \sqrt{\text{ر}^{2} - \text{س}^{2}}$ حيث نصف قطرها ر

مساحة المستطيل $\text{م} = ٢\text{س}٢\text{ص} = ٤\text{س}\sqrt{\text{ر}^{2} - \text{س}^{2}}$

$$\text{م} = ٤\text{س}\sqrt{\text{ر}^{2} - \text{س}^{2}}$$

$$\text{م}' = ٤\sqrt{\text{ر}^{2} - \text{س}^{2}} + \frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{\text{ر}^{2} - \text{س}^{2}}} \times ٤\text{س} = \frac{٤\text{ر}^{2} - ٤\text{س}^{2} - ٤\text{س}^{2}}{\sqrt{\text{ر}^{2} - \text{س}^{2}}} = \frac{٤\text{ر}^{2} - ٨\text{س}^{2}}{\sqrt{\text{ر}^{2} - \text{س}^{2}}}$$

$$= \frac{٤\left(\text{ر}^{2} - ٢\text{س}^{2}\right)}{\sqrt{\text{ر}^{2} - \text{س}^{2}}} = \frac{٤\left(\text{ر} - \sqrt{2}\,\text{س}\right)\left(\text{ر} + \sqrt{2}\,\text{س}\right)}{\sqrt{\text{ر}^{2} - \text{س}^{2}}}$$

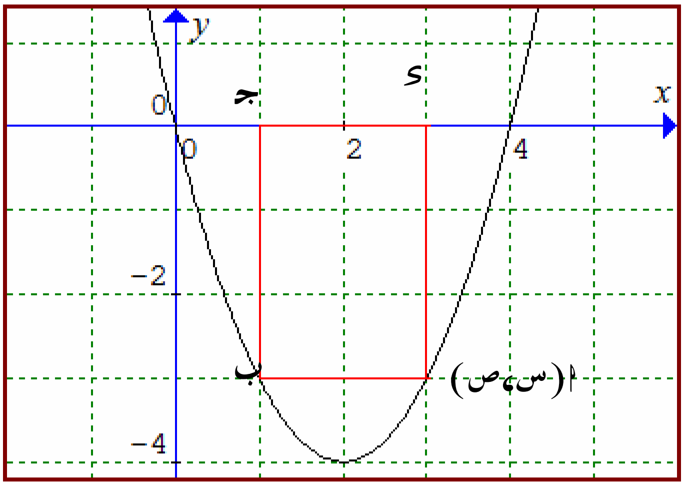
ينعدم المشتق عندما $\text{س} = \frac{\text{ر}}{\sqrt{2}}$ مقبول $\text{س} = -\frac{\text{ر}}{\sqrt{2}}$ مرفوض $\text{ص} = \frac{\text{ر}}{\sqrt{2}}$

$$\text{م} = ٤\frac{\text{ر}}{\sqrt{2}}\,\frac{\text{ر}}{\sqrt{2}} = ٢\text{ر}^{2}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| س | ل | $\frac{ل}{\sqrt{٢}}$ | ٠ |
| م′ | \|\| --------------- | ٠ | ++++++++++++ \|\| |
| م | \|\| ↘ | ٢ل$^{٢}$ | ↗ |

المساحة اعظم ما يمكن عندما $س = \frac{ل}{\sqrt{٢}}$ و $م = ٤ \frac{ل}{\sqrt{٢}} \frac{ل}{\sqrt{٢}} = ٢ل^{٢}$

تدريب ابجء مستطيل مرسوم داخل القطع المكافئ $ص = س^{٢} - ٤س$ كما في الشكل




اوجد اكبر مساحة للمستطيل ابجء

الحل احداثيا ا(س،ص) حيث س > ٠، ص < ٠ اذا احداثيا ب هي ب$(س_{١}، ص_{١})$

لاحظ ان $\frac{س + س_{١}}{٢}$ = سينات راس القطع اذا $\frac{س + س_{١}}{٢} = ٢ \Leftarrow س_{١} = ٤ - س$

وكذلك $ص_{١} = ص$

مساحة المستطيل م = اب × اء حيث اب = س − ٤ + س = ٢س − ٤   اء = |ص| = −ص

$م = (٢س - ٤)(-ص) = -(٢س - ٤)(س^{٢} - ٤س) = -(٢س^{٣} - ١٢س^{٢} + ١٦س)$

$م' = -(٦س^{٢} - ٢٤س + ١٦) = -٢(٣س^{٢} - ١٢س + ٨) =$

ينعدم المشتق عندما

$٣س^{٢} - ١٢س + ٨ = ٠$

$س_{١} = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤اج}}{٢ا} = \frac{١٢ - ٤\sqrt{٣}}{٦} = ٢ - \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$  سالب مرفوض

$س_{٢} = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤اج}}{٢ا} = \frac{١٢ + ٤\sqrt{٣}}{٦} = ٢ + \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$

مقبول   $ب أ = ٢\left(٢ + \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}\right) - ٤ = \frac{٤\sqrt{٣}}{٣}$

$ص = \left(٢ + \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}\right)^{٢} - ٤\left(٢ + \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}\right) = ٤ + \frac{٨\sqrt{٣}}{٣} + \frac{١٢}{٩} - ٨ - \frac{٨\sqrt{٣}}{٣} = -٤ + \frac{١٢}{٩} = \frac{-٢٤}{٩}$

جب $= |ص| = \left|\frac{-٢٤}{٩}\right| = \frac{+٢٤}{٩}$

المساحة   $م = \left(\frac{٤\sqrt{٣}}{٣}\right)\left(\frac{٢٤}{٩}\right) = \frac{٩٦\sqrt{٣}}{٣\times ٩} = \frac{٣٢\sqrt{٣}}{٩}$

| س | ٤ | | $٢ + \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| $م'$ | $\parallel$ | --------------- | ٠ | ++++++++++++ | $\parallel$ |
| م | $\parallel$ | ↘ | $\frac{٣٢\sqrt{٣}}{٩}$ | ↗ | $\parallel$ |

المساحة اعظم ما يمكن عندما س$= ٢ + \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$   و   $م = \frac{٣٢\sqrt{٣}}{٩}$

طريقة ثانية

من الافضل ان نجعل المحور التماثلي هو محور الصادات   بالاتمام  الى مربع كامل

$ص = س^{٢} - ٤س + ٤ - ٤ = (س - ٢)^{٢} - ٤$

بفرض $س - ٢ = سَ$  معادلة القطع منسوبا للجملة سَ م ص      $ص = سَ^{٢} - ٤$

احداثيا أ(سَ،ص) حيث $سَ > ٠$ و $ص < ٠$   $أب = ٢سَ$ و $أد = |ص| = -ص$

$م = -٢سَص = -٢سَ(سَ^{٢} - ٤) = -٢سَ^{٣} + ٨سَ$

$م' = -٦سَ^{٢} + ٨ = -٢(\sqrt{٣}سَ - ٢)(\sqrt{٣}سَ + ٢)$

ينعدم المشتق عندما $\sqrt{٣}سَ - ٢ = ٠ \Leftarrow سَ = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$   و   $ص = \frac{٤}{٣} - ٤ = \frac{-٨}{٣}$

$م = -٢ \frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{-٨}{٣} = \frac{٣٢}{٣\sqrt{٣}} = \frac{٣٢\sqrt{٣}}{٩}$ ويمكن ان نشكل جدول لاثبات انها قيمة عظمى

تدريب(١) اوجد عددا حقيقيا موجبا اذا علمت ان ناتج جمع هذا العدد الى مقلوبه اصغر ما يمكن

تدريب (٢): سلك طوله ١٨  نريد ان نصنع منه مثلثين كل منهما متساوي الاضلاع احسب طول ضلع كل منهما لتكون مجموع مساحتيهما اصغر ما يمكن

تدريب (٣) ليكن الاقتران $ق(س) = س^{٥} - ١٠س^{٢}$  اوجد اصغر ميل للخط وعين النقطة الموافقة له

تدريب(٤) شبه منحرف متساوي الساقين قاعدتاه اب،جء محيطه ٤٠ والزاوية د =٦٠ احسب اطوال اضلاعه ليكون مساحته اكبر ما يمكن

الحل

تدريب(١) اوجد عددا حقيقيا موجبا اذا علمت ان ناتج جمع هذا العدد الى مقلوبه اصغر ما يمكن

نفرض ان العدد س فيكون مقلوبه $\frac{١}{س}$

نفرض ان م هي المجموع المطلوب $م = س + \frac{١}{س}$ الشرط س $>$ ٠

$$م' = ١ + \frac{-١}{س^{٢}} = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢}} = \frac{(س-١)(س+١)}{س^{٢}}$$

ينعدم المشتق عندما س = ١ مقبول $م = ١ + \frac{١}{١} = ٢$ او س = −١ مرفوض

| س | ٤ | | ١ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| م′ | ‖ | --------------- | ٠ | +++++++++++ | ‖ |
| م | ‖ | ↘ | ٢ | ↗ | ‖ |

الاقتران اكبر ما يمكن عندما س=١ و م=٢

تدريب (٢): سلك طوله ١٨ نريد ان نصنع منه مثلثين كل منهما متساوي الاضلاع احسب طول ضلع كل منهما لتكون مجموع مساحتيهما اصغر ما يمكن

الحل نفرض ان طول قطعة السلك ٣س فتكون طول القطعة الثانية ١٨ − ٣س

المجال ٠ $<$ ٣س $<$ ١٨ $\Leftarrow$ ٠ $<$ س $<$ ٦

وهنا ٣س هي محيط المثلث الاول المتساوي الاضلاع فيكون طول ضلع هذا المثلث س

ومساحة هذا المثلث $م_{١} = \frac{١}{٢} س \times س جا ٦٠ = \frac{س^{٢}\sqrt{٣}}{٤}$

١٨ − ٣س محيط الثاني وطل ضلعه $\frac{١٨ - ٣س}{٣} = ٦ - س$ ومساحة الثاني

$$م_{٢} = \frac{١}{٢}(٦ - س) \times (٦ - س) جا ٦٠ = \frac{(٦ - س)^{٢}\sqrt{٣}}{٤}$$

$$م = م_{١} + م_{٢} = \frac{س^{٢}\sqrt{٣}}{٤} + \frac{(٦ - س)^{٢}\sqrt{٣}}{٤} = \frac{\sqrt{٣}}{٤}\left(س^{٢} + ٣٦ - ١٢س + س^{٢}\right)$$

$$م = \frac{\sqrt{٣}}{٤}\left(س^{٢} + ٣٦ - ١٢س + س^{٢}\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٤}\left(٢س^{٢} + ٣٦ - ١٢س\right)$$

$م' = \frac{\sqrt{٣}}{٤}(٤س - ١٢) = \sqrt{٣}(س - ٣)$ ينعدم المشتق عندما س = ٣

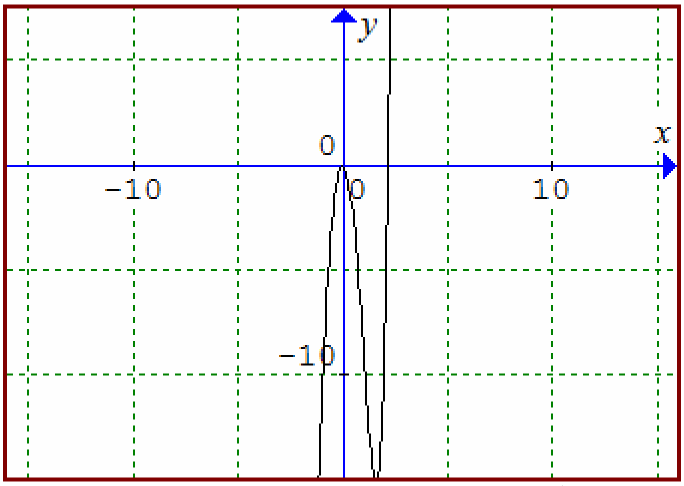
وطول القطعة الاولى يساوي ٩ كذلك الثانية ٩

$م = ٩\sqrt{٣}$

| س | ٦ | | ٣ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| $م^{/}$ | ‖ | ++++++++++++ | ٠ | --------------- | ‖ |
| م | ‖ | ↗ | $٩\sqrt{٣}$ | ↘ | ‖ |

اذا م اصغر ما يمكن عندما س = ٣ وطول كل قطعة هي ٩

تدريب (٣) ليكن الاقتران $ق(س) = س^{٥} - ١٠س^{٢}$ اوجد اصغر ميل للخط وعين النقطة الموافقة له




ميل الخط تعني ميل المماس له

$م = ق(س) = س^{٥} - ١٠س^{٢}$

$م^{/} = ق^{/}(س) = ٥س^{٤} - ٢٠س$

$م^{//} = ٢٠س^{٣} - ٢٠ = ٢٠(س^{٣} - ١)$

ينعدم المشتق الثاني عندما س = ١ و $م^{/} = -١٥$

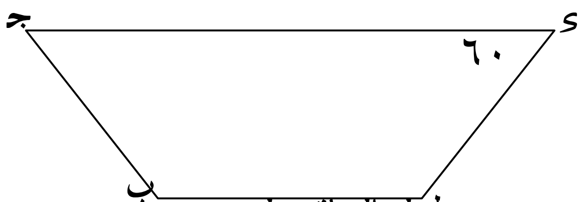
| س | | | ١ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $م^{//}$ | ‖ | ++++++++++++ | ٠ | --------------- | ‖ |
| $م^{/}$ | ‖ | ↗ | ١٥ - | ↘ | ‖ |

لاحظ ان $م^{/}$ اصغر ما يمكن عندما س=١ و ق(١) = -٩ ونقطة التماس هي (١، -٩)

وميل المماس $م^{/} = -١٥$ ومعادلة المماس (ص + ٩) = -١٥(س - ١)

تدريب(٤) شبه منحرف متساوي الساقين قاعدتاه أب،جء محيطه ٤٠ والزاوية د =٦٠ احسب أطوال أضلاعه ليكون مساحته اكبر ما يمكن

الحل :




نفرض طول القاعدة الصغرى س والكبرى ص وطول الساق ل

محيط شبة المنحرف

$٤٠ = س + ص + ٢ل \Leftarrow س + ص = ٤٠ - ٢ل$

مساحته $\text{م} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{٢} \times \text{ع}$ حيث ع الارتفاع وهي $\text{ع} = \text{ل}\,\text{جا}\,٦٠ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{ل}$

$$\text{م} = \frac{٤٠ - ٢\text{ل}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{ل}$$

$$\text{م} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}(٢٠ - \text{ل}) \times \text{ل}$$

$$\text{م} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}(٢٠\text{ل} - \text{ل}^{٢})$$

$$\text{م}' = \frac{\sqrt{٣}}{٢}(٢٠ - ٢\text{ل}) = \sqrt{٣}(١٠ - \text{ل})$$

ينعدم المشتق عندما ل=١٠ $\text{م} = ٥٠\sqrt{٣}$

| ل | ٢٠ | | ١٠ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| م′ | ‖ | --------------- | ٠ | +++++++++++ | ‖ |
| م | ‖ | ↘ | $٥٠\sqrt{٣}$ | ↗ | ‖ |

المساحة اعظم ما يمكن عندما ل=١٠

من الشكل

$$\text{ص} = ٢\text{ل}\,\text{جتا}\,٦٠ + \text{س} = ٢ \times ١٠ \times \frac{١}{٢} + \text{س}$$

$$\text{ص} - \text{س} = ١٠$$

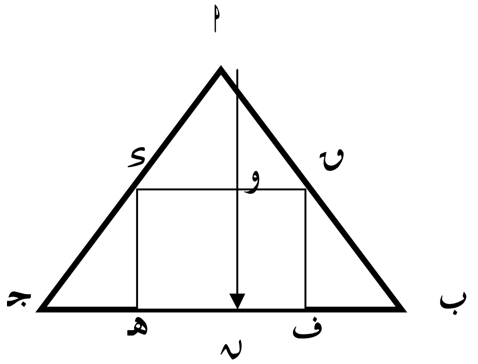
$$\text{ص} + \text{س} = ٢٠$$

$$٢\text{ص} = ٣٠ \Leftarrow \text{ص} = ١٥$$

$$\text{س} = ٥$$

تدريب : مثلث ابج قاعدته ٨ وارتفاعه ٦ رسم داخل مستطيل احد أضلاعه على القاعدة بج والرأسان الآخران على ضلعي المثلث اوجد ابعاد المستطيل لتكون مساحته اكبر ما يمكن

الحل بفرض أن المستطيل هو نفهـد كما في الشكل




نك يوازي بج

حسب تالس

$$\frac{\text{نك}}{\text{بج}} = \frac{\text{او}}{\text{ام}}$$

بفرض ابعاد المستطيل فهـ = س ، نف = ص

$$\frac{\text{س}}{٨} = \frac{٦ - \text{ص}}{٦} \Leftarrow \text{س} = \frac{٤}{٣}(٦ - \text{ص})$$

المساحة $\text{م} = \text{س} \times \text{ص}$

م = $\frac{٤}{٣}$ (٦ − ص) ص

م = $\frac{٤}{٣}$ (٦ص − ص$^{٢}$)

م$'$ = $\frac{٤}{٣}$ (٦ − ٢ص)

م$'$ = $\frac{٨}{٣}$ (٣ − ص)

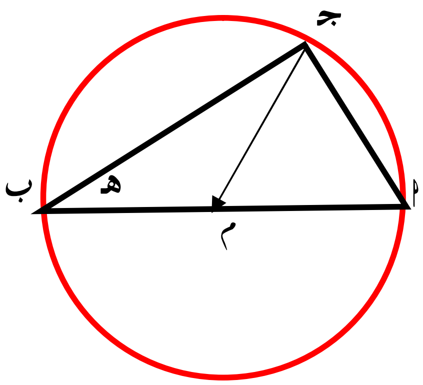
ينعدم المشتق عندما ص = ٣ ، س = $\frac{٤}{٣}$(٦ − ٣) = ٤ ، م = ١٢

| ص | ٦ | | ٣ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| م$'$ | $\|\|$ | --------------- | ٠ | ++++++++++++ | $\|\|$ |
| م | $\|\|$ | ↘ | ١٢ | ↗ | $\|\|$ |

المساحة اعظم ما يمكن عندما ص = ٣ ، س = ٤

تدريب

دائرة قطرها أب النقطة جـ تقع على محيط الدائرة
اوجد ابعاد المثلث لتكون مساحته اكبر ما يمكن




الحل

المثلث أجب قائم

بفرض الزاوية ∠أبجـ = هـ اذا ∠أمجـ = ٢هـ

٢نوجتاهـ = بجـ        ٢نوجاهـ = أجـ

مساحة المثلث

ع = $\frac{١}{٢}$ × ٢نو × ٢نوجتاهـ × جاهـ

ع = ٢نو$^{٢}$ جتاهـ جاهـ = نو$^{٢}$ جا٢هـ

مثل هذا الاقتران بدون اشتقاق اكبرما يمكن عندما

|جا٢هـ| = ١

جا٢هـ = ١

هـ = $\frac{\pi}{٤}$

اذا ٢نو$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ = بجـ ⇐ بجـ = $\sqrt{٢}$نو

٢نو$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ = أجـ ⇐ أجـ = $\sqrt{٢}$نو

ع = $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{٢}$نو $\sqrt{٢}$نو = نو$^{٢}$

في الامتحان يجب حل هذا التدريب عن طريق الاشتقاق

ع = ٢نو$^{٢}$ جتاهـ جاهـ = نو$^{٢}$ جا٢هـ

ع′ =نو٢ ٢جتا٢هـ

ينعدم المشتق عندما

جتا٢هـ = ٠ ⇐ ٢هـ = $\frac{\pi}{٢} + \pi ن$

هـ = $\frac{\pi}{٤} + \frac{\pi ن}{٢}$

ن = ٠ ⇐ هـ = $\frac{\pi}{٤}$

ع =نو٢

| هـ | $\frac{\pi}{٢}$ | | $\frac{\pi}{٤}$ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| ع′ | \|\| | --------------- | ٠ | ++++++++++++ | \|\| |
| ح | \|\| | ↘ | نو٢ | ↗ | \|\| |

ع = ٢نو٢ جتاهـجاهـ =نو٢ جا٢هـ

المثلث مساحة اكبر ما يمكن عندما يكون متساوي الساقين

تدريب تتحرك نقطة ك على محور السينات بسرعة ثابته ٢ سم \ثا وقد مرت في اللحظة ن=١ من الموضع الذي فاصلته س=+٣ وفي نفس الوقت تتحرك نقطة اخرى هـ على محور الصادات بسرعة ثابته -٢ سم \ثا وقد انطلقت في اللحظة ز=٠ من الموضع ص=٦

والمطلوب

١- احسب البعد بين المتحركين

٢- عين اللحظات التي يكون البعد مساويا ٥ سم

٣- في اية لحظة تكون المسافة بينهما اصغر ما يمكن

٤- بفرض ى نقطة منتصف ك هـ اوجد احداثيا ى في كل لحظة وعين سرعتها ومسارها

الحل

ان قانون الحركة المستقيمة المنتظمة على محور السينات ف(ن) = ٤ن + ا حيث ا ثابت

من اجل ن = ١ فان ٣ = ٢(١) + ا ⇐ ا = ١ وقانون الحركة ف(ن) = ٢ن + ١

وكذلك فان قانون الحركة المستقيمة المنتظمة على محور الصادات ق(ن) = ٤ن + ب حيث ب ثابت

من اجل ن = ٠ فان ٦ = −٢(٠) + ب ⇐ ب = ٦ وقانون الحركة ق(ن) = −٢ن + ٦

١- البعد بين المتحركين الاول (٢ن + ١،٠) والثاني (٠، −٢ن + ٦) والبعد بين النقطتين

ل = $\sqrt{(٢ن + ١ - ٠)^٢ + (٠ + ٢ن - ٦)^٢}$

ل = $\sqrt{٤ن^٢ + ٤ن + ١ + ٤ن^٢ - ٢٤ن + ٣٦}$

ل = $\sqrt{٨ن^٢ - ٢٠ن + ٣٧}$

٢- البعد ٥سم

ل = $\sqrt{٨ن^٢ - ٢٠ن + ٣٧} = ٥$

$٨ن^٢ - ٢٠ن + ٣٧ = ٢٥$

$٨ن^٢ - ٢٠ن + ١٢ = ٠$

$$٨ن^{٢} - ٢٠ن + ١٢ = ٠$$
$$٢ن^{٢} - ٥ن + ٣ = ٠$$
$$(٢ن - ٣)(ن - ١) = ٠ \Leftrightarrow ن = ١ \vee ن = \frac{٣}{٢}$$

٣ - المسافة اصغر مل يمكن

$$ل = \sqrt{٨ن^{٢} - ٢٠ن + ٣٧}$$
$$ل' = \frac{١٦ن - ٢٠}{٢\sqrt{٨ن^{٢} - ٢٠ن + ٣٧}}$$

ينعدم المشتق عندما $ن = \frac{٢٠}{١٦} = \frac{٥}{٤} = ١\frac{١}{٤}$

$$ل = \sqrt{٨ن^{٢} - ٢٠ن + ٣٧}$$
$$ل = \sqrt{\frac{٢٥}{٢} - ٢٥ + ٣٧} = \sqrt{\frac{٢٩}{٢}}$$

| ن | | | $\frac{٥}{٤}$ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| ل $'$(ن) | ‖ | +++++++++++ | ٠ | --------------- | ‖ |
| ل(ن) | ‖ | ↗ | $\sqrt{\frac{٢٩}{٢}}$ | ↘ | ‖ |

المسافة اصغر ما يمكن عندما $ن = \frac{٥}{٤}$

٥- احاثيا ى منتصف ك$(٢ن + ١،٠)$ والثاني هـ$(٠، -٢ن + ٦)$

ي$\left(\frac{٢ن + ١}{٢}، \frac{-٢ن + ٦}{٢}\right)$ مسار ى علينا ان نحذف الوسيط ن من المعادلتين

$٢س = ٢ن + ١$ ، $٢ص = -٢ن + ٦$ بالجمع نجد $٢س + ٢ص = ٧$ أي ان حامل مسار حركة ن هو مستقيم

وسرعة هذه النقطة هي $ع = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$

تدريب مجموع محيطي مربع ودائرة ٦٠ سم اوجد طول نصف قطر الدائرة وطول ضلع المربع عندما تكون مساحتيهما اصغر ما يمكن

الحل

محيط الربع +محيط الدائرة =٦٠

بفرض طول ضلع الربع س ونصف قطر الدائرة نق

$$٤س + ٢\pi نق = ٦٠ \Leftrightarrow ٢س + \pi نق = ٣٠ \Leftrightarrow نق = \frac{٣٠ - ٢س}{\pi}$$

مجمع المساحتين $م = \pi نق^{٢} + س^{٢} = \pi\left(\frac{٣٠ - ٢س}{\pi}\right)^{٢} + س^{٢} = \frac{١}{\pi}(٣٠ - ٢س)^{٢} + س^{٢}$

$$م' = \frac{١}{\pi}٢(-٢)(٣٠ - ٢س) + ٢س \Leftrightarrow م' = \frac{١}{\pi}(-١٢٠ + ٨س) + \frac{\pi}{\pi}٢س$$

$$= \frac{١}{\pi}\left(-١٢٠ + (٨+٢\pi)\,\text{س}\right)$$

ينعدم المشتق عندما $\text{س} = \frac{١٢٠}{٨+٢\pi} = \frac{٦٠}{٤+\pi}$ اذا

$$\text{نق} = \frac{٣٠-٢\text{س}}{\pi} = \frac{٣٠-٢\frac{٦٠}{٤+\pi}}{\pi} = \frac{\frac{١٢٠-٣٠\pi-١٢٠}{٤+\pi}}{\pi} = \frac{٣٠}{٤+\pi}$$

المساحة

$$\text{م} = \pi\left(\frac{٣٠}{٤+\pi}\right)^{٢} + \left(\frac{٦٠}{٤+\pi}\right)^{٢} = \pi\left(\frac{٣٠}{٤+\pi}\right)^{٢} + ٤\left(\frac{٣٠}{٤+\pi}\right)^{٢} = \left(\frac{٣٠}{٤+\pi}\right)^{٢}(٤+\pi)$$

$$= \frac{٩٠٠}{٤+\pi}$$

| س | ٦٠ | | $\frac{٦٠}{٤+\pi}$ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| م $'$(س) | \|\| | ٠ +++++++++++ | | --------------- | \|\| |
| م(س) | \|\| | ↗ | $\frac{٩٠٠}{٤+\pi}$ | ↘ | \|\| |

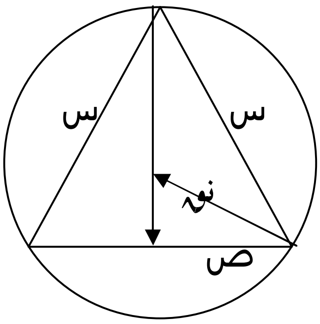
المساحة اصغر ما يمكن عندما $\text{س} = \frac{٦٠}{٤+\pi}$ و $\text{نق} = \frac{٣٠}{٤+\pi}$

تدريب مثلث متساوي الساقين مرسوم داخل دائرة نصف قطرها ١٢ اوجد بعدي المثلث لتكون مساحة اكبر ما يمكن ثم برهن أن نسبة مساحة المثلث إلى مساحة الدائرة تساوي $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤\pi}$

الحل : نفرض نصف قطر الدائرة نق

وطول ساق المثلث س وطول القاعدة ٢ص

وبفرض زاوية الرأس ٢هـ




مساحة المثلث $\text{م} = \frac{١}{٢}\text{س}\times\text{س جا٢هـ} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\frac{\text{ص}}{١٢} = \frac{\text{س}^{٢}\text{ص}}{٢٤}$

$\text{س جاهـ} = \text{ص} = ١٢\,\text{جا٢هـ} \Leftrightarrow \text{س جاهـ} = ٢٤\,\text{جاهـ جتاهـ} \Leftrightarrow \text{س} = ٢٤\,\text{جتاهـ}$

$\text{ص} = \text{س جاهـ} \Leftrightarrow \text{ص} = ٢٤\,\text{جتاهـ جاهـ}$

$\text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٢} = \text{س}^{٢}$

$١٤٤ = \text{ص}^{٢} + (\text{ع} - ١٢)^{٢} \Leftrightarrow ١٤٤ = \text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٢} - ٢٤\text{ع} + ١٤٤$

$١٤٤ = \text{س}^{٢} - ٢٤\text{ع} + ١٤٤$

$\text{س}^{٢} = ٢٤\text{ع}$

$\text{ص}^{٢} + = ٢٤\text{ع} - \text{ع}^{٢} \Rightarrow \text{ص} = \sqrt{٢٤\text{ع} - \text{ع}^{٢}}$

$م = \frac{س^٢ ص}{٢٤} = ع\sqrt{٢٤ع - ع^٢}$

$م' = \sqrt{٢٤ع - ع^٢} + ع\frac{٢٤ - ٢ع}{٢\sqrt{٢٤ع - ع^٢}} = \frac{٢٤ع - ع^٢ + ١٢ع - ع^٢}{\sqrt{٢٤ع - ع^٢}} = \frac{٣٦ع - ٢ع^٢}{\sqrt{٢٤ع - ع^٢}}$

$= \frac{٢ع(١٨ - ع)}{\sqrt{٢٤ع - ع^٢}}$

ينعدم المشتق عندما ع=٠ مرفوض اوع=١٨ مقبول

$س^٢ = ٢٤ \times ١٨ = ٤ \times ٦ \times ٦ \times ٣ \Leftarrow س = ١٢\sqrt{٣}$ و

$ص = \sqrt{٢٤ \times ١٨ - (١٨)^٢} = \sqrt{١٨(٦)} = ٦\sqrt{٣}$ و

$م = \frac{١}{٢٤} \times ١٤٤ \times ٣ \times ٦\sqrt{٣} = ١٠٨\sqrt{٣}$

| ع | ٢٤ | | ١٨ | | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| $م'(ع)$ | ‖ | --------------- | ٠ | +++++++++ | ‖ |
| $م(ع)$ | ‖ | ↘ | $١٠٨\sqrt{٣}$ | ↗ | \| |

المساحة اعظم ما يمكن عندما الابعاد ١٨ ، ١٨ ، $٦\sqrt{٣}$

نسبة مساحة المثلث الى الدائرة $\frac{١٠٨\sqrt{٣}}{١٤٤\pi} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤\pi}$

مسائل :

١- تتحرك نقطة هـ(س،ص) على المستقيم $س - ص + ٢ = ٠$ احسب معدل تغير مجموع مربعي بعدي هـ عن النقطتين أ(١،١)،ب(٠،٤) في اللحظة التي يكون فيها ص = ٤ وان معدل تغير س هو $\frac{١}{٢}$وحدة طول على الثانية

٢- تزداد مساحة السطح الكلي لمكعب بمعدل ٠،٢سم مربع على الثانية
احسب معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون طول الحرف ٦ سم

احسب معدل تغير حجم المكعب عندما يكون طول الحرف ٦ سم

٣- تتحرك نقطة هـ(س،ص) على الخط $ص = -س^٣ - ٣س + ٤$ مقتربة من محور الصادات بمعدل $\frac{١}{١٨}$ احسب معدل تغير بعد هـ عن محور السينات لحظة مروره في الموضع (-١،٨)

٤- اوجد النقطة هـ(س،ص) من المستقيم $ص = ٢س - ١$ التي بعدها عن أ(٢،-١) اصغر ما يمكن واحسب هذا البعد عندئذ

٥- ب جـ د مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٦ سم نأخذ على الضلع ب جـ النقطة ن نرسم من ن مستقيما يوازي جـ د يلاقي ب د في هـ كذلك ن' ،هـ' موقعي العمودين المرسومين من ن،هـ على جـ د عين س ليكون مساحة المستطيل ن هـ هـ' ن' اكبر ما يمكن

٦- تتحرك النقطة هـ(س،ص) على الدائرة $س^٢ + ع^٢ - ٤س = ٠$ احسب معدل تغير بعد هـ(س،ص) عن أ(١،٠) عندما س = ٣ علما أن $\frac{دس}{دن} = \frac{١}{٢}$

٧- يتناقص حجم كرة بمعدل ٣سم مكعب /الدقيقة اوجد معدل تغير سطح الكرة عندما يكون نصف قطرها ٤ سم

٨- متوازي مستطيلات أبعاده متناسبة طردا مع الأعداد ١و٢و٣ فإذا ازداد اصغر أبعاده بمعدل ٠،١سم /ث فاحسب معدل تغير مساحة سطحه الكلي ومعدل تغير حجمه عندما يكون اصغر أبعاده ٣ سم

٩ - سلك طوله ٣٠ سم نريد ان نصنع منه مثلثين كل منهما متساوي الأضلاع عين طول ضلع كل منهما ليكون مجموع مساحتيهما اصغر ما يمكن

١٠ - مستطيل قطره ٨ اوجد بعديه ليكون محيطه اكبر ما يمكن ثم لتكون مساحتة اكبر ما يمكن

١١- اوجد بعدي مستطيل مرسوم داخل القطع المكافئ ص = ١٢ – س ٢ لتكون مساحة اكبر ما يمكن

١٢ - ا وجد بعدي مستطيل احد رؤوسه نقطة الأصل والرأس المقابل على القطع الناقص ٣س ٢ + ٤ص ٢ = ١٢ بحيث تكون مساحته اكبر ما يمكن

١٣ - مخروط دوراني نصف قطر قاعدته ٤ سم ومركزها م وارتفاعه ٦سم نقطعه بمستو متحول يوازي قاعدته ويبعد عنها مسافة س احسب بدلالة س حجم المخروط الذي رأسه م وقاعدته المقطع السابق ثم عين س ليكون حجم هذا المخروط اكبر ما يمكن

١٤ - بجد مثلث قائم في ب فيه بجـ = ٦،بد= ٨ ولتكن ن نقطة متحركة من الوتر جد نسقط ن إسقاطا قائما على بجـ في ك وعلى بد في ط

احسب معدل تغير مجموع بعدي ن عن بجـ وعن بد في اللحظة التي يكون فيها جـن = ٢ علما ان معدل تغير بعد ن عن ج في تلك اللحظة $\frac{١}{٥}$ سم /ث

عين موضع ن على الوتر لتكون مساحة المستطيل نكبط اكبر ما يمكن

١٥ – نريد صنع صهريج على شكل متوازي المستطيلات قاعدته مربع ووجهه العلوي مفتوح وسعته ١٠٨ م ٣ اوجد ابعاد هذا الصهريج لتكون مساحته اصغر ما يمكن

١٦ – كيف نقسم سلكا طوله ٢٥ سم الى قسمين لنصنع من الاول مربع ومن الثاني مثلثا اطوال اضلاعه متناسبة مع الاعداد ٣و٤ و٥ على ان يكون مجموع مساحتيهما اصغر ما يمكن

١٧ – مخروط دوراني قائم نصف قطر قاعدته ٢ سم وارتفاعه ٣سم اسطوانة دائرية قائمة إحدى قاعدتيها تستند على قاعدة المخروط ومحيط القاعدة الأخرى على السطح الجانبي للمخروط اوجد المساحة الجانبية للاسطوانة عندما يكون حجمها اكبر ما يمكن

١٨ - بجد مثلث فيه بجـ = ٢ ،بد=١ ،دجـ = $\sqrt{٣}$ نرسم دائرة مركزها ب ونصف قطرها ١ سم ودائرة ثانية مركزها جـ ونصف قطرها $\sqrt{٣}$ نرسم من د مستقيما متحولا لا يخترق سطح المثلث فيقطع الدائرة الأولى في ط كما يقطع الدائرة الثانية فيط َ وليكن س قياس الزاوية ب د ط

١-عين س ليكون طط َ = ٢ $\sqrt{٣}$

٢-بفرض ن ،ن َ المسقطين القائمين ل ب،جـ على طط َ عين س لتكون مساحة شبه المنحرف بنن َجاكبر ما يمكن

١٩ – تتحرك النقطة ن(س،ص) على الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ١٣$ عين موضع ن في كل لحظة يكون فيها معدل تغير سينات ن يساوي $\frac{٢}{٣}$ معدل تغير صادات ن

٢٠ - س م ص زاوية قياسها ١٢٠° والقطعة أب = ٧ ينزلق طرفاها على ضلعي الزاوية فإذا كان معدل ابتعاد أ عن م يساوي $\frac{١}{٣}$سم فاحسب

١-معدل اقتراب ب من م عندما يكون م أ = ٥ سم

٢-معدل تغير مساحة المثلث أ م ب عندما يكون م أ = ٥ سم

٢١ - س م ص زاوية قياسها ١٢٠° والقطعة ب جـ طوله ثابت ينزلق طرفاها على ضلعي الزاوية

١- احسب م ب عندما تكون السرعتان العدديتان ل ب و ج متساويتان ٢

٢- احسب سرعة ج في اللحظة التي يكون فيها م ب = ٢ م جـ اذا علمت ان سرعة ب $\frac{٣}{٤}$ سم/ث

٢٢ –اسطوانة دورا نية قائمة حجمها ٣٠٠$\pi$سم مكعب فاذا كان معدل تغير نصف قطر قاعدتها ٢و٠ سم/ث احسب معدل تغير ارتفاعها عندما نصف قطرها ٥ سم واحسب معدل التغير في مساحتها الكلية عندئذ

٢٣ – مخروط دوراني قائم رأسه ومحيط قاعدته على سطح كرة نصف قطرها ٦ سم

١-احسب حجم المخروط بدلالة ارتفاعه س واوجد س ليكون حجم المخروط اكبر ما يمكن

٢-اوجد معدل تغير حجم المخروط عندما تكون س = ٢ مع العلم ان $\frac{ءس}{ءن} = \frac{١}{٢}$ سم/ث

٢٤ – تتحرك ن(س،ص) على القطع المكافئ $ص = \frac{١}{٤}س^{٢}$ مقتربة من محور السينات بعدل ١،٠ وحدة طول /ث

١-احسب معدل تغير بعد ن عن ب(١،٠)

٢-احسب معدل تغير مجموع مربعي بعدي ن عن النقطتين أ(٢،١)،جـ(–٢،٠) عندما تكون س = ٢

٢٥ – ليكن الاقتران $ص = -س^{٢} + ٤س - ٣$

١-ارسم الخط البياني للاقتران

٢-اذا كان معدل تغير ص يساوي $\frac{١}{١٠}$ وحدة طول /ث عندما ع =٤ احسب معدل تغير السطح المحصور بين الخط ومحور السينات والمستقيم س=١ و س=ع ع > ١