مثال: جد النقطة على منحنى س² + ص² − ٢ص = ٦٧ والتي يكون ميل المماس عندها يساوي ٤

الحل: نشتق الطرفين ⇐ ٢س + ٢ص × صَ − ٢ × صَ = ٠   نضع [صَ = ٤]

⇐ ٢س + ٢ص (٤) − ٢(٤) = ٠

⇐ ٢س + ٨ص − ٨ = ٠ ، بالقسمة على (٢)

⇐ س + ٤ص − ٤ = ٠ ⇐ س = ٤ − ٤ص نعوض في العلاقة الأصلية

⇐ (٤ − ٤ص)² + ص² − ٢ص = ٦٧

⇐ ١٦ − ٣٢ص + ١٦ص² + ص² − ٢ص = ٦٧ ⇐ ١٧ص² − ٣٤ص − ٥١ = ٠   نقسم على ١٧

⇐ ص² − ٢ص − ٣ = ٠ ⇐ (ص − ٣)(ص + ١) = ٠

⇐ [ص = ٣] أو [ص = −١]

عندما [ص = ٣] ⇐ س = ٤ − ١٢ = −٨   ∴ النقطة (−٨، ٣)

عندما [ص = −١] ⇐ س = ٤ + ٤ = ٨   ∴ النقطة (٨، −١)

---

* ملاحظة: المنحنى يقطع محور السينات عندما [ص = ٠] ويقطع محور الصادات عندما [س = ٠]

مثال: اكتب معادلة المماس لمنحنى ق(س) = س² − س − ٦ عند نقطة تقاطع ق(س)

أ) مع محور السينات   ب) مع محور الصادات

الحل: أ) يقطع محور السينات عندما س² − س − ٦ = ٠ ⇐ (س − ٣)(س + ٢) = ٠

س = ٣ أو س = −٢   ∴ النقاط هي (٣، ٠) ، (−٢، ٠)

قَ(س) = ٢س − ١

عندما [س = ٣] ⇐ قَ(٣) = ٢(٣) − ١ = ٥

معادلة المماس هي: ص − ٠ = ٥(س − ٣)

عندما [س = −٢] ⇐ قَ(−٢) = ٢(−٢) − ١ = −٥

معادلة المماس هي: ص = −٥(س + ٢)

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

ب) يقطع محور الصادات عندما س = ٠

∴ ق(٠) = ٠ − ٠ − ٦ = −٦   ، النقطة (٠، −٦)

م = قَ(٠) = ٠ − ١ = −١   ∴ المماس: ص + ٦ = −(س − ٠)

* **ملاحظة:** تتقاطع المنحنيات ق(س) ، هـ(س) عندما ق(س) = هـ(س) حيث يكون الإحداثي السيني والصادي لهما مشترك عند نقطة التقاطع.

مثال: اكتب معادلة المماس لمنحنى $(س+ص)^3 - 5س + 7ص = 10$ عند نقطة التقاطع مع المستقيم $س+ص=2$

الحل: من المستقيم $س+ص = 2 \Leftarrow ص = 2-س$ نعوض في معادلة المنحنى

$\Leftarrow (2)^3 - 5س + 7(2-س) = 10 \Leftarrow 8 - 5س + 14 - 7س = 10$

$\Leftarrow 22 - 12س = 10 \Leftarrow 12 = 12س \Leftarrow \boxed{س = 1}$

$\therefore$ ص = 2 − 1 = 1 $\therefore$ النقطة هي (1،1) نشتق لإيجاد الميل

$\Leftarrow 3(س+ص)^2\left(1+\frac{دص}{دس}\right) - 5 + 7\frac{دص}{دس} = 0$ نعوض عن (س،ص)

$\Leftarrow 3(1+1)^2\left(1+\frac{دص}{دس}\right) - 5 + 7\frac{دص}{دس} = 0$

$\Leftarrow 12 + 12\frac{دص}{دس} - 5 + 7\frac{دص}{دس} = 0 \Leftarrow 19\frac{دص}{دس} + 7 = 0 \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-7}{19}$

$\therefore$ معادلة المماس هي: $ص - 1 = \frac{-7}{19}(س - 1)$

مثال: اكتب معادلة المماس لمنحنى $س^2 + ص^2 = 29$ عند نقاط تقاطع المنحنى مع المستقيم $ص = 2س + 1$

الحل: نعوض معادلة المستقيم في معادلة المنحنى

$\Leftarrow س^2 + (2س+1)^2 = 29 \Leftarrow س^2 + 4س^2 + 4س + 1 = 29$

$\Leftarrow 5س^2 + 4س + 1 = 29 \Leftarrow 5س^2 + 4س - 28 = 0$

$\Leftarrow (س - 2)(5س + 14) = 0$

$\Leftarrow \boxed{س = 2}$ أو $\boxed{س = \frac{-14}{5}}$

عند $\boxed{س = 2} \Leftarrow ص = 2(2) + 1 = 5$ النقطة (2،5)

عند $\boxed{س = \frac{-14}{5}} \Leftarrow ص = 2\left(\frac{-14}{5}\right) + 1 = \frac{-23}{5}$ النقطة $\left(\frac{-14}{5} ، \frac{-23}{5}\right)$

نشتق معادلة المنحنى لإيجاد الميل $\Leftarrow 2س + 2ص\frac{دص}{دس} = 0 \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-2س}{2ص} = \frac{-س}{ص}$

عند $\boxed{س = 2} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-2}{5} \Leftarrow$ المماس: $ص - 5 = \frac{-2}{5}(س - 2)$

عند $\boxed{س = \frac{-14}{5}} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{\frac{-14}{5}}{\frac{-23}{5}} = \frac{14}{23} \Leftarrow$ المماس: $ص + \frac{23}{5} = \frac{14}{23}\left(س + \frac{14}{5}\right)$

* ملاحظة: يكون المستقيمان متوازيان إذا كان ميل الأول = ميل الثاني
يكون المستقيمان متعامدان اذا كان ميل الأول × ميل الثاني = -١

مثال: اوجد النقاط على منحنى ق(س) = س^{٣} - ٥س + ٩ والتي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم ص - ٧س = ٨

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

الحل: ميل المماس = ق$'$(س) = ٣س^{٢} - ٥

لايجاد ميل المستقيم نشتق ⇐ ص$'$ - ٧ = ٠ ⇐ ص$'$ = ٧

⇐ ٣س^{٢} - ٥ = ٧ لأنهما متوازيان ⇐ ٣س^{٢} = ١٢ ⇐ س = ±٢

عند $\boxed{\text{س} = ٢}$ ⇐ ق(٢) = ٨ - ١٠ + ٩ = ٧ النقطة (٢، ٧)

عند $\boxed{\text{س} = -٢}$ ⇐ ق(-٢) = -٨ + ١٠ + ٩ = ١١ النقطة (-٢، ١١)

مثال: اوجد النقاط على منحنى ق(س) = س^{٢} - ٣س + ٧ والتي يكون المماس عندها عمودياً على المستقيم ٥ص + س = ٢

الحل: ميل المماس = ق$'$(س) = ٢س - ٣

ميل المستقيم نشتق ⇐ ٥ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ + ١ = صفر ⇐ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $-\frac{١}{٥}$

∴ ٢س - ٣ = ٥ ⇐ ٢س = ٨ ⇐ $\boxed{\text{س} = ٤}$

ق(٤) = ١٦ - ١٢ + ٧ = ١١ النقطة (٤، ١١)

مثال: جد النقطة على منحنى $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}}$ = ٦ بحيث يكون المماس عندها موازياً للمستقيم ٣س + ٦ص = ٧

الحل: المستقيم ٣س + ٦ص = ٧ نشتق ⇐ ٣ + ٦ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠

⇐ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\frac{٣}{٦} = -\frac{١}{٢}$ (ميل المستقيم)

⇐ نشتق معادلة المنحنى $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} + \frac{١}{٢\sqrt{\text{ص}}} \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠ ، نضع $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\frac{١}{٢}$

⇐ $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} + \frac{١}{٢\sqrt{\text{ص}}} \times -\frac{١}{٢}$ = ٠ ⇐ $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} = \frac{١}{٤\sqrt{\text{ص}}}$ ⇐ ٤$\sqrt{\text{ص}}$ = ٢$\sqrt{\text{س}}$ بالقسمة على (٢)

⇐ $\sqrt{\text{س}}$ = ٢$\sqrt{\text{ص}}$

نعوض في معادلة المنحنى ⇐ ٢$\sqrt{\text{ص}}$ + $\sqrt{\text{ص}}$ = ٦ ⇐ ٣$\sqrt{\text{ص}}$ = ٦ ⇐ $\sqrt{\text{ص}}$ = ٢
⇐ $\boxed{\text{ص} = ٤}$

∴ $\sqrt{\text{س}}$ = ٢$\sqrt{\text{ص}}$ ⇐ $\sqrt{\text{س}}$ = ٢$\sqrt{٤}$ ⇐ $\sqrt{\text{س}}$ = ٤ ⇐ س = ١٦
∴ النقطة (١٦، ٤)

* ملاحظة : يكون المماس موازياً لمحور السينات (أفقياً) اذا كان ميل المماس = ٠

مثال : أوجد النقاط على منحنى ق(س) = (س² - ٢س)⁴ والتي يكون المماس عندها أفقياً .

الحل : قَ(س) = ٤(س² - ٢س)³ × (٢س - ٢) = صفر (لأنه موازي لمحور السينات)

⇐ ٤(س² - ٢س)³ = ٠ ⇐ س² - ٢س = ٠ ⇐ س(س - ٢) = صفر

⇐ س = ٠ أو س = ٢

أيضاً : ٢س - ٢ = ٠ ⇐ ٢س = ٢ ⇐ س = ١

ق(٠) = ٠ ، ق(١) = ١ ، ق(٢) = ٠ النقاط هي : (٠،٠) ، (١،١) ، (٢،٠)

مثال : اوجد قيم س على المنحنى ق(س) = س - جا٢س ، س ∈ [٠، π] والتي يكون العمودي على المماس عندها موازي لمحور الصادات .

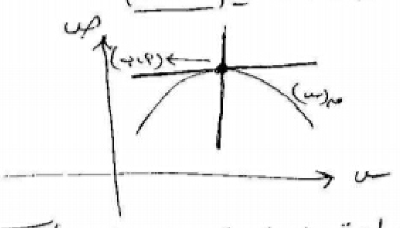
الحل : العمودي يوازي محور الصادات ⇐ المماس يوازي محور السينات

قَ(س) = ١ - ٢جتا٢س ⇐ ١ - ٢جتا٢س = ٠ ⇐ ١ = ٢جتا٢س

⇐ جتا٢س = ½ ⇐ ٢س = ٦٠° أو ٢س = ٣٠٠° (الربع الأول والرابع الجتا موجب)

⇐ س = ٣٠° أو س = ١٥٠° ∴ س = π/٦ ، ٥π/٦

ملاحظة : اذا كان المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (أ،ب) موازياً لمحور السينات (م = صفر) فإن معادلته هي ص = ب ومعادلة العمودي على المماس هي س = أ



مثال : اكتب معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى ق(س) = ٤س - س² عندما س = ٢

الحل : ق(٢) = ٨ - ٤ = ٤ ، النقطة (٢،٤)

قَ(س) = ٤ - ٢س ⇐ قَ(٢) = ٤ - ٤ = ٠ ∴ المماس يوازي محور السينات

معادلة المماس هي : ص = ٤

معادلة العمودي هي : س = ٢

مثال: بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 + 8$ مماسين مرسومين من النقطة $(1, 5)$ والتي لا تقع عليه.

الحل: $(1, 5)$ ليست نقطة تماس لذلك نفرض نقطة تماس ولتكن $(\text{س}, \text{ص})$.

$\text{ق}'(\text{س}) = 2\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} \Leftarrow 2\text{س} = \dfrac{\text{ص} - 5}{\text{س} - 1} \Leftarrow 2\text{س}^2 - 2\text{س} = \text{ص} - 5$

$\Leftarrow 2\text{س}^2 - 2\text{س} = \text{س}^2 + 8 - 5 \Leftarrow \text{س}^2 - 2\text{س} - 3 = 0$

$\Leftarrow (\text{س} - 3)(\text{س} + 1) = 0 \Leftarrow \boxed{\text{س} = 3}$ أو $\boxed{\text{س} = -1}$

أي أنه هناك نقطتين تماس هما $(3, 17)$ ، $(-1, 9)$ أي أنه للاقتران مماسين

ملاحظة: إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ يمس $\text{هـ}(\text{س})$ عند $\text{س} = \text{م}$ (نقطة التماس) فإن:

$\text{ق}(\text{م}) = \text{هـ}(\text{م})$ ، $\text{ق}'(\text{م}) = \text{هـ}'(\text{م})$

مثال: إذا كان المستقيم $\text{ص} = 3\text{س} + \text{م}$ يمس المنحنى $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{2\text{س} - 1}{\text{س} + 1}$ جد نقاط التماس وجد قيمة م

الحل: $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3$ ، $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{(\text{س} + 1)(2) - (2\text{س} - 1)(1)}{(\text{س} + 1)^2} = \dfrac{3}{(\text{س} + 1)^2}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}'(\text{س}) \Leftarrow 3 = \dfrac{3}{(\text{س} + 1)^2} \Leftarrow 3(\text{س} + 1)^2 = 3 \Leftarrow (\text{س} + 1)^2 = 1$

$\Leftarrow \text{س}^2 + 2\text{س} + 1 = 1 \Leftarrow \text{س}^2 + 2\text{س} = 0 \Leftarrow \text{س}(\text{س} + 2) = 0 \Leftarrow \boxed{\text{س} = 0}$ أو $\boxed{\text{س} = -2}$

عند $\boxed{\text{س} = 0}$ $\text{ق}(0) = \dfrac{0 - 1}{1 + 0} = -1$ النقطة $(0, -1)$ نعوض هذه النقطة في معادلة المستقيم

$\Leftarrow -1 = 0 + \text{م} \Leftarrow \boxed{\text{م} = -1}$

عند $\boxed{\text{س} = -2}$ $\text{ق}(-2) = \dfrac{-4 - 1}{-2 + 1} = 5$ النقطة $(-2, 5)$ نعوضها أيضاً

$\Leftarrow 5 = 3 \times -2 + \text{م} \Leftarrow 5 = -6 + \text{م} \Leftarrow \boxed{\text{م} = 11}$

سؤال: جد معادلة المماس لمنحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 - 6\text{س} + 7$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $\text{ص} - 3\text{س} + 1 = 0$

إرشاد: عند نقطة التقاطع $\text{ق}(\text{س}) = \text{ص} \Leftarrow$ $\text{س} = 8$ ، $\text{س} = 1$ $(8, 23)$ معادلة ، $(1, 2)$ معادلة

ثم نجد ميل المماس عند نقطة التماس $= \text{ق}'(\text{س})$

ثم نجد معادلة المماس عند كل نقطة

مثال: اذا كان المستقيم ٤س - ٢ص + ٥ = صفر يمس منحنى ه عند النقطة (٣، ٢) وكان المستقيم ٩ص + ٣س - ٤ = ٠ عمودياً على المماس لمنحنى ل عند النقطة (٣، -١) أوجد (ه × ل)'(٣)

الحل: (ه × ل)'(٣) = ه(٣) × ل'(٣) + ل(٣) × ه'(٣)　　لكن ه(٣) = ٢ ، ل(٣) = -١

المستقيم ٤س - ٢ص + ٥ = ٠ يمس منحنى ه عند (٣، ٢)

ه'(٣) = دص/دس عندما س = ٣

٤ - ٢ دص/دس = ٠ ⟸ دص/دس = ٢ = ه'(٣)

المستقيم ٩ص + ٣س - ٤ = ٠ عمودياً على المماس لمنحنى ل عند النقطة (٣، -١)

ل'(٣) × دص/دس = -١ ⟸ س = ٣

٩ دص/دس + ٣ = ٠ ⟸ دص/دس = -١/٣

∴ ل'(٣) × -١/٣ = -١ ⟸ ل'(٣) = ٣

(ه × ل)'(٣) = ه(٣) × ل'(٣) + ل(٣) × ه'(٣)

= (٢)(٣) + (-١)(٢) = ٤

مثال: اذا كان المستقيم ص = ٢س يمس منحنى ه(س) = (س² - ٢)(أس + ب) عند س = ٢
جد أ، ب

الحل: ص(٢) = ٢ × ٢ = ٤ ، ه(٢) = (٤ - ٢)(٢أ + ب) = ٢(٢أ + ب)

ه(٢) = ص(٢) ⟸ ٢(٢أ + ب) = ٤ ⟸ $\boxed{\text{٢أ + ب = ٢}}$ —— (١)

ص' = ٢ ، ه'(س) = (س² - ٢)(أ) + (أس + ب)(٢س)

ه'(٢) = (٤ - ٢)(أ) + (٢أ + ب)(٤) = ١٠أ + ٤ب

⟸ ه'(٢) = ص' ⟸ ١٠أ + ٤ب = ٢ ⟸ $\boxed{\text{٥أ + ٢ب = ١}}$ —— (٢)

٢أ + ب = ٢　(-٢)　　⟸　　-٤أ - ٢ب = -٤
٥أ + ٢ب = ١　(١)　　　　　　٥أ + ٢ب = ١

$\boxed{\text{أ = -٣}}$ وبالتعويض في (١)

٢(-٣) + ب = ٢ ⟸ -٦ + ب = ٢ ⟸ $\boxed{\text{ب = ٨}}$

مثال: اذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٠،١)، (٣،٤) يمس المنحنى

$\text{ق(س)} = \text{أس}^{\text{٢}} - \text{٧س} + \text{٥}$ جد أ.

الحل: ميل المستقيم $= \frac{\text{٤} - \text{١}}{\text{٣} - \text{٠}} = \frac{\text{٣}}{\text{٣}} = \text{١}$

معادلة المستقيم: ص − ١ = ١(س − ٠) ⟸ ص = س + ١

$\text{ق}'\text{(س)} = \text{٢أس} - \text{٧}$ ، $\text{ق}'\text{(س)}$ = ميل المستقيم ⟸ ٢أس − ٧ = ١

⟸ ٢أس = ٨ ⟸ $\text{أ} = \frac{\text{٤}}{\text{س}}$

وأيضاً يكون ق = ص ⟸ $\text{أس}^{\text{٢}} - \text{٧س} + \text{٥} = \text{س} + \text{١}$ ونعوض قيمة أ

⟸ $\frac{\text{٤}}{\text{س}} \times \text{س}^{\text{٢}} - \text{٧س} + \text{٥} = \text{س} + \text{١}$ ⟸ ٤س − ٧س + ٥ = س + ١

⟸ −٤س = −٤ ⟸ $\boxed{\text{س} = \text{١}}$ ⟸ $\text{أ} = \frac{\text{٤}}{\text{١}} = \text{٤}$ ∴ $\boxed{\text{أ} = \text{٤}}$

سؤال: اذا كان المستقيم ص = ١٣س − ٧ يمس منحنى $\text{ق(س)} = \text{أس}^{\text{٣}} + \text{بس}^{\text{٢}}$ عند س = ١

جد أ، ب الإجابة: $\boxed{\text{أ} = \text{١}}$ $\boxed{\text{ب} = \text{٥}}$

مثال: $\text{ق(س)} = \frac{\text{س}}{\text{٢} - \text{٣س}}$ ، $\text{هـ(س)} = (\text{س} - \text{٢})^{\text{٨}}(\text{١} - \text{٢س})^{\text{٣}}$ أثبت أن ق، هـ متماسين

عند $\boxed{\text{س} = \text{١}}$

الحل: ق(١) = هـ(١) لكي يكونا متماسين

$\text{ق(١)} = \frac{\text{١}}{\text{٢} - \text{٣}} = -\text{١}$ ، $\text{هـ(١)} = (\text{١} - \text{٢})^{\text{٨}}(\text{١} - \text{٢س})^{\text{٣}} = \text{١} \times -\text{١} = -\text{١}$

∴ ق(١) = هـ(١)

أيضاً يجب أن يكون $\text{ق}'\text{(١)} = \text{هـ}'\text{(١)}$

$\text{ق}'\text{(س)} = \frac{(\text{٢} - \text{٣س})(\text{١}) - (\text{س} \times -\text{٣})}{(\text{٢} - \text{٣س})^{\text{٢}}} = \frac{\text{٢}}{(\text{٢} - \text{٣س})^{\text{٢}}}$ ⟸ $\text{ق}'\text{(١)} = \frac{\text{٢}}{(\text{٢} - \text{٣})^{\text{٢}}} = \text{٢}$

$\text{هـ}'\text{(س)} = (\text{س} - \text{٢})^{\text{٨}} \times \text{٣}(\text{١} - \text{٢س})^{\text{٢}} \times -\text{٢} + (\text{١} - \text{٢س})^{\text{٣}} \times \text{٨}(\text{س} - \text{٢})^{\text{٧}} \times \text{١}$

$\text{هـ}'\text{(١)} = \text{١} \times \text{٣} \times \text{١} \times -\text{٢} + (-\text{١}) \times \text{٨} \times -\text{١} = -\text{٦} + \text{٨} = \text{٢}$

∴ $\text{ق}'\text{(١)} = \text{هـ}'\text{(١)}$

هذا يعني أن ق(س) ، هـ(س) متماسين عند س = ١

مثال: ق(س) = $س^2$ + أس + أ ، جد أ اذا كان ق(س) يمس محور السينات

الحل: ق′(س) = ٢س + أ = ٠ ⇐ س = $\frac{-أ}{٢}$

ق($\frac{-أ}{٢}$) = $\frac{أ^2}{٤}$ + أ($\frac{-أ}{٢}$) + أ = ٠ ⇐ $\frac{أ^2}{٤}$ − $\frac{أ^2}{٢}$ + أ = ٠ بالضرب في ٤

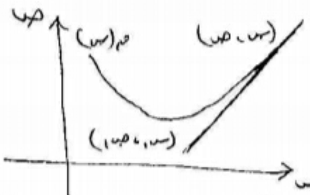
⇐ $أ^2$ − ٢$أ^2$ + ٤أ = ٠ ⇐ ٤أ − $أ^2$ = ٠ ⇐ أ(٤ − أ) = ٠ ⇐ أ = ٠ ، ٤

---

* **ملاحظة:** اذا كان ق(س) يمس محور السينات عند س = ب فإنه كل من:
ق(ب) = ٠ ، ق′(ب) = ٠

* اذا كانت النقطة (س١، ص١) نقطة خارجية لا تقع على منحنى ق(س) ورسم منها مماس للمنحنى وكانت نقطة التماس هي (س، ص) ففي مثل هذه الحالة نجد ميل المماس بطريقتين: م١ = ق′(س)

م٢ = $\frac{ص - ص١}{س - س١}$ ونضع م١ = م٢ ونستفيد من معادلة المنحنى الأصلية



الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: اكتب معادلة المماس المرسوم لمنحنى ق(س) = ٤س − $س^2$ من النقطة (٢، ٥)

الحل: ق(٢) = ٨ − ٤ = ٤ ≠ ٥ ∴ (٢، ٥) نقطة خارجية

نفرض نقطة التماس هي (س، ص)

م١ = ق′(س) = ٤ − ٢س ، م٢ = $\frac{ص - ٥}{س - ٢}$ نضع م١ = م٢ ⇐ $\frac{ص - ٥}{س - ٢}$ = ٤ − ٢س

⇐ (ص − ٥) = (٤ − ٢س)(س − ٢) نضع مكان ص المقدار ٤س − $س^2$

⇐ ٤س − $س^2$ − ٥ = ٤س − ٨ − ٢$س^2$ + ٤س ⇐ $س^2$ − ٤س + ٣ = ٠

⇐ (س − ٣)(س − ١) = ٠ ⇐ س = ٣ ، ١

عند $\boxed{س = ٣}$ ق(٣) = ٤×٣ − $(٣)^2$ = ٣ ∴ النقطة (٣، ٣)

م = ق′(٣) = ٤ − ٢(٣) = −٢ ∴ المماس: ص − ٣ = −٢(س − ٣)

عند $\boxed{س = ١}$ ق(١) = ٤(١) − ١ = ٣ ∴ النقطة (١، ٣)

م = ق′(١) = ٤ − ٢(١) = ٢ ∴ المماس: ص − ٣ = ٢(س − ١)

مثال: جد معادلة المماس والعمودي المرسوم لمنحنى الاقتران هـ(س) = (٢ - س)/(س - ٣) ، س ≠ ٣

من النقطة (١ ، -½)

الحل: م = هـ'(س) = [(س - ٣)(-١) - (٢ - س)(١)] / (س - ٣)² ⇐ هـ'(١) = [(١ - ٣)(-١) - (٢ - ١)(١)] / (١ - ٣)²

⇐ [م = ¼] ⇐ [ميل العمودي = -٤]

⇐ معادلة المماس هي: ص - ص١ = م(س - س١) ⇐ ص + ½ = ¼ س - ¼ بالضرب في ٤

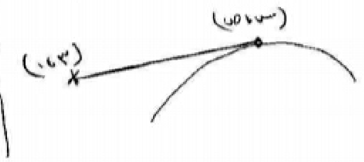
⇐ ٤ص + ٢ = س - ١ ⇐ ٤ص - س + ٣ = ٠

⇐ معادلة العمودي هي: ص + ½ = -٤(س - ١) ⇐ ص + ½ = -٤س + ٤ بالضرب في ٢

⇐ ٢ص + ١ = -٨س + ٨ ⇐ ٢ص + ٨س - ٧ = ٠

مثال: جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران هـ(س) = س² من النقطة (٣ ، ٠)

الحل:



لكن: (٣ ، ٠)
هـ(٣) = (٣)² = ٩
∴ النقطة لا تقع على المنحنى

⇐ هـ'(س) = ٢س ⇐ م (ميل المماس عند (س ، ص)) = ٢س

لكن م = (ص - ٠)/(س - ٣) = ص/(س - ٣) ⇐ ص/(س - ٣) = ٢س ⇐ [ص = ٢س(س - ٣)]

ومن معادلة المنحنى ⇐ ص = هـ(س) = س²

⇐ س² = ٢س(س - ٣) ⇐ س² - ٢س(س - ٣) = ٠

⇐ س² - ٢س² + ٦س = ٠ ⇐ س(س - ٢س + ٦) = ٠

⇐ س(٦ - س) = ٠

⇐ [س = ٠] أو [س = ٦]

ص = هـ(٠) = ٠ (٠ ، ٠)

ص = هـ(٦) = ٣٦ (٦ ، ٣٦) ∴ يوجد مماسان

الأول عند النقطة (٠ ، ٠) حيث م = ٢(٠) = ٠ ومعادلته:

ص - ٠ = ٠(س - ٠) ⇐ [ص = ٠] وهو محور السينات

الثاني عند النقطة (٦ ، ٣٦) حيث م = ٢(٦) = ١٢ ومعادلته:

ص - ٣٦ = ١٢(س - ٦) ⇐ ص - ١٢س + ٣٦ = ٠

مثال: اكتب معادلة المماس المرسوم للمنحنى س² + ص² = ٥ من النقطة (٥، ٠)

الحل: عند تعويض النقطة (٥، ٠) في معادلة المنحنى (٥)² + (٠)² = ٢٥ ≠ ٥

∴ النقطة (٥، ٠) نقطة خارجية لذلك نفرض نقطة التماس (س، ص)

⟸ نشتق لإيجاد الميل الأول م١ ⟸ ٢س + ٢ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠ ⟸ ٢ص $\frac{دص}{دس}$ = −٢س

⟸ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-س}{ص}$

ولإيجاد الميل الثاني ⟸ م٢ = $\frac{ص - ٠}{س - ٥}$ = $\frac{ص}{س - ٥}$

نساوي الميل الأول بالميل الثاني ⟸ $\frac{-س}{ص}$ = $\frac{ص}{س - ٥}$ ⟸ ص² = −س² + ٥س

⟸ $\underbrace{ص² + س²}_{٥}$ = ٥س ⟸ ٥ = ٥س ⟸ $\boxed{س = ١}$

⟸ نعوض س = ١ في معادلة المنحنى لإيجاد ص ⟸ ١ + ص² = ٥ ⟸ ص² = ٤

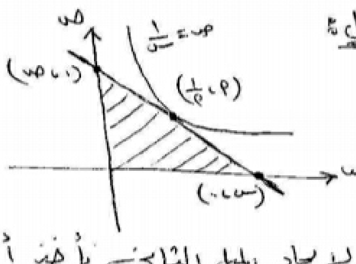
⟸ ص = ±٢ ∴ النقاط (١، ٢) ، (١، −٢) يوجد مماسان .

الأول عند (١، ٢) ⟸ م = $\frac{-١}{٢}$ ومعادلته : ص − ٢ = $\frac{-١}{٢}$ (س − ١)

الثاني عند (١، −٢) ⟸ م = $\frac{-١}{-٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ومعادلته : ص + ٢ = $\frac{١}{٢}$ (س − ١)

مثال: بيّن أن مساحة المثلث المكون من مماس المنحنى ص = $\frac{١}{س}$ عند (أ، $\frac{١}{أ}$) ومحوري السينات والصادات تساوي (٢) .

الحل:



يجب معرفة النقاط (س، ٠) ، (٠، ص) التي تعتبر نقاط خارجية

⟸ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-١}{س²}$ ⟸ $\frac{دص}{دس}\Big|_{(أ، \frac{١}{أ})}$ = $\frac{-١}{أ²}$ (الميل الأول)

ولإيجاد الميل الثاني نأخذ أحد النقاط $\boxed{(س، ٠)}$ أو (٠، ص) مع نقطة التماس (أ، $\frac{١}{أ}$)

م٢ = $\frac{\frac{١}{أ} - ٠}{أ - س}$ ⟸ نساوي الميل الأول بالثاني م١ = م٢ ⟸ $\frac{-١}{أ²}$ = $\frac{\frac{١}{أ}}{أ - س}$

⟸ −أ + س = أ ⟸ $\boxed{س = ٢أ}$

وعند أخذ النقطتين (٠، ص) ، (أ، $\frac{١}{أ}$) لإيجاد الميل الثاني أيضاً م٢ ⟸ م٢ = $\frac{ص - \frac{١}{أ}}{٠ - أ}$

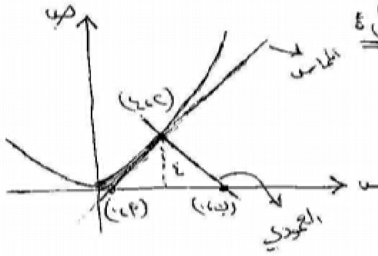
نساوي ميل المشتقة الأول بالميل الثاني م١ = م٢ ⟸ $\frac{-١}{أ²}$ = $\frac{ص - \frac{١}{أ}}{-أ}$ ⟸ ص − $\frac{١}{أ}$ = $\frac{١}{أ}$

⟸ $\boxed{ص = \frac{٢}{أ}}$

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ س × ص = $\frac{١}{٢}$ × ٢أ × $\frac{٢}{أ}$ = ٢

مثال: أوجد مساحة المثلث المكون من مماس المنحنى ق(س) = س² عند (٢، ٤) والعمودي على المماس ومحور السينات.

الحل: نلاحظ أن ارتفاع المثلث هو (٤) ولمعرفة طول القاعدة $\overline{أب}$ يجب معرفة (أ، ٠) وهي نقطة خارجية عن المماس، ويجب معرفة (ب، ٠) وهي نقطة خارجية عن العمودي.



⇐ ميل المماس = ق'(س) = ٢س وعند س = ٢ ⇐ $\boxed{م_١ = ٤}$

نأخذ النقطتين (أ، ٠)، (٢، ٤) فيكون م٢ = $\frac{٤ - ٠}{٢ - أ} = \frac{٤}{٢ - أ}$

نساوي م١ = م٢ ⇐ $\frac{٤}{٢ - أ} = ٤$ ⇐ ٢ − أ = $\frac{٤}{٤}$ ⇐ ٢ − أ = ١ ⇐ $\boxed{أ = ١}$

ميل العمودي = $-\frac{١}{٤}$ ⇐ نأخذ النقطتين (ب، ٠)، (٢، ٤) ⇐ م٢ = $\frac{٤ - ٠}{٢ - ب} = \frac{٤}{٢ - ب}$

نساوي ⇐ م١ = م٢ ⇐ $\frac{٤}{٢ - ب} = -\frac{١}{٤}$ ⇐ ب − ٢ = ١٦ ⇐ $\boxed{ب = ١٨}$

∴ طول $\overline{أب}$ = ١٨ − ١ = ١٧

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٢}$ أب × ٤ = $\frac{١٧}{٢}$ × ٤ = ٣٤

مثال: اذا رسم من النقطة (٠، $\frac{٣}{٢}$) مستقيم عمودي على مماس المنحنى ق(س) = س² جد معادلة هذا العمودي.

الحل: ق(٠) = (٠)² = ٠ ⇐ ∴ النقطة (٠، $\frac{٣}{٢}$) خارجية لذلك نفرض نقطة التماس (س، ص)

م١ = ق'(س) = ٢س ، ميل العمودي = $\frac{-١}{٢س}$ ، م٢ = $\frac{ص - \frac{٣}{٢}}{س - ٠} = \frac{ص - \frac{٣}{٢}}{س} = \frac{س^٢ - \frac{٣}{٢}}{س}$

⇐ نضع م١ = م٢ ⇐ $\frac{س^٢ - \frac{٣}{٢}}{س} = \frac{-١}{٢س}$ ⇐ ٢س³ − ٣س = −س ⇐ ٢س³ − ٢س = ٠

⇐ ٢س (س² − ١) = ٠ ⇐ س = ٠، ١، −١ ⇐ عند $\boxed{س = ٠}$ م = $\frac{-١}{٢(٠)}$ (عمود رأسي عمودي على محور السينات)

وتكون معادلته $\boxed{س = ٠}$ هي نفسها معادلة محور الصادات

عند $\boxed{س = ١}$ ⇐ م = $\frac{-١}{٢(١)} = -\frac{١}{٢}$ ⇐ المعادلة: $\boxed{ص - ١ = -\frac{١}{٢}(س - ١)}$

ق(١) = ١² (١، ١)

وعند $\boxed{س = -١}$ ⇐ ق(−١) = ١ (−١، ١) ⇐ م = $\frac{-١}{٢(-١)} = \frac{١}{٢}$ ⇐ المعادلة: $\boxed{ص - ١ = \frac{١}{٢}(س + ١)}$

مثال: إذا كان $ق(س) = أس^2 + ٧س + جـ$ وكان المماس لمنحنى $ق(س)$ عند $(١، ٣)$ يمر بالنقطة $(٣، ٥)$ جد أ، جـ ؟

الحل: بما أنه يمر بالنقطة $(١، ٣)$ يعني أنها تحقق معادلة منحنى $ق(س)$

$ق(١) = ٣ \Leftarrow ٣ = أ + ٧ + جـ \Leftarrow أ + جـ = -٤$ ---- (*)

أيضاً: $ق'(س) = ٢أس + ٧ \Leftarrow$ ميل المماس عند $(١، ٣) = ق'(١) = ٢أ + ٧$

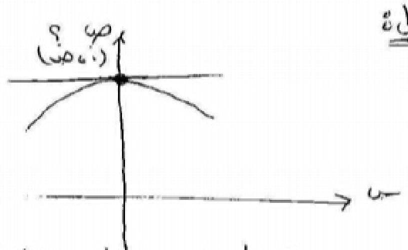
وأيضاً ميل المماس $= \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{٥ - ٣}{٣ - ١} = \frac{٢}{٢} = ١$

نساوي الميل الأول بالثاني $\Leftarrow ٢أ + ٧ = ١ \Leftarrow ٢أ = -٦ \Leftarrow \boxed{أ = -٣}$

نعوض في (*) $-٣ + جـ = -٤ \Leftarrow \boxed{جـ = -١}$

مثال: جد معادلة المماس المرسوم للمنحنى الذي معادلته $٥س^2 - ٣س ص + ٢ص^2 - ٨ = ٠$ عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات.

الحل:



المنحنى يمر بنقطة التماس $(٠، ص)$

$\therefore (٠، ص)$ تحقق معادلة المنحنى

نعوض: $٥(٠)^2 - ٣(٠)ص + ٢ص^2 - ٨ = صفر$

$\Leftarrow ٢ص^2 = ٨ \Leftarrow ص^2 = ٤ \Leftarrow ص = \pm ٢$

$\Leftarrow$ يوجد نقطتان يقطع المنحنى محور الصادات عندهما وهما $(٠، ٢)$ ، $(٠، -٢)$

نشتق بالنسبة إلى س لإيجاد الميل $\Leftarrow ١٠س - \left(٣س(١)\frac{دص}{دس} + ص \times ٣\right) + ٤ص\frac{دص}{دس} = ٠$

$\Leftarrow ١٠س - ٣س\frac{دص}{دس} - ٣ص + ٤ص\frac{دص}{دس} = ٠ \Leftarrow \frac{دص}{دس}(-٣س + ٤ص) = -١٠س + ٣ص$

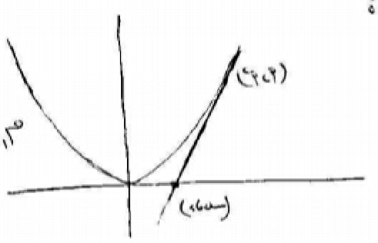
$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-١٠س + ٣ص}{-٣س + ٤ص}$

وعند $(٠، ٢) \Leftarrow م = \frac{٠ + ٦}{٠ + ٨} = \frac{٣}{٤} \Leftarrow$ المعادلة: $ص - ٢ = \frac{٣}{٤}(س - ٠)$

وعند $(٠، -٢) \Leftarrow م = \frac{٠ - ٦}{٠ - ٨} = \frac{٣}{٤} \Leftarrow$ المعادلة: $ص + ٢ = \frac{٣}{٤}(س - ٠)$

مثال: أثبت أن المماس لمنحنى ق(س) = س² عند النقطة (أ، أ²) يقطع محور السينات في النقطة $(\frac{أ}{2}، 0)$

الحل: نفرض نقطة التقاطع مع محور السينات (س، 0)
وهي تعتبر نقطة خارجة على المماس



$م_1 = ق'(س) = 2س$ وعند النقطة (أ، أ²)

$م_1 = ق'(أ) = 2أ$

⇐ $م_2 = \frac{أ^2 - 0}{أ - س} = \frac{أ^2}{أ - س}$

نضع: $م_1 = م_2$ ⇐ $2أ = \frac{أ^2}{أ - س}$ ⇐ $2أ^2 - 2أس = أ^2$ ⇐ $أ^2 - 2أس = 0$

⇐ $أ(أ - 2س) = 0$ ⇐ $\boxed{أ = 0}$ أو $أ = 2س$ ⇐ $\boxed{س = \frac{أ}{2}}$ وهو المطلوب

مثال: اذا كانت معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند $\boxed{س = 2}$ هي ص + 3س = 10 وكان
$ل(س) = س^2 ق(س) + \frac{16}{ق(س)}$ جد ل'(2)

الحل: يجب معرفة ق(2) ، ق'(2) وذلك من معادلة المماس ص+3س = 10

نعوض $\boxed{س = 2}$ ⇐ ص + 6 = 10 ⇐ $\boxed{ص = 4}$ ∴ ق(2) = 4

نشتق ⇐ $\frac{دص}{دس} + 3 = 0$ ⇐ $\frac{دص}{دس} = -3$ ∴ ق'(2) = -3

⇐ $ل'(س) = س^2 \times ق'(س) + ق(س) \times 2س + \frac{-16 \times ق'(س)}{ق^2(س)}$

$ل'(2) = 4 \times -3 + 4 \times 4 - \frac{16 \times -3}{16} = -12 + 16 + 3 = 7$

سؤال: اذا كانت معادلة المماس ق(س) عند س = 3 هي ص + 2س = 11 وكانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى هـ(س) عند س = 3 هي 4ص + س = 15 وكانت
ل(س) = ق(س) × هـ(س) جد ل'(3)

إرشاد: يجب معرفة ق(3) ، ق'(3) ، هـ(3) ، هـ'(3)
نجد ق(3) و ق'(3) وذلك بالرجوع إلى معادلة المماس كما في المثال السابق (منحنى ق(س))
نجد هـ(3) ، هـ'(3) وذلك " " " العمودي على المماس (منحنى هـ(س))
ثم نجد ل'(س) = ق(س) × هـ'(س) + هـ(س) × ق'(س) ______ ⇐ $\boxed{\text{الإجابة } 14}$

مثال: اذا كان لكل من المنحنيين ق(س)، هـ(س) مماس أفقي عند (٢،٤) وكان:

ل(س) = (١٦س + ق(س)) / هـ(س) جد ل'(٢)

الحل: ق، هـ لهما مماس أفقي عند (٢،٤) ⟸ ق(٢) = هـ(٢) = ٤

⟸ ق'(٢) = هـ'(٢) = ٠

∴ ل'(س) = [هـ(س) × (١٦ + ق'(س)) − (١٦س + ق(س)) × هـ'(س)] / (هـ(س))²

⟸ ل'(٢) = [(٤)(١٦ + ٠) − (٣٢ + ٤) × ٠] / (٤)² = (٤ × ١٦) / ١٦ = ٤

مثال: رسم مماس للمنحنى ق(س) = س² + أ من النقطة (١، ب) الواقعة على منحنى ق(س) فقطع محور السينات عند س = -١ جد أ، ب ؟

الحل: بما أن (١، ب) يمر بها منحنى ق فهي تحقق معادلة المنحنى ⟸ ق(١) = ب

⟸ ب = ١ + أ ——— (*)

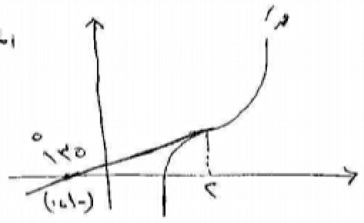
ق'(س) = ٢س ⟸ ق'(١) = ٢ = ميل المماس

والمماس يقطع محور السينات عند $\boxed{س = -١}$ ∴ يمر بالنقطة (-١، ٠)

∴ ميل المماس = (ب − ٠) / (١ − (−١)) = ب/٢ ⟸ نساوي الميل الأول بالثاني ⟸ ب/٢ = ٢ ⟸ $\boxed{ب = ٤}$

نعوض في (*) ⟸ ٤ = ١ + أ ⟸ $\boxed{أ = ٣}$

مثال: جد ميل العمودي على منحنى ق عند س = ٢ من خلال الشكل التالي:



المطلوب: −١ / ق'(٢)

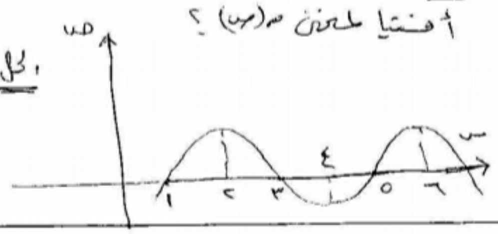
الحل: ميل المماس لمنحنى ق'(س) = ظا٤٥° = ١

معادلة المماس هي: ص − ٠ = ١(س + ١)

⟸ ص = س + ١ وعند $\boxed{س = ٢}$ ⟸ ص = ٢ + ١ = ٣

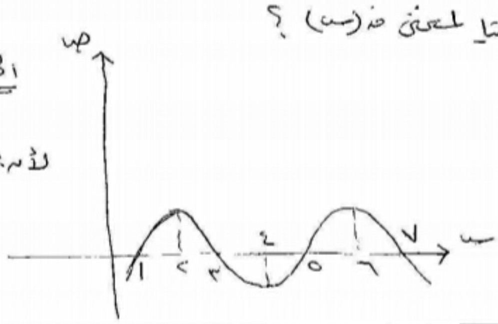
∴ ق'(٢) = ٣ ∴ ميل العمودي هو −١/٣

مثال ٤: بالاعتماد على الرسم الذي يمثل ق(س) جد قيم س التي يكون المماس عندها أفقياً لمنحنى ق(س)؟



الحل: قيم س هي {٢، ٤، ٦}

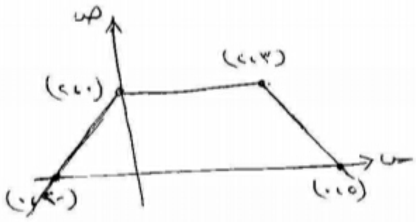
مثال ٥: بالاعتماد على الرسم الذي يمثل قَ(س) جد قيم س التي يكون المماس عندها أفقياً لمنحنى ق(س)؟



الحل: قيم س هي {١، ٣، ٥، ٧}

لأن: قَ(١) = قَ(٣) = قَ(٥) = صفر

مثال ٦: من خلال الرسم الذي يمثل ق(س) أرسم قَ(س)

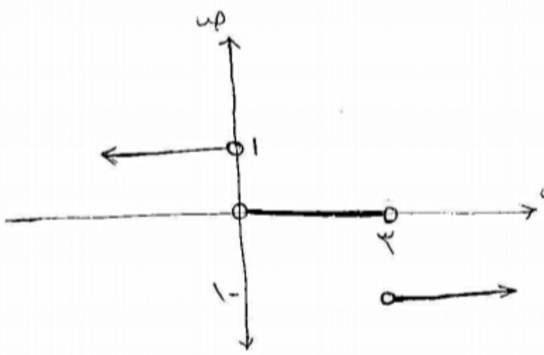


الحل: قَ(س) = ميل ق(س) لذلك نجد الميل في الحالات الثلاث

① س < ٠ ⟸ م = $\frac{٢ - ٠}{٠ - (-٢)}$ = ١

② ٠ < س < ٣ ⟸ م = $\frac{٢ - ٢}{٣ - ٠}$ = صفر

③ س > ٣ ⟸ م = $\frac{٠ - ٢}{٥ - ٣}$ = -١



مثال: جد النقط على منحنى 9س^2 + 16ص^2 = 52 والتي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم 9س − 8ص = 1

الحل: المستقيم 9س − 8ص = 1 نشتق ⇐ 9 − 8 $\frac{دص}{دس}$ = 0 ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{9}{8}$ (ميل المستقيم)

نشتق معادلة المنحنى ⇐ 18س + 32ص $\frac{دص}{دس}$ = 0 ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-18س}{32ص}$ (ميل المماس)

وبما أن المستقيم يوازي المنحنى فإن: ميل المستقيم = ميل المنحنى

$\frac{-18س}{32ص}$ = $\frac{9}{8}$ ⇐ 8 × −18س = 9 × 32ص ⇐ $\boxed{س = -2ص}$

نعوض في معادلة المنحنى: 9(−2ص)^2 + 16ص^2 = 52

⇐ 36ص^2 + 16ص^2 = 52 ⇐ 52ص^2 = 52 ⇐ ص^2 = 1 ⇐ $\boxed{ص = \pm 1}$

عند ص = 1 ⇐ س = −2(1) = −2 (−2، 1)

عند ص = −1 ⇐ س = −2(−1) = 2 (2، −1)

⇐ النقاط التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم

مثال: جد نقاط تعامد المنحنيين ق(س) = س^2 ، هـ(س) = س^2 + 2س + 1

الحل: ق$'$(س) = 2س ، هـ$'$(س) = 2س + 2

وبما أن المنحنيين متعامدين ⇐ م$_1$ × م$_2$ = −1 ⇐ ق$'$(س) × هـ$'$(س) = −1

⇐ (2س)(2س + 2) = −1 ⇐ 4س^2 + 4س + 1 = 0 ⇐ (2س + 1)(2س + 1) = 0

⇐ $\boxed{س = -\frac{1}{2}}$ وإذا عوضنا س = $-\frac{1}{2}$ في كل من الاقترانين ق(س) ، هـ(س)

⇐ ق($-\frac{1}{2}$) = $\frac{1}{4}$ ، هـ($-\frac{1}{2}$) = ($-\frac{1}{2}$)^2 + 2($-\frac{1}{2}$) + 1 = $\frac{1}{4}$

∴ النقطة هي ($-\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$)

مثال: إذا كان العمودي على مماس منحنى ق(س) = س^2 − 4 عند $\boxed{س = 1}$ يقطع المنحنى مرة أخرى عند $\boxed{س = م}$ جد م؟

الحل: ق(1) = 1 − 4 = −3 ∴ النقطة (1، −3) ⇐ ميل المماس = ق$'$(1) = 2(1) = 2

⇐ ميل العمودي = $-\frac{1}{2}$ ⇐ معادلة العمودي: ص + 3 = $-\frac{1}{2}$(س − 1) ⇐ $\boxed{ص = -\frac{1}{2}س - \frac{5}{2}}$

نجد نقطة التقاطع بين العمودي ومعادلة ق(س) ⇐ ق(س) = ص

⇐ س^2 − 4 = $-\frac{1}{2}$س − $\frac{5}{2}$ ⇐ 2س^2 − 8 = −س − 5 (ضربنا بـ 2)

⇐ 2س^2 + س − 3 = 0 ⇐ (2س + 3)(س − 1) = 0 ⇐ $\boxed{س = -\frac{3}{2}}$ ، $\boxed{س = 1}$

∴ $\boxed{م = -\frac{3}{2}}$

مثال: أثبت أن المنحنيين ق(س) = س² − س + ٢ ، هـ(س) = ٣س − س² متماسان ثم جد معادلة المماس المشترك لهما عند نقطة التماس؟

الحل: نجد نقاط التقاطع عندما ق = هـ

س² − س + ٢ = ٣س − س² ⟸ ٢س² − ٤س + ٢ = ٠ بالقسمة على ٢

⟸ س² − ٢س + ١ = ٠ ⟸ (س − ١)(س − ١) = ٠ ∴ $\boxed{\text{س} = 1}$

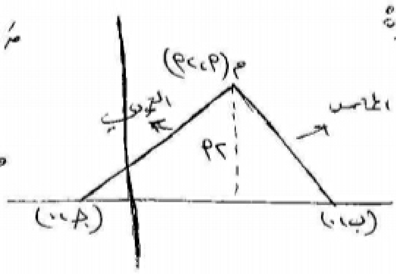
ق(١) = ٢ ، هـ(١) = ٢ ∴ يتقاطعان في (١، ٢)

ق'(س) = ٢س − ١ ⟸ ق'(١) = ١
هـ'(س) = ٣ − ٢س ⟸ هـ'(١) = ١
بما أن ق'(١) = هـ'(١) ∴ لهما نفس المماس وهما متماسان

∴ معادلة المماس: ص − ٢ = ١(س − ١)

مثال: اذا قطع المماس والعمودي لمنحنى ق(س) = $\frac{8\text{أ}^3}{3\text{أ}^2 + \text{س}^2}$ عند النقطة م(أ، ٢أ) محور السينات في النقطتين ب، جـ على الترتيب جد مساحة المثلث م ب جـ؟

الحل:



ق'(س) = $\frac{-8\text{أ}^3 \times 2\text{س}}{(3\text{أ}^2 + \text{س}^2)^2}$

ق'(أ) = $\frac{-8\text{أ}^3 \times 2\text{أ}}{(3\text{أ}^2 + \text{أ}^2)^2} = \frac{-16\text{أ}^4}{16\text{أ}^4} = -1$

∴ ميل المماس = −١ ⟸ أيضاً ميل المماس = $\frac{2\text{أ} - 0}{\text{أ} - \text{ب}} = \frac{2\text{أ}}{\text{أ} - \text{ب}}$

نساوي الميل الأول بالثاني ⟸ $\frac{2\text{أ}}{\text{أ} - \text{ب}} = -1$ ⟸ ٢أ = −أ + ب ⟸ $\boxed{\text{ب} = 3\text{أ}}$

ميل العمودي = ١ ⟸ أيضاً ميل العمودي = $\frac{2\text{أ} - 0}{\text{أ} - \text{جـ}} = \frac{2\text{أ}}{\text{أ} - \text{جـ}}$

نساوي الميل الأول بالثاني ⟸ $\frac{2\text{أ}}{\text{أ} - \text{جـ}} = 1$ ⟸ ٢أ = أ − جـ ⟸ $\boxed{\text{جـ} = -\text{أ}}$

∴ ب جـ = ٣أ − (−أ) = ٤أ

∴ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × ٤أ × ٢أ = ٤أ²