* الاشتقاق الضمني :

أنواع العلاقات

صريحة — ضمنية

صريحة مثل : ص = ٣س − ٥ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣

ضمنية مثل : ٤ص + ٥س² = ص³

قاعدة : مشتقة ص بالنسبة لـ س هي $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

مشتقة س بالنسبة لـ س هي (١)

انتباه : س ص (علاقة ضرب)

$\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ (علاقة قسمة)

مثال : $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (س³ + ص²) = ٣س² + ٢ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

مثال : اوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ اذا كان س² + ص² = ٥

الحل : ٢س + ٢ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠ ⟸ ٢ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = −٢س

⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{−٢س}}{\text{٢ص}}$ = $\frac{\text{−س}}{\text{ص}}$

مثال : اوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ اذا كان س ص + ٥س² = ٧س

الحل : س $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ + ص(١) + ١٠س = ٧ ⟸ س $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٧ − ص − ١٠س

⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{٧ − ص − ١٠س}}{\text{س}}$

مثال : س² + √ص = ٥س أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل : ٢س + $\frac{\text{دص}/\text{دس}}{\text{٢}\sqrt{\text{ص}}}$ = ٥

⟸ $\frac{\text{دص}/\text{دس}}{\text{٢}\sqrt{\text{ص}}}$ = ٥ − ٢س (بالضرب التبادلي)

⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (٥ − ٢س)(٢√ص)

مثال: إذا كان $\text{س}^3 + \text{ص}^2 = 5\text{س}\text{ص} - 1$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند $(2،1)$ ؟

الحل: $3\text{س}^2 + 2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 5\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + 5\text{ص}$

$2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - 5\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 5\text{ص} - 3\text{س}^2$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}}(2\text{ص} - 5\text{س}) = 5\text{ص} - 3\text{س}^2$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{5\text{ص} - 3\text{س}^2}{2\text{ص} - 5\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{(2،1)} = \frac{5(1) - 3(2)^2}{2(1) - 5(2)} = \frac{5-12}{2-10} = \frac{-7}{-8} = \frac{7}{8}$

مثال: $\text{س} - \sqrt[4]{\text{ص}^2 + 2} = 0$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل: $\text{س} = \sqrt[4]{\text{ص}^2 + 2}$ نتخلص من الجذر $\Leftarrow \text{س}^4 = \text{ص}^2 + 2$ نشتقة

$\Leftarrow 4\text{س}^3 = 2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{4\text{س}^3}{2\text{ص}}$

مثال: إذا كان $\frac{3}{\text{س}} + \frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2} = 4$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل: $\frac{3\text{س} + \text{ص}^2}{\text{س}^2} = 4 \Leftarrow 3\text{س} + \text{ص}^2 = 4\text{س}^2$ نشتقة

$\Leftarrow 3 + 2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 8\text{س} \Leftarrow 2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 8\text{س} - 3 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{8\text{س} - 3}{2\text{ص}}$

سؤال: $(\text{س}^2 + \text{ص})^3 = 5\text{س}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ⟵ الإجابة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{5}{3(\text{س}^2 + \text{ص})^2} - 2\text{س}$

مثال: $\text{س}^3 + \text{ص}^3 = 5\text{س}\text{ص} - 3$ جد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ عند $(1،1)$

الحل: $3\text{س}^2 + 3\text{ص}^2\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 5\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + 5\text{ص}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{5\text{ص} - 3\text{س}^2}{3\text{ص}^2 - 5\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{(1،1)} = \frac{5(1) - 3(1)^2}{3(1)^2 - 5(1)} = \frac{2}{-2} = -1$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{(3\text{ص}^2 - 5\text{س})(5\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - 6\text{س}) - (5\text{ص} - 3\text{س}^2)(6\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - 5)}{(3\text{ص}^2 - 5\text{س})^2}$ نعوض مباشرة

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}\Big|_{(1،1)} = \frac{(2-5)(5(-1) - 6(1)) - (5(1) - 3(1)^2)(6(1)(-1) - 5)}{(3-5)^2}$

$= \frac{22 + 22}{4} = \frac{44}{4} = 11$

مثال: اذا كانت $\text{س}^2 - \text{ص}^2 = 1$ ، أثبت أن $\text{ص}^3 \times \text{ص}'' + 1 = \text{صفر}$

الحل: نشتق $\Leftarrow 2\text{س} - 2\text{ص}\,\text{ص}' = 0 \Leftarrow 2\text{س} = 2\text{ص}\,\text{ص}'$

$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{2\text{س}}{2\text{ص}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

نشتق مرة ثانية: $\text{ص}'' = \frac{\text{ص}(1) - \text{س}\,\text{ص}'}{\text{ص}^2} = \frac{\text{ص} - \text{س}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)}{\text{ص}^2}$

$\Leftarrow \text{ص}'' = \frac{\text{ص} - \frac{\text{س}^2}{\text{ص}}}{\text{ص}^2} = \frac{\text{ص}^2 - \text{س}^2}{\text{ص}^3} \Leftarrow \text{ص}'' = \frac{-1}{\text{ص}^3}$ من السؤال

$\Leftarrow \text{ص}^3 \times \text{ص}'' = -1$

$\therefore \text{ص}^3 \times \text{ص}'' + 1 = -1 + 1 = \text{صفر}$

مثال: اذا كانت $\text{س} = \text{ظا}\,\text{ص}$ أثبت أن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{-2\text{س}}{(1+\text{س}^2)^2}$

الحل: $1 = \text{قا}^2\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{قا}^2\text{ص}} = \frac{1}{1+\text{ظا}^2\text{ص}} = \frac{1}{1+\text{س}^2}$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{-1(2\text{س})}{(1+\text{س}^2)^2} = \frac{-2\text{س}}{(1+\text{س}^2)^2}$

مثال: $\text{ص}^{\text{ن}} = \text{س}$ أثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}}{\text{ن}\,\text{س}}$

الحل: $\text{ن}\,\text{ص}^{\text{ن}-1}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{ن}\,\text{ص}^{\text{ن}-1}} = \frac{1}{\text{ن}\,\text{ص}^{\text{ن}} \times \text{ص}^{-1}}$

$= \frac{\text{ص}}{\text{ن}\,\text{ص}^{\text{ن}}} = \frac{\text{ص}}{\text{ن}\,\text{س}}$

مثال: اذا كانت $\text{ص}^2 + \text{س}^2 = 5\text{س}$ أوجد قيمة س التي تجعل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$

الحل: $2\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + 2\text{س} = 5 \Leftarrow 2\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 5 - 2\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{5 - 2\text{س}}{2\text{ص}}$

$\Leftarrow \frac{5 - 2\text{س}}{2\text{ص}} = \text{صفر} \Leftarrow 5 - 2\text{س} = \text{صفر}$

$-2\text{س} = -5 \Leftarrow \boxed{\text{س} = \frac{5}{2}}$

مثال: اذا كانت $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 2\text{ص}$ أثبت أن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د}\text{س}^2} = \frac{1}{(1-\text{ص})^3}$

الحل: $2\text{س} + 2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Leftarrow 2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - 2\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -2\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}(2\text{ص} - 2) = -2\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-2\text{س}}{2\text{ص}-2} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}-1} = \frac{\text{س}}{1-\text{ص}}$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د}\text{س}^2} = \frac{(1-\text{ص})(1) - \left(\text{س} \times -\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)}{(1-\text{ص})^2} = \frac{(1-\text{ص}) + \text{س}\left(\frac{\text{س}}{1-\text{ص}}\right)}{(1-\text{ص})^2}$

$= \frac{\frac{(1-\text{ص})^2 + \text{س}^2}{1-\text{ص}}}{(1-\text{ص})^2} = \frac{1 - 2\text{ص} + \text{ص}^2 + \text{س}^2}{(1-\text{ص})^3} = \frac{1}{(1-\text{ص})^3}$

مثال: اذا كانت $\text{ص}^2 = \frac{\text{س}}{1+\text{س}}$ أثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}^3}{2\text{س}^2}$

الحل: $2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(1+\text{س})(1) - (1)(\text{س})}{(1+\text{س})^2} = \frac{1 + \text{س} - \text{س}}{(1+\text{س})^2} = \frac{1}{(1+\text{س})^2}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\frac{1}{(1+\text{س})^2}}{2\text{ص}} = \frac{1}{2\text{ص}(1+\text{س})^2} = \frac{1}{2\text{ص}(1+\text{س})^2} \times \frac{\text{ص}^3}{\text{ص}^3}$ (ضربنا البسط والمقام في ص^3)

$\Leftarrow = \frac{\text{ص}^3}{2\text{ص}^4(1+\text{س})^2}$

لكن: $\text{ص}^2 = \frac{\text{س}}{1+\text{س}} \Leftarrow \text{س} = \text{ص}^2(1+\text{س})$

وبالتربيع $\Leftarrow \text{س}^2 = \text{ص}^4(1+\text{س})^2$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}^3}{2\text{س}^2}$

سؤال: $\text{ظا}(\text{س ص}) = \text{ص}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند $\left(\frac{\pi}{4} ، 1\right)$

الاجابة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-2}{\frac{\pi}{2} - 1}$

مثال: اذا كانت $\text{س} + \text{ص} + \text{جاص} = ٣$ أثبت أن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{\text{جاص}}{(١+\text{جتاص})^٣}$

الحل: $١ + \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{جتاص} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}}(١+\text{جتاص}) = -١$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-١}{١+\text{جتاص}}$

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{١ \times -\text{جاص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{(١+\text{جتاص})^٢} = \frac{-\text{جاص} \times \frac{-١}{١+\text{جتاص}}}{(١+\text{جتاص})^٢} = \frac{\text{جاص}}{(١+\text{جتاص})^٣}$$

مثال: اذا كانت $\text{س} = \text{جاص}$ أثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\sqrt{١-\text{س}^٢}}$

الحل: $\text{س} = \text{جاص}$ نشتق

$١ = \text{جتاص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{جتاص}} = \frac{١}{\sqrt{١-\text{س}^٢}}$

$\text{جا}^٢\text{ص} + \text{جتا}^٢\text{ص} = ١$

$\text{جتا}^٢\text{ص} = ١ - \text{جا}^٢\text{ص}$

$= ١ - \text{س}^٢$

$\text{جتاص} = \sqrt{١-\text{س}^٢}$

مثال: اذا كانت $\text{س} = \text{ظاص}$ أثبت أن $\text{ص}''(١+\text{س}^٢) = -\text{جا}٢\text{ص}$

الحل: نشتق الطرفين $\Leftarrow ١ = \text{قا}^٢\text{ص} \times \text{ص}' \Leftarrow \text{ص}' = \frac{١}{\text{قا}^٢\text{ص}} = \text{جتا}^٢\text{ص}$

$\Leftarrow \text{ص}'' = ٢\,\text{جتاص} \times -\text{جاص} \times \text{ص}' = -(٢\,\text{جاص}\,\text{جتاص}) \times \frac{١}{\text{قا}^٢\text{ص}}$

$\Leftarrow \text{ص}'' = -\text{جا}٢\text{ص} \times \frac{١}{١+\text{ظا}^٢\text{ص}} \Leftarrow \text{ص}'' = -\text{جا}٢\text{ص} \times \frac{١}{١+\text{س}^٢}$

$\Leftarrow \text{ص}''(١+\text{س}^٢) = -\text{جا}٢\text{ص}$

مثال: اذا كانت $\text{ص} = \sqrt{\text{س} + \text{ص}}$ أثبت أن: $\text{ص}''(٢\text{ص} - ١)^{٣} = -٢$

الحل: $\text{ص}^{٢} = \text{س} + \text{ص}$ نشتق

$٢\text{ص}\,\text{ص}' = ١ + \text{ص}' \Leftarrow ٢\text{ص}\,\text{ص}' - \text{ص}' = ١ \Leftarrow \text{ص}'(٢\text{ص} - ١) = ١$

$$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{١}{٢\text{ص} - ١}$$

$$\text{ص}'' = \frac{-١ \times ٢\text{ص}'}{(٢\text{ص} - ١)^{٢}} \Leftarrow \text{ص}'' = \frac{-١ \times ٢\left(\frac{١}{٢\text{ص} - ١}\right)}{(٢\text{ص} - ١)^{٢}}$$

ضربنا تبادلي

$$\Leftarrow \text{ص}'' = \frac{-٢}{(٢\text{ص} - ١)^{٣}} \Leftarrow \therefore \text{ص}''(٢\text{ص} - ١)^{٣} = -٢$$

مثال: اذا كانت $\text{ص} = \frac{\text{ظاس}}{\text{س}}$ أثبت أن $\text{س}\,\text{ص}'' + ٢\text{ص}' - ٢\text{س}\,\text{ص} - ٢\text{س}^{٣}\text{ص}^{٣} = ٠$

الحل: $\text{س}\,\text{ص} = \text{ظاس}$ نشتق

$\text{س}\,\text{ص}' + \text{ص} = \text{قا}^{٢}\text{س}$ نشتق مرة أخرى

$\text{س}\,\text{ص}'' + \text{ص}'(١) + \text{ص}' = ٢\text{قاس} \times \text{قاس ظاس}$

$\Leftarrow \text{س}\,\text{ص}'' + ٢\text{ص}' = ٢\text{قا}^{٢}\text{س ظاس}$

$\Leftarrow \text{س}\,\text{ص}'' + ٢\text{ص}' = ٢(١ + \text{ظا}^{٢}\text{س})\,\text{ظاس}$

$\Leftarrow \text{س}\,\text{ص}'' + ٢\text{ص}' = ٢(١ + \text{س}^{٢}\text{ص}^{٢})\,\text{س}\,\text{ص}$

$\Leftarrow \text{س}\,\text{ص}'' + ٢\text{ص}' = ٢\text{س}\,\text{ص} + ٢\text{س}^{٣}\text{ص}^{٣}$

$\Leftarrow \text{س}\,\text{ص}'' + ٢\text{ص}' - ٢\text{س}\,\text{ص} - ٢\text{س}^{٣}\text{ص}^{٣} = ٠$

مثال: اذا كانت $\text{س} = \text{جتاص}$ أثبت أن: $\frac{\text{ص}''}{(\text{ص}')^{٢}} = -\text{ظتاص}$

الحل: نشتق الطرفين $\Leftarrow ١ = -\text{جاص}\,\text{ص}' \Leftarrow \text{ص}' = \frac{-١}{\text{جاص}} = -\text{قتاص}$

$\Leftarrow$ نشتق مرة أخرى $\Leftarrow \text{ص}'' = -(-\text{قتاص ظتاص} \times \text{ص}') \Leftarrow \text{ص}'' = \text{قتاص ظتاص}\,\text{ص}'$

$\Leftarrow \text{ص}'' = -\text{ص}'\,\text{ظتاص} \times \text{ص}' = -(\text{ص}')^{٢}\,\text{ظتاص}$

$\text{ص}'' = -(\text{ص}')^{٢}\,\text{ظتاص}$ نقسم الطرفين على $(\text{ص}')^{٢}$

$$\Leftarrow \frac{\text{ص}''}{(\text{ص}')^{٢}} = -\text{ظتاص}$$

مثال: اذا كانت جتا ص = جا س أثبت أن: $\frac{ص''}{1-(ص')^2} = $ ظتا ص

الحل: نشتق ⇐ $-$جا ص × ص$'$ = جتا س نشتق مرة أخرى { ص$'$ = $\frac{-جتا\ س}{جا\ ص}$

⇐ $-$جا ص × ص$''$ + ص$'$ × $-$جتا ص × ص$'$ = $-$جا س نقسم على ($-$ جا ص)

⇐ ص$''$ + $(ص')^2$ × $\frac{جتا\ ص}{جا\ ص}$ = + $\frac{جا\ س}{جا\ ص}$ وبما أن جا س = جتا ص

∴ ص$''$ + $(ص')^2$ × ظتا ص = $\frac{جتا\ ص}{جا\ ص}$ ⇐ ص$''$ + $(ص')^2$ × ظتا ص = ظتا ص

⇐ ص$''$ = ظتا ص $-$ $(ص')^2$ × ظتا ص

⇐ ص$''$ = ظتا ص $\left(1-(ص')^2\right)$ ⇐ ظتا ص = $\frac{ص''}{1-(ص')^2}$

عامل مشترك

سؤال: س = ظتا ص أثبت أن: ص$''$ $(1+س^2)^2$ = جا 2ص

مثال: اذا كانت $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = 2$ أثبت أن $\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{1}{س\sqrt{س}}$

الحل: نشتق الطرفين ⇐ $\frac{1}{2\sqrt{س}} + \frac{1}{2\sqrt{ص}} \frac{دص}{دس} = 0$

⇐ $\frac{1}{2\sqrt{ص}} \frac{دص}{دس} = \frac{-1}{2\sqrt{س}}$ ⇐ $\frac{دص}{دس} = \frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{\sqrt{س} \times \frac{-1}{2\sqrt{ص}} \frac{دص}{دس} - (-\sqrt{ص}) \times \frac{1}{2\sqrt{س}}}{س}$$

$$= \left(\sqrt{س} \times \frac{-1}{2\sqrt{ص}} \times \frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}} + \sqrt{ص} \times \frac{1}{2\sqrt{س}}\right) \times \frac{1}{س} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{ص}}{2\sqrt{س}}\right) \times \frac{1}{س}$$

$$= \frac{\sqrt{س} + \sqrt{ص}}{2\sqrt{س}} \times \frac{1}{س} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}س\sqrt{س}} = \frac{1}{س\sqrt{س}}$$

مثال: س + ص = س ص أثبت أن $\text{ص}'' = \frac{2\text{ص}^3}{\text{س}^3}$

الحل:

س + ص = س ص ⇐ س = س ص − ص

⇐ س = ص(س − 1) ⇐ $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س}-1}$ نشتق

⇐ $\text{ص}' = \frac{(\text{س}-1)(1) - (\text{س})(1)}{(\text{س}-1)^2}$ ⇐ $\text{ص}' = \frac{\cancel{\text{س}} - 1 - \cancel{\text{س}}}{(\text{س}-1)^2}$

⇐ $\text{ص}' = \frac{-1}{(\text{س}-1)^2}$

⇐ $\text{ص}'' = \frac{2(\text{س}-1)}{(\text{س}-1)^4} = \frac{2}{(\text{س}-1)^3}$

من السؤال:

$\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س}-1}$

$\text{س} - 1 = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ نكعب

$(\text{س}-1)^3 = \frac{\text{س}^3}{\text{ص}^3}$

$\text{ص}'' = \frac{2\text{ص}^3}{\text{س}^3}$

مثال: إذا كان جاص = ظاس أثبت أن: $\text{ظاص} = \frac{\text{ص}''}{2\text{قا}^2\text{س} + (\text{ص}')^2}$

الحل: نشتق الطرفين ⇐ جتاص × ص′ = قا²س نشتق مرة أخرى

⇐ جتاص × ص″ + ص′ × − جاص × ص′ = 2 قاس × قاس ظاس

نستبدل ظاس بـ جاص ⇐ جتاص × ص″ − جاص × $(\text{ص}')^2$ = 2 قا²س جاص

بالقسمة على جتاص ⇐ ص″ − ظاص × $(\text{ص}')^2$ = 2قا²س ظاص

⇐ ص″ = 2قا²س ظاص + ظاص × $(\text{ص}')^2$

⇐ ص″ = ظاص (2قا²س + $(\text{ص}')^2$)

⇐ $\text{ظاص} = \frac{\text{ص}''}{2\text{قا}^2\text{س} + (\text{ص}')^2}$

مثال: اذا كان $\text{ق}^3(\text{ص}^2) = ٥\text{س}^3 + ٣$ وكانت ص = ١ عند س = ١ وأيضاً قَ(١) = ٥

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ١ ، ص = ١

الحل: نشتق الطرفين ⟸ $٣\text{ق}^2(\text{ص}^2) \times \text{قَ}(\text{ص}^2) \times ٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٥\text{س}^2$

نضع $\boxed{\text{س} = ١}$ $\boxed{\text{ص} = ١}$

⟸ $٣\text{ق}^2(١) \times \text{قَ}(١) \times ٢ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٥$

ولإيجاد ق(١) ⟸ $\text{ق}^3(١) = ٥ + ٣ = ٨$ ⟸ $\text{ق}(١) = \sqrt[3]{٨} = ٢$

⟸ $٣ \times ٤ \times ٥ \times ٢ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٥$ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١٥}{٣ \times ٤ \times ٥ \times ٢} = \frac{١}{٨}$

مثال: اذا كان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{أ}\sqrt{\text{ص}}$ وكانت $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = ٨$ جد أ

الحل: $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \text{أ} \frac{\frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{٢\sqrt{\text{ص}}} = \frac{\text{أ} \times \text{أ}\cancel{\sqrt{\text{ص}}}}{٢\cancel{\sqrt{\text{ص}}}} = \frac{\text{أ}^2}{٢}$

⟸ $\frac{\text{أ}^2}{٢} = ٨$ ⟸ $\text{أ}^2 = ١٦$ ⟸ $\boxed{\text{أ} = \pm ٤}$

مثال: جد النقطة على منحنى $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = ٣$ والتي تحقق المعادلة صَ = -٢

الحل: نشتق ⟸ $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} + \frac{١}{٢\sqrt{\text{ص}}} \times \text{صَ} = ٠$ وبوضع $\boxed{\text{صَ} = -٢}$

⟸ $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} + \frac{١}{٢\sqrt{\text{ص}}} \times -٢ = ٠$ ⟸ $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} - \frac{٢}{٢\sqrt{\text{ص}}} = ٠$

⟸ $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} = \frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢}\sqrt{\text{ص}}}$ ⟸ $\sqrt{\text{ص}} = ٢\sqrt{\text{س}}$ نعوض في المعادلة $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = ٣$

⟸ $\sqrt{\text{س}} + ٢\sqrt{\text{س}} = ٣$ ⟸ $٣\sqrt{\text{س}} = ٣$ ⟸ $\sqrt{\text{س}} = ١$ ⟸ $\boxed{\text{س} = ١}$

لإيجاد صورة العدد (١) (الاحداثي الصادي) نعوض في $\sqrt{\text{ص}} = ٢\sqrt{\text{س}}$ أو بالمعادلة الأصلية

⟸ $\sqrt{\text{ص}} = ٢\sqrt{١}$ ⟸ $\sqrt{\text{ص}} = ٢$ ⟸ $\boxed{\text{ص} = ٤}$ ∴ النقطة (١،٤)

قاعدة:

اذا كانت $ص = م(ن)$ ، $س = هـ(ن)$ فإن: $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = \frac{م'(ن)}{هـ'(ن)}$

مثال: اذا كانت $ص = ن^3 + 2ن^2$ ، $س = 3ن^2 + 5ن$ فجد $\frac{دص}{دس}$ عند $\boxed{ن = 1}$

الحل: $\frac{دص}{دن} = 3ن^2 + 4ن$ ، $\frac{دس}{دن} = 6ن + 5 \Leftarrow \frac{دن}{دس} = \frac{1}{6ن + 5}$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = \frac{3ن^2 + 4ن}{6ن + 5} \Leftarrow \left.\frac{دص}{دس}\right|_{ن=1} = \frac{7}{11}$

مثال: اذا كانت $ص = \sqrt{ن^2 + 5}$ ، $س = \frac{6}{2ن - 3}$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند $\boxed{ن = 2}$

الحل: $\frac{دص}{دن} = \frac{2ن}{2\sqrt{ن^2 + 5}} = \frac{ن}{\sqrt{ن^2 + 5}} = \frac{2}{\sqrt{4 + 5}} = \frac{2}{3}$

$\frac{دس}{دن} = \frac{-6(2)}{(2ن - 3)^2} = \frac{-12}{(4 - 3)^2} = -12 \Leftarrow \frac{دن}{دس} = \frac{-1}{12}$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{\cancel{2}^{1}}{3} \times \frac{-1}{\cancel{12}_{6}} = \frac{-1}{18}$

سؤال: (أ) $ص = ظا^2 5ن$ ، $س = قا 5ن$ جد $\frac{دص}{دس}$

(ب) $ص = جتا 7ن$ ، $س = جا 7ن$ جد $\frac{دص}{دس}$

مثال: $ص = جا^2 3ن$ ، $س = جتا 3ن$ جد $\frac{د^2ص}{دس^2}$

الحل: $\frac{دص}{دن} = 2جا3ن \times جتا3ن \times 3$ ، $\frac{دس}{دن} = -3جا3ن \Leftarrow \frac{دن}{دس} = \frac{-1}{3جا3ن}$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = \frac{2\cancel{جا3ن} \times جتا3ن \times \cancel{3}}{-\cancel{3}\cancel{جا3ن}} = -2جتا3ن$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = -2 \times -جا3ن \times 3 \times \frac{دن}{دس} = 2\cancel{جا3ن} \times \cancel{3} \times \frac{-1}{\cancel{3جا3ن}} = -2$

سؤال: ص = ٢ن^3 + ٨ن ، س = $\frac{٢}{ن}$ جد $\frac{د^2 ص}{د س^2}$

مثال: اذا كانت ص = $\sqrt{س + \sqrt{١+س^2}}$ أثبت أن ٢$\sqrt{١+س^2}$ × ص $\times$ صَ = ص

الحل: بالتربيع للطرفين ⟸ ص^2 = س + $\sqrt{١+س^2}$ نشتق الطرفين

⟸ ٢ص × صَ = ١ + $\frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{١+س^2}}$ = $\frac{\sqrt{١+س^2} + س}{\sqrt{١+س^2}}$ = $\frac{ص^2}{\sqrt{١+س^2}}$

∴ ٢ص × صَ = $\frac{ص^2}{\sqrt{١+س^2}}$ ⟸ ٢ص × صَ × $\sqrt{١+س^2}$ = ص^2

بالقسمة على ص

⟸ ٢صَ $\sqrt{١+س^2}$ = $\frac{ص^2}{ص}$ ⟸ ٢صَ $\sqrt{١+س^2}$ = ص

مثال: اذا كانت ص = ظتا٢س أثبت أن صً − ٨ص(ص^2+١) = ٠

الحل: نشتق ⟸ صَ = −٢ قتا^{2}٢س

صً = −٤ قتا٢س × −قتا٢س ظتا٢س × ٢ = ٨ ظتا٢س قتا^{2}٢س

متطابقة

⟸ صً = ٨ ظتا٢س (١+ ظتا^{2}٢س) = ٨ص (١+ص^2)

⟸ صً − ٨ص (١+ص^2) = صفر