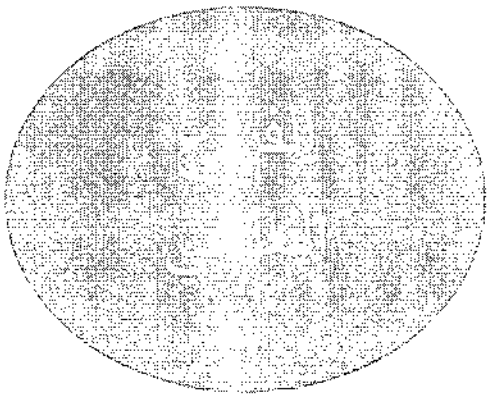
التفاضل



اعداد الاستاد :

اياد جاد الله

0788513659

المنهاج الجديد

2018

معدل التغير

تعريف : إذا كان ص = ق(س) اقترانا معرفاً على [أ ، ب] وتغيرت س من س١ الى س٢ فإن ص تتغير من ص١ = ق(س١) إلى ص٢ = ق(س٢)

حيث :

① Δس = معدار التغير في قيمة (س)
= س٢ − س١ ، س٢ ≠ س١ ، ص = س٢ − س١

② Δص = Δ ق(س) = معدار التغير في قيمة الاقتران ق(س)
Δص = ص٢ − ص١ = ق(س٢) − ق(س١)

Δ ق(س) = ق(س + Δس) − ق(س)
= ق(س + Δس) − ق(س)

③ معدل التغير في ص = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

= $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ = $\frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$

١ إذا كان ق(س) = س٢ − ٣س
جد :

١. معدار تغير س (٢،٥) إذا تغيرت س من س١ = ٣ إلى س٢ = ٥

٢. معدار تغير ق(س) إذا تغيرت س من س١ = ٣ إلى س٢ = ٤

٣. معدل تغير ق(س) إذا تغيرت س من س١ = ١ إلى س٢ = ٣

الحل :

١. Δس = س٢ − س١ = ٥ − ٣ = ٢

٢. Δص = ق(٤) − ق(٣)
= ٨ − ٨ = صفر

٣. $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$ = $\frac{٣ - ١}{٢}$ = ١

٢ ق(س) = { ٢س − ١٣ ، ٠ ≤ س < ٢ ، [٦ − س] ، ٢ ≤ س ≤ ٦ }
جد معدل تغير ق عندما تتغير س من ١ إلى ٤ .

الحل : $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ق(٤) - ق(١)}{٤ - ١}$ = $\frac{|٢| - [٥]}{٣}$ = $\frac{٤}{٣}$

٣) $ق(س) = س^2 - ٣$ ، إذا تغيرت س من ١ لتصبح $١+هـ$ ، أوجد معدل تغير ق.

الحل: $س_١ = ١$ ، $س_٢ = ١ + هـ$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{(١+هـ) - ١}$$

$$= \frac{((١+هـ)^2 - ٣) - (١^2 - ٣)}{هـ}$$

$$= \frac{١ + ٢هـ + هـ^2 - ٣ - ١ + ٣}{هـ}$$

$$= \frac{هـ^2 + ٢هـ}{هـ} = \frac{هـ(هـ+٢)}{هـ} = هـ + ٢$$

٤) $ق(س) = ظا س$ ، تغيرت س من (س) إلى $(س + هـ)$ ، أثبت أن معدل التغير هو $\frac{قا^2 س \cdot ظا هـ}{هـ(١ - ظا س ظا هـ)}$

الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{(س+هـ) - س}$

$$= \frac{ظا(س+هـ) - ظا س}{هـ}$$ متطابقة

$$= \frac{\frac{ظا س + ظا هـ}{١ - ظا س ظا هـ} - ظا س}{هـ}$$

$$= \frac{ظا س + ظا هـ - ظا س + ظا^2 س ظا هـ}{هـ(١ - ظا س ظا هـ)}$$

$$= \frac{ظا هـ (١ + ظا^2 س)}{هـ(١ - ظا س ظا هـ)}$$

$$= \frac{ظا هـ \cdot قا^2 س}{هـ(١ - ظا س ظا هـ)}$$

٥) $ق(س) = ٤س^2 - ٩$ ، كان معدل تغير ق على $[ب، ٣]$ يساوي (-٤) فما ب ؟

الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٣) - ق(ب)}{٣ - ب}$

$$-٤ = \frac{(٣٦ - ٩) - (٤ب^2 - ٩)}{(٣ - ب)}$$

$$-٤ = \frac{٣٦ - ٩ - ٤ب^2 + ٩}{٣ - ب}$$ بضرب تبادلي

$$-٤(٣ - ب) = ٣٦ - ٤ب^2$$

$$-١٢ + ٤ب = ٣٦ - ٤ب^2$$

$$٤ب^2 - ٤ب - ٤٨ = ٠$$

$$ب^2 - ب - ١٢ = ٠$$

$$(ب - ٤)(ب + ٣) = ٠$$

$$ب = ٤ \quad ب = -٣$$ ×

٦) $ص = ٣س^2 - ٥س$ ، جد معدل تغير ص عندما $س = ٣$

الحل: $\Delta ص = ٣(س + \Delta س)^2 - ٥(س + \Delta س) - (٣س^2 - ٥س)$

نقسم على $\Delta س$ ثم نطرح

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٦س \cdot \Delta س + ٣(\Delta س)^2 - ٥\Delta س}{\Delta س}$$

معدل التغير $= ٦س + ٣\Delta س - ٥$

نعوض

$= ٦ \times ٣ + ٣ \times ٠ - ٥$

$= ١٨ - ٥ = ١٣$

٧) $هـ(س) = (س^٢ + س)^{-١}$ وكان معدل التغير في قيمة الاقتران $هـ$ عندما تتغير $س$ من ١ الى $س_٢$ يساوي $\frac{١}{٣}$ ، جد $س_٢$.

الحل : لاحظ $هـ(س) = \frac{١}{س^٢ + س}$

معدل التغير $= \frac{هـ(س) - هـ(١)}{س - ١}$

$\frac{-١}{٣} = \frac{\frac{١}{س^٢ + س} - \frac{١}{٢}}{س - ١}$ توحيد المقامات

$\frac{-١}{٣} = \frac{٢ - س^٢ - س}{(٢)(س^٢ + س)(س - ١)} \times \frac{١}{س - ١}$

$\frac{-١}{٣} = \frac{-(س^٢ + س - ٢)}{(٢)(س^٢ + س)(س - ١)} \times \frac{١}{س - ١}$

$\frac{-١}{٣} = \frac{-(س + ٢)(س - ١)}{٢(س^٢ + س)(س - ١)} \times \frac{١}{س - ١}$ ضرب تبادلي

$-٢س^٢ - ٢س = -٢س - ٦$

$-٢س^٢ + س + ٦ = ٠ \times -١$

$٢س^٢ - س - ٦ = ٠$

$(٢س + ٣)(س - ٢) = ٠$

$س = -\frac{٣}{٢}$ مرفوض $\quad س = ٢$

٨) اذا كان معدل تغير $هـ$ على $[-١، ٣]$ يساوي (٥) ، جد معدل تغير $لـ$ المماس $هـ(س) = ٤س^٢ - ٣هـ(س)$ على الفترة نفسها .

الحل : المطلوب : معدل تغير $هـ = \frac{هـ(٣) - هـ(-١)}{٣ - (-١)}$

$٥ = \frac{هـ(٣) - هـ(-١)}{٤}$

$٢٠ = هـ(٣) - هـ(-١)$

المطلوب :

معدل تغير $هـ(س) = \frac{هـ(٣) - هـ(-١)}{٣ - (-١)}$

$= \frac{(١٦ - ٣هـ(٢)) - (٤ - ٣هـ(-١))}{٤}$

$= \frac{١٦ - ٣هـ(٢) - ٤ + ٣هـ(-١)}{٤}$

$= \frac{١٢ + ٣(هـ(-١) - هـ(٢))}{٤}$

$= \frac{١٢ + ٣(هـ(-١) - هـ(٢))}{٤}$

$= \frac{١٢ + ٣ \times ٢٠}{٤} = \frac{٤٤}{٤} = ١١$

٩) اذا كان معدل تغير $هـ(س)$ على $[١، ٣]$ يساوي (٥) ، $هـ(١) \times هـ(٣) = ١٢$ ، $هـ(س) = \frac{١}{هـ(س)}$ ، جد معدل تغير $هـ(س)$ على نفس الفترة .

الحل : معدل تغير $هـ(س) = \frac{\frac{١}{هـ(٣)} - \frac{١}{هـ(١)}}{٣ - ١}$

$= \frac{هـ(١) - هـ(٣)}{هـ(٣) \times هـ(١)} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{١٠}{١٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٥}{١٢}$

٩) إذا كان معدل تغير د عند [٢، ٥] يساوي (٧) ، وكان معدل تغير د عند [٥، ٩] يساوي (١٤) ، جد معدل تغير د عند [٢، ٩]

الجواب : ١١

١٠) إذا كان معدل تغير د عند [١، ٤] يساوي ٣ ، وكان د(١) + د(٤) = ٢ ، جد معدل تغير د(س) = د٤(س) عند نفس الفترة ؟

الجواب : ٦

١١) إذا كان معدل تغير د(س) عند [٢، ٤] يساوي (-١) ، وكان د(س) = س٣ د(س) + ٤ وكان د(س) يمر بالنقطة (٢، ٨) ، جد معدل تغير د(س) عند [٢، ٤] .

الحل: معدل د = $\frac{د(٤) - د(٢)}{٤ - ٢}$

$-١ = \frac{د(٤) - د(٢)}{٢}$

$-٢ = د(٤) - د(٢)$

معطى : د(٢) = ٨

∴ د(٢) = ٤ د(٢) + ٤ = ٨

٤ د(٢) = ٤

د(٢) = ١

المطلوب :

معدل تغير د(س) = $\frac{د(٤) - د(٢)}{٤ - ٢}$

$= \frac{١٦ د(٤) + ٨ - (٤ د(٢) + ٤)}{٢}$

$= \frac{٦ د(٤) + ٨ - ٤ د(٢) - ٤}{٢}$

$= \frac{١٦(-٣ + د(٢)) + ٨ - ٤ د(٢) - ٤}{٢}$

$= \frac{١٦ + (-٣) + ١) + ٨ - ١٨٤ - ٤}{٢} = -٨$

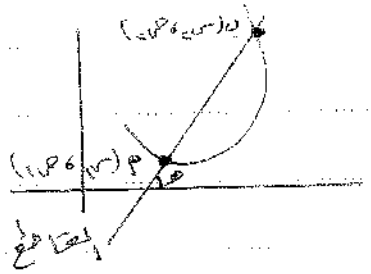
نلاحظ مما سبق :

* معدل تغير المقترن بنقاط بيانية (معطى)

* معدل تغير المقترن لخطي بياني (ميل المستقيم)

ميل القاطع = معدل التغير = ظاه

حيث ه : زاوية ميل المستقيم وهي الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب للمحور السيني .



١٣) د(س) = س٣ + ٢ س ، جد ميل القاطع لمنحنى د الذي يمر بالنقطتين (١، د(١)) ، (٣، د(٣))

الحل : ميل القاطع = $\frac{د(٣) - د(١)}{٣ - ١}$

$= \frac{١٥ - ٣}{٢} = ٦$

١٤) إذا كان القاطع لـ د يصنع مع الاتجاه الموجب للسينات زاوية قياسها ١٣٥° ، جد معدل تغير د عند [٢، ٤]

الحل : معدل التغير = ظا ١٣٥ = -١

طبعاً : ظا ١٣٥ = -ظا ٤٥ = -١

١٥ إذا كان ميل القاطع ، ميل العمودي عليه
إذا كان القاطع ماراً بالنقطتين
(-١، هـ(-١)) ، (٣، هـ(٣))
حيث هـ(س) = س٢

الحل: ميل القاطع = معدل تغير = $\frac{هـ(٣) - هـ(-١)}{٣ - (-١)}$
$= \frac{٩ - ١}{٤} = ٢$ ... (٢)
∴ ميل القاطع = ٢
لأن حاصل ميل مستقيم × ميل العمودي عليه = -١
∴ ميل القاطع × ميل العمودي = -١
٢ × ميل العمودي = -١
∴ ميل العمودي = $-\frac{١}{٢}$

١٦ إذا كان هـ(١) = $\frac{١}{٢}$ هـ(٥) = ٦ ، هـ
أ. معدل تغير هـ(س) على [١، ٥] (٣ نقاط)
ب. ميل القاطع الواصل بين (١، هـ(١)) ، (٥، هـ(٥))
جـ. ميل العمودي على القاطع الواصل بين النقطتين (١، هـ(١)) ، (٥، هـ(٥)) (٢ نقطة)

التغير في المتغير التابع / التغير في المتغير المستقل
* السرعة المتوسطة = معدل تغير المسافة

$ع = \frac{ف}{ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$

١٧ قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن٢ حيث ن: الزمن بالثواني ، ف: المسافة بالمتر، جد
أ. السرعة المتوسطة على [٢، ٥]
ب. السرعة المتوسطة بدلالة Δن
إذا تغيرت ن من (٢ + Δن) إلى (٢ - Δن)

الحل: أ. ع = $\frac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢} = \frac{١٠٠ - ١٧٥}{٣} = -٢٥$

ب. $\frac{Δف}{Δن} = \frac{ف(٠ + Δن) - ف(٠)}{Δن}$
$= \frac{٦٠(Δن) - ٥(Δن)^٢ - ٠}{Δن}$
$= \frac{(Δن)(٦٠ - ٥Δن)}{Δن} = ٦٠ - ٥Δن$

١٨ ملعب على شكل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه (س) يتغير بانتظام محافظاً على شكله. جد معدل تغير محيطه عندما يتغير طول ضلعه من ٣ سم إلى ٤ سم

الحل: محيط المثلث = (الضلع)٣ ⇐ ع(س) = ٣س
$\frac{Δع(س)}{Δس} = \frac{ع(٤) - ع(٣)}{٤ - ٣}$
$= \frac{٦٤ - ٢٧}{١} = ٣٧$

١٩ مثلث متساوي الأضلاع ، طول ضلعه (س) يتغير بانتظام . جد معدلاً تغير مساحته إذا تغير طول ضلعه من (٨ سم) إلى (١٠ سم).

الحل: م = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س٢
بالطلب Δ م = م(١٠) - م(٨) = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (١٠٠ - ٦٤) = ٩$\sqrt{٣}$

٢٠ صفيحة معدنية دائرية الشكل ، جد معدل تغير مساحتها عندما يتغير طول نصف قطرها من ٢ سم إلى ٨ سم.

الحل: م = π نق٢
معدل تغير المساحة = $\frac{م(٤) - م(١)}{٤ - ١}$
$= \frac{١٦\pi - \pi}{٣} = ٥\pi$

ورقة عمل (١)

١. إذا كان معدل تغير $هـ(س)$ على $[١ ، ٤]$ يساوي (٦) ، وكان $هـ(س) = ٣س - هـ(س) + ٢$ ، جد معدل تغير $هـ(س)$ على $[١ ، ٤]$. (ج: ٣)

٢. إذا كان $ل(س) = س هـ(س)$ وكان معدل تغير $ل(س)$ على $[-٢ ، ٤]$ يساوي (١٢) ، $ل(٤) = ٦$ ، جد $هـ(-٢)$. (ج: ٣)

٣. $ل(س) = س^{٢} هـ(س)$ كان معدل تغير $هـ$ على $[١ ، ٣]$ يساوي (٢) معدل تغير $ل(س)$ على $[١ ، ٣]$ يساوي ١٢ ، جد $هـ(١)$. (ج: $\frac{٣}{٢}$)

٤. $هـ(س) = ٢س^{٢} + ٣س - ب$ ، جد ٢ إذا كان معدل تغير $هـ$ على $[٢ ، ٣]$ يساوي ١٩ (ج: $\frac{٤}{٣}$)

٥. إذا كان يقاطع المحاور السينية $(١ ، هـ(١))$ $(٢ ، ٣)$ بميل زاويته ١٣٥° مع المحور السيني الموجب. حيث تقع النقطتان على منحنى $هـ$ ، $هـ(١) = ٤$ جد ٣. (ج: $٤ - \sqrt{٢}$)

٦. إذا كان المحوري على يقاطع لمنحنى $هـ(س)$ بميل زاوية $\frac{٣\pi}{٤}$ مع المحور السيني الموجب على $[-١ ، ٢]$ وكان $هـ(س) = هـ(س) + س^{٢} - ٣$ ، جد معدل تغير $هـ(س)$ على $[-١ ، ٢]$ (ج: ٢)

٧. $هـ(س) = \begin{cases} س^{٣} + ١ ، & س \leq ٥ \\ ١٠ ، & ٥ < س \leq ٧ \end{cases}$ وكان $هـ(س) = س^{٢} + هـ(س)$

جد مقدار معدل تغير $هـ(س)$ على $[١ ، ٥]$ (ج: ٨)

٨. $هـ(س) = ٣س^{٢}$ كان مقدار تغير $هـ(س)$ على $[-٢ ، ٤]$ يساوي ٢٤ ، جد ٣ (ج: ٢)

درس (٣):

تعريف المشتقة الأولى

$\text{ق}'(س) = \dfrac{\text{د}ص}{\text{د}س}$

يجب أن نتعلم ٣ أمور :-

١. إيجاد المشتقة بدلالة س
٢. إيجاد المشتقة عند نقطة
٣. إيجاد المشتقة للاقتراب للنقطة

القانون: المشتقة الأولى = نهـا معدل التغير
$\Delta س \leftarrow 0$

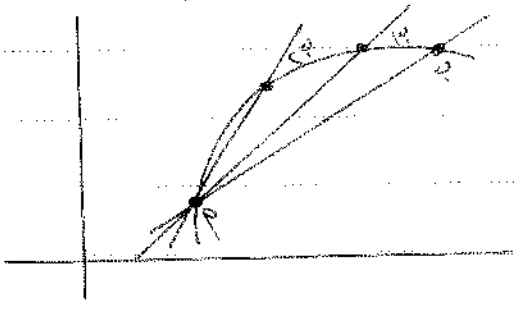
$\text{ق}'(س) = \text{نهـا}_{\Delta س \leftarrow 0} \dfrac{\Delta ص}{\Delta س}$

$\text{ق}'(-ب) = \text{نهـا}_{ه \leftarrow 0} \dfrac{\text{ق}(-ب + ه) - \text{ق}(-ب)}{ه}$

$\text{ق}'(س) = \text{نهـا}_{ع \leftarrow س} \dfrac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(س)}{ع - س}$

* إذا كانت النهاية موجودة فإن ق(س) قابل للاشتقاق (ق'(س) موجودة)

* وإذا كانت النهاية غير موجودة، فإن ق(س) يكون غير قابل للاشتقاق (ق'(س) غير موجودة).



في الشكل المجاور إذا تحركت النقطة (ب) على المنحنى ق حتى تقترب من (أ) فإن $\Delta س \to 0$ فيصبح المستقيم المار بالنقطتين أ، ب يقترب من المماس للمنحنى ق عند النقطة أ، ويصبح $\overleftrightarrow{ب أ}$ يقترب من $\overleftrightarrow{ل أ}$ أو فإننا نقول أن $\overleftrightarrow{ب أ}$ تقترب من $\overleftrightarrow{ل أ}$، $\overleftrightarrow{ب أ}$ تقترب من $\overleftrightarrow{ل أ}$ ...

وعندما $\Delta س \to 0$ فإن المقطع $\overleftrightarrow{ب أ}$ يقترب إلى حد ما من عند أ حيث تتطابق ب مع أ، وبالتالي يأتي عندنا قانون المشتقة والعلاقة مع معدل التغير

حيث ميل القاطع $= \dfrac{\Delta ص}{\Delta س}$

$\therefore$ ميل المماس $= \text{نهـا}_{\Delta س \to 0} \dfrac{\Delta ص}{\Delta س}$

وكما ميل المماس هو المشتقة الأولى

أمثلة

* جد المشتقة الأولى ق'(س) باستخدام تعريف المشتقة الأولى:

١. $\text{ق}(س) = س^3 - ٧$

الحل: $\text{ق}'(س) = \text{نهـا}_{ع \to س} \dfrac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(س)}{ع - س}$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \dfrac{ع^3 - ٧ - (س^3 - ٧)}{ع - س}$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \dfrac{ع^3 - ٧ - س^3 + ٧}{ع - س}$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \dfrac{ع^3 - س^3}{ع - س}$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \dfrac{(ع - س)(ع^2 + س ع + س^2)}{(ع - س)}$

$= ٣ س^2$

٢) $ق(س) = س^{٤} + س^{٣}$

الحل: $ق'(س) = $ نهـا $\frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$ ، $ع \to س$

$= $ نهـا $\frac{ع^{٤} + ع^{٣} - (س^{٤} + س^{٣})}{ع - س}$ ، $ع \to س$

$= $ نهـا $\frac{ع^{٤} - س^{٤} + ع^{٣} - س^{٣}}{ع - س}$ ، $ع \to س$

$= $ نهـا $\frac{(ع - س)}{(ع - س)} + \frac{(ع^{٢} - س^{٢})(ع^{٢} + س^{٢})}{ع - س}$ ، $ع \to س$

$= ١ + $ نهـا $(ع + س)(ع^{٢} + س^{٢})$ ، $ع \to س$

$= ١ + ٤س^{٣}$

٣) $ق(س) = \sqrt{٣س^{٢} - ٨}$

الحل: $ق'(٣) = $ نهـا $\frac{ق(ع) - ق(٣)}{ع - ٣}$ ، $ع \to ٣$

$= $ نهـا $\frac{\sqrt{٣ع^{٢} - ٨} - \sqrt{٢٧ - ٨}}{ع - ٣} \times \frac{\sqrt{٣ع^{٢} - ٨} + \sqrt{٢٧ - ٨}}{\sqrt{٣ع^{٢} - ٨} + \sqrt{٢٧ - ٨}}$ ، $ع \to ٣$ (مراجعة)

$= $ نهـا $\frac{٣ع^{٢} - ٨ - ٢٧ + ٨}{(ع - ٣)(\sqrt{٣ع^{٢} - ٨} + \sqrt{٢٧ - ٨})}$ ، $ع \to ٣$

$= $ نهـا $\frac{٣(ع - ٣)(ع + ٣)}{(ع - ٣)(\sqrt{٣ع^{٢} - ٨} + \sqrt{٢٧ - ٨})}$ ، $ع \to ٣$

$= \frac{٣}{\sqrt{٢٧ - ٨} + \sqrt{٢٧ - ٨}}$

$= \frac{٣}{٢\sqrt{١٩}}$

٤) $ق(س) = \sqrt{٣س^{٢} + ٧}$ عند $س = ٢$

الحل: $ق'(٢) = $ نهـا $\frac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢}$ ، $ع \to ٢$

$= $ نهـا $\frac{\sqrt{٣ع^{٢} + ٧} - (٣ \times ٤ + ٧)}{ع - ٢}$ ، $ع \to ٢$

$= $ نهـا $\frac{\sqrt{٣ع^{٢} + ٧} - ١٩}{ع - ٢} \times \frac{\sqrt{٣ع^{٢} + ٧} + ١٩}{\sqrt{٣ع^{٢} + ٧} + ١٩}$ ، $ع \to ٢$

$= $ نهـا $\frac{٣ع^{٢} + ٧ - ٣٦١}{(ع - ٢)(\sqrt{٣ع^{٢} + ٧} + ١٩)}$ ، $ع \to ٢$

$= $ نهـا $\frac{٣(ع - ٢)(ع + ٢)}{(ع - ٢)(\sqrt{٣ع^{٢} + ٧} + ١٩)}$ ، $ع \to ٢$

$= \frac{٣ \times ٤}{٣٨} = \frac{٦}{١٩}$

٥) $ق(س) = س$ جا $٢س$

الحل: $ق'(٣) = $ نهـا $\frac{ق(ع) - ق(٣)}{ع - ٣}$ ، $ع \to ٣$

$= $ نهـا $\frac{ع$ جا $٢ع - ٣$ جا $٦}{ع - ٣}$ ، $ع \to ٣$

نطرح ونضيف $ع$ جا ٦

$= $ نهـا $\frac{ع$ جا $٢ع - ع$ جا $٦ + ع$ جا $٦ - ٣$ جا $٦}{ع - ٣}$ ، $ع \to ٣$

$= $ نهـا $ع \left(\frac{\text{جا}(٢ع - ٦)}{ع - ٣}\right) \left(\frac{\text{جتا}(٢ع + ٦)}{ع}\right) + \text{جا}٦ \left(\frac{ع - ٣}{ع - ٣}\right)$ ، $ع \to ٣$

$= $ نهـا $ع \times ٢ \times \frac{\text{جا}(٢ع - ٦)}{٢(ع - ٣)} \times \frac{\text{جتا}(٢ع + ٦)}{ع} + \text{جا}٦$ ، $ع \to ٣$

$= ٣ \times \frac{١}{٢} \times$ جتا $٦ + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= ٣ \times \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= ٢$

٦) $ل(س) = ٣^{ق(س)}$

الحل: $ل'(س) = $ نهـا $\frac{ل(ع) - ل(س)}{ع - س}$ ، $ع \to س$

$= $ نهـا $\frac{٣^{ق(ع)} - ٣^{ق(س)}}{ع - س}$ ، $ع \to س$

$= $ نهـا $\frac{٣^{ق(س)}(٣^{ق(ع) - ق(س)} - ١)}{ع - س}$ ، $ع \to س$

$= $ نهـا $\frac{٣^{ق(س)}(٣^{ق(ع) - ق(س)} - ١)}{ق(ع) - ق(س)} \times \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$ ، $ع \to س$

$= ٣^{ق(س)} \ln ٣ \times ق'(س)$

نطرح ونضيف $ع^2 \cdot ه(س)$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ع^2 \cdot ه(ع) - ع^2 \cdot ه(س) + ع^2 \cdot ه(س) - س^2 \cdot ه(س)}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} ع^2 \left(\frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س} \right) + ه(س) \left(\frac{ع^2 - س^2}{ع - س} \right)$$

حول والمقدار

$$= س^2 \times هـ'(س) + ه(س) \times 2س$$

٧. إذا كان $ه$ قابلاً للاشتقاق عند $س$ فأثبت أن

$$\text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ع \cdot ه(س) - س \cdot ه(ع)}{ع - س} = ه(س) - س \cdot هـ'(س)$$

الحل: نطرح المقدار ونضيف $س \cdot ه(س)$

$$\text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ع \cdot ه(س) - س \cdot ه(س) + س \cdot ه(س) - س \cdot ه(ع)}{ع - س}$$

$$\text{نهـا}_{ع \to س} ه(س) \left(\frac{ع - س}{ع - س} \right) + س \left(\frac{ه(س) - ه(ع)}{(ع - س)} \right)$$

$$ه(س) + س \times -هـ'(س)$$

$$ه(س) - س \cdot هـ'(س)$$

* إيجاد المشتقة عند نقطة *

جد $هـ'(س)$ باستخدام التعريف عند النقطة المطلوبة :-

٨. $ه(س) = 2س^2 - 4$ ، جد $هـ'(3)$

الحل: $هـ'(3) = \text{نهـا}_{ع \to 3} \frac{ه(ع) - ه(3)}{ع - 3}$

$$= \text{نهـا}_{ع \to 3} \frac{2ع^2 - 4 - 14}{ع - 3}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to 3} \frac{2ع^2 - 18}{ع - 3}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to 3} \frac{(ع - 3)(ع + 3)2}{ع - 3} = 12$$

٩. $ه(س) = س^3 + 5س$ ، جد $هـ'(1)$

الحل: $هـ'(1) = \text{نهـا}_{ع \to 1} \frac{ه(ع) - ه(1)}{ع - 1}$

$$= \text{نهـا}_{ع \to 1} \frac{ع^3 + 5ع - 6}{ع - 1}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to 1} \frac{(ع - 1)(ع^2 + ع + 6)}{ع - 1}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to 1} ع^2 + ع + 6 = 8$$

	$ع^2$	$ع$	عدد
	1		
	5		
	1	1	6
	1	1	-6
	6		

١٠. $هـ(س) = \frac{س^2}{1 - س}$ ، $س \neq 1$

جد $هـ'(-3)$ بالتعريف.

الحل: $هـ'(-3) = \text{نهـا}_{ع \to -3} \frac{ه(ع) - ه(-3)}{ع - (-3)}$

$$= \text{نهـا}_{ع \to -3} \frac{\frac{ع^2}{1 - ع} - \frac{9}{4}}{ع + 3}$$ نوحد مقامات

$$= \text{نهـا}_{ع \to -3} \frac{4ع^2 - 9 + 9ع}{4(1 - ع)(ع + 3)}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to -3} \frac{(4ع - 3)(ع + 3)}{4(1 - ع)(ع + 3)}$$

$$= \frac{-8}{9}$$

١١. إذا كان $ه(س) = \sqrt{س}$ ، جد $هـ'(\frac{1}{4})$ بالتعريف

١٢. $ه(س) = \sqrt{س}$ ، $س > 0$

جد $هـ'(4)$ بالتعريف.

* متى يوجد اشتقاق *

شرح بسيط: ① اذا كان d معرفاً على $[a, b]$ فإن d قابل للاشتقاق على (a, b) ، $d'(a)$ ، $d'(b)$ غير موجودان لأنه d غير معرف على يسار a ويمين b أي أن الاشتقاق عند الأطراف غير موجود.

② نقطة التحول $s = c$

بما أن $d'(c)$ ، $d'(c)$ ، فإذا كانت $d'(c) = d'(c)$ فإن $d'(c)$ موجودة

١٢. $d(s) = \begin{cases} 2s^2 + 2s - 5 & , s \le 1 \\ 4s - 1 & , 1 < s \le 3 \end{cases}$

جد $d'(0)$ ، $d'(2)$ ، $d'(1)$ ، $d'(3)$ باستخدام تعريف الاشتقاق ؟

الحل: $d'(-0)$ ، $d'(3)$ غير موجودة لأنها أطراف فترة.

* $d'(1) = \lim_{s \to 1} \frac{d(s) - d(1)}{s - 1} = \lim_{s \to 1} \frac{2s^2 + 2s - 5}{s - 1}$ حالة $\frac{0}{0}$

$= \lim_{s \to 1} \frac{2s^2}{s} = 2$

* $d'(2) = \lim_{s \to 2} \frac{d(s) - d(2)}{s - 2} = \lim_{s \to 2} \frac{4s - 9}{s - 2}$ حالة $\frac{0}{0}$

$= \lim_{s \to 2} \frac{4(s-2)}{(s-2)} = 4$

* $d'(1)$ نعلم تحول يميناً وسيراً

$d'_+(1) = \lim_{s \to 1^+} \frac{d(s) - d(1)}{s - 1}$

$= \lim_{s \to 1^+} \frac{4s - 5}{s - 1} = \lim_{s \to 1^+} \frac{4(s-1)}{(s-1)} = 4$

$d'_-(1) = \lim_{s \to 1^-} \frac{d(s) - d(1)}{s - 1}$

$= \lim_{s \to 1^-} \frac{2s^2 + 2s - 5}{s - 1}$ حالة $\frac{0}{0}$

$= \lim_{s \to 1^-} \frac{4s + 2}{1} = 6$

$\therefore d'_+(1) \neq d'_-(1) \Rightarrow d'(1)$ غير موجودة

$\Rightarrow d$ غير قابل للاشتقاق عند $s = 1$

١٣. $d(s) = \begin{cases} 2s^2 + 5 & , s \le 1 \\ 3s + 3 & , s > 1 \end{cases}$

اثبت قابلية الاشتقاق عند $s = 1$ باستخدام تعريف الاشتقاق.

الحل: $s = 1$ نقطة تحول يميناً ويساراً

$d'(1)^+ = \lim_{s \to 1^+} \frac{d(s) - d(1)}{s - 1}$

$= \lim_{s \to 1^+} \frac{3s^2 + 5 - 7}{s - 1} = \lim_{s \to 1^+} \frac{3s^2 - 2}{s - 1}$ حالة $\frac{0}{0}$

$= \lim_{s \to 1^+} \frac{(3s+2)(s-1)}{(s-1)} = 5$

$d'(1)^- = \lim_{s \to 1^-} \frac{d(s) - d(1)}{s - 1} = \lim_{s \to 1^-} \frac{4s - 4}{s - 1}$

$= \lim_{s \to 1^-} \frac{4(s-1)}{(s-1)} = 4$

$\therefore d'(1)^+ \neq d'(1)^- \Rightarrow d'(1)$ غير موجودة

$\Rightarrow d$ قابل للاشتقاق عند $s = 1$

١٤. $ق(س) = س^2 |س - ٣|$ باستخدام التعريف جد $ق'(٣)$

الحل: نعيد تعريف بالطريقة $\frac{+}{٣}$

$$ق(س) = \begin{cases} -س^3 + ٣س^2 & ، س \le ٣ \\ ٣س^2 - س^3 & ، س > ٣ \end{cases}$$

$$ق'(٣^+) = \lim_{ع \to ٠} \frac{ق(٣+ع) - ق(٣)}{ع} = \lim_{ع \to ٠} \frac{٣(٣+ع)^2 - (٣+ع)^3 - ٠}{ع}$$

$$= \lim_{ع \to ٠} \frac{٢٧ + ١٨ع + ٣ع^2 - ٢٧ - ٢٧ع - ٩ع^2 - ع^3}{ع} = \lim_{ع \to ٠} \frac{-٦ع^2 - ع^3}{ع}$$

$$= \lim_{ع \to ٠} \frac{ع^2(-٦ - ع)}{ع} = ٠$$

$$ق'(٣^-) = \lim_{ع \to ٠} \frac{ق(٣-ع) - ق(٣)}{-ع} = \lim_{ع \to ٠} \frac{٣(٣-ع)^2 - (٣-ع)^3 - ٠}{-ع}$$

$$= \lim_{ع \to ٠} \frac{٢٧ - ١٨ع + ٣ع^2 - ٢٧ + ٢٧ع - ٩ع^2 + ع^3}{-ع} = \lim_{ع \to ٠} \frac{١٨ع - ٦ع^2 + ع^3}{-ع}$$

$$= \lim_{ع \to ٠} \frac{ع(١٨ - ٦ع + ع^2)}{-ع} = -١٨$$

$ق'(٣^+) \neq ق'(٣^-)$ ← غير موجودة.

← $ق$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٣$

١٥. $ق(س) = س^2 [س]$ ، باستخدام تعريف المشتقة اثبت أن $ق'(١) = ٠$

الحل: لاحظ أنه لم يطلب باستخدام التعريف ← نبحث الاتصال أولاً عند نقطة التحول، ليش؟

نظرية: إذا كان $ق$ قابلاً للاشتقاق ($\exists$) عند $س = جـ$ ← فإنه متصل ($\exists$) عند $س = جـ$

عند $س = جـ$ ← $\exists$ معنا متصل ($\exists$)

عند $س = جـ$ ← $\exists$ معنا متصل ($\exists$)

نبحث الاتصال عند $س = ١$

$ق(١) = (١)^2 [١] = ١$ ، $\lim_{س \to ١^+} س^2 [س] = ١ \times ٨ = ٨$

$\lim_{س \to ١^-} س^2 [س] = ١ \times ٠ = ٠$ ← غير متصل عند $س = ١$

$٨ = ٨ \neq ٠ = ٠$ ← غير متصل ($\exists$ عند $س = ١$)

∴ $ق$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ١$

العلاقة بين معدل التغير والمشتقة الأولى

١. $ق'(س) =$ نهاية معدل التغير $= \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$ق'(س) = \lim_{ه \to ٠} \frac{ق(س+ه) - ق(س)}{ه}$$

أمثلة

١. إذا كان معدل تغير $ق(س)$ هو $٥س^2 + ٧س - ١$ ، جد $ق'(س)$

الحل: $ق'(س) =$ نهاية معدل التغير

$$= \lim_{\Delta س \to ٠} ٥س^2 + ٧س - ١$$

$$ق'(س) = ١٠س + ٧$$

٢. إذا كان التغير في الاقتران $٥س^2 ه = ٣س^3 ه^2$ ، جد $ق'(-٣)$

الحل: معدل التغير $= ١٥س^2 ه - ٦س ه^2$

لاحظ: $ه = \Delta س$

$\Delta ص = ١٥س^2 ه - ٦س ه^2$ نقسم على $ه$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = ١٥س^2 - ٦س ه$$

معدل التغير $= ١٥س^2 - ٦س ه$ نأخذ نهاية

نهاية معدل التغير $= \lim_{ه \to ٠} ١٥س^2 - ٦س ه$

$ق'(س) = ١٥س^2$

$ق'(-٣) = ١٣٥$

٣ إذا كان معدل تغير $ق(س)$ عند $ل = ٢$ هو $\frac{ل^٣ - ٨}{ل - ٢}$ فجد $ق(٢)$ ؟

الحل: $ق(٢) =$ نهـا $_{ل \to ٢}$ (معدل التغير)

$= $ نهـا $_{ل \to ٢} \frac{ل^٣ - ٨}{ل - ٢}$

$= $ نهـا $_{ل \to ٢} \frac{(ل - ٢)(ل^٢ + ٢ل + ٤)}{(ل - ٢)}$

$ق(٢) = ١٢$

٤ إذا كان

$ق(س + هـ) - ٥ هـ = ٢ك هـ^٣ + س^٢ هـ + ق(س)$

حيث $هـ = ٥س$ ، فجد $ق(٤)$.

الحل: نجد أولاً قاعدة

$ق(س + هـ) - ق(س) = ٢ك هـ^٣ + س^٢ هـ + ٥ هـ$

نقسم على $هـ$ ونأخذ نهايته

نهـا $_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} =$ نهـا $_{هـ \to ٠} \frac{٢ك هـ^٣ + س^٢ هـ + ٥ هـ}{هـ}$

$ق'(س) =$ نهـا $_{هـ \to ٠} ٢ك هـ + س^٢ + ٥$

$ق'(س) = ٦ك س^٢ + ٥$

$ق'(٤) = ٦ك + ١٦ + ٥ = ٢١$

٥ إذا كان مقدار تغير الاقتران $ق(س)$ يساوي $س^٢ ع - ع^٢ س$ ، فجد $ق(س)$

الحل: $\Delta ق = س^٢ ع - ع^٢ س$

نقسم على $\Delta س = ع - س = هـ$

ونأخذ نهايته

نهـا $_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ق}{\Delta س} =$ نهـا $_{ع \to س} \frac{س^٢ ع - ع^٢ س}{ع - س}$

$ق'(س) =$ نهـا $_{ع \to س} \frac{س(ع - س)(س + ع)}{ع - س}$

$ق'(س) =$ نهـا $_{ع \to س} س(س + ع)$

$ق'(س) = س^٢ + س^٢ = ٢س^٢$

ورقة عمل (٣)

١. $هـ(س) = س - \frac{٤}{س^{٢}}$ ، جد $هـ'(١)$ باستخدام التعريف. (٣)

٢. اثبت أن $\frac{ع هـ(ع) - ٣ س هـ(س)}{ع - س} = ٢ س هـ'(س) + ٢ هـ(س)$

٣. اثبت أن $\frac{هـ(س + هـ) - هـ(س - هـ)}{هـ} = ٢ هـ'(س)$

٤. $هـ(س) = (س^{٢} - ٣)^{٢} ل(س)$ ، ميل $ل(س)$ عند $س = ٢$ يساوي -٤ ، جد $هـ'(٢)$ ، باستخدام تعريف المشتقة. (٣) ل ٢ : ٤-

٥. $هـ(س) = \begin{cases} ٧ - س & ، س < ٤ \\ \frac{س}{٤} + ١ & ، س > ٤ \end{cases}$ جد $هـ'(٤)$ باستخدام تعريف المشتقة

ج : $\frac{١}{٤}$

٦. إذا كان معدل تغير $هـ(س)$ على $[-٢ ، ٣]$ يساوي $\frac{٣^{٢} - ٤}{٣ + ٣}$

جد $هـ'(-٢)$ ؟

ج : -٤

٧. $ل(س) = هـ(س)$ حيث $هـ(س)$ اقتران قابل للاشتقاق

أثبت أن $ل'(س) = ٢ هـ(س) \times هـ'(س)$.

٨. أ) $هـ(س) = حتا^{٣} س - س$ ، جد $هـ'(س)$ بالتعريف.

ب) $هـ(س) = قا \frac{س}{٢}$ ، جد $هـ'(س)$ بالتعريف.

* قواعد الاشتقاق *

١) مشتقة الثابت = صفر

٢) $س^ن$ ← $ن س^{ن-١}$

٣) $أ س$ ← $أ$

٤) $أ س^ن$ ← $أ \times ن \times س^{ن-١}$

٥) مشتقة المجموع والطرح ← نشتق كل اقتران لحاله

* $(هـ \pm و)'(س) = هـ'(س) \pm و'(س)$

٦) $(هـ \cdot و)'(س) = هـ \times و' + و \times هـ'$
الأول × تفاضل الثاني + الثاني × تفاضل الأول

٧) مشتقة قسمة اقترانين :-

أ. اقتران / ثابت ← (م.ا المقام − الثابت × م.ا البسط) / (المقام)²

ب. ثابت / اقتران ← (الثابت × م.ا المقام) / (المقام)²

ج. اقتران (بسط) / اقتران (مقام) ←

(مقام × م.ا بسط − بسط × م.ا مقام) / (مقام)²

٨) $(هـ(س))^ن$ ← $ن (هـ(س))^{ن-١} \times هـ'(س)$

لاحظ : $\sqrt{س}$ ، $\sqrt[٣]{س}$ ، $\sqrt[ن]{س^م}$ ، $\frac{١}{س}$ ، $\frac{١}{س^ن}$ ، $\frac{١}{\sqrt{س}}$

قا $\frac{\sqrt{س}}{٢}$ ... كلها قوانين

٩) الجذر التربيعي ← $هـ$ ← $\frac{هـ'}{٢\sqrt{هـ}}$

١٠) اي جذر على تربيعي نجمع له ١ ثم نشتقه

١. $هـ(س) = س^٣ + ٥س - ٣٠$ ، $هـ(١) = ٨$

$هـ'(س) = ٣س^٢ + ٥$

$هـ'(١) = ٨$

٢. $هـ(س) = ٩س - س^٢ - ٢٠$

$هـ'(س) = ٩ - ٢س$

٢. $هـ(س) = ٧كـ^٢ - ٣كـ^٥ - ٣١$

$هـ'(س) = ١٤كـ - ١٥كـ^٤$

٤. $هـ(س) = (٣س^٢ + ١)(٣س - ٢)$

جد $هـ'(٢)$

$هـ'(س) = (٣س^٢ + ١)(٣) + (٦س)(٣س - ٢)$

$هـ'(٢) = ١٥ + ٣٢ = ٤٧$

٥. $هـ(س) = ٣س^٣ - س^٢$ جد

$هـ'(١)$ ، $(هـ(١))'$

الحل : $هـ'(س) = ٩س^٢ - ٢س$

$هـ'(١) = ٩ - ٢ = ٧$

$(هـ(١))' = (٧ - ١)' = (٠)' = ٠$

٦. $هـ(س) = ٢س^٣ - ٥س^{-١}$

$هـ'(س) = ٦س^٢ + ٥س^{-٢}$

$= ٦س^٢ + \frac{٥}{س^٢}$

٧. $ص = ٣كـ^٢ + ٧كـ - ١$ ، جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٦س + ٧$ نفوض

$= ٦ \times ٤ + ٧ = ٣١$

٨. $ص = (س^٢ + ٣س - ١)^٥$ جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٥(س^٢ + ٣س - ١)^٤ (٢س + ٣)$

نفوض $= ٥(١)^٤(٧) = ٣٥$

٩. $ص = م^٣ - ٩م^٢ + ٢٦م - ٤١$

جد $\frac{دص}{دم}$ ؟

$\frac{دص}{دم} = ٣م^٢ - ١٨م + ٢٦$

١٠. $هـ(س) = ٣س^٤ - ٩س^٣ - ٢س^٢ + ٨$

$هـ'(س) = ١٢س^٣ - ٢٧س^٢ - ٤س$

١١. $ص = (٣س+١)(س-٢س^٢)$

$\frac{د ص}{د س}$ عند $س = -٢$

$\frac{د ص}{د س} = (٣س+١)(١-٤س) + (س-٢س^٢)(٣)$

$= (-٥)(٥) + (-١٠)(٣)$

$= -٢٥ - ٣٠ = -٥٥$

١٢. $هـ(س) = \frac{٨}{١+س^٤}$ حيث $هـ'(-٢)$

$هـ'(س) = \frac{-٨ \times ٤س^٣}{(١+س^٤)^٢}$ ← $هـ'(-٢) = \frac{٣٢}{٢٥}$

١٣. $ص = \frac{س^٢ - ٥س - ٩}{٢س - ٥س^٤}$

$ص' = \frac{(٢س - ٥س^٤)(٢س - ٥) - (س^٢ - ٥س - ٩)(٢ - ٢٠س^٣)}{(٢س - ٥س^٤)^٢}$

١٤. $ص = \frac{س^٢ + ٤س + ٥}{٤س - ١}$

$ص' = \frac{(٤س-١)(٢س+٤) - (س^٢+٤س+٥)(٤)}{(٤س-١)^٢}$

١٥. $هـ(س) = \frac{س^٣(س-٢)^٢}{١+س^٣}$ ، جد $هـ'(١)$

بالمثل $هـ(س) = \frac{س^٤ - ٢س^٣}{١+س^٣}$

$هـ'(س) = \frac{(١+س^٣)(٤س^٣ - ٦س^٢) - (س^٤ - ٢س^٣)(٣س^٢)}{(١+س^٣)^٢}$

$هـ'(١) = \frac{٢ \times ١٠ - ٢٠ \times ٢}{٤} = \frac{-١}{٤}$

١٦. $هـ(س) = \frac{س^٢}{٤} = \frac{٤}{س^٢} = \frac{١}{٤}$

$هـ'(س) = -\frac{١}{٤} \times \frac{٤ \times ٢س}{س^٤} = \frac{٤}{س^٣} + \frac{١}{٤}$

١٧. $هـ(س) = (س-س^{-١})^٣$

$هـ'(س) = ٣(س-س^{-١})^٢ (١ + س^{-٢})$

$= ٣(س - \frac{١}{س})^٢ (١ + \frac{١}{س^٢})$

١٨. $هـ(س) = \sqrt{س^٣ + س^٢ + ٧}$

حيث $هـ'(١)$

$هـ'(س) = \frac{٣س^٢ + ٢س}{٢\sqrt{س^٣ + س^٢ + ٧}}$

$هـ'(١) = \frac{٥}{٦}$

١٩. $هـ(س) = هو(س) \times ل(س)$

حيث $هـ(٤)$ حيث $هو(٤) = ل'(٤) = ٢$

، $هو(٤) = ل(٤) = -٣$

$هـ'(س) = هو(س) \times ل'(س) + ل(س) \times هو'(س)$

$هـ'(٤) = هو(٤) \times ل'(٤) + ل(٤) \times هو'(٤)$

$= ٢ \times ٢ + -٣ \times -٣ = ١٣$

٢٠. $هـ(س) = ٩س^٣ - ٣س^٢ - ١٢س$

حيث ٩ حيث $هـ'(-٣) = ١٢$ ،

$هـ'(س) = ٢٧س^٢ - ٦س$

$هـ'(-٣) = ٢٧ + ١٨ = ١٢$

$\therefore ٩ = ١٢$

$\therefore ٩ = صفر$

أسئلة حلوة كثير :-

٢١. $هـ(س) = س^٢ \, هـ(س) - ٥$

حيث $قـ(٢)$ حيث

$هـ(٢) = \frac{١}{٤} \, قـ(٢) = ٣$

$قـ(س) = س^٢ \times قـ(س) + هـ(س) \times ٢س$

$قـ(٢) = ٤ \times قـ(٢) + هـ(٢) \times ٤$

$= ٤ \times ٦ + ٣ \times ٤ = ٣٦$

٢٢. إذا كان $قـ(٣) = ١$ ، $هـ(٣) = ٢$

$هـ(٣) = ٥$ ، $قـ(٣) = ٤$ ، جد :

أ. $(هـ \cdot قـ)'(٣)$

$= هـ \times قـ + قـ \times هـ$

$= هـ(٣) \times قـ(٣) + قـ(٣) \times هـ(٣)$

$= ٢ \times ٤ + ٥ \times ١ = ١٣$

ب. $(٩هـ(س) - ٤هـ(س) + س^٣)'(٣)$

$= ٦قـ(س) - ٤هـ(س) + ٣س^٢$ نعوض

$= ٦قـ(٣) - ٤هـ(٣) + ٣ \times ٣^٢$

$= ٦ \times ١ - ٤ \times ٤ + ٣ \times ٩ = -٤$

ج. $\left(\frac{هـ}{قـ}\right)'(٣)$

$= \frac{هـ \times قـ - قـ \times هـ}{(قـ)^٢}$ نعوض

$= \frac{٤ \times ٢ - ٥ \times ١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

د. $(هـ(٣) \cdot هـ(س))'(٣)$

$= (٢هـ(س))'(٣)$

$= ٢هـ(س) \times ٢قـ(٣)$

$= ٢ \times ٤ = ٨$

هـ. $(قـ^٣)'(٣)$

$= ٣(قـ)^٢ \times قـ$ نعوض

$= ٣(قـ(٢))^٢ \times قـ(٣)$

$= ٣(٢)^٢ \times ١ = ١٢$

و. $(قـ \times س^٢)'(٣)$

$= قـ \times ٢س + س^٢ \times ٢(قـ)' \times قـ$

$= ٤ \times ٦ + ٩ \times ٢ \times ٢ \times ١$

$= ٢٤ + ٣٦ = ٦٠$

٢٣. $هـ(س) = \frac{ب}{س} + س$ ، $س \neq ٠$

حيث $ب$ حيث $\frac{هـ(س) - هـ(١)}{س - ١} = -٣$

الحل : المعادلة $قـ(١) = -٣$

$\Leftarrow قـ(س) = \frac{-ب}{س^٢} + ١$

$قـ(١) = \frac{-ب}{١} + ١ = -٣$

$-ب = -٤ \Leftarrow \boxed{ب = ٤}$

٢٤. $هـ(س) \times هـ(س) = ١$ ، كان

$هـ(١) = ٣$ ، $هـ(١) = ٥$ ، جد

$قـ(١)$

$\frac{٥}{٩} : ٥$

٢٥. $هـ(س) = س^٣ - ٣س^٢ - ٨$

جد أصغر قيمة للدالة .

الحل : $قـ = ٣س^٢ - ٦س = ٠$

$س(٣س - ٦) = ٠$

$س = ٠ \quad س = ٢$

٢٦. $هـ(س) = \frac{س^٢ \, ل(س)}{هـ(س)}$ حيث $قـ(٢)$

حيث $ل(٢) = هـ(٢) = ١$ ،

$ل'(٢) = ٣ = -٣$

(أسئلة عامة مشتقة بطرفين)

٢٧. ص = $\sqrt[3]{س^4 + 7س}$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ١

الحل: ص = $(س^4 + 7س)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{3}(س^4 + 7س)^{-\frac{2}{3}} \times (4س^3 + 7)$

$= \frac{4س^3 + 7}{3\sqrt[3]{(س^4 + 7س)^2}}$ نعوض

$= \frac{4 + 7}{3\sqrt[3]{(1 + 7)^2}} = \frac{9}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{9}{3 \times 4} = \frac{3}{4}$

٢٨. ص = $\sqrt[4]{س - 1}$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ٢

الحل: ص = $(س - 1)^{\frac{1}{4}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{4}(س - 1)^{-\frac{3}{4}} \times 1$

$= \frac{1}{4\sqrt[4]{(س - 1)^3}}$ عوض

$= \frac{1}{4\sqrt[4]{1}} = \frac{1}{4}$

٢٩. ص = $\sqrt{س^2} \cdot \sqrt{س}$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ١

الحل: ص = $س^{\frac{2}{3}} \times س^{\frac{1}{2}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{2}{3}س^{-\frac{1}{3}} \times س^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}س^{-\frac{1}{2}} \times س^{\frac{2}{3}}$

$= \frac{2\sqrt{س}}{3\sqrt[3]{س}} + \frac{\sqrt[3]{س^2}}{2\sqrt{س}}$ نعوض

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

٣٠. ص = $\sqrt[3]{(س^2 + 7)^4}$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ٥

عرّف

عوض س = ٥

* مشتقة الاقترانات المتعددة *

قبل أن نشتق يجب تحديد المجال (التوحيد)

حيث * نشتق كل قاعدة لوحدها وتكمل بنفس الطريقة.

* الأطراف عندها المشتقة غير موجودة.

* التحول: ادخال ← متصل ← مشتق ← ...

ستة ٩ ← غير متصل (مشتق ناقص)

← المشتقة عندها غير موجودة

١. $هـ(س) = \begin{cases} س^3 + 4 & ، -2 \le س < 1 \\ س^2 - 4س & ، 1 \le س < 5 \end{cases}$

جد $هـ'(س)$ ؟

الحل: $هـ'(س) = \begin{cases} 3س^2 & ، -2 < س < 1 \\ 2س - 4 & ، 1 < س < 5 \end{cases}$

غير موجودة ← س = -٢ ، ١ ، ٥

بحث انتقال للتحول

$هـ(1) = -3$ ، نهـا $س^2 - 4س = -3$ ، نهـا $س^3 + 4 = 5$

$-1 \le س$ ، $+1 \le س$

غير متصل ← $هـ'(1)$ غير موجودة

٢. $هـ(س) = \begin{cases} \frac{4}{س} - 1 & ، س > 1 \\ س^2 + 2س & ، س \le 1 \end{cases}$

جد $هـ'(س)$ ؟

الحل: $هـ'(س) = \begin{cases} -\frac{4}{س^2} & ، س > 1 \\ 2س + 2 & ، س < 1 \end{cases}$

بحث انتقال

التحول س = ١

$هـ(1) = 3$

نهـا $\frac{4}{س} - 1 = 3$ ، $+1 \le س$

نهـا $س^2 + 2س = 3$ ، $-1 \le س$

متصل

بحث

$هـ'(1)^+ = -\frac{4}{1^2} = -4$

$هـ'(1)^- = 2س + 2 = 4$

لا توجد مماس وحيد عندها

$\therefore هـ'(1)^+ \neq هـ'(1)^-$

تابع الصفحة (١٧)

٣. $ق(س) = \begin{cases} س^2 & ، س \geq 2 \\ 3س - 1 & ، 2 < س < 4 \\ 5 - س & ، س \leq 4 \end{cases}$

جد $ق'(س)$ ؟

الحل: $ق(س) = \begin{cases} 2س & ، س > 2 \\ 3 & ، 2 < س < 4 \\ -1 & ، س < 4 \end{cases}$

ع.م ، $س = 2$ ، 4

نبحث الاتصال عند $س = 2$ ... غ.متصل

نبحث الاتصال عند $س = 4$ ... غ.متصل

٤. $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - 16}{س - 4} & ، س \neq 4 \\ 8 & ، س = 4 \end{cases}$

جد $ق'(س)$ ؟

الحل: نبحث الاتصال لنحول $ق(4) = 8$

بما أن $س \to 4$ ∴ $\frac{س^2 - 16}{س - 4} = \frac{(س+4)(س-4)}{س-4} = 8$

∴ $ق(س) = \begin{cases} س + 4 & (\text{عليه اعتقاده}) \\ 8 & ، س = 4 \end{cases}$ ، $س \neq 4$

$\leftarrow ق'(س) = \begin{cases} 1 & ، س \neq 4 \\ 1 & ، س = 4 \end{cases}$

٥. $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 7 & ، س \neq 3 \\ 16 & ، س = 3 \end{cases}$

جد $ق'(س)$

الحل: نبحث الاتصال لنحول $ق(3) = 16$

بما أن $س \to 3$ ∴ $س^2 + 7 = 9 + 7 = 16$ متصل

$ق'(س) = \begin{cases} 2س & ، س \neq 3 \\ 6 & ، س = 3 \end{cases}$

٦. $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 7 & ، س \neq 3 \\ 10 & ، س = 3 \end{cases}$

جد $ق'(س)$ ؟

الحل: $ق'(س) = \begin{cases} 2س & ، س \neq 3 \\ \text{غير موجودة} & ، س = 3 \end{cases}$

نبحث الاتصال عند $س = 3$

$س \to 3$ ... غ.متصل

$ق(3) = 10$

$س^2 + 7 = 16$ غير متصل

٧. $ق(س) = س^3 |س - 1|$ ، جد $ق'(س)$ ؟

الحل: نغير تعريف القيمة المطلقة

$ق(س) = \begin{cases} س^3(س-1) & ، س \geq 1 \\ س^3(1-س) & ، س < 1 \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} 4س^3 - 3س^2 & ، س > 1 \\ 3س^2 - 4س^3 & ، س < 1 \\ \text{غير موجودة} & ، س = 1 \end{cases}$

نبحث الاتصال عند $س = 1$

$ق(1) = 0$

$\lim_{س \to 1^+} ق(س) = 4 - 3 = 1$

$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = 3 - 4 = -1$

متصل

نبحث الاشتقاق عند $س = 1$

$ق'(1^+) = 1$

$ق'(1^-) = -1$

٨. $ق(س) = \frac{|س^2 - 5س + 4|}{س(س-1)}$ ، $س \in [0, 1)$

جد $ق'(س)$

الحل: نغير تعريف القيمة المطلقة

+	0	−	1	+

4

$ق(س) = \begin{cases} \frac{(س-1)(س-4)}{س(س-1)} & ، 1 < س < 4 \\ \frac{(س-4)(س-1)}{س(س-1)} & ، 4 \leq س \leq 5 \end{cases}$ نبسط

$ق(س) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{س} & ، 1 < س < 4 \\ 1 - \frac{4}{س} & ، 4 \leq س \leq 5 \end{cases}$

$س = 4$ نحول نبحث الاتصال عندها

متصل ...

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} \frac{٤}{س} & ، ١ < س < ٤ \\ \frac{٤}{س^{٢}} & ، ٤ < س < ٥ \end{cases}$$

غير موجودة ، $س = \{٤ ، ٥\}$

٩. $\text{هـ}(س) = (س - ٤) \times [س]$

جد $\text{هـ}'(٢)$ ؟

الحل: نعيد تعريف الاقتران حول $س = ٢$ ، $ل = ١$

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} (س-٤) \times ١ & ، ١ \leq س < ٢ \\ (س-٤) \times ٢ & ، ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$$

$$\text{هـ}'(س) = \begin{cases} ١ & ، ١ < س < ٢ \\ ٢ & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$$

النقاط عند $س = ٢$ ← غير متصل

← $\text{هـ}'(٢)$ غير موجودة

١٠. $\text{هـ}(س) = [\frac{١}{٥} س + ٤]$

جد $\text{هـ}'(٢)$ ، $\text{هـ}'(٥)$ ؟

الحل: نعيد تعريف $س = ٢$ ، $ل = ٥$

$س = ٢$ نقطة عادية ← $\text{هـ}(س) = ٤$

$\text{هـ}'(س) = ٠$ ← $\text{هـ}'(٢) = ٠$

$س = ٥$ تحول ← $\text{هـ}(س) = \begin{cases} ٤ & ، ٠ < س < ٥ \\ ٥ & ، ٥ < س < ١٠ \end{cases}$

← $\text{هـ}'(س) = \begin{cases} صفر & ، ٠ < س < ٥ \\ صفر & ، ٥ < س < ١٠ \end{cases}$

النقاط $س = ٥$ ← غير متصل

∴ $\text{هـ}'(٥)$ غير موجودة

يوجد طريقة أخرى للتعامل مع هذه النقطة الحرجة ...

النقطة الحرجة $= \frac{٤}{١٦} = \frac{٤}{٤^{٢}}$

* هذه النقطة الحرجية ما تفارق ٨

① الحالة $=$ النقطة $= ٠$ ، التعويض كسر غير موجودة ، التعويض صحيح

② مشترك / تعويض كسر بقاعدة ونتيجة صحيح نعيد تعريف حينها وبساطة

١١. $\text{هـ}(س) = (س - ٣) \times [س]$

جد $\text{هـ}'(٢)$

الحل: نعوض ② بالصحيح $[٢]$ ← ٢^{+} ، ١

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} (س-٤) & ، س \geq ٢ \\ ١ (س-٤) & ، س < ٢ \end{cases}$$

متصل عند $س = ٢$

$\text{هـ}'(١)^{+} = ٢$ ، $\text{هـ}'(٢)^{-} = ١$ ← $\text{هـ}'(٢)$ غير موجودة

١٢. $\text{هـ}(س) = [\frac{١}{٥} س + ٤]$ جد $\text{هـ}'(٢)$ ، $\text{هـ}'(٥)$ ؟

الحل: $\text{هـ}'(٢)$ نعوض $[\frac{٦}{٥} + ٤]$ كسر نضعه

$\therefore \text{هـ}(س) = ٤$

$\text{هـ}'(س) =$ صفر

* $\text{هـ}'(٥)$ نعوض $[٤ + ٥ \times \frac{١}{٥}] = [٥]$ صحيح

$\text{هـ}'(٥)$ غير موجودة

١٣. $\text{هـ}(س) = س^{٤} [س]$ جد $\text{هـ}'(٠)$

الحل: نعوض ① بالصحيح $[٠]$ ← ٠^{+} ، ٠

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} صفر & ، س < ٠ \\ س^{٤} & ، س \geq ٠ \end{cases}$$

متصل عند $س = ٠$

$$\text{هـ}'(س) = \begin{cases} صفر & ، س < ٠ \\ ٤س^{٣} & ، س > ٠ \end{cases}$$

$\text{هـ}'(٠)^{+} = ٠$

$\text{هـ}'(٠)^{-} = ٠$

$\therefore \text{هـ}'(٠) = ٠$

١٤. $هـ(س) = \frac{[\frac{1}{5}س]}{س-2}$ هـ قـ (٧)

الحل: نعوض بالتكاملي لوحده $[\frac{1}{5}س]$ = تضحي = ١

$\therefore هـ(س) = \frac{1}{س-2}$

$هـ'(س) = \frac{-1 \times 2س}{(س-2)^2}$ ← $هـ'(٧) = \frac{1}{25}$

١٥. $ل(س) = س [س - 2]$

جد $ل'(\frac{1}{2})$

الحل: نعوض بالتكاملي لوحده $[س-2]$ نضاعف

$ل(س) = س \times -2 = -2س$

$ل'(س) = -2$ ← $ل'(\frac{1}{2}) = -2$

طريقة سريعة لاشتقاق المطلقة: (نقطة)

نعوض داخله ← التعويض موجب نأخذ إشارة الموجبة ثم نشتق

← التعويض سالب نأخذ إشارة السالبة ثم نشتق

← التعويض صفر نفيد التعريف

١٦. $هـ(س) = |س^2 - س - 15|$

جد قـ (١)

الحل: نعوض $1 - 5$ ثم نضرب بالسالب

$هـ(س) = -س^2 + س + 5$

$هـ'(س) = -2س + 1$

$هـ'(1) = -2 + 1 = -1$

١٧. $هـ(س) = |2 + 3س^2|$

جد $هـ'(-1)$

الحل: نعوض -1 في الموجبة

$هـ(س) = 2 + 3س^2$

$هـ'(س) = 6س$

$هـ'(-1) = -6$

١٨. $هـ(س) = |س - 2| \times [\frac{1}{2}س - 3]$

جد قـ (٩)

الحل: المطلقة نعوض ← ⊖ ← $(س-2)$

التكاملي نعوض ← $[\frac{1}{2}س]$ نضاعف = ١

$\therefore هـ(س) = (س-2) \times 1 = س - 2$

$هـ'(س) = 1$ ← $هـ'(9) = 1$

١٩. $هـ(س) = \frac{|س^2 - 4|}{[\frac{1}{2}س]}$

جد قـ (٥)

الحل: المطلقة نعوض ← + ← $(س^2 - 4)$

التكاملي نعوض ← $[\frac{5}{2}]$ يضحي ٢

$\therefore$ يصبح $هـ(س) = \frac{س^2 - 4}{2}$

$هـ'(س) = \frac{2س}{2}$ ← $هـ'(5) = 5$

٢٠. $هـ(س) = \frac{[\frac{2}{س} + 3]}{س}$ جد قـ $(\frac{1}{2})$

الحل: التكاملي نعوض $[\frac{2}{س}]$ ← ٢

$\therefore$ يصبح $هـ(س) = \frac{2}{س}$

$هـ'(س) = \frac{-1 \times 2}{س^2}$

$هـ'(\frac{1}{2}) = \frac{-2}{(\frac{1}{2})^2} = -2 \times 4$

$= -8$

* قاعدة السلسلة *

عند وجود ٣ رموز متعاقبة نستخدم

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$$

١) $ص = ع^3 - ٢ع$ ، $ع = س^2 + ١$

جد $\frac{دص}{دس}$

الحل: $\frac{دص}{دع} = ٣ع^2 - ٢$ ، $\frac{دع}{دس} = ٢س$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = (٢س)(٣ع^2 - ٢)$$

$$\frac{دص}{دس} = (٢س)(٣(س^2+١)^2 - ٢)$$

٢) $ص = ن^2 + ٦ن$ ، $س = ن^3 - ن$

جد $\frac{دص}{دس}$ ؟

الحل: $\frac{دص}{دن} = ٢ن + ٦$ ، $\frac{دس}{دن} = ٣ن^2 - ١$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = \frac{١}{٣ن^2 - ١}(٢ن + ٦) = \frac{٢ن + ٦}{٣ن^2 - ١}$$

٣) $ص = ع^3 - ٣ع + ١$ ، $ع = ٢س^2 - ١$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = ١$

الحل: $\frac{دص}{دع} = ٣ع^2 - ٣$ ، $\frac{دع}{دس} = ٦س$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = (٦س)(٣ع^2 - ٣)$$

بتعويض ع عن دالة س

$ع = ٢س^2 - ١$

عندما $س = ١$ فإن $ع = ٢ \times ١ - ١ = ١$

$$= (١ \times ٦)(٣ \times ١ - ٣) = ٦ \times ٠ = ٠$$

٤) $ص = \frac{٢ل}{ل^2 + ١}$ ، $ل = ٢س^2 + ٣س + ١$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = -١$ ؟

الحل: $\frac{دص}{دل} = \frac{(ل^2+١)(٢) - (٢ل)(٢ل)}{(ل^2+١)^2}$

بتعويض $ل = ٢(-١)^2 + ٣(-١) + ١ = ٢ - ٣ + ١ = ٠$

$ل = ٠$

$\frac{دل}{دس} = ٤س + ٣$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دل} \times \frac{دل}{دس}$$

$$= \frac{(ل^2+١)(٢) - ٤ل^2}{(ل^2+١)^2} \times (٤س + ٣)$$ لما $ل = ٠$

$$= ٢ \times (٤س + ٣) = ٨س + ٦$$

عندما $س = -١$ فإن $٨(-١) + ٦ = -٨ + ٦ = -٢$

٥) $\frac{دص}{دن} = \frac{١}{٤}$ ، $\frac{دس}{دن} = \frac{-٢}{٥}$

جد $\frac{دس}{دص}$ ؟

الحل: $\frac{دس}{دص} = \frac{دس}{دن} \times \frac{دن}{دص}$

$$= \frac{-٢}{٥} \times \frac{٤}{١} = \frac{-٨}{٥}$$

٦) تمرين: $\frac{دل}{دص} = ٤$ ، $ع = ص^2$

إذا كان $\frac{دع}{دل} = ٤$ عندما $ل = ٢$

جد $ص$ ؟

الجواب: $ص = ٢$

٧) تمرين: $ص = (س^2 + ٤س)^9$ جد $\frac{دص}{دس}$

باستخدام السلسلة

* فكرة الاقتران المركب *

$هـ(ق(س))$

مثلاً :

* $هـ(س^2) \leftarrow 2س \times ق'(س^2)$
* $هـ(5س-9) \leftarrow 5 \times ق'(5س-9)$
* $ق^3(س) \leftarrow (هـ(س))^3$

نشتق $3(هـ(س))^2 \times 5س^4 \times ق'(س^5)$

لانشتق س الحقيقية لوحدها لم نطبق بسؤال

١. $ص = هـ(س^2+1)$ ، جد $\frac{دص}{دس}$ عند $س=2$ علماً بأن $ق'(5)=9$

الحل: $\frac{دص}{دس} = 2س \times ق'(س^2+1)$

$= 2 \times 2 \times ق'(5)$

$= 4 \times 9 = 36$

٢. $هـ(س^2+1) = س^3 - 4س$

جد $ق'(5)$ علماً بأن $س > 0$

الحل: $2س \times ق'(س^2+1) = 3س^2 - 4$

نجد س الحقيقية $س^2+1 = 5$

$س^2 = 4 \leftarrow س = \pm 2$ (مرفوض)

نعوض $س = -2$

$2 \times ق'(5) = 3(-2)^2 - 4$

$ق'(5) = -4 \leftarrow 8 = -ق'(5)$

٣. $هـ(\frac{2}{س}) = س^2 + س$

جد $هـ'(-1)$

الحل: نشتق $-\frac{2}{س^2} \times هـ'(\frac{2}{س}) = 2س + 1$

نجد س الحقيقية $\frac{2}{س} = -1 \leftarrow س = -2$

نعوض $-\frac{2}{(-2)^2} \times هـ'(-1) = 2(-2) + 1$

$-\frac{1}{2} \times هـ'(-1) = -3$

$هـ'(-1) = 6$

٤. $ص = ل(س^3) - ل^3(س)$

جد $\frac{دص}{دس}$ عند $س = 1$ حيث $ل(1) = 2$ ، $ل'(1) = 3$

الحل: $\frac{دص}{دس} = 3س^2 \times ل'(س^3) - 3(ل(س))^2 \times ل'(س)$

نعوض بما سكرة لانه س الحقيقية

$\frac{دص}{دس} = 3 \times ل'(1) - 3(ل(1))^2 \times ل'(1)$

$= 3 \times 3 - 3 \times 2^2 \times 3$

$= 9 - 36 = -27$

٥. $ل(س) = هـ(هـ(س))$ كلما $هـ(1) = 4$ ، $ق'(4) = -5$ ،

$ل'(1) = 3$ ، جد $هـ'(1)$ ؟

الحل: نشتق

$ل'(س) = هـ'(س) \times ق'(هـ(س))$

$ل'(1) = هـ'(1) \times ق'(هـ(1))$

$3 = هـ'(1) \times ق'(4)$

$3 = هـ'(1) \times (-5)$

$هـ'(1) = -\frac{3}{5}$

٦. $ص = ق^2(س^3)$ جد $ق'(8)$

علماً بأن $هـ(8) = 1$ ، $هـ'(8) = \frac{1}{3}$

الحل: $ص = 2(هـ(س^3)) \times ق'(س^3) \times 3س^2$

نجد س الحقيقية $س^3 = 8 \leftarrow س = 2$

نعوض

$ص' = 2 هـ(8) \times ق'(8) \times 12$

$100 = 2 \times 1 \times ق'(8) \times 12$

$ق'(8) = \frac{100}{24} = \frac{25}{6}$

مذكرة تفاضل وتكامل

* $(ق \circ هـ)(س) = ق(هـ(س))$
* $(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$
* $(ل \circ م)'(س) = ل'(م(س)) \times م'(س)$
* $(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

١ . $ق(س) = س^{٢}$ ، $هـ(س) = ١ - ٣س$

جد $(ق \circ هـ)'(س)$

ثم $(ق \circ هـ)'(٢)$

أ . $(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

بما أن $ق' = ٢س$ ، $هـ' = -٣$

$\therefore (ق \circ هـ)'(س) = ٢(١ - ٣س) \times -٣$

$= -٦(١ - ٣س)$

$= -٦ + ١٨س$

ب . $(هـ \circ ق)'(٢) = هـ'(ق(٢)) \times ق'(٢)$

$= هـ'(٤) \times ٤$

$= -٣ \times ٤ = -١٢$

٢ . $ق(س) = \frac{س^{٢} - ٣س}{٤}$ ، $هـ(س) = \frac{٢}{س}$

جد $(ق \circ هـ)'(-١)$

$(ق \circ هـ)'(-١) = ق'(هـ(-١)) \times هـ'(-١)$

$= ق'(-٢) \times هـ'(-١)$

$ق'(س) = \frac{٢س - ٣}{٤}$ ، $هـ'(س) = \frac{-٢}{س^{٢}}$

$\therefore (ق \circ هـ)'(-١) = \frac{٢(-٢) - ٣}{٤} \times \frac{-٢}{(-١)^{٢}}$

$= -\frac{٧}{٤} \times -٢$

$= \frac{١٠}{٤}$

٣ $ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٦$

$هـ(٣) = ٦$ ، $(ق \circ هـ)'(٢) = ٤٨$

جد $هـ'(٣)$ ؟ علما بأن $ق' = ٣س^{٢} - ٦س$

الحل : $(ق \circ هـ)'(٢) = ق'(هـ(٢)) \times هـ'(٢)$

$٤٨ = ق'(هـ(٢)) \times ٦$

$ق'(هـ(٢)) = ٨$

$٨ = ٣(هـ(٢))^{٢} - ٦$

$٣(هـ(٢))^{٢} = ١٤$

$(هـ(٢))^{٢} = ٤$

$هـ(٢) = ٢$

٤ . $ق$ ، $هـ$ اقترانين قابلين للاشتقاق

وكان $(ق \circ هـ)(س) = س$ ، وكان

$ق(س) = ١ + (ق(س))^{٢}$ فجد $هـ'(س)$ ؟

الحل : نشتق طرفين

$ق'(س) \times هـ'(س) = ١$

$١ + (ق(س))^{٢} \times هـ'(س) = ١$

$(١ + س^{٢}) \times هـ'(س) = ١$

$هـ'(س) = \frac{١}{١ + س^{٢}}$

٥ . $ق$ ، $هـ$ اقترانين قابلين للاشتقاق

وكان $(ق \circ هـ)(س) = \frac{س^{٢} + ٣}{س + ١} + \frac{١}{٢}$

$س \neq -١$

وكان $ق'(س) = \frac{٣}{٢}س^{٢} + ٧$ وكان

$هـ(١) = ٤$ ، $هـ(١) = ١$ فجد

الثابت $أ$ ؟

$أ = -٢٧$

* الاشتقاق الضمني *

يجب التمييز بين الاقتران الصريح و الضمني . حيث الصريح هو الذي يكون فيه المتغير التابع في طرف لوحدها وليس موجوداً في الطرف الآخر . أما الضمني فيكون هناك في الطرف الواحد أكثر من متغير .

* الشرط : كلما نشتق ص نضع بجانبها $\frac{دص}{دس}$

مثلاً : $ص^{٢} \leftarrow ٢ص \frac{دص}{دس}$

$٥ص^{٣} \leftarrow ١٥ص^{٢} \frac{دص}{دس}$

$٧ص \leftarrow ٧ \frac{دص}{دس}$

أمثلة

١. $س^{٢} + ص^{٣} = ١٦$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل : $٢س + ٣ص^{٢} \frac{دص}{دس} = ٠$

$٣ص^{٢} \frac{دص}{دس} = -٢س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-٢س}{٣ص^{٢}}$

٢. $٧س - ٧ص = ١١٧$

الحل : $\frac{١}{٧س^{٢}} - \frac{١}{٧ص^{٢}} \frac{دص}{دس} = ٠$

$\frac{١}{٧س^{٢}} = \frac{١}{٧ص^{٢}} \frac{دص}{دس} \leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{٧ص^{٢}}{٧س^{٢}}$

٣. $(س ص)^{٣} = ٤س$

الحل : $س^{٣} ص^{٣} = ٤س$

$ص^{٣} = \frac{٤}{س^{٢}}$

$٣ص^{٢} \frac{دص}{دس} = \frac{-٤ \times ٢س}{س^{٤}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-٨}{٣س^{٣}ص^{٢}} \times \frac{١}{٣ص^{٢}}$

$= \frac{-٨}{٣س^{٣}ص^{٤}}$

٤. $س^{٢} + ص^{٢} = ٥س - ص^{٣}$

الحل : $٢ك + ٢ص \frac{دص}{دس} = ٥ - ٣ص^{٢} \frac{دص}{دس}$

$٢ص \frac{دص}{دس} + ٣ص^{٢} \frac{دص}{دس} = ٥ - ٢ك$

$\frac{دص}{دس} (٢ص + ٣ص^{٢}) = ٥ - ٢ك$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٥ - ٢ك}{٢ص + ٣ص^{٢}}$

٥. $س - س^{٢}ص = ٦س^{٣}$

الحل : $١ - (س^{٢} \frac{دص}{دس} + ص \times ٢س) = ١٢ك$

$١ - س^{٢} \frac{دص}{دس} - ٢س ص = ١٢ك$

$-س^{٢} \frac{دص}{دس} = ١٢ك - ١ + ٢س ص$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١٢ك - ١ + ٢س ص}{-س^{٢}}$

٦. $(س - ص)^{٢} - ص = ٠$

الحل : $٢(س - ص)(١ - \frac{دص}{دس}) - \frac{دص}{دس} = ٠$

$(٢س - ٢ص)(١ - \frac{دص}{دس}) - \frac{دص}{دس} = ٠$

$٢ك - ٢س \frac{دص}{دس} - ٢ص + ٢ص \frac{دص}{دس} - \frac{دص}{دس} = ٠$

$٢ص \frac{دص}{دس} - ٢س \frac{دص}{دس} - \frac{دص}{دس} = ٢ص - ٢ك$

$\frac{دص}{دس} (٢ص - ٢س - ١) = ٢ص - ٢ك$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢ص - ٢ك}{(٢ص - ٢س - ١)}$

٧. $\frac{٤}{س} + \frac{٤}{ص} = ٣$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند $(١، ٤)$

الحل : $\frac{-٤}{س^{٢}} + \frac{-٤}{ص^{٢}} \frac{دص}{دس} = ٠$

نعوض

$\frac{-٤}{١٦} + \frac{-٤}{١} \frac{دص}{دس} = ٠$

$-\frac{١}{٤} \frac{دص}{دس} = ٠$

$\frac{دص}{دس} = -\frac{١}{٤}$

٨ . $هـ(٢ص^٣) = س ص^٢$

$\because$ هـ(١٦) = ١٨ ، هـ'(١٦) = ٢

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما ص = ٢ ؟

الحل : نفرض للتعويض $س = ١٦$ ، $ص = ٤$

$٦ ص^٢ \times هـ'(٢ص^٣) = س \times ٣ص^٢ هـ'(٢ص^٣) + هـ(٢ص^٣)$

$٤ \times ٦ ص \times ٢ \times \frac{٩-}{٤} = (١٦) هـ' \times ٤ + ٤ ص \times ٢ \times ٤$

$٤ + ١٨ ص = ٤ ص \times ٢ \times ٤$

$٤ = ١٨ ص + ٤٨ ص$

$ص = \frac{٤}{(١٨ + ٤٨)}$

$ص = \frac{٤}{٦٦} = \frac{٢}{٣٣}$

٩ . $هـ(س)$ قابل للاشتقاق وكان

$ص^٢ = س هـ(س^٢)$ ،

$ص \neq ٠$ وكان $هـ(١) = ٤$ ،

$هـ'(١) = ١$ ، جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = ١$

الحل : نجد ص عندما $س = ١$ من العلاقة الأصلية $ص^٢ = ١ هـ(١) \leftarrow ص^٢ = ٤$

$\leftarrow ص = ٢$

$٢ ص \frac{دص}{دس} = س \times ٢ س هـ'(س^٢) + هـ(س^٢) \times ١$

$٢ \times ٢ \times \frac{دص}{دس} = ١ \times ٢ \times ١ هـ'(١) + هـ(١) \times ١$

$٤ \frac{دص}{دس} = ٢ + ٤ \times ١$

$٤ \frac{دص}{دس} = ٦ \leftarrow \boxed{\frac{دص}{دس} = \frac{٣}{٢}}$

١٠ . $ص^٣ = هـ(٤ س^٢ - س)$

حيث هـ(٥) = ٨- ، هـ'(٥) = ٤

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = ١-$

الجواب = ٣-

مشتقات الدوائر الدائرية ***

* $هـ(س) = جتا(هـ(س)) \leftarrow هـ'(س) \times -جا(هـ(س))$

* $هـ(س) = جا(هـ(س)) \leftarrow هـ'(س) \times جتا(هـ(س))$

* $ظا(هـ(س)) \leftarrow هـ'(س) \times قا^٢(هـ(س))$

* $ظتا(هـ(س)) \leftarrow هـ'(س) \times -قتا^٢(هـ(س))$

* $قا(هـ(س)) \leftarrow هـ'(س) \times قا(هـ(س)) \times ظا(هـ(س))$

* $قتا(هـ(س)) \leftarrow هـ'(س) \times -قتا(هـ(س)) \times ظتا(هـ(س))$

$\boxed{جا^٢س + جتا^٢س = ١}$ $\boxed{ظا^٢س + ١ = قا^٢س}$ $\boxed{ظتا^٢س + ١ = قتا^٢س}$

ملاحظة : اقتران فيه حروف (ث) هو اشتقاقه سالبه.

تنبيه : هام جداً $جا^٢س \neq جاس^٢$

أمثلة :

١ . $هـ(س) = جا٣س - جتا س^٣ + ظا \frac{٥}{س}$

$هـ'(س) = ٣ جتا٣س - ٢س جاس^٢ + \frac{٥}{س^٢} قا^٢ \frac{٥}{س}$

$= ٣ جتا٣س + ٢س جاس^٢ - \frac{٥}{س^٢} قا^٢ \frac{٥}{س}$

٢ . $ص = \frac{قتاس}{س^٢} - ظتا س^٣$

$\frac{دص}{دس} = \frac{س^٢ \times -قتاس ظتاس - قتاس \times ٢س}{س^٤} - ٣س^٢ \times -قتا^٢ س^٣$

$= \frac{قتاس ظتاس}{س^٢} + \frac{٢ قتاس}{س^٣} + ٣س^٢ قتا^٢ س^٣$

٣ . $ص = جاس^٥ - ظا^٢ س$

$\frac{دص}{دس} = ٥س^٤ جتاس^٥ - ٢ظاس قا^٢ س$

$= \frac{١}{٢س^٢} جتاس^٥ - \frac{قا^٢ س}{٥س^٤} ظاس$

٤ . $هـ(س) = ظا س + قا س$ ، جد $هـ'(\frac{\pi}{٦})$

$هـ'(س) = قا^٢ س + قاس ظاس$

$هـ'(\frac{\pi}{٦}) = قا^٢ \frac{\pi}{٦} + قا \frac{\pi}{٦} ظا \frac{\pi}{٦}$

$= \frac{٤}{٣} + \frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = ٢$

٥. $ص = \frac{٨}{ق\,س}$ ، عند $س = \frac{\pi}{٣}$

$\frac{ص}{س} = \frac{-٨ \times ق\,س\,ظا\,س}{ق\,س}$

$= -٨ \times ظا\,س$

$= -٨ \times ظا\frac{\pi}{٣} = -٨ \times \sqrt{٣} = -٨\sqrt{٣}$

٦. $ه(س) = \frac{جا\,س}{س}$ ، $س \neq ٠$

عند $س = \frac{\pi}{٦}$

$ه'(س) = \frac{س \times جتا\,س - جا\,س}{س^{٢}}$

$ه'(\frac{\pi}{٦}) = \frac{\frac{\pi}{٦} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}}{(\frac{\pi}{٦})^{٢}} = \frac{\frac{\sqrt{٣}\pi}{١٢} - \frac{١}{٢}}{\frac{\pi^{٢}}{٣٦}}$

٧. $ه(س) = \frac{جتا\,س}{١ + جا\,س}$ ، $س \in [٠, ٢\pi]$

$ه(\pi) = -١$

الحل: $ه' = \frac{(١ + جا\,س)(-جا\,س) - (جتا\,س)(جتا\,س)}{(١ + جا\,س)^{٢}}$

$ه'(\pi) = \frac{(١ + ٠)(٠) - (-١)(-١)}{(١)^{٢}} = -١$

٨. $ص = \frac{١ + ظا\,س}{١ - ظا\,س}$ أثبت أن $\frac{ص}{س} = \frac{٢}{١ - جا٢س}$

تمرين

٩. $ص = جا^{٢}ه$ ، $س = جتاه$

حيث $ه \in [٠, \frac{\pi}{٢}]$ عند $\frac{ص}{س}$ | $س = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

الحل: نجد $ه = \frac{١}{\sqrt{٢}} = جتاه \Rightarrow ه = \frac{\pi}{٤}$

$\frac{ص}{ه} = ٢\,جا\,ه\,جتاه$

$\frac{س}{ه} = -جا\,ه$

$\therefore \frac{ص}{س} = \frac{ص}{ه} \times \frac{ه}{س}$

$= ٢\,جا\,ه\,جتاه \times \frac{١}{-جا\,ه}$

$= -٢\,جتاه$

$= -٢\,جتا\frac{\pi}{٤} = -\sqrt{٢}$

١٠. جد $\int \frac{(٧س^{٤}جا^{٣}س + ٣س^{٤}جتا^{٣}س)}{(جا^{٣}س + جتا^{٣}س)^{٢}}$

الحل:

١١. $٥س = جا٣ه$

الحل: $٥ = ٣\,ص\,جتا٣ه$

$ص = \frac{٥}{٣\,جتا٣ه}$ عند $ه = \frac{\pi}{٣}$

$\frac{ص}{س} = \frac{٥}{٣} \times ق\,ا٢ه$

١٢. $س = جا٢ص$ جد $\frac{ص}{س}$ | $ص = \frac{\pi}{١٢}$

الحل: $١ = ٢\,ص\,جا٢ص\,ظا٢ص$

نفرض ص

$١ = ٢\,ص\,جا\frac{\pi}{٦}\,ظا\frac{\pi}{٦}$

$١ = ٢\,ص \times \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

$١ = \frac{٢}{\sqrt{٣}}\,ص \Leftarrow ص = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

١٣. أ. $ق(س، ص) = ص^{٢}$ جد $\frac{ص}{س}$ عند $(١، \frac{\pi}{٤})$

ب. $ه(س) = س\,جا\,س$ ، $س \in [٠, ٢\pi]$

أجب طالبة إستفتاء

رقم الصفحة (٢٦)

عند $س = \pi$

١٤. $ق(س) = ظا س$ ، $س \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

جد أعداد المتقطع لدوك.

الحل: $ق'(س) = ظا س$ ∴

$$= \frac{1}{جتا س} \times \frac{جا س}{جتا س}$$

$$= جا س \cdot قا^2 س$$

$س = \{0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\}$

لكن $-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ تكمل (أطراف)

∴ $س = \{0, \pi, -\pi\}$

١٥. اذا كان

$ص = أ جا س + ب جتا س$

حيث $أ$ ، $ب$ ثوابت ، اثبت أن

$(ص')^2 + ص^2 = أ^2 + ب^2$

١٦. $ص = ق(هـ) = \frac{ظا \pi هـ}{10}$ ،

$هـ = ه(س) = 5س$ ، جد

$(ق \circ ه)'(1)$.

الحل: $ه(1) = 5$ ، $ق'(هـ) = \frac{\pi}{10} قا^2 \frac{\pi هـ}{10}$

$(ق \circ ه)'(1) = ق'(ه(1)) \times ه'(1)$

$= ق'(5) \times 5$

$= 5 \times \frac{\pi}{10} قا^2 \frac{5\pi}{10} \times 5$

$= 5 \times 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$

١٧. $ق(س) = جا س - \frac{1}{2} س$

$س \in [0, 2\pi]$ جد $س$ حيث

$ق'(س) = 0$ ∴

الحل: $ق'(س) = جتا س - \frac{1}{2} = 0$

$جتا س = \frac{1}{2}$

$س = 60° \quad 300°$

$س = \{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

١٨.

أ. $ق(س) = قا س + ظا س$

اثبت أن $ق'(س) = \frac{1}{جتا س - 1}$

ب. $ص = \frac{ظا س}{1 + قا س}$ اثبت أن

$ص' = \frac{قا س}{1 + قا س}$

* المشتقات العليا *

المشتقة الثانية = $\text{قـ}(س) = \frac{د^2 ص}{د س^2}$

المشتقة الثالثة = $\text{قـ}(س) = \frac{د^3 ص}{د س^3}$

المشتقة الرابعة = $\text{قـ}^{(4)}(س) = \frac{د^4 ص}{د س^4}$

حيث :

درجة المشتقة = درجة الاقتران

فالجواب = معامل أكبر حدة × مضروب أس الحد

$= ن \times ن - 1 \times ن - 2 \times \ldots \times 1$

المشتقة النونية = $\text{قـ}^{(ن)}(س)$

أمثلة

1. $\text{قـ}(س) = 3س^4 - 5س^2 + 11$ جد $\text{قـ}(1)$

الحل : $\text{قـ}(س) = 12 س^3 - 10 س$

$\text{قـ}(س) = 36 س^2 - 10$

$\text{قـ}(1) = 36 - 10 = 26$

2. $ص = 2 س^4$ ، جد $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ ؟

الحل : $\frac{د ص}{د س} = -4 س^{-5}$

$\frac{د^2 ص}{د س^2} = 20 س^{-6}$

$\frac{د^3 ص}{د س^3} = -120 س^{-7} = \frac{-120}{س^7}$

3. $ص = \frac{س^2 + 1}{س}$ جد $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ ؟

الحل : نبسط $ص = س + س^{-1}$

$\frac{د ص}{د س} = 1 - 1 س^{-2}$

$\frac{د^2 ص}{د س^2} = 0 + 2 س^{-3} = \frac{2}{س^3}$

4. $\text{قـ}(1) = 3$ ، $\text{قـ}(1) = -3$

$\text{قـ}(1) = 4$ ، جد $\left(\frac{\text{قـ}}{\text{قـ}}\right)'(1)$ ؟

الحل : $\frac{\text{قـ} \times \text{قـ} - \text{قـ} \times \text{قـ}}{(\text{قـ})^2}$ بتعويض

$= \frac{4 \times 3 - (-3) \times 2}{(2)^2} = \frac{12 + 6}{4} = \frac{18}{4}$

5. $\text{قـ}(س) = س^3$ ، $\text{ل}(1) = -1$

$\text{ل}'(1) = 2$ جد $(\text{قـ} \times \text{ل})'(1)$ ؟!

الحل : $\text{قـ} = 3س^2$ ، $\text{قـ} = 6س$

$\text{قـ} \times \text{ل} + \text{ل} \times \text{قـ}$ بتعويض

$\text{قـ}(1) \times \text{ل}(1) + \text{ل}(1) \times \text{قـ}(1)$

$3 \times 2 + (-1) \times 6 =$ صفر

6. $\text{قـ}(س) = س^ن$ كانت $\text{قـ}^{(3)}(س) = 24 س^{ن-3}$

جد قيمة ن ؟!

الحل : $\text{قـ} = ن س^{ن-1}$

$\text{قـ} = ن(ن-1) س^{ن-2}$

$\text{قـ} = ن(ن-1)(ن-2) س^{ن-3}$

$ن(ن-1)(ن-2) = 24$

$ن(ن-1)(ن-2) = 2 \times 3 \times 4$

$\therefore ن = 4$

7. (2016 عمان) $\text{قـ}(س) = \frac{1}{4} س^ن$ كانت $\text{قـ}^{(4)}(س) = (1+م) س^3$ جد قيمة م

الجواب $م = 2.9$

8. $\text{قـ}(س) = \frac{1}{س^ن}$ وكانت $\text{قـ}^{(3)}(س) = -210 س^{-ن-3}$

جد ن ؟

الجواب $ن = 5$

٨. $ق(س) = س^2 + 1$ ،

$هـ(س) = س^3$

جد $(هـ \circ ق)''(1)$

الحل: نجد $(هـ \circ ق)'(س)$

ثم $(هـ \circ ق)''(س)$

ثم نعوض $س = 1$

لاحظ $ق(س) = 2س$ ، $ق''(س) = 2$

$هـ'(س) = 3س^2$ ، $هـ''(س) = 6س$

$(هـ \circ ق)'(س) = هـ'(ق(س)) \times ق'(س)$ (الدور الداخلي)

$(هـ \circ ق)''(س) = هـ''(ق(س)) \times (ق'(س))^2 + هـ'(ق(س)) \times ق''(س)$

نعوض

$(هـ \circ ق)''(1) = هـ''(ق(1)) \times (ق'(1))^2 + هـ'(ق(1)) \times ق''(1)$

$= هـ''(2) \times 2^2 + هـ'(2) \times 2$

$= 12 \times 4 + 12 \times 2$

$= 48 + 24 = 72$

٩. $س^2 - س = 1 + ص^2$ عند النقطة $(1، 2)$

جد $\frac{د^2 ص}{د س^2}$

الحل: $2س - 1 = 2ص \, ص'$

$ص' = \frac{2س - 1}{2ص}$ نعوض $= \frac{3}{2}$

$ص'' = \frac{(2ص)(2) - (2س - 1)(2ص')}{(2ص)^2}$ نعوض

$= \frac{4 - 2 \times 2 \times \frac{3}{2}}{4} = \frac{-2}{4}$

١٠. $هـ(س) = جتا س^3$ ، جد $ص''$

الحل: $ص' = -3س^2 \times جا س^3$

$= -3س^2 جا س^3$

$ص'' = -6س \times جا س^3 - 3س^2 \times 3س^2 جتا س^3$

$= -6س جا س^3 - 9س^4 جتا س^3$

١١. $ق(س) = (|س| - 1)^3$ حيث

$ق(0)$ ، $ق'(0)$ ، $ق''(0)$ ، $ق^{(4)}(0)$

الحل: نعيد تعريف $س = 0$ بـ $\pm$

$ق(س) = \begin{cases} س^3 - 3س^2 & ، س \geq 0 \\ -س^3 - 3س^2 & ، س < 0 \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} 3س^2 - 6س & ، س > 0 \\ -3س^2 - 6س & ، س < 0 \end{cases}$

$ق'(0) = ق'^+(0) = ق'^-(0) = 0$

$ق''(س) = \begin{cases} 6س - 6 & ، س > 0 \\ -6س - 6 & ، س < 0 \end{cases}$

$ق''(0) = ق''^+(0) = -6$

$ق''(0) = ق''^-(0) = -6$

$ق'''(س) = \begin{cases} 6 & ، س > 0 \\ -6 & ، س < 0 \\ \text{غير معرفة} & ، س = 0 \end{cases}$

$ق'''(0)$ غير موجودة

١٢. $\int_{-1}^{1} |س| (س^2 + س) \, د س$

حيث $هـ(س) = |س| (س^2 + س)$

$= \int_{-1}^{1} هـ(س) \, د س$

جـ. ل ، ق ، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق على ح

$(ل \circ ق \circ هـ)'(س) = ل'(ق(هـ(س))) \times ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

رقم الصفحة (٣٩)

* أسئلة Top & Top ...

١ . $ص = ن^{٢} - ٣ن$ ، $س = ن^{٢} - ن$

جد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$!!!!!!!

الحل : $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

لاحظ $\frac{دص}{دن} = ٢ن - ٣$

$\frac{دس}{دن} = ٢ن - ١$

$\therefore \frac{دص}{دس} = (٢ن - ٣) \times \left(\frac{١}{٢ن - ١}\right)$

$= \frac{٢ن - ٣}{٢ن - ١}$

$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = \frac{(٢ن - ١)(٢) - (٢ن - ٣)(٢)}{(٢ن - ١)^{٢}} \times \frac{دن}{دس}$

$= \frac{(٢ن - ١)(٢) - (٢ن - ٣)(٢)}{(٢ن - ١)^{٢}} \times \left(\frac{١}{٢ن - ١}\right)$

$= \frac{٤ن - ٢ - ٤ن + ٦}{(٢ن - ١)^{٣}}$

$= \frac{٤}{(٢ن - ١)^{٣}}$

٢ . $ص = جا ن$ ، $س = جتا ن$

جد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ عندما $ن = \frac{\pi}{٣}$

الحل : $\frac{دص}{دن} = جتا ن$ ، $\frac{دس}{دن} = -جا ن$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = جتا ن \times \frac{١}{-جا ن}$

$\frac{دص}{دس} = -ظتا ن$

$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = \ominus \times \frac{دن}{دس} \times -قتا^{٢} ن$

$= \ominus \times \frac{١}{-جا ن} \times -قتا^{٢} ن$

نعوض

$= \frac{-١}{(جا ن)^{٣}} = قتا^{٣} ن = قتا^{٣}\left(\frac{\pi}{٣}\right) = ٨$

٣ . اكتب $\frac{دص}{دس} = جا ن$ ، $\frac{دس}{دن} = ٣$

جد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ | $ن = \frac{\pi}{٣}$

الحل : $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = \frac{(٣)(جتا ن)(\frac{دن}{دس}) - (جا ن)(٠)(\frac{دن}{دس})}{(٣)^{٢}} \times \frac{دن}{دس}$

$= \frac{١}{٣} \times جتا ن \times \frac{١}{٣}$

$= \frac{١}{٩} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{١٨}$

٤ . تمرين . م . $\frac{دس}{دن} = \frac{١}{ن - ٣}$ ،

$ص = -ن + ن^{٣}$ ،

جد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ عندما $ن = ١$

٤٠ : ٤

ب . جد

$\frac{د}{دس}\left(س^{٢} \times \frac{د}{دس}\left(\frac{١}{س}\right)\right)$ عندما $س = ٠$

٤٠ : صفر

جـ . $ص = ن^{٣} + ٢ن$ ، $\frac{دس}{دن} = ٤ن$ ،

جد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ عندما $ن = ١$

١ : ١٦

معدل التغير بالنسبة إلى متغير

هل تعلم أن

$\frac{دص}{دس}$: معناها معدل تغير ص بالنسبة إلى س

$\frac{دم}{دنق}$: معناها معدل تغير م بالنسبة إلى نق

أمثلة

١ . مربع تتزايد مساحته بانتظام ، جد معدل تغير المساحة بالنسبة لطول الضلع عندما طول الضلع ٨ سم .

الحل : $م = س^٢$

$\frac{دم}{دس} = ٢س$

$= ٢ \times ٨ = ١٦$

٢ . مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته ، يتمدد بانتظام ، أجب معدل تغير حجمه بالنسبة لارتفاعه عندما نصف قطره ٤ سم ؟

الحل : $ح = \frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع$

لكن $ع = ٢ س$

نتخلص من نق بدلالة س ؟

$س = \frac{ع}{٢}$

$ح = \frac{١}{٣} \pi \times \frac{ع}{٢} \times \frac{ع}{٢} \times ع$

$ح = \frac{١}{١٢} \pi ع^٣$

$\frac{دح}{دع} = \frac{١}{٤} \pi ع^٢$ لكن $ع = ٢س$

$ع = ٢ \times ٤$

$ع = ٨$

$\frac{دح}{دع} = \frac{١}{٤} \pi \times ٦٤ = \pi ١٦$

٣ . جد معدل تغير حجم كرة بالنسبة لمساحتها (مساحة السطح) عندما قطرها ١٢ سم .

الحل : الكرة حجم $= \frac{٤}{٣} \pi نق^٣$

مساحة السطح $= ٤ \pi نق^٢$

$ع = \frac{٤}{٣} \pi نق^٣ \leftarrow \frac{دع}{دنق} = ٤ \pi نق^٢$

$م = ٤ \pi نق^٢ \leftarrow \frac{دم}{دنق} = ٨ \pi نق$

$\frac{دع}{دم} = \frac{دع}{دنق} \times \frac{دنق}{دم}$

$= ٤ \pi نق \times \frac{١}{٨ \pi نق}$ بفرض نق = ٦

$= \frac{١}{٦ \times ٨ \pi} \times ٣٦ \times ٤ \pi = ٣$

٤ . انبوب اسطواني الشكل يزداد ارتفاعه عن طول نصف قطر قاعدته عبتاً ، وهي تتغير ، جد معدل تغير مساحة الجانبية بالنسبة إلى طول نصف قطر قاعدته عندما طول نصف قطر قاعدته ٦ سم .

٤٠ : ٢٢٨

٥ . أثبت أن معدل تغير حجم الكرة بالنسبة لطول نصف قطرها يساوي مساحة سطحها .

أسئلة الإثباتات والمعادلات

(١) $ص = ظا^3 س + \frac{1}{3} ظا^3 س$

اثبت ان $\frac{د ص}{د س} = قا^4 س$

الحل: $ص' = قا^2 س + \frac{1}{3} \times 3 ظا^2 س \times قا^2 س$

$= قا^2 س (1 + ظا^2 س)$

$= قا^2 س \times قا^2 س$

$= قا^4 س$

(٢) $ص = ها س - \frac{1}{3} ها^3 س$

اثبت ان $\frac{د ص}{د س} = حتا^3 س$

الحل: $\frac{د ص}{د س} = حتا س - \frac{1}{3} \times 3 ها^2 س \times حتا س$

$= حتا س - ها^2 س \times حتا س$

$= حتا س (1 - ها^2 س)$

$= حتا س \times حتا^2 س = حتا^3 س$

(٣) $ص = (قتا س + ظتا س)^ن$

اثبت ان $ص' = -ن ص قتا س$

الحل:

$ص' = ن (قتا س + ظتا س)^{ن-1} \times (-قتا س ظتا س + قتا^2 س)$

$= ن (قتا س + ظتا س)^{ن-1} \times -قتا س (ظتا س + قتا س)$

$= -ن \times قتا س \times (قتا س + ظتا س)^ن$

$= -ن ص قتا س$

(٤) $س^2 + ص^2 = 25$

اثبت ان $ص'' + \frac{25}{ص^3} = 0$

$2س + 2ص ص' = 0$

$ص' = -\frac{س}{ص}$

$ص'' = -\frac{ص \times 1 - س \times ص'}{ص^2}$

$= -\frac{ص + س \times \frac{س}{ص}}{ص^2}$ توحيد مقامات

$= -\frac{ص^2 - س^2}{ص^3} \times \frac{1}{ص^2} = -\frac{ص^2 - (25 - ص^2)}{ص^3}$

$= -\frac{25}{ص^3}$

بالجمع بالطرفين

$ص'' + \frac{25}{ص^3} = 0$

(٥) $س = ظا 2ص$

اثبت ان $ص'' = -ص^2 ها 4ص$.

الحل: $1 = 2ص' \times قتا^2 2ص$

$ص' = \frac{1}{2 قتا^2 2ص} = \frac{1}{2} ها^2 2ص$

$ص'' = \frac{1}{2} \times 2 (ها 2ص) \times 2ص' ها 2ص$

$= 2ص' ها 2ص \times ص' ها 2ص$

$ص'' = -ص' ها 4ص$

(٦) $ص = ها^3 س$ أثبت أن

$ص'' + 16 ص = 12 جا^2 س$.

الحل: نجد $ص'$

$ص' = 3 (ها س)^2 حتا س$

$ص'' = 3 (ها س)^2 \times -ها س + حتا س \times 6 ها س حتا س$

$12 (ها س)^2 حتا^2 س$

$ص'' = -3 ها^3 س + 12 ها^2 س حتا^2 س$

المجلة بطلوبة

$٤ - ٤ هـا^{٤}س + ١٢ هـا^{٣}س هتا^{٢}س + ١٦ هـا^{٢}س$

$١٢ - ٤ هـا^{٤}س + ١٢ هـا^{٢}س هتا^{٢}س$

$١٢ هـا^{٢}س (هـا^{٢}س + هتا^{٢}س) = ١٢ هـا^{٢}س$

(٧) $(هـ + ١)^{٣} = (س - ٣)^{٢}$

٢٠١٢ أثبت أن $(\frac{٣}{٢} هـ)^{٢} = \frac{١}{هـ + ١}$

الحل: نشتق

$٣ (هـ + ١)^{٢} هـ = ٢ (س - ٣)$

$هـ = \frac{٢ (س - ٣)}{٣ (هـ + ١)^{٢}}$

$\frac{٣}{٢} هـ = \frac{(س - ٣)}{(هـ + ١)^{٢}}$ (نربع)

$(\frac{٣}{٢} هـ)^{٢} = \frac{(س - ٣)^{٢}}{(هـ + ١)^{٤}}$

$(\frac{٣}{٢} هـ)^{٢} = \frac{(هـ + ١)^{٣}}{٤ (هـ + ١)} = \frac{١}{هـ + ١}$

(٨) $هـ = ٣ جا ن$ ، $س = ٣ جتا ن$

أثبت أن $\frac{د^{٢} هـ}{د س^{٢}} = - \frac{قتا^{٣} ن}{٣}$

الحل: $\frac{د هـ}{د ن} = ٣ جتا ن$ ، $\frac{د س}{د ن} = - ٣ جا ن$

$\frac{د هـ}{د س} = \frac{د هـ}{د ن} \times \frac{د ن}{د س}$

$= ٣ جتا ن \times \frac{١}{- ٣ جا ن} = - ظتا ن$

$\frac{د^{٢} هـ}{د س^{٢}} = \ominus \frac{د ن}{د س} \times - قتا^{٢} ن$

$= \frac{١}{- ٣ جا ن} \times قتا^{٢} ن$

$= \frac{- قتا^{٣} ن}{٣}$

(٩) $هـ جا هـ = س$ ، $هـ \in (٠ ، \frac{\pi}{٢})$

أثبت أن $\frac{د هـ}{د س} = \frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

الحل: $هـ \times جا هـ = ١$

$هـ = \frac{١}{جا هـ}$ لكن $جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١$

$جا هـ = \sqrt{١ - جتا^{٢} هـ}$

$= \frac{١}{\sqrt{١ - جتا^{٢} هـ}} = \frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

(١٠) $هـ - س = جتا هـ$ أثبت

٢٠٠٩ أن $(هـ)^{٢} = - هـ (قا هـ + ظا هـ)$

الحل: نشتق

$هـ - ١ = هـ \times - جا هـ$

$هـ + هـ جا هـ = ١$

نشتق $هـ + هـ جا هـ = ١$

$هـ + هـ \times هـ جتا هـ + جا هـ \times هـ = ٠$

$هـ + هـ^{٢} جا هـ = - (هـ)^{٢} جتا هـ$

$\frac{هـ (١ + جا هـ)}{- جتا هـ} = (هـ)^{٢}$

$هـ (- قا هـ - ظا هـ) = (هـ)^{٢}$

$- هـ (قا هـ + ظا هـ) = (هـ)^{٢}$

(١١) $هـ - س هـ = جا س$

اثبت ان $هـ = \frac{٢ هـ}{١ - س}$

الحل: $هـ - (س هـ + هـ) = جتا س$

$هـ - (س هـ + هـ + هـ) = - جا س$

$هـ - س هـ - ٢ هـ = - جا س$

$هـ - س هـ + جا س = ٢ هـ$

$هـ - س هـ + هـ - س هـ = ٢ هـ$

$هـ (١ - س) + هـ (١ - س) = ٢ هـ$

$(١ - س) (هـ + هـ) = ٢ هـ$

$هـ + هـ = \frac{٢ هـ}{١ - س}$

رقم الصفحة (٣٣)

(١٢) $س ص = جا س$ أثبت أن

$س ص'' + ٢ ص' + س ص = ٠$

الحل: $س ص' + ص = جتا س$

نشتق

$س ص'' + ص' + ص' = -جا س$

$س ص'' + ٢ ص' + جا س = ٠$

لكن $جا س = س ص$

$س ص'' + ٢ ص' + س ص = ٠$

(١٣) $ص^٢ = ٤ + ٣ جا س$ جتا س

٢٠١٧

أثبت أن

$ص ص'' + (ص')^٢ + ٢ ص^٢ = ٨$

الحل: $ص^٢ = ٤ + جا ٢س$

$٢ ص ص' = ٠ + ٢ جتا ٢س$

$ص ص' = جتا ٢س$

نشتق

$ص ص'' + ص' ص' = -٢ جا ٢س$

$ص ص'' + (ص')^٢ = -٢ جا ٢س$

لكن $جا ٢س = ص^٢ - ٤$

$ص ص'' + (ص')^٢ = -(ص^٢ - ٤)$

$ص ص'' + (ص')^٢ = -ص^٢ + ٨$

$ص ص'' + (ص')^٢ + ٢ ص^٢ = ٨$

(١٤) $ص = \frac{س}{س + ١}$ أثبت أن

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{-٢ ص^٣}{س^٣}$

الحل: $ص' = \frac{(س+١)(١) - (س)(١)}{(س+١)^٢}$

$= \frac{١}{(س+١)^٢}$

$ص'' = \frac{-٢ \times ١ (س+١)}{(س+١)^٤} = \frac{-٢}{(س+١)^٣}$

لكن $س = \frac{ص}{ص - ١}$ لأن $(س+١) = \frac{ص}{ص-١}$

$\therefore (س+١)^٣ = \frac{ص^٣}{(ص-١)^٣}$

$\therefore ص'' = \frac{-٢}{\frac{ص^٣}{(ص-١)^٣}} = -٢ \frac{(ص-١)^٣}{ص^٣}$

(١٥) $ص = \frac{جا س}{س}$ أثبت أن

$س ص'' + ٢ ص' + س ص = ٠$

الحل: نتخلص من البسط أولاً بضرب الطرفين في $س$

$س ص = جا س$ نفرض $ع$

نشتق $س ص' + ص = جتا س$

نشتق $س ص'' + ص' + ص' = -جا س$

$س ص'' + ٢ ص' + جا س = ٠$

(١٦) $ص = \sqrt{٤ + ٣ جا س}$ أثبت أن

$٢ ص ص'' + ص^٢ + ٢ (ص')^٢ = ٤$

الحل: نربع

$ص^٢ = ٤ + ٣ جا س$ نشتق

$٢ ص ص' = ٣ جتا س$ نشتق

$٢ ص ص'' + ص' \times ٢ ص' = -٣ جا س$

$٢ ص ص'' + ٢ (ص')^٢ = -٣ جا س$

لكن من الأصل $-٣ جا س = ٤ - ص^٢$

$٢ ص ص'' + ٢ (ص')^٢ = ٤ - ص^٢$

$٢ ص ص'' + ٢ (ص')^٢ + ص^٢ = ٤$

(١٧) $ص = (١ + س)^{ن}$ أثبت أن

$\frac{د ص}{د س} = \frac{ف}{م} \times \frac{ص}{١ + س}$

الحل: نأخذ الجذر لكلا الطرفين لتسهيل السؤال

$ص = (١ + س)^{\frac{م}{ن}}$

$ص' = \frac{ف}{م} (١ + س)^{\frac{ف}{م} - ١}$

نضرب × $\frac{1+س}{1+س}$

$هـ' = \frac{ن}{م} \times (1+س)^{\frac{ن}{م}-1} \times \frac{(1+س)}{1+س}$

$= \frac{ن}{م} \times \frac{(1+س)^{\frac{ن}{م}}}{1+س} = \frac{ص}{1+س} \times \frac{ن}{م}$

(١٨) الكتاب ص ١٤٠ — المطلوب إثبات: $هـا ص = ظا س$

$ظا ص = \frac{هـ'}{٢ قا^٢ س + (هـ)^٢}$

الحل: $هـ = قا^٢ س$ ثم نشتق

$هـ \times هـ' \times هـا ص + هـا ص \times (هـ')^٢ = ٢ قا س قا س ظا س$

$- (هـ)^٢ هـا ص + (هـ') هـا ص = ٢ قا^٢ س . ظا س$

$هـ' هـا ص = ٢ قا^٢ س ظا س + (هـ)^٢ هـا ص$

$هـ' = \frac{٢ قا^٢ س ظا س + (هـ)^٢ هـا ص}{هـا ص}$

لكن $ظا س = هـا ص$ نستبدلها

$هـ' = \frac{٢ قا^٢ س هـا ص + (هـ)^٢ هـا ص}{هـا ص}$

$هـ' = هـا ص (٢ قا^٢ س + (هـ)^٢)$

$\frac{هـ'}{٢ قا^٢ س + (هـ)^٢} = ظا ص$

(١٩) ص $= ظا^٢ س$ الكتاب ١٥٠

$ص' = ٢ (ص + ١)(٣ ص + ١)$

الحل: $ص' = ٢ (ظا س) \times قا^٢ س$

$ص' = ٢ ظا س \times ٢ قا س قا س ظا س + قا^٢ س \times ٢ قا س$

$= ٤ قا^٢ س ظا^٢ س + ٢ قا^٢ س$

$ص'' = ٢ قا^٢ س ((٢ ظا^٢ س) + قا^٢ س)$

$= ٢ (١ + ظا^٢ س)(٢ ظا^٢ س + ظا^٢ س + ١)$

$= ٢ (١ + ص)(٣ ص + ١)$

(٢٠) الكتاب ص ١٤٠ — المطلوب إثبات: $هـا^٣ س = (١ - ص^٢)^٢$

الحل: نشتق

$٣ (هـا^٢ س) هـتا ٣ س \times ٢ = ٢ (١ - ص^٢)^{٠} \times -٢ ص ص'$

$هـا ٢ س هـتا ٣ س = (١ - ص^٢)^{٠} \times -٢ ص ص'$

نقسم على $هـا^٣ س$

$ظتا ٣ س = \frac{(١ - ص^٢)^{٠} \times -٢ ص ص'}{(١ - ص^٢)^٢}$

$ظتا ٣ س = \frac{-٣ ص ص'}{١ - ص^٢}$

$(١ - ص^٢) ظتا ٣ س = -٢ ص ص' \times -١$

$٢ ص ص' = (ص^٢ - ١) ظتا ٣ س$

(٢١) ص $= ٣ \sqrt{(٤ + ١)^٣} - \sqrt{(٤ - ١)^٣}$ بدلالة ع

ع $= ٢ س$ ، $س > \frac{١}{٢}$

الكتاب ان $\left| \frac{د ص}{د س} \right| = \sqrt{٤ س + ٣} \sqrt{٤ س^٢ - ١}$

الحل: $٣ ص = (٤ + ١)^{\frac{٣}{٢}} - (٤ - ١)^{\frac{٣}{٢}}$

$٣ ص' = (٢ س ٢)(٤ + ١)^{\frac{١}{٢}} - (٢ س - ١)^{\frac{١}{٢}}$ (٢)

$٢ ص' = ٣ (٢ س + ١)^{\frac{١}{٢}} - ٣ (٢ س - ١)^{\frac{١}{٢}}$

$\div ٣$

$ص' = (٢ س + ١)^{\frac{١}{٢}} - (٢ س - ١)^{\frac{١}{٢}}$

نكرر السؤال لـ $\sqrt{(ص')^٢} = |ص'|$ رقم الصفحة (١٣٥)

قضايا خاصة و تعريف المشتقة *

١. ق(س) = س^٤ + ٦ أ س^٢ ، جد أ
حيث نهـا (هـ ← ٠) [ق(١ + هـ) − ق(١)] / هـ = ١٦

الحل: معنى النهاية ق′(١) = ١٦

نجد ق′(س) = ٤ س^٣ + ١٢ أ س

ق′(١) = ٤ + ١٢ أ = ١٦

١٢ أ = ١٢ ⟸ أ = ١

٢. ق(س) = س^٦ + جـ س

جد جـ للاقتران نهـا (هـ ← ٠) [ق(−٢ + هـ) − ق(−٢)] / هـ = ٢٠

الحل: ق′(−٢) = ٢٠ نعوض مباشرة

(−٢)^٦ + جـ × −٢ = ٢٠

٦٤ − ٢ جـ = ٢٠

−٢ جـ = −٤٤ ⟸ جـ = ٢٢

٣. جد نهـا (هـ ← ٠) [جا(س + هـ) − جا س] / هـ

الحل: يمكن حل النهاية ويكون هو نفس قانون تعريف المشتقة

ق′(س) = نهـا (هـ ← ٠) [ق(س + هـ) − ق(س)] / هـ

∴ المطلوب (جا س)′

= جتا س

٤. جد نهـا (هـ ← ٠) [قا ٢(س + هـ) − قا ٢س] / هـ

الحل: معنى النهاية (قا ٢س)′

= ٢ قا ٢س ظا ٢س

٥. جد نهـا (هـ ← ٠) [جا^٢(س + هـ) − جا^٢ س] / هـ

الحل: (جا^٢ س)′

= ٢ جا س جتا س = جا ٢س

٦. جد نهـا (هـ ← ٠) [جتا ٥(س + ٣هـ) − جتا ٥س] / ٧هـ

الحل: ٣/٧ × (جتا ٥س)′

= ٣/٧ × ٥ × − جا ٥س

= −١٥/٧ جا ٥س

٧. جد نهـا (هـ ← ٠) [ظا(٢س + ٣هـ) − ظا ٢س] / ٤هـ

الحل: نهـا (هـ ← ٠) [ظا ٢(س + ٣هـ/٢) − ظا ٢س] / ٤هـ

= (٣/٢)/٤ × (ظا ٢س)′

= ٣/٨ × ٢ قا^٢ ٢س = ٣/٤ قا^٢ ٢س

٨. جد نهـا (س ← π/٢) (جا س − ١) / (س − π/٢)

الحل: نهـا (س ← π/٢) (جا س − جا π/٢) / (س − π/٢)

معناها (جا س)′ (π/٢)

= جتا س نعوض = صفر

٩. جد $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{2} - ظتا^2 س}{س - \frac{\pi}{4}}$

الحل: $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{ظتا^2 س - ظتا^2 \frac{\pi}{4}}{س - \frac{\pi}{4}}$

بالمعنى: $(ظتا^2 س)'_{س=\frac{\pi}{4}}$

$= 2 ظتا س \times -قا^2 س$ نعوض

$= 2 ظتا \frac{\pi}{4} \times -قا^2 \frac{\pi}{4}$

$= 2 \times 1 \times -2 = -4$

١٠. جد $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{ظتا^2 س - 1}{2 س - \pi}$

الحل: $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{ظتا^2 س - ظتا^2 \frac{\pi}{4}}{2(س - \frac{\pi}{4})}$

$= \frac{1}{2} \times (ظتا^2 س)'_{س=\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2} \times 2 ظتا س \times -قا^2 س$

نعوض $= صفر$

١١. جد $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{ظا س - 1}{س - \frac{\pi}{4}}$

الحل: $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{ظا س - ظا \frac{\pi}{4}}{س - \frac{\pi}{4}}$

بالمعنى $(ظا س)'_{س=\frac{\pi}{4}}$

$= قا^2 س$ نعوض

$= قا^2 \frac{\pi}{4} = 2$ ←

١٢. $د(٩) = ٥$ ، $د'(٩) = ١٢$

جد $\lim_{س \to ٩} \frac{د(س) - د(٩)}{س - ٩}$

الحل: $\lim_{س \to ٩} \frac{د(س^2 + ١) - د(٨١ + ١)}{س - ٩}$

بالمعنى $(د(س^2 + ١))'_{س=٩}$

$= ٢ س \times د'(س^2 + ١)$ نعوض

$= ٢ \times ٩ \times د'(٨٢) = ١٨ \times ١٢ = ٢١٦$

١٣. $د(س^3 + ١) = ٣ س^2 - ٢$ ، جد معادلة المماس لمنحنى د عند $س = ٢$

جد $\lim_{س \to ٩} \frac{د(س) - س د(٩)}{\sqrt{س} - ٣}$

الحل: نضرب ونقسم $٩ + د(٩)$

$\lim_{س \to ٩} \frac{د(س) - ٩ د(٩)}{\sqrt{س} - ٣} + \lim_{س \to ٩} \frac{٩ د(٩) - ٩ د(٩)}{\sqrt{س} - ٣}$

$\lim_{س \to ٩} \frac{د(س) - د(٩)}{\sqrt{س} - ٣} \times \frac{\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س} + ٣} + \lim_{س \to ٩} \frac{٩ د(٩)(\sqrt{س} - ٣)}{\sqrt{س} - ٣}$

$\lim_{س \to ٩} \frac{د(س) - د(٩)}{س - ٩} \times (\sqrt{س} + ٣) + ٩ د(٩)$

نظر: مرافقه للنهايه بيتلغي

$\lim_{س \to ٩} \frac{د(س) - د(٩)}{س - ٩} \times \lim_{س \to ٩} (\sqrt{س} + ٣) + ٩ د(٩)$

$د'(٩) \times ٦ - ٦ د(٩) + ٩ \times د'(٩)$

بما أن $س = ٩$ تحت الجذر $\Leftarrow ١ + ٢ر = ٩ \Leftarrow ر = ٤$

$د'(٩) = ٢ ر د'(١ + ٢ر) = ٩ د'(٩)$

$د(٩) = ٢ ر د(١ + ٢ر) = ١٢ د(٩)$

$د(٩) = ١$

$٩ \times د'(٩) \times ٦ - ٦ \times ١ + ٩ \times ١٢$

$٥٤ - ٦٠ = -٦$

١٤. اذا كان هـ (٤) = ٢ ،
هـ (٤) = ٨ ، جد
$\lim_{س \to ٦} \frac{هـ(هتا \frac{\pi}{س}) - ٢}{س - ٦}$

الحل : نهـا $\frac{هـ(هتا \frac{\pi}{س}) - هـ(٤)}{س - ٦}$
س ← ٦

المعنى $(هـ(هتا \frac{\pi}{س}))'(٦)$

$= \frac{\pi}{س^٢} \times هتا \frac{\pi}{س} \times هـ'(هتا \frac{\pi}{س})$
بتعويض

$= \frac{\pi -}{٣٦} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times هـ'(\frac{\pi}{٦})$

$= \frac{\pi -}{٣٦} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times هـ'(\frac{\pi}{٣})$

$= \frac{\pi \sqrt{٣} -}{٩}$

١٥. أ) جد نهـا $\frac{هـ(ظا س) - ٧}{س - \frac{\pi}{٤}}$
س ← $\frac{\pi}{٤}$

علماً أنه هـ (١) = ٧
هـ' (١) = ٣

ب) جدها $\frac{ل(هتا س) - ٩}{س - \pi}$
س ← π

حيث ل (١) = ٩
ل' (١) = ٥

تعريف بسيط : - (علمي)
⊗ يقال للاقتران هـ أنه زوجي
اذا كان هـ (-س) = هـ (س)
مثلاً هتا س زوجي لأنه
هتا (-س) = هتا س
ويقال فردي اذا كان
هـ (-س) = - هـ (س)
مثلاً ها س فردي لأنه
ها (-س) = - ها س .

مثال : اثبت انه اذا كان هـ اقتران فردي قابل للاشتقاق عندما هـ (س) زوجي
الحل : هـ (-س) = - هـ (س) حسب التعريف
باشتقاق
-١ × هـ' (-س) = - هـ' (س)
هـ' (-س) = هـ' (س)
هذا تعريف الزوجي

مثال : اثبت انه اذا كان هـ اقتران زوجي قابل للاشتقاق هـ (س) فردي .
الحل : هـ (-س) = هـ (س) تعريف الزوجي
باشتقاق
-١ × هـ' (-س) = هـ' (س)
هـ' (-س) = - هـ' (س)
هذا تعريف الفردي .

مثلاً ها س فردي مع هتا س زوجي
هتا س زوجي مع - ها س فردي

ثوابت :-

١. إذا كانت f حيث

$$f(س) = \begin{cases} أ س^{٢} + ب س + جـ & ، س \leq ١ \\ ٧ - س^{٢} & ، س > ١ \end{cases}$$

كان $f'(١)$ موجودة ، جد الثوابت $أ ، ب ، جـ$

الحل: بما أن المشتقة الثانية موجودة

إذاً المشتقة الأولى موجودة

و $f(س)$ متصل

$$f'(س) = \begin{cases} ٢أ س + ب & ، س \leq ١ \\ -٢ س & ، س > ١ \end{cases}$$

$$f'(س) = \begin{cases} ٢أ & ، س \leq ١ \\ -٢ & ، س > ١ \end{cases}$$

حسب المعلومات

$$f'_{+}(١) = f'_{-}(١)$$

$$٢أ = -٢ \Leftarrow \boxed{أ = -١}$$

أيضاً

$$f''_{+}(١) = f''_{-}(١)$$

$$٢أ + ب = -٢$$

$$٢ \times -١ + ب = -٢ \Leftarrow \boxed{ب = ٠}$$

أيضاً

f متصل عند $س = ١$

$$\lim_{س \to ١^{+}} = \lim_{س \to ١^{-}}$$

$$أ + ب + جـ = ٧ - س^{٢}$$

$$-١ + ٠ + جـ = ٧ - ١$$

$$-١ + جـ = ٦$$

$$\boxed{جـ = ٧}$$

٢. $f(س) = \begin{cases} أ س^{٣} + ٣ & ، س \leq ١ \\ س^{٢} - ب & ، س > ١ \end{cases}$

جد $أ ، ب$ التي تجعل f قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

الحل: $f(س) = \begin{cases} ٣أ س^{٢} & ، س \leq ١ \\ ٢ س & ، س > ١ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

$$\Leftarrow f'_{+}(١) = f'_{-}(١)$$

$$٢ = ٣أ س^{٢} = ٢ س$$

$$٢ = ٣أ \times ١ \Leftarrow ٢ = ٣أ \Leftarrow \boxed{أ = \frac{٢}{٣}}$$

$\therefore f(س)$ قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

$\Leftarrow f$ متصل عند $س = ١$

$$\lim_{س \to ١^{+}} f(س) = \lim_{س \to ١^{-}} f(س)$$

$$أ س^{٣} + ٣ = س^{٢} - ب$$

$$٣ + ١ \times أ = ١ - ب$$

$$٣ + \frac{٢}{٣} = ١ - ب \Leftarrow \boxed{ب = -\frac{٨}{٣}}$$

٣. $f(س) = \begin{cases} أ س^{٢} + ب & ، س \neq ١ \\ \frac{١}{٢} & ، س = ١ \end{cases}$

جد الثوابت $أ ، ب$ حيث $f(س)$ قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

الحل: بغير شرح الطلب ونأخذ الشرط الذي يلزم حسب الفقرة المقابلة له

$$س = ١ \Leftarrow = ب$$

$$هـ(س) = \begin{cases} أ س^{٢} + ب & ، س \geq ١ \\ \frac{١}{س} & ، س < ١ \end{cases}$$

$$هـ'(س) = \begin{cases} ٢أ س & ، س \geq ١ \\ -\frac{١}{س^{٢}} & ، س < ١ \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق عند س = ١

$$هـ'(١)^{+} = هـ'(١)^{-}$$

$$٢أ \times ١ = -\frac{١}{١^{٢}} \leftarrow \boxed{أ = -\frac{١}{٢}}$$

∴ هـ قابلة للاشتقاق

⇐ هـ متصل عند س = ١

$$\text{نهـا}_{س \to ١^{+}} هـ(س) = \text{نهـا}_{س \to ١^{-}} هـ(س)$$

$$أ + ب = \frac{١}{١}$$

$$-\frac{١}{٢} \times ١ + ب = ١$$

$$\boxed{ب = \frac{٣}{٢}}$$

٤. تمرين ٢٠١٦ م. هـ $هـ(س) = \begin{cases} أ س^{٣} + ٤ ب س - ٨ & ، س < ٢ \\ أ س^{٣} - ب س + ٢ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

جد أ ، ب حيث هـ'(١) موجودة

الجواب: أ = ١٠ ، ب = ٢

ب. $هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٥ & ، س < ٢ \\ أ(س+١)^{٢} + ب & ، -١ \leq س \leq ٢ \\ ٢س + جـ & ، س > -١ \end{cases}$

جد الثوابت أ ، ب ، جـ التي تجعل هـ قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ، س = -١

عند س = ١

الجواب: أ = ٤

ب = -٣٠

جـ = ٥

سؤال حلو !

اذا كان هـ(٢) = ٤ ، هـ'(٢) = -٣

جد

١. نهـا $\frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س^{٣} - ٨}$ س → ٢

الزاية تعطينا هـ'(٢) = -٣

٢. نهـا $\frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س^{٢} - ٤}$ س → ٢

$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{(س-٢)(س+٢)} = \frac{١}{٤} \times هـ'(٢) = \frac{١}{٤} \times -٣ = -\frac{٣}{٤}$

٣. نهـا $\frac{هـ(٢) - هـ(س)}{س^{٢} - ٤}$ س → ٢

$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{-(هـ(س) - هـ(٢))}{(س-٢)(س+٢)}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{١}{س+٢} \times \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢}$

$= \frac{١}{٤} \times هـ'(٢) = \frac{١}{٤} \times -٣ = -\frac{٣}{٤}$

٤. نهـا $\frac{هـ(س) - ٤}{٨ - س^{٣}}$ س → ٢

$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{-(س^{٣} - ٨)}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{-(س-٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٢} -\frac{١}{(س^{٢} + ٢س + ٤)} \times \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢}$

$= -\frac{١}{١٢} \times هـ'(٢) = -\frac{١}{١٢} \times -٣ = \frac{١}{٤}$

* براهين النظريات *

① إذا كان $\lim_{س \to م} ق(س)$ قابلاً للاشتقاق عند $س = م$

برهن أن $\lim_{س \to م} ق(س)$ متصل عند $س = م$

البرهان : نحافظ على نهاية $ق(س) - ق(م) = \frac{ق(س) - ق(م)}{س - م} \times (س - م)$

$ق(س) - ق(م)$

ندخل نهاية على الطرفين

$\lim_{س \to م} [ق(س) - ق(م)] = \lim_{س \to م} \frac{ق(س) - ق(م)}{س - م} \times (س - م)$

$= ق'(م) \times 0 = 0$

$\lim_{س \to م} ق(س) - \lim_{س \to م} ق(م) = 0$

$\lim_{س \to م} ق(س) = ق(م)$

$\therefore$ ق متصل عند $س = م$

② $ق(س) = س^{ن}$ ، $ن \in ط$ ، $ن > ١$ ⇒ $ق'(س) = ن س^{ن-١}$

البرهان : $ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^{ن} - س^{ن}}{ع - س}$

بالقسمة الطويلة

$= \lim_{ع \to س} ع^{ن-١} + ع^{ن-٢} س + ع^{ن-٣} س^{٢} + \ldots + س^{ن-١}$

$= س^{ن-١} + س^{ن-١} + \ldots + س^{ن-١} = ن س^{ن-١}$

③ $ق(س) = س^{ن}$ حيث $ن$ عدد صحيح سالب

اثبت أن $ق'(س) = ن س^{ن-١}$

البرهان : لاستخدام التقريين السابق نفرض $ن = -م$

$\therefore ق(س) = س^{-م} \leftarrow ق(س) = \frac{١}{س^{م}}$

$\leftarrow ق'(س) = \frac{-١ \times م س^{م-١}}{(س^{م})^{٢}} = -م \times س^{-م-١} \times س^{٢م}$

$= -م س^{-م-١+٢م}$ حيث $ن = -م$

$\therefore ق'(س) = ن س^{ن-١}$

④ $هـ(س) = س^{\frac{م}{ن}}$ ⇒ $هـ'(س) = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن} - ١}$

البرهان : نتخلص من الصورة الكسرية

$\therefore$ نرفع $ن$ لنشتق ضمنياً

$ن$ حول $\times$ حل $= م س^{م-١}$

حل $= \frac{م س^{م-١}}{ن \text{ حول}^{ن-١}} = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{(\text{حول})^{ن-١}}$

$= \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{س^{م-ن}} \times س$

$= \frac{م}{ن} \times س^{م-١-م+ن} \times س$

حل $= \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$ ...

⑤ $ق(س) = ظا س$ ⇒ $ق'(س) = قا^{٢} س$

البرهان : $ق(س) = \frac{جا س}{جتا س}$

$ق'(س) = \frac{جتا س \times جتا س - جا س \times -جا س}{(جتا س)^{٢}}$

$ق'(س) = \frac{جتا^{٢} س + جا^{٢} س}{جتا^{٢} س} = \frac{١}{جتا^{٢} س} = قا^{٢} س$

⑥ $ق(س) = قتا س$ ⇒ $ق'(س) = -قتا س ظتا س$

البرهان : $ق(س) = \frac{١}{جا س}$

$ق'(س) = \frac{-١ \times جتا س}{(جا س)^{٢}} = -\frac{جتا س}{جا س} \times \frac{١}{جا س}$

$ق'(س) = -ظتا س قتا س$

⑦ $ق(س) = جا س$ ⇒ $ق'(س) = جتا س$

البرهان : $ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{جا ع - جا س}{ع - س}$

$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{٢ جتا (\frac{ع+س}{٢}) جا (\frac{ع-س}{٢})}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} ٢ \times جتا (\frac{ع+س}{٢}) \times \frac{جا \frac{١}{٢}(ع-س)}{ع - س}$

$ق'(س) = ٢ \times جتا س \times \frac{١}{٢} = جتا س$

⑧ $ق(س) = جتا س$ ⇒ $ق'(س) = -جا س$ نفس ⑦ حل

⑨ $هـ(س) = ق(س) + ل(س)$

⇒ $هـ'(س) = ق'(س) + ل'(س)$

البرهان : $هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{[ق(ع) + ل(ع)] - [ق(س) + ل(س)]}{ع - س}$

$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} + \frac{ل(ع) - ل(س)}{ع - س}$

$هـ'(س) = ق'(س) + ل'(س)$

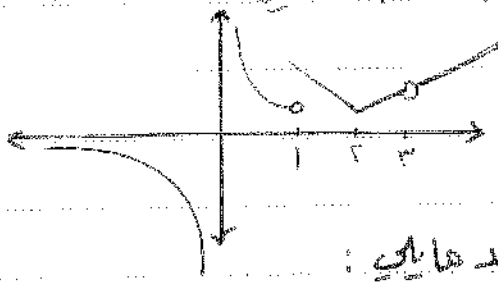
⑩ $ق(س) = ج \times ل(س)$ ⇒ $ق'(س) = ج \times ل'(س)$ نفس ⑨ حل

⑪ $ق(س) = م^{س}$ ⇒ $ق'(س) = م^{س} \ln م$

$ق'(س) = \ldots$ نفس ⑩ حل

تمارين متنوعة

① الشكل المجاور يمثل منحنى $هـ(س)$



جد ما يلي :

أ. نهاية $هـ(س)$ عندما $س \to ٣$ ، ثم أثبت أن $هـ$ غير متصلة عند $س = ٣$

ب. نقاط الانفصال (عدم الاتصال) للاقتران $هـ$ ، ثم صنفها

جـ. النقاط التي عندها $هـ$ غير قابلة للاشتقاق .

الاقتران ، الحل : أوجد مجموعة التعريف ، الأطراف

② $هـ(س) = أس^{-١} - ١١ + اس + ١١$ حيث

أ. المشتقة الأولى عند اليمين للنقطة $(-١ ، ٢)$

ب. المشتقة الأولى عند اليسار للنقطة $(-١ ، ٢)$

جـ. بين إذا كان $هـ$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $(-١ ، ٣)$

الحل : يجب إعادة التعريف

$$\text{عند } س = ١ \quad \frac{(س-١)(س-١١)}{١} \quad \text{عند } س = -١ \quad \frac{(س+١)(س-١١)}{١}$$

$$\therefore هـ(س) = \frac{-٣}{١} \times \frac{س^{٣}-١}{س-١} = \frac{-٣س^{٢}-٣}{١}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} -٣ & ، س \leq -١ \\ -٣س^{٢}-٣ & ، -١ < س \leq ١ \\ -٣ & ، س > ١ \end{cases}$$

في حساب التفاضل

$$هـ(س) = \begin{cases} \text{صفر} & ، س < -١ \\ -٣ & ، س = -١ \\ -٣س^{٢}-٣ & ، -١ < س < ١ \\ \text{صفر} & ، س = ١ \\ -٣ & ، س > ١ \end{cases}$$

أ. $هـ'_{+}(-١) = -٦$

ب. $هـ'_{-}(-١) = \text{صفر}$

جـ. $هـ'_{+}(-١) \neq هـ'_{-}(-١)$

$\therefore هـ'(-١)$ غير موجودة .

③ $(م \circ ل)(س) = س$ ،

$م(س) = \frac{١}{س}$ ، جد $ل'(س)$

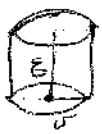
الحل : $(م \circ ل)(س) = س$ اشتق الطرفين

$م'(ل(س)) \times ل'(س) = ١$

$\frac{١}{ل(س)} \times ل'(س) = ١$

$ل'(س) = ل(س)$

④ اسطوانة دائرية قائمة مجهولة الأبعاد ، حيث معدل تغير ارتفاعها بالنسبة لنصف قطر قاعدتها يساوي -٢



الحل : $ح = \pi ن^{٢} ع$

المطلوب $\frac{د ح}{د ن}$ ؟

نشتق : $\frac{د ح}{د ن} = \pi ن^{٢} \times \frac{د ع}{د ن} + ع \times ٢ \pi ن$

نعوض الاشتقاق بالنسبة لـ ن

$\therefore \frac{د ح}{د ن} = \pi ن^{٢} \times -٢ + ع \times ٢ \pi ن$

$\frac{د ح}{د ن} = -٢ \pi ن^{٢} + ٢ \pi ن ع$

⑤ $\frac{١}{ص} + \frac{١}{س} = ٣$ ، جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = \frac{١}{٣}$ ، $ص = ١$

الحل : نحاول التبسيط $\frac{١}{ص} + \frac{١}{س} = ٣$

$س + ص = ٣ س ص$ نشتق

$١ + ٠ = ٣ س \times \frac{د ص}{د س} + ص \times ٣$ نعوض

$١ + ٠ = ١ \frac{د ص}{د س} + ٣$

$\frac{د ص}{د س} = -٢$

ص = ٤

⑥ . $هـ(س) = ٢ ظتا س$ ،

$ه(س) = ٣ س (س^٢ - ٣)^٣$ وكان

$(ه ∘ هـ)'(\frac{\pi}{٤}) = -٥٠$ ، جد

$ب$ الشرط ٣ ؟

الحل : $هـ(\frac{\pi}{٤}) = ٢$

$هـ'(س) = -٢ قتا^٢ س$

$هـ'(\frac{\pi}{٤}) = -٤$

$(ه ∘ هـ)'(\frac{\pi}{٤}) = ه'(هـ(\frac{\pi}{٤})) \times هـ'(\frac{\pi}{٤}) = -٥٠$

$ه'(٢) \times -٤ = -٥٠$

$ه'(٢) = ٣ ب^٢ - ٣$

$ه'(٢) = ٣ ب^٢ - ٣ = ١٢ ب^٢ - ٣$

$١٢ ب^٢ - ٣ = ١٢٥$

$١٢ ب^٢ = ١٢٨$

$ب^٢ = ٤$

$ب = ٢$

$\boxed{ب = \frac{١}{٢}}$

$ه(س) = (٣ س)(س^٢ - ٣)^٣ + (س^٢ - ٣)^٣ \times ٣$

$ه'(٢) = ٣٢٥$

---

⑦ . $ه(س) = س \times \frac{د}{د س} (ظتا^٢ س)$

جد $ه'(\frac{\pi}{٣})$

الحل : $ه(س) = س \times ٢ ظتا س \times -حا س$

$ه'(س) = -٢ س حا^٢ س$

$هـ'(س) = س \times ٢ ظتا^٢ س + حا^٢ س \times -١$

$هـ'(\frac{\pi}{٣}) = \frac{\pi}{٣} \times ١ + صفر \times -١ = -\frac{\pi}{٣}$

⑧ . $س = ص حاص$ اثبت ان

$ص \frac{د ص}{د س} + \frac{ص^٣ ظتا ص}{حاص} \times هـ' = ٢$

الحل : $١ = هـ' ص ظتا ص \Leftarrow \boxed{هـ' = \frac{١}{ص ظتا ص}}$

$هـ' = \frac{-١ \times هـ' ص - حاص}{ص^٢ ظتا^٢ ص} = هـ' \times \frac{حاص}{ص^٢ ظتا^٢ ص}$

$هـ' = \frac{١}{ص ظتا ص} \times \frac{حاص}{ص ظتا^٢ ص} = \frac{حاص}{ص^٣ ظتا^٣ ص}$

المجاة المطلوبة :

$ص ظتا ص \times \frac{١}{ص ظتا ص} + \frac{ص^٣ ظتا^٣ ص}{حاص} \times \frac{حاص}{ص^٣ ظتا^٣ ص}$

$١ + ١ = ٢$

⑨ . جد

$\lim_{ه \to ٠} \frac{حا^٢(\frac{\pi}{٤} + ٢س + ٢ه) - ظتا^٢(\frac{\pi}{٤} - ٢س)}{ه}$

الحل : لا حظ ظتا $(\frac{\pi}{٤} - ٢س) = حا ٢س$

$\therefore \lim_{ه \to ٠} \frac{حا^٢(\frac{\pi}{٤} + ٢س + ٢ه) - حا^٢ ٢س}{ه}$ هنا

$= \lim_{ه \to ٠} \frac{حا^٢(س + \frac{\pi}{٤} + ٢ه) - حا^٢ ٢س}{ه}$

$= ٢ حا(٢س + \frac{\pi}{٤}) جتا(٢س + \frac{\pi}{٤}) \times ٢$

$= ٢ حا(٤س + \frac{\pi}{٢}) \times ٢$

$= ٢ جتا ٤س \times ٢$

$= ٤ جتا ٤س$

⑩ . اذا كان $ه(س)$ اقترانا قابلا للاشتقاق على $ح$ ، وكان يحقق الخاصية

$ه(س + ه) = ه(س) \times ه(ه)$

وكان $ه(٠) = هـ(٠) = ١$ ، باستخدام

التعريف اثبت ان $هـ(س) = ه(س)$.

الحل : $هـ'(س) = \lim_{ه \to ٠} \frac{ه(س + ه) - ه(س)}{ه}$

$= \lim_{ه \to ٠} \frac{ه(س) \times ه(ه) - ه(س)}{ه}$

$= \lim_{ه \to ٠} \frac{ه(س)(ه(ه) - ١)}{ه}$

$= \lim_{ه \to ٠} ه(س) \left(\frac{ه(٠ + ه) - ه(٠)}{ه}\right)$

$= ه(س) \times هـ'(٠) = ه(س) \times ١$

$هـ(س) = ه(س)$

(#) بالاشتقاق لا نستخدم إلا قواعد

يجب استخدام التعريف بالحالات

التالية :-

١. عندما يكون المطلوب استخدام تعريف المشتقة

٢. عندما يكون معدل تغير أو معدلات تغير.

٣. عند بهتة قواعد الاشتقاق الرئيسية.

٤. متشعب مشكل عند نقاط التقاء

(١١) سؤال ذكي :-

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{ط\,جتا^{٢}\,س}{س} & ، س \neq ٠ \\ صفر & ، س = ٠ \end{cases}$$

جد هـ'(٠)

الحل : نستخدم التعريف لأنه س = ٠

هو صفر مقام متكامل .

$$هـ'(٠) = \text{نهـا}_{ع \to ٠} \frac{هـ(ع) - هـ(٠)}{ع - ٠}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to ٠} \frac{\frac{ط\,جتا^{٢}\,ع}{ع} - ٠}{ع}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to ٠} \frac{ط\,جتا^{٢}\,ع}{ع^{٢}} = \text{نهـا}_{ع \to ٠} \frac{ط\,جا^{٢}\,ع}{ع} \times \frac{ط\,جا^{٢}\,ع}{ع}$$

$$= ٩$$

(١٢) $$هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^{٣} - ١}{س^{٢} - ١} & ، س \neq ١ \\ ٣ & ، س = ١ \end{cases}$$

جد هـ'(١)

$$هـ'(١) = \text{نهـا}_{ع \to ١} \frac{\frac{ع^{٣}-١}{ع^{٢}-١} - ٣}{ع - ١}$$ نوحد المقامات

$$= \text{نهـا}_{ع \to ١} \frac{ع^{٣} - ١ - ٣(ع^{٢} - ١)}{(ع - ١)(ع^{٢} - ١)}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to ١} \frac{ع^{٣} - ٣ع^{٢} + ٢}{(ع - ١)^{٢}(ع + ١)} \times \frac{١}{ع - ١}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to ١} \frac{(ع - ١)(ع - ١)(ع - ٢)}{(ع - ١)^{٢}(ع + ١)} = -\frac{١}{٢}$$

لاحظ استخدمنا التعريف لأنه س = ١

صفر مقام متكامل

(١٣) $$هـ(س) = \sqrt{٢ + ظا\,س + ظتا\,س}$$ ٢٠١٠

هـ(٠) = -١ ، هـ'(٠) = ٢

كان ق(س) = هـ(س) × هـ(س)

جد ق'(٠) ؟

الحل : هـ(٠) = $\sqrt{٤}$ = ٢

$$هـ'(س) = \frac{قتا^{٢}\,س - ظا\,س}{٢\sqrt{٢ + ظا\,س + ظتا\,س}}$$

$$هـ'(٠) = \frac{١}{٤}$$

ق'(س) = هـ(س) × هـ'(س) + هـ(س) × هـ'(س)

ق'(٠) = هـ(٠) × هـ'(٠) + هـ(٠) × هـ'(٠)

$$= -١ \times ٢ + \frac{١}{٤} \times ٢ = -\frac{٣}{٢}$$

(١٤) س = ظا ٣ص جد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ ٢٠١٢

عندما ص = $\frac{ط}{١٢}$

الحل : $١ = ٢ قا^{٢} ٣ص \frac{دص}{دس}$ ← $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٣} تتا^{٢} ٣ص$

$$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{١}{٣} \times ٢(تتا\,٣ص)(-قا^{٢}\,٣ص) \times ٣ \times \frac{دص}{دس}$$

$$= -٢ تتا\,٣ص \times قا^{٢}\,٣ص \times \frac{١}{٣} تتا^{٢}\,٣ص$$

$$= -٢ تتا^{٣}\,٣ص \times قا^{٢}\,٣ص$$

نعوض ص

$$= -٢ تتا^{٣}\left(\frac{ط}{١٢} \times ٣\right) \times قا^{٢}\left(\frac{ط}{١٢} \times ٣\right)$$

$$= -٢ \times \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٣} \times ٢ = -\frac{١}{٢} \times ٢ = -١$$

(١٥) . $ه(٣س+١) = ل(س) + \frac{٢}{س-١}$

كان $ل(١) = ٣$ ، $ل'(١) = ٢$ ،

$ل''(١) = ١$ جد

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ق'(١+هـ) - ق'(١)}{هـ}$$

الحل: المطلوب $= ق''(١)$

نشتق $ق'(٣س+١) = ٣ \times ل'(س) \times ل(س) + \frac{٢}{(س-١)^٢}$

نعوض عن ٢ نقسم عليها

$ق''(٣س+١) = ل''(س) \times ل(س) + ل'(س) \times ل'(س) - \frac{١}{(س-١)^٢}$

نشتق مرة ثانية

$ق'''(٣س+١) \times ٣ = ل'''(س) \times ل(س) + ل''(س) \times ل'(س) + ل''(س) \times ل'(س)$

$$- \frac{-١ \times ٢(س-١)}{(س-١)^٤}$$

لكن بدل س الحقيقية

$٣س+١ = ١ \Leftarrow س = ٠$

نعوض

$٣ ق'''(١) = ل(٠) \times ل''(٠) + ل'(٠) \times ل'(٠) + \frac{٢}{(-١)^٤}$

$ق'''(١) = ١ \times ٢ + ١ \times ٢ = ٤$

$٣ ق'''(١) = ٥ \longleftarrow ق'''(١) = \frac{٥}{٣}$

(١٦) . إذا كان $ه$ قابلة للاشتقاق

وكان $ه(ظاس - ظاس) = ٢س + ١$

حيث $س \in [٠ ، \frac{\pi}{٤}]$ جد $ق'(٠)$ ؟

الحل: نشتق

$(-ظا^٢س - ظتا^٢س) \times ق'(ظاس - ظتاس) = ٢$

بدل س الحقيقية $ظاس - ظتاس =$

$\Leftarrow ظاس = ١$

$\Leftarrow س = \frac{\pi}{٤}$

نعوض

$ق'(٠) \times (-ظا^٢ \frac{\pi}{٤} - ظتا^٢ \frac{\pi}{٤}) = ٢$

$ق'(٠) \times (-٢) = ٢ \Leftarrow ق'(٠) = -١$

(١٧) . إذا كان

$ه(٢س-١) = ظا^٢ \frac{\pi}{١٨} (٤س-٢)$

اثبت ان $ق'(٣) = \frac{\pi}{٣٧٦}$

الحل: نشتق

$ق'(٢س-١) \times ٢ = ٢ ظا \frac{\pi}{١٨} (٤س-٢) \times ظتا \frac{\pi}{١٨} (٤س-٢) \times \frac{\pi}{١٨} \times ٤$

بدل س الحقيقية $٢س-١ = ٣$

$س = ٢$

نعوض

$ق'(٣) = \frac{\pi}{١٨} \times ٤ \times \frac{\pi}{٤} \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٤} = \frac{\pi ٣\sqrt{٣}}{١٨}$

$= \frac{\pi}{٣٧٦} = \frac{\pi ٣\sqrt{٣}}{٣٧٦}$

(١٨) . $ه(\frac{١}{٤}س) = (١-س)^٣$ جد $ق'(١٠)$

٢٠١٤

الحل: بدل س الحقيقية $\frac{١}{٤}س = ١ \Leftarrow س = ٤$

نعوض للتخلص من المطلوب $\frac{١}{٤}$ قاعدة سلسلة

$ه(\frac{١}{٤}س) = -س^٣$ نشتق

$\frac{١}{٤} ق'(\frac{١}{٤}س) = -٣س^٢$

نشتق مرة ثانية

$\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤} ق''(\frac{١}{٤}س) = -٦س$ نعوض

$\frac{١}{٤} ق''(٤) = -١٢$

$ق''(٤) = -٤٨$

(١٩) . $هـ(ظا٢س) = قتا٢س$

حيث $س \in (0, \frac{\pi}{4}]$ جد $هـ'(\frac{1}{4})$

الحل : نجد $س$ الحقيقية

$ظا٢س = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$٢س = ٣٠° \Leftarrow ١٥٠°$

$س = ١٥° \Leftarrow ٧٥°$

نشتق

$هـ'(ظا٢س)(قا^٢ ٢س) \times ٢ = قتا٢س \cdot قتا٢س \times ٢$

نعوض

$هـ'(\frac{1}{\sqrt{3}}) \times ٢ \times \frac{4}{3} = ٢\sqrt{٢} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times ٢\sqrt{٢}$

$هـ'(\frac{1}{\sqrt{3}}) = ٤$

(٢٠) . اذا كان $هـ = د(س)$ وكانت

$\Delta هـ = ٥ س^٢ هـ + ٢ س هـ$

حيث $\Delta هـ = \Delta س$ جد

$\lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta هـ}{هـ}$

أ) -١٢ ب) ١٢ ج) $\frac{1}{12}$ د) $\frac{1}{13}$

الحل : المطلوب $= \frac{1}{هـ'(١)}$

لاحظ $\Delta هـ = ٥ س^٢ هـ + ٢ س هـ$ نقسم على $\Delta س$

$\frac{\Delta هـ}{\Delta س} = \frac{٥ س^٢ هـ + ٢ س هـ}{\Delta س}$ لذا حل نهاية

$\lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta هـ}{\Delta س} = \frac{٥ س^٢ هـ + ٢ س هـ}{هـ}$

$هـ(س) = ٥ س^٢ + ٢ س$

$هـ'(س) = ١٠ س + ٢$

$هـ'(١) = ١٢$ المطلوب $= \frac{1}{12}$

(٢١) . $د(س) = \frac{1}{٣ + ٢ س}$ ، $س \neq \frac{-٣}{٢}$

$د'(١) = ٢$ ، جد ٢ ؟

الحل : $د'(س) = \frac{-٢ \times ١}{(٣ + ٢ س)^٢}$

$د'(١) = \frac{-٢}{(٣+٢)^٢} = ٢ \Leftarrow$ فرض سابق

$-٢ = ٢(٣+٢)^٢ \Leftarrow -٢ = ٢(٩ + ١٢ ٢ + ٢^٢)$

$-٢ = ١٨ + ٢٤ ٢ + ٨ ٢^٢ \Leftarrow ٨ ٢^٢ + ٢٤ ٢ + ٢٠ = ٠$

$٤(٢ ٢ + ٥)(٢ + ٢) = ٠$

$٢ = -٢$ أو $٢ = \frac{-٥}{٤}$

(٢٢) . $هـ'(س^٣) - ٤ د(س) = -٤ س^٢$ ، جد $هـ'(١)$ ؟

الحل : نشتق

$٢(د(س^٣))^١ \times د'(س^٣) \times ٣ س^٢ - ٤ د'(س) = -٨ س$

نجهز ① . $س^٣ = ١ \Leftarrow س = ١$

② . نجد $د(١)$ من ① نعوض

$د^٢(١) - ٤ د(١) + ٤ = ٠$

$(د(١) - ٢)(د(١) - ٢) = ٠$

$د(١) = ٢$

نعوض بالمشتقة

$٢ د(١) \times د'(١) \times ٢ - ٤ د'(١) = -٨$

$٢ \times ٢ \times ٣ د'(١) - ٤ د'(١) = -٨$

$١٢ د'(١) - ٤ د'(١) = -٨ \Leftarrow ٨ د'(١) = -٨ \Leftarrow د'(١) = -١$

(٢٣) . مخروط ارتفاعه ٣ امثال نصف قطر قاعدته ، أخذ بالدوران محافظاً على شكله ، جد معدل تغير حجمه بالنسبة لارتفاعه عندما نصف قطره ١٠ سم ؟

الحل : $ح = \frac{1}{3} \pi س^2 ع$

عندما $ع = 3$ سم، $\frac{دع}{دن} = 0.1$ سم/ث

المطلوب $\frac{دح}{دن}$ عندما $س = 1$ سم $\Leftarrow ح = 3$

$\therefore ح = \frac{1}{3} \pi \times \frac{ع^2}{9} \times ع = \frac{\pi}{27} ع^3$

$\frac{دح}{دن} = \frac{\pi}{9} ع^2 \frac{دع}{دن}$ نعوض $= \frac{\pi}{9} \times (3)^2 \times 0.1 = \pi 0.1$

(٢٤) . اذا كان $هـ(1) = 6$ حيث

$$هـ = \lim_{ه \to 0} \frac{هـ(4-2ه) - هـ(4+5ه)}{ه}$$

الحل : نحتاج طرح و اضافة $هـ(4)$

$$= \lim_{ه \to 0} \frac{هـ(4-2ه) - هـ(4)}{-2ه} + \frac{هـ(4) - هـ(4+5ه)}{ه}$$

$$= -2 \times هـ'(4) + 5 \times -هـ'(4)$$

$$= -2 \times 6 + 5 \times -6 = -42$$

(٢٥) . جد $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{ظا^2 س - 1}{4س - \pi}$

الحل : نحاول كتابة المرجاة على صورة تعريف

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{ظا^2 س - ظا^2 \frac{\pi}{4}}{4(س - \frac{\pi}{4})}$$

$$= \frac{1}{4} \times (ظا^2 س)' \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \times 2 (ظا س)^1 \times قا^2 س$$ نعوض

$$= \frac{1}{4} \times ظا \frac{\pi}{4} \times قا \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

(٢٦) . $(س + ص)^5 + س^5 = 2$ جد

$\frac{دص}{دس}$ عند $س = ص = 1$

الحل : نشتق $5(س+ص)^4 (1 + \frac{دص}{دس}) + 5س^4 = 0$

نعوض $5 \times 2^4 (1 + \frac{دص}{دس}) + 5 \times 1^4 = 0$

$5س^4 + 5س^4 \frac{دص}{دس} + 5س^4 = 0$

$5س^4 \frac{دص}{دس} = -10 س^4$

$\frac{دص}{دس} = -2$

(٢٧) . $ص = 3\sqrt{ن}$ ، $س = ن\sqrt{ن}$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $ص = 9$ سم، $\frac{دص}{دن} = 0.5$

$\frac{دص}{دن} = \frac{9}{ص}$ ، $\frac{دص}{دن} = 0.9$

الحل : $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$\frac{دص}{دن} = \frac{1}{2\sqrt{ن}} \times 3$

$س = ن\sqrt{ن}$

$\frac{دس}{دن} = \frac{3}{2}\sqrt{ن}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{3}{2\sqrt{ن}} \times \frac{2}{3\sqrt{ن}} = \frac{1}{ن}$ لكن $ص = 3\sqrt{ن}$

$ص^2 = 9ن$

$ن = \frac{ص^2}{9}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{\frac{ص^2}{9}}$

(٢٨) . $هـ(س) = \begin{cases} |س^2 - 4| + 14س & ، س \le 1 \\ س هـ(س) + 10 & ، س > 1 \end{cases}$

اذا كان $هـ(س)$ قابلاً للاشتقاق حيث

$هـ(1) = هـ'(1) = 20$ ، ابحث قابلية الاشتقاق

$هـ(س)$ عند $س = 1$

الحل : نبحث الاتصال $هـ$ عند $س = 1$

$هـ(1) = 14$ ، $\lim_{س \to 1^+} هـ = \lim_{س \to 1^+} 14 = 14$ ← متصل

$\lim_{س \to 1^-} هـ = \lim_{س \to 1^-} 14 = 14$

* نبحث قابلية الاشتقاق

$$هـ'(س) = \begin{cases} -2س + 14 & ، س < 1 \\ س هـ'(س) + هـ(س) & ، س > 1 \end{cases}$$

$$هـ'(س) = \begin{cases} -2س + 14 & ، س < 1 \\ س هـ'(س) + 10 & ، س > 1 \end{cases}$$

$$هـ'(س) = \begin{cases} -2س + 14 & ، س < 1 \\ 2س هـ(س) + هـ'(س) & ، س > 1 \end{cases}$$

نبحث $هـ'_+(1) = 1 \times 2 \times هـ(1) + هـ'(1) = 2 + 10 = 12$

$هـ'_-(1) = -2 + 14 = 12$

$\therefore هـ'(1) = 12$

(٢٩) ص = (ع^{٢} − ٥ع + ١)$^{\frac{٣}{٢}}$ ، ع = س^{٣} + ١

جد $\frac{دص}{دس}$ عند ع = ٩ (٢٠٠٢ - ١٤)

ب ص = $\sqrt[٣]{(٣ع^{٢}+٢ع)^{٢}}$ ، ع = $\frac{٨}{س^{٣}+٢}$

جد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ١ (٢٠٠٦ - ١٤)

جـ ق(س) = ٢س^{٢} ، هـ(س) = ٣ك − ١

جد ١ $\frac{د}{دس}$ (ق(س) − هـ(٢ك+٥)) عند س = ١

(٢٠٠٤ : ١)

٢ $\frac{د}{دس}$ (ق(هـ(س^{٣}))) عند ك = ١

(٢٠٠٧ : ٢)

ج ق(س) = $\frac{ل(س)}{هـ(س)}$ ، هـ(س) ≠ ٠

حيث ل(س) ، هـ(س) قابلة للاشتقاق عند س = ٢

ق(٢) = ٠ ، المماس ق(٢) = $\frac{ل(٢)}{هـ(٢)}$

د. ل(س) = $\frac{[٣س^{٢}+٨ق(س)]+س^{٢}}{ق(س)}$ ، كان

ل(١) = ٣ ، ل(١) = ٦ ، جد ق(١)

(٢٠٠٩ : ٢)

(٣٠) س = ظتا ن ، ص = جتا ن ، جد

$\frac{دص}{دس}$ عند س = $\frac{١}{٥}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$\frac{دص}{دن} = -جتا ن$

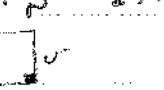
$\frac{دس}{دن} = قتا^{٢} ن$

$= -جتا ن \times \frac{١}{قتا^{٢} ن}$

$= -\frac{جتا ن}{جا^{٢} ن}$

نوجد ايجاد المقام

$\frac{١}{٥} = ظتا ن$



$\therefore$ جا ن = $\frac{\sqrt{٢٤}}{٥}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-\frac{١}{٥}}{\frac{\sqrt{٢٤}}{٥}} = -\frac{١}{\sqrt{٢٤}}$

(٣١) ص = $\sqrt{\frac{١+جاس}{١-جاس}}$ اثبت ان

ق = $\frac{١}{١-جاس}$ ، س = ٠.٥ ط (= $\frac{ط}{٢}$)

الحل: نضرب البسط أو المقام قبل الاشتقاق

ص = $\sqrt{\frac{١+جاس}{١-جاس} \times \frac{١-جاس}{١-جاس}}$

ص = $\sqrt{\frac{جتا^{٢}س}{(١-جاس)^{٢}}} = \frac{جتاس}{١-جاس}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{(١-جاس)(-جاس) - جتاس \times -جتاس}{(١-جاس)^{٢}}$

$= \frac{-جاس+جا^{٢}س+جتا^{٢}س}{(١-جاس)^{٢}} = \frac{١-جاس}{(١-جاس)^{٢}}$

$= \frac{١}{(١-جاس)}$

(٣٢) ق(س) = $\sqrt[٣]{س}$ جاس جد ق(٠)

الحل: نعمل لقواعد لانه بنتج $\frac{صفر}{صفر}$

نذهب للتعريف.

ق(٠) = $\lim_{ع \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{ع} جاع - ٠}{ع} = \lim_{ع \to ٠} \sqrt[٣]{ع^{٢}} \times \frac{جاع}{ع}$

$= ١ \times ٠ =$ صفر

(٣٣) جد معدل تغير مساحة مربع بالنسبة للمحيط عندما محيطه ٤٨ سم.

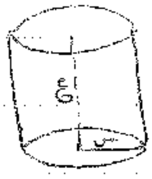
الحل: مساحة = س^{٢}

محيطا = ٤ س

$\frac{دم}{دع} \Big| \begin{matrix} ٤٨ = ٤س \Rightarrow س = ١٢ \\ ع = ٤٨ \end{matrix}$

$\frac{دم}{دع} = \frac{د(س^{٢})}{د(٤س)} = \frac{٢س}{٤} = \frac{٢٤}{٤} = ٦$

(٣٤). اسطوانة تتمدد محافظة على شكلها بحيث يبقى ارتفاعها يزيد بمقدار ٢ سم عن نصف قطرها. احسب معدل تغير مساحتها الجانبية بالنسبة إلى طول نصف قطر قاعدتها عندما يكون قطرها ١٢ سم.



الحل: ع = س + ٢ ، ٢س = ١٢
س = ٦

المطلوب: $\frac{د م_{الجانبية}}{د س}$ ؟

م = ٢π س ع

م = ٢π س (س + ٢) = ٢π س^2 + ٤π س

$\frac{دم}{دس}$ = ٤π س + ٤π = نعوض = ٢٨π

(٣٥). اثبت أن (ق ∘ هـ)′(س) = ق′(هـ(س)) × هـ′(س)

الحل: نفرض ص = (ق ∘ هـ)(س) = ق(هـ(س))

نفرض ع = هـ(س)

ص = ق(ع) ، ع = هـ(س)

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ = ق′(ع) × هـ′(س)

= ق′(هـ(س)) × هـ′(س)

(٣٦). ق(س) = أس + ب (كثير حدود درجة أولى) ومعدل تغيره (٧) ومنحناه يمر بالنقطة (١،٩) جد قاعدة ق.

الحل: دائماً للاقتران الخطي معدل تغيره = معامل س

∴ أ = ٧

∴ ق(س) = ٧س + ب

(١،٩) تحقق المعادلة ق(١) = ٧ × ١ + ب = ٩

ب = ٢

ق(س) = ٧س + ٢

(٣٧). ق(س) = |جا س| ابحث قابلية الاشتقاق عند س = π

الحل: نعيد تعريف

ق(س) = { جا س ، ٠ ≤ س ≤ π
− جا س ، π < س < ٢π }

ق متصل عند س = π لماذا

نها ق(س) (س ← π$^+$) = نها ق(س) (س ← π$^-$) = ق(π) = ٠

أجد ق′(س) = { جتا س ، ٠ < س < π
− جتا س ، π < س < ٢π }

ق′$_+$(π) = − جتا π = ١

ق′$_-$(π) = جتا π = −١

⇐ ق′(π) غير موجودة

∴ ق غير قابل للاشتقاق عند س = π

(٣٨). ق(س) = { [س] ، ١ ≤ س < ٣
|س − ٣| ، ٣ ≤ س < ٤ }

ابحث قابلية اشتقاق ق على مجاله.

الحل: نعيد تعريف ق(س)

ق(س) = { ١ ، ١ ≤ س < ٢
٢ ، ٢ ≤ س < ٣
س − ٣ ، ٣ ≤ س < ٤ }

نبحث اتصال ق عند س = ٢ ، س = ٣

ق′(س) = { ٠ ، ١ < س < ٢
٠ ، ٢ < س < ٣
١ ، ٣ < س < ٤ }

ق′ غير موجودة ، س = ٢ ، ٣ ، ١ ، ٤ (أطراف)

(٣٩) $هـ(س) = |٢س - ١|$ جد $(هـ^{-١})'$

عند $س = ١$

الحل : $(٢س-١)^{٢}$ بالتوزيع $(٢س-١)^{٢}$ بالقانون

$= ٣(٢س-١)^{٢} \times ٢$ مشتقة الداخل

(٤٠) $هـ(س) = ٥س$ ، $هـ(س) = ٨ - ٧س$

كما $هـ(هـ(س)) = -١$ جد

أ) $(هـ \circ هـ)'(١)$

ب) $س_{١}$

الحل : أ) $(هـ \circ هـ)'(١) = هـ'(هـ(١)) \times هـ'(١)$

$= -١ \times ٥ = -٥$

ب) $هـ'(س_{١}) = \frac{-٤}{\sqrt{١ - هـ(س_{١})}}$

$هـ(هـ(س_{١})) = -١$

$\frac{-٤}{\sqrt{١ - هـ(س_{١})}} = -١ \Leftarrow ٤ = \sqrt{١ - هـ(س_{١})}$

$\Leftarrow ١٦ = ١ - هـ(س_{١}) \Leftarrow هـ(س_{١}) = -١٥$

$٥س_{١} = -١٥ \Leftarrow \boxed{س_{١} = -٣}$

(٤١) $هـ(س) = ظاس$ ، $س \in [-٢\pi, ٢\pi]$

جد $س$ التي تحقق المعادلة $هـ'(س) = ٠$

الحل : $هـ'(س) = قاس ظاس = ٠$

$\frac{١}{جتاس} \times \frac{جاس}{جتاس} = ٠$

$جاس = ٠$

$س = ٠ ، \pi ، -\pi ، ٢\pi ، -٢\pi$

لاحظ $-٢\pi ، ٢\pi \notin$ مجال المشتقة (الطرفين)

$هـ'(س) = \frac{جاس}{جتا^{٢}س}$

$\Leftarrow$ بس $= ٠ ، \pi$

(٤٢) $\frac{دهـ}{دس} = س$ ، جد $\frac{د^{٢}س}{د هـ^{٢}}$

الحل : $\frac{دس}{دهـ}$ هي معكوس $\frac{دهـ}{دس}$

لكنه $\frac{دس}{دهـ} \neq$ معكوس $\frac{دهـ}{دس}$

$\therefore \frac{دس}{دهـ} = \frac{١}{س}$

$\Leftarrow \frac{د^{٢}س}{د هـ^{٢}} = \frac{د}{دهـ}\left(\frac{دس}{دهـ}\right) \times \frac{دهـ}{دس} = -١ \times \frac{١}{س^{٢}} \times \frac{١}{س} = \frac{-١}{س^{٣}}$

(٤٣) $\sqrt{٨} = \sqrt{\frac{ص^{٢}}{س}} + \sqrt{\frac{س^{٢}}{ص}}$ اثبت أن $\frac{دص}{دس} = ١$

الحل : نبسط السؤال قبل الاشتقاء

$\sqrt{\frac{س}{ص}} + \sqrt{\frac{ص}{س}} = \frac{\sqrt{س^{٢}} + \sqrt{ص^{٢}}}{\sqrt{ص س}} = \sqrt{٢} \times ٢$ نوحد المقامات

$س + ص = ٢\sqrt{ص س}$ نربع الطرفين

$س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢} = ٤ س ص$

$س^{٢} + ص^{٢} - ٢س ص = ٠$

$(س - ص)(س - ص) = ٠$

$(س - ص)^{٢} = ٠$ جذر للطرفين

$س - ص = ٠$

$ص = س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ١$

(٤٤) $هـ(س) = س^{٣}$ ، $هـ(س) = س^{٢} + ٥س$

جد $(هـ \circ هـ)'(٣ س)$

الحل : $هـ'(هـ(٣س)) \times هـ'(٣س)$

$هـ'(٩س^{٢} + ١٥س) \times (٦س + ٥)$

$٢(٩س^{٢} + ١٥س) \times (٦س + ٥)$

$(١٨س^{٢} + ٣٠س) \times (٦س + ٥)$