التكامل

أ. اياد جاد الله

الرياضيات العلمي

مدارس المعالي الثانوية

٢٠١٨-٢٠١٩

٠٧٩٥٤٧٥٤٥٧

٠٧٨٨٥١٣٦٥٩

التكامل غير المحدود
تلخيص الدرس:

تكامل المقدار $هـ(س)$ بالنسبة لـ س

$$\int هـ(س)\,د س$$

إشارة التكامل — دالة التكامل — بالنسبة لـ س

- $\int هـ(س)\,د س$ (تكامل بالنسبة لـ س)
- $\int هـ(ص)\,د ص$ (تكامل بالنسبة لـ ص)
- $\int هـ(ع)\,د ع$ (تكامل بالنسبة لـ ع)

خواص التكامل عكس التفاضل

مثلاً: $\int ٢س\,د س = س^{٢} + ج$

لأن مشتقة $س^{٢} + ج$ هو $٢س$

$\int ٣س^{٢}\,د س = س^{٣} + ج$

لأن مشتقة $س^{٣} + ج$ هو $٣س^{٢}$

لاحظ $ج$: هي ثابت التكامل

$\int$ مشتقة $(س)\,د س = هـ(س) + ج$

$\int$ مشتقة $(س)\,د س = ق(س) + ج$

$\int$ مشتقة $(س)\,د س = ك(س) + ج$

لاحظ أن $\int ٢س\,د س = س^{٢} + ج$

لأن $س^{٢} + ٥ \Leftarrow ٢س$

$س^{٢} - ١ \Leftarrow ٢س$

$س^{٢} + ١١ \Leftarrow ٢س$

$س^{٢} - ٣١ \Leftarrow ٢س$

∴ ثابت التكامل ← أي رقم *

خواص التكامل غير المحدود:

١. $\int ق هـ(س) = ق \int هـ(س)\,د س + ج$

٢. $\int س^{ن}\,د س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ج$

٣. $\int (ا س + ب)^{ن}\,د س = \frac{(ا س + ب)^{ن+١}}{ا(ن+١)} + ج$

٤. $\int ق هـ(س)\,د س = ق \int هـ(س)\,د س$

٥. $\int هـ(س) \pm ك(س)\,د س = \int هـ(س)\,د س \pm \int ك(س)\,د س$

لاتنسى: يجب أن يدل الناتج على أصله عند تكامله

* لازم نتخلص من المقامات المجهولة بإدخال التكامل ما يتوزع على الضرب
* لازم نتخلص من المقام قبل ما نجري عملية التكامل.

ملاحظات (*) إذا ما قدرنا نتخلص من المقامات المجهولة والمقام يصير السؤال على حل من التكامل (المقلوبين، الأجزاء، الكسور الجزئية)..

أمثلة:

١. $\int ٣س^{٤} - ٢٥س + ٢\,د س$

$= \frac{٣س^{٥}}{٥} - \frac{٢٥س^{٢}}{٢} + ٢س + ج$

٢. $\int 7 - 2س^4 + 9س^6 \, د س$

$= 7س - \frac{2س^5}{5} + \frac{9س^7}{7} + ج$

٣. $\int 8 س^3 + 6 س - 11 \, د س$

$= \frac{8س^4}{4} + \frac{6س^2}{2} - 11س + ج$

$= 2س^4 + 3س^2 - 11س + ج$

٤. $\int \pi - 5س + س^4 \, د س$

$= \pi س - \frac{5س^2}{2} + \frac{س^{-3}}{-3} + ج$

$= \pi س - \frac{5س^2}{2} - \frac{1}{3س^3} + ج$

٥. $\int 2ص + 8ص^3 - 9 \, د ص$

$= \frac{2ص^2}{2} + \frac{8ص^4}{4} - 9ص + ج$

$= ص^2 + 2ص^4 - 9ص + ج$

٦. $\int ع^2 - ع \, د ع$

$= \frac{ع^3}{3} - \frac{ع^2}{2} + ج$

٧. $\int 9 \, د س = 9س + ج$

٨. $\int ع^2 \, د ص = ع^2 ص + ج$

٩. $\int ع^2 \, د ع = ع^3 + ج$

١٠. $\int 5س \, د ص = 5س ص + ج$

١١. $\int \sqrt{7} \, د س = \sqrt{7} س + ج$

١٢. $\int \sqrt[5]{3} \, د ص = \sqrt[5]{3} ص + ج$

١٣. $\int 8 \, د ع = 8ع + ج$

١٤. $\int س^{-8} \, د س = \frac{س^{-7}}{-7} + ج$

$= \frac{-2}{7س^7} + ج$

١٥. $\int 5 س^{10} \, د س = \frac{5س^{11}}{11} + ج$

١٦. $\int (2س - 1)^5 \, د س$

$= \frac{(2س-1)^6}{2 \times 6} + ج$

١٧. $\int (2 - 8ك)^{11} \, د ك$

$= \frac{(2 - 8ك)^{12}}{-8 \times 12} + ج$

١٨. $\int (5س - 11)^9 \, د س$

$= \frac{(5س-11)^{10}}{5 \times 10} + ج$

١٩. $\int (7 - 3س)^2 \, د س$

$= \frac{(7 - 3س)^3}{-3 \times 3} + ج$

٢٠. $\int \sqrt[5]{7} \, د س = س \sqrt[5]{7} + ج$

$= \frac{س^{\frac{6}{5}} \sqrt[5]{7}}{\frac{6}{5}} + ج = \frac{س \sqrt[5]{7^6}}{6} + ج$

٢١. $\int \sqrt[11]{9} \, د س = س \sqrt[11]{9} + ج$

$= \frac{س^{\frac{12}{11}} \sqrt[11]{9}}{\frac{12}{11}} + ج = \frac{11 س \sqrt[11]{9^{12}}}{12} + ج$

٢٢. $\int \sqrt[4]{س} \, د س = \int س^{\frac{1}{4}} \, د س$

$= \frac{س^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + ج = \frac{4 س \sqrt[4]{س}}{5} + ج$

٢٣. $\int (1 + 2س - 3س^2)^2 \, د س$

$= \int (1 + 4س - 12س^2 - 4س^3 + 9س^4) \, د س$

$= س + 2س^2 - 4س^3 - س^4 + \frac{9س^5}{5} + ج$

٢٤. $\int \sqrt[3]{(3 + 2س)^2} \, د س$

$= \int (3 + 2س)^{\frac{2}{3}} \, د س = \frac{(3+2س)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3} \times 2} + ج$

$= \frac{3 \sqrt[3]{(3+2س)^5}}{10} + ج$

٢٥. $\int \sqrt{-9س} \, دس$

$= \int (-9س)^{\frac{1}{2}} \, دس$

$= \frac{(-9س)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \times -9} = \frac{-2\sqrt{(-9س)^3}}{27} + ح$

٢٦. $\int \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{8}{3}ص} \, دص$

$= \int (\frac{5}{4} - \frac{8}{3}ص)^{\frac{1}{2}} \, دص = \frac{(\frac{5}{4} - \frac{8}{3}ص)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \times -\frac{8}{3}} + ح$

$= -\frac{3}{16}\sqrt{(\frac{5}{4} - \frac{8}{3}ص)^3} + ح$

٢٧. $\int س \, دس = \frac{س^2}{2} + ح$

٢٨. $\int \frac{9}{\sqrt{6س}} \, دس ; \int 9س^{-\frac{1}{2}} \, دس$

$= \frac{9}{\frac{1}{2}} س^{\frac{1}{2}} + ح = 18\sqrt{س} + ح$

٢٩. $\int \frac{-3}{س^2} \, دس = \int -3س^{-2} \, دس$

$= \frac{-3س^{-1}}{-1} + ح = \frac{3}{س} + ح$

٣٠. $\int 7\sqrt{س} \, دس = \int 7س^{\frac{1}{2}} \, دس$

$= 7 \times \frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + ح = \frac{14}{3}\sqrt{س^3} + ح$

٣١. $\int \frac{5}{\sqrt[3]{س^2}} \, دس = \int 5س^{-\frac{2}{3}} \, دس$

$= \frac{5س^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + ح = 15\sqrt[3]{س} + ح$

٣٢. $\int (8 - 3س)(2س - 5) \, دس$

$= \int 16س - 4 - 6س^2 + 15س \, دس$

$= \int -6س^2 + 31س - 4 \, دس$

$= -2س^3 + \frac{31}{2}س^2 - 4س + ح$

٣٣. $\int 2س^2 (5 - 3س) \, دس$

$= \int 10س^2 - 6س^3 \, دس$

$= \frac{10}{3}س^3 - \frac{6}{4}س^4 + ح$

٣٤. $\int \sqrt{س}(\sqrt{7} - \sqrt{س}) \, دس$

$= \int \sqrt{7س} - س \, دس$

$= \frac{2}{3}\sqrt{7}س^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}} + ح$

٣٥. $\int \sqrt[2]{س}(س + 5) \, دس$

$= \int س^{\frac{1}{2}}(س + 5) \, دس$

$= \int س^{\frac{3}{2}} + 5س^{\frac{1}{2}} \, دس$

$= \frac{2}{5}س^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}س^{\frac{3}{2}} + ح$

$= \frac{2}{5}\sqrt{س^5} + \frac{10}{3}\sqrt{س^3} + ح$

٣٦. $\int \frac{س^2 - 9}{س - 3} \, دس$ لأن درجة المقام = درجة البسط

$= \int \frac{(س + 3)(س - 3)}{(س - 3)} \, دس = \int س + 3 \, دس$

$= \frac{س^2}{2} + 3س + ح$

٣٧. $\int \frac{س - 5}{\sqrt{س} - \sqrt{5}} \, دس = \int \sqrt{س} + \sqrt{5} \, دس$

$= \frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}} + \sqrt{5}س + ح$

٣٨. $\int \frac{3س^5 + 7س^2 - 5}{4س^2} \, دس$

$= \int \frac{3}{4}س^3 + \frac{7}{4} - \frac{5}{4}س^{-2} \, دس$

$= \frac{3}{16}س^4 + \frac{7}{4}س + \frac{5}{4}س^{-1} + ح$

$= \frac{3}{16}س^4 + \frac{7}{4}س + \frac{5}{4س} + ح$

٣٩. $\int \sqrt[5]{س^7}(س - 2) \, دس$

$= \int س^{\frac{7}{5}} - 2س^{\frac{2}{5}} \, دس$

$= \frac{5}{12}س^{\frac{12}{5}} - \frac{10}{7}س^{\frac{7}{5}} + ح$

$= \frac{5}{12}\sqrt[5]{س^{12}} - \frac{10}{7}\sqrt[5]{س^7} + ح$

٤٠ $\int \frac{س - ٣}{\sqrt[٣]{س}}$ د س

$= \int \frac{س}{س^{\frac{١}{٣}}} - \frac{٣}{س^{\frac{١}{٣}}}$ د س

$= \int س^{\frac{٢}{٣}} - ٣ س^{-\frac{١}{٣}}$ د س

$= \frac{٣ س^{\frac{٥}{٣}}}{٥} - \frac{٣ س^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}} + ج$

$= \frac{٣ \sqrt[٣]{س^٥}}{٥} - \frac{٩ \sqrt[٣]{س^٢}}{٢} + ج$

٤١ $\int \frac{٢ - ٢ س^٢ - س^٣}{س + ١}$ د س

$= \int (س - ٣)(س + ١)$ د س $= \frac{س^٢}{٢} - ٣ س + ج$

٤٢ $\int \frac{س^٣ - ٤ س}{س + ٢}$ د س

$= \int \frac{س (س^٢ - ٤)}{س + ٢}$ د س $= \int س (س - ٢)$ د س $= \int س^٢ - ٢ س$ د س

$= \frac{س^٣}{٣} - س^٢ + ج$

٤٣ $\int \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١}$ د س

$= \int \frac{\sqrt{س} - ١}{(\sqrt{س} - ١)(\sqrt{س} + ١)}$ د س $= \int \frac{١}{\sqrt{س} + ١}$ د س

$= \int (\sqrt{س} + ١)^{-١}$ د س $= ٢ \sqrt{س + ١} + ج$

٤٤ $\int \frac{س^٣ - س^٢}{\sqrt{س} - ١}$ د س

$= \int \frac{س^٢ (س - ١)(\sqrt{س} + ١)}{(\sqrt{س} - ١)}$ د س $= \int س^٢ (\sqrt{س} + ١)$ د س

$= \int س^{\frac{٥}{٢}} + س^٢$ د س $= \frac{٢ س^{\frac{٧}{٢}}}{٧} + \frac{س^٣}{٣} + ج$

$= \frac{٢ \sqrt{س^٧}}{٧} + \frac{س^٣}{٣} + ج$

٤٥ $\int \frac{(س + ١)^٢ - ٩}{س - ٣}$ د س

$= \int \frac{(س + ١ + ٣)(س + ١ - ٣)}{س - ٣}$ د س $= \int \frac{(س + ٤)(س - ٢)}{(س - ٣)}$ د س $= \frac{س^٢}{٢} + ٢ س + ٤ \ln |س - ٣| + ج$

٤٦ $\int \frac{٨ - س^٣}{٢ - س}$ د س

$= \int \frac{(٢ - س)(٤ + ٢ س + س^٢)}{(٢ - س)}$ د س $= \int (٤ + ٢ س + س^٢)$ د س

$= ٤ س + س^٢ + \frac{س^٣}{٣} + ج$

٤٧ $\int \frac{٥ - س}{\sqrt{٣ س}}$ د س

$= \int \frac{٥}{\sqrt{٣ س}} - \frac{س}{\sqrt{٣ س}}$ د س $= \int \frac{٥}{\sqrt{٣}} س^{-\frac{١}{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٣}} س^{\frac{١}{٢}}$ د س

$= \frac{٥}{\sqrt{٣}} \times ٢ س^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٣}} \times \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ج$

$= \frac{١٠ \sqrt{س}}{\sqrt{٣}} - \frac{٢ \sqrt{٣ س^٣}}{٩} + ج$

٤٨ $\int (٣ س^٢ + ٤ س + ١)^٣$ د س

$= \int ((س + ١)^٢)^٣$ د س $= \int (س + ١)^٦$ د س

$= \frac{(س + ١)^٧}{٧} + ج$

٤٩ $\int \frac{٥ ص}{٥}$ د ص $= \frac{١}{٥} \times \frac{ص^٢}{٢} + ج$

٥٠ $\int \frac{٥ س}{\sqrt{٣ + ٢ س^٢ + ١}}$ د س

الحل: لعفرت لهم افهم لتعلم . . .

٥١. $\int (4س^2 + 3س + 25)^5 \, دس$

$= \int (2س + 5)^5 \, دس = \int (2س + 5)^5 \times \frac{1}{2} \, دس$

$= \frac{(2س+5)^{11}}{2 \times 11} + ج$

٥٢. $\int \frac{س - 2}{(3س^2 - 4س + 4)^5} \, دس$

$= \int \frac{س - 2}{((س-2)(3س-2))^5} \, دس$

$= \int \frac{(س-2)}{(س-2)^5 (3س-2)^5} \, دس$

$= \int (3س-2)^{-5} (س-2)^{-4} \, دس = \frac{(3س-2)^{-8}}{-8} + ج$

$= \frac{-1}{8(3س-2)^8} + ج$

٥٣. $\int س^5 \left(1 + \frac{1}{س}\right)^5 \, دس$

توحيد مقامات

$= \int س^5 \left(\frac{س+1}{س}\right)^5 \, دس$

$= \int س^5 \frac{(س+1)^5}{س^5} \, دس$

$= \int (س+1)^5 \, دس$

$= \frac{(س+1)^6}{6} + ج$

٥٤. $\int س \sqrt[3]{س - \frac{5}{3س^3}} \, دس$

$= \int س \sqrt[3]{\frac{3س^4 - 5}{3س^3}} \, دس$

$= \int س \frac{\sqrt[3]{3س^4 - 5}}{\sqrt[3]{3س^3}} \, دس$

$= \int س \frac{\sqrt[3]{3س^4 - 5}}{س \sqrt[3]{3}} \, دس$

$= \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \int \frac{(3س^4 - 5)^{\frac{1}{3}}}{س^{\frac{1}{3}}} \, دس$

$= \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \int (3س^4 - 5)^{\frac{1}{3}} س^{\frac{-1}{3}} \, دس$

$= \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \frac{(3س^4 - 5)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3} \times 4} + ج$

$= \frac{(3س^4 - 5)^{\frac{4}{3}}}{16\sqrt[3]{3}} + ج$

$= -3 \frac{(5 - س)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + ج$

٥٥. $\int \frac{2}{(5 + 2س - 4س^2)^{\frac{7}{2}}} \, دس$

$= \int \frac{2}{((5 - 2س)(1 + 2س))^{\frac{7}{2}}} \, دس$

$= \int \frac{2}{(5 - 2س)^{\frac{7}{2}} (1 + 2س)^{\frac{7}{2}}} \, دس$

$= \int 2 (5 - 2س)^{-\frac{7}{2}} (1 + 2س)^{-\frac{7}{2}} \, دس$

$= \frac{2 (5 - 2س)^{-\frac{5}{2}} (1 + 2س)^{-\frac{5}{2}}}{-\frac{5}{2} \times 2 \times -\frac{5}{2}} + ج$

$= \frac{-1}{\frac{25}{2}(5 - 2س)^{\frac{5}{2}}(1 + 2س)^{\frac{5}{2}}} + ج$

٥٦. $\int \frac{8}{(9 + 6س - س^2)^2} \, دس$

$= \int \frac{8}{(س-3)^4} \, دس$

$= \int 8 (س-3)^{-4} \, دس$

$= \frac{8 (س-3)^{-3}}{-3 \times 1} + ج$

$= \frac{-8}{(س-3)^3} + ج$

٥٧. $\int \frac{س - 5}{\sqrt{س^3}} \, دس = \int \frac{س - 5}{س^{\frac{3}{2}}} \, دس$

$= \int س^{-\frac{1}{2}} - 5 س^{-\frac{3}{2}} \, دس$

$= 2 س^{\frac{1}{2}} - \frac{5 س^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + ج$

$= 2\sqrt{س} + \frac{10}{\sqrt{س}} + ج$

$= \frac{2س + 10}{\sqrt{س}} + ج$

تكاملات لاقترانات المثلثية

١. $\int$ حا$(أ س+ب)\,د س = -\frac{\text{جتا}(أ س+ب)}{أ} + ج$

٢. $\int$ جتا$(أ س+ب)\,د س = \frac{\text{حا}(أ س+ب)}{أ} + ج$

٣. $\int$ قا$^{٢}(أ س+ب)\,د س = \frac{\text{ظا}(أ س+ب)}{أ} + ج$

٤. $\int$ قتا$^{٢}(أ س+ب)\,د س = -\frac{\text{ظتا}(أ س+ب)}{أ} + ج$

٥. $\int$ قا$(أ س+ب)$ ظا$(أ س+ب)\,د س = \frac{\text{قا}(أ س+ب)}{أ} + ج$

٦. $\int$ قتا$(أ س+ب)$ ظتا$(أ س+ب)\,د س = -\frac{\text{قتا}(أ س+ب)}{أ} + ج$

أسئلة وملاحظات هامة:

١. $\int \frac{\text{جتا}٢س - ٢}{\text{حا}^{٣}س}\,د س$

$= \int ٥ \times \frac{\text{حا}^{-٣}س}{-٣} - ٢ \times \frac{\text{ظا}\frac{س}{٥}}{\frac{١}{٥}} + ج$

$= -\frac{٥}{٣}\text{حا}^{-٢}س - ١٠\,\text{ظا}\frac{س}{٥} + ج$

٢. $\int \frac{\text{قا}٦س \text{ظا}٦س - ٩}{\text{جتا}^{٣}س}\,د س$

اسقط $\frac{١}{\text{جتا}^{٣}س}$ كعامل مشترك من المقام

$= \int \text{قا}٦س \text{ظا}٦س - ٩\,\text{قا}^{٣}س\,د س$

$= \frac{\text{قا}٦س}{٦} - ٩\,\text{ظا}س + ج$

٣. $\int ٢\,\text{قا}س(٥\,\text{جتا}س + \text{ظا}س - ٦\,\text{قا}س)\,د س$

$= \int ١٠ + ٢\,\text{قا}س\,\text{ظا}س - ١٢\,\text{قا}^{٢}س\,د س$

$= ١٠س + ٢\,\text{قا}س - ١٢\,\text{ظا}س + ج$

٤. $\int \text{قتا}^{٢}(٢س-٥) + \text{حا}٥س\,د س$ حيث $ج$ ثابت

$= \frac{-\text{ظتا}(٢س-٥)}{-٢} + \frac{\text{حا}٥س}{-٥} + ج$

٥. $\int \text{جتا}٤س\,\text{ظا}٣س - \text{حا}٣س\,\text{ظتا}٢س\,د س$

$= \int \frac{\text{جتا}٤س}{\text{جتا}٣س} \times \frac{\text{حا}٤س}{\text{جتا}٤س} - \frac{\text{حا}٣س}{\text{حا}٣س} \times \frac{\text{جتا}٢س}{\text{حا}٢س}\,د س$

$= \int \text{ظا}٤س - \text{جتا}٢س\,د س$

$= -\frac{\text{جتا}٤س}{٤} - \frac{\text{حا}٢س}{٢} + ج$

٦. $\int \frac{١٥}{\text{حتا}٤س\,\text{ظتا}٢س}\,د س$ بتجهيز

$= \int ١٥\,\text{قا}٤س\,\text{ظا}٤س\,د س = ١٥\frac{\text{قا}٤س}{٤} + ج$

٧. $\int \frac{٥}{\text{حا}^{٣}٢س} - \frac{٤}{\text{جتا}^{٢}٦س}\,د س$ بتجهيز

$= \int ٥\,\text{قتا}^{٣}٢س - ٤\,\text{قا}^{٢}٦س\,د س$

$= ٥ \times -\frac{\text{ظتا}٢س}{٢} - ٤ \times \frac{\text{ظا}٦س}{٦} + ج$

$= -\frac{٥}{٢}\text{ظتا}٢س - \frac{٤}{٦}\text{ظا}٦س + ج$

تذكير هام لذكرى تنفع أولي العزم

١. حا$٢س$ جتا$٢س = \frac{١}{٢}$ حا$٤س$

بالكلام: جيب زاوية مضروبة في جتا نفس الزاوية = $\frac{١}{٢}$ حا ضعف الزاوية

٢. جتا$س$ جتا$ص = \frac{١}{٢}$ (جتا$(س+ص)$ + جتا$(س-ص)$)

٣. حا$س$ حا$ص = \frac{١}{٢}$ (جتا$(س-ص)$ − جتا$(س+ص)$)

٤. حا$س$ جتا$ص = \frac{١}{٢}$ (حا$(س+ص)$ + حا$(س-ص)$)

٨. $\int جا^2 س \, جتا^5 س \, د س$ نخرج

$= \int \frac{1}{2} (جا 9س + جا(-س)) \, د س$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{-جتا 9س}{9} + \frac{-جتا 5س}{5} \right) + ج$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{-جتا 9س}{9} + \frac{جتا 5س}{5} \right) + ج$

لازم نعرف إنه $جا(-س) = -جا س$

$جتا(-س) = جتا س$

٩. $\int جتا 3س \, جتا 4س \, د س$ نخرج

$= \int \frac{1}{2} (جتا 8س + جتا(-س)) \, د س$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{جا 8س}{8} + جا(-س) \right) + ج$

١٠. $\int جا 3س \, جا 7س \, د س$

$= \int \frac{1}{2} (جتا(-4س) - جتا 10س) \, د س$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{جا 4س}{4} - \frac{جا 10س}{10} \right) + ج$

فيه 4 إقترانات ما إلها قوانين (لازم نستنبطها بمتطابقة بعديه نكاملها)

① $جا^2 س = \frac{1}{2} (1 - جتا 2س)$

② $جتا^2 س = \frac{1}{2} (1 + جتا 2س)$

③ $ظا^2 س = قا^2 س - 1$

④ $ظتا^2 س = قتا^2 س - 1$

أمثلة :-

١١. $\int جا^2 3س \, د س = \int \frac{1}{2} (1 - جتا 6س) \, د س$

$= \frac{1}{2} (س - \frac{جا 6س}{6}) + ج$

١٢. $\int جتا^2 س \, د س = \int \frac{1}{2} (1 + جتا 2س) \, د س$

$= \frac{1}{2} (س + \frac{جا 2س}{2}) + ج$

١٣. $\int ظا^2 س \, د س$

$= \int قا^2 س - 1 \, د س$

$= \frac{ظا^3 س}{3} - س + ج$

١٤. $\int ظتا^2 \frac{س}{2} \, د س$

$= \int قتا^2 \frac{س}{2} - 1 \, د س$

$= \frac{-ظتا \frac{س}{2}}{\frac{1}{2}} - س + ج$

$= -2 ظتا \frac{س}{2} - س + ج$

متطابقات مثلثية :-

١. $جا^2 س + جتا^2 س = 1$

٢. $1 + ظا^2 س = قا^2 س$

٣. $1 + ظتا^2 س = قتا^2 س$

٤. $جا 2س = 2 جا س جتا س$

معكوسها $جا س جتا س = \frac{1}{2} جا 2س$

٥. $جتا 2س = جتا^2 س - جا^2 س$

$= 1 - 2 جا^2 س$

$= 2 جتا^2 س - 1$

٦. $جا(أ \pm ب) =$

نسميها متطابقة جا أ جتا ب $\pm$ جا ب جتا أ

٧. $جتا(أ \pm ب) =$

نسميها متطابقة جتا أ جتا ب $\mp$ جا أ جا ب

٨. $ظا(أ \pm ب) = \frac{ظا أ \pm ظا ب}{1 \mp ظا أ ظا ب}$

١٥. $\int (\text{جا}س - \text{جتا}س)^2 \, دس$

$= \int \text{جا}^2 س - 2\,\text{جا}س\,\text{جتا}س + \text{جتا}^2 س \, دس$

$= \int 1 - \text{جا}2س \, دس = س - \frac{\text{جتا}2س}{2} + ج$

$= س + \frac{\text{جا}2س}{2} + ج$

١٦. $\int (\text{ظا}^2 س + \text{قا}^2 س)^2 \, دس$

$= \int \text{ظا}^4 س + 2\,\text{ظا}^2 س\,\text{قا}^2 س + \text{قا}^4 س \, دس$

$= \int \text{قا}^2 س - 1 + 2\,\text{ظا}^2 س\,\text{قا}^2 س + \text{قا}^2 س \, دس$

$= \frac{\text{ظا}^3 س}{3} - س + \frac{\text{ظا}^3 س}{3} + \frac{\text{ظا}^3 س}{3} + ج$

١٧. $\int (\text{قتا}^3 س - \text{ظتا}^3 س)^2 \, دس$

$= \int \text{قتا}^6 س - 2\,\text{قتا}^3 س\,\text{ظتا}^3 س + \text{ظتا}^6 س \, دس$

$= \int \text{قتا}^6 س - 2\,\text{قتا}^3 س\,\text{ظتا}^3 س + \text{قتا}^2 س - 1 \, دس$

$= -\frac{\text{ظتا}^5 س}{5} - 2 \times \frac{2}{15} - \frac{\text{قتا}^3 س}{3} + \frac{\text{ظتا}^3 س}{3} - س + ج$

$= -\frac{\text{ظتا}^5 س}{5} + \frac{2}{15}\text{قتا}^3 س - س - \frac{\text{ظتا}^3 س}{3} + ج$

١٨. $\int \text{جا}^4 س - \text{جتا}^4 س \, دس$

$\int (\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س)(\text{جا}^2 س - \text{جتا}^2 س) \, دس$

$\int 1 \times -\text{جتا}2س \, دس = -\frac{\text{جا}2س}{2} + ج$

١٩. $\int \frac{\text{جا}^2 س - 2\,\text{جا}س + 1}{\text{جتا}^2 س} \, دس$ نوزع

$= \int \text{ظا}^2 س - 2\,\text{قاس ظاس} + \text{قا}^2 س \, دس$

$= \int \text{قا}^2 س - 1 - 2\,\text{قاس ظاس} + \text{قا}^2 س \, دس$

$= \text{ظاس} - س - 2\,\text{قاس} + \text{ظاس} + ج$

٢٠. $\int \text{جا}^2 س\,\text{جتا}^2 س \, دس$

$= \int (\text{جاس جتاس})^2 \, دس$

$= \int (\frac{1}{2}\text{جا}2س)^2 \, دس$

$= \int \frac{1}{4}\text{جا}^2 2س \, دس$

$= \int \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}4س) \, دس$

$= \frac{1}{8}(س - \frac{\text{جا}4س}{4}) + ج$

٢١. $\int \frac{ه^{-س}}{\text{جا}^2 س - \text{جا}^4 س} \, دس$

$= \int \frac{ه^{-س} \, دس}{\text{جا}^2 س(1 - \text{جا}^2 س)} = \int \frac{ه^{-س} \, دس}{\text{جا}^2 س\,\text{جتا}^2 س}$

$= \int \frac{ه^{-س} \, دس}{(\frac{1}{2}\text{جا}2س)^2} = \int \frac{ه^{-س} \, دس}{\frac{1}{4}\text{جا}^2 2س}$

$= \int 4\,\text{قتا}^2 2س \, ه^{-س} \, دس = 4 \times \frac{-\text{ظتا}2س}{2} + ج$

$= -2\,\text{ظتا}2س + ج$

٢٢. $\int \frac{1 - \text{جا}^2 س}{\text{جا}^2 س\,\text{جتا}^2 س} \, دس$

$= \int \frac{1 - \text{جا}^2 س}{(\frac{1}{2}\text{جا}2س)^2} \, دس = \int \frac{1 - \text{جا}^2 س}{\frac{1}{4}\text{جا}^2 2س} \, دس$

$= \int 4 \times \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{جا}^2 س} \, دس = \int 4\,\text{ظتا}^2 س \, دس$

$= 4 \int (\text{قتا}^2 س - 1) \, دس$

$= 4(-\text{ظتا}س - س) + ج$

٢٣. $\int \frac{\text{جتا}^2 س + \text{جاس}}{1 - \text{جا}^2 س} \, دس$

$= \int \frac{\text{جتا}^2 س + \text{جاس}}{\text{جتا}^2 س} \, دس$ نوزع

$= \int 1 + \text{قاس ظاس} \, دس = س + \text{قاس} + ج$

٢٤. $\int \frac{1 - \text{جا}2س}{\text{جتا}س - \text{جاس}} \, دس$

$= \int \frac{\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س - 2\,\text{جاس جتاس}}{\text{جتاس} - \text{جاس}} \, دس$

$= \int \frac{(\text{جاس} - \text{جتاس})(\text{جاس} + \text{جتاس})}{(\text{جتاس} - \text{جاس})} \, دس$

$= -\int (-\text{جتاس} - \text{جاس}) + ج$

٢٥. $\int \frac{\text{جتا}^3 س - \text{جا}^3 س}{\text{جتا} س - \text{جا} س} \, د س$

$= \int \frac{(\text{جتا} س - \text{جا} س)(\text{جتا}^2 س + \text{جتا} س \text{جا} س + \text{جا}^2 س)}{(\text{جتا} س - \text{جا} س)} \, د س$

$= \int (1 + \frac{1}{2} \text{جا}^2 س) \, د س = س + \frac{1}{2} \times \frac{\text{جتا} 2س}{-2} + ج$

٢٦. $\int \text{جا} 2س \, \text{جتا} 2س - \text{جتا} 2س \, \text{جا} س \, د س$ حيث

$= \int \text{جا} 2س \, د س = \frac{-\text{جتا} 2س}{2} + ج$

٢٧. $\int \frac{س \, \text{ظا}^2 س - 2 \, \text{قا}^2 س}{3} \, د س$

$= \int س \left(\frac{\text{ظا}^2 س - \text{قا}^2 س}{3}\right) د س = \int \frac{-س}{3} \, د س$

$= -\frac{1}{3} \times \frac{س^2}{2} + ج = -\frac{س^2}{6} + ج$

٢٨. $\int \frac{5 \, \text{جا}^2 س + 5 \, \text{جتا}^2 س}{2 \, \text{جتا} 2س + 3} \, د س$ وزارة

$= \int \frac{5 (\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س)}{3 (2 \, \text{جتا} 2س + 1)} \, د س = \int \frac{1 \times 5}{2 (2 \, \text{جتا} 2س + 1)} \, د س$

$= \frac{5}{4} \, \text{ظا} س + ج$

٢٩. $\int \text{جتا} 4س \, \text{جتا} 2س + \text{جا} 4س \, \text{جا} 2س \, د س$ حيث

$= \int \text{جتا} 2س \, د س = \frac{\text{جا} 2س}{2} + ج$

٣٠. $\int \frac{\text{جتا} 2س}{\text{جتا} س} \, د س$

$= \int \frac{\text{جتا}(س + 2س)}{\text{جتا} س} \, د س$

$= \int \frac{\text{جتا} س \, \text{جتا} 2س - \text{جا} س \, \text{جا} 2س}{\text{جتا} س} \, د س$ طرح

$= \int \text{جتا} 2س - \frac{\text{جا} س \times 2 \, \text{جا} س \, \text{جتا} س}{\text{جتا} س} \, د س$

$= \int \text{جتا}^2 س - 2 \, \text{جا}^2 س \, د س$

$= \int (2 \, \text{جتا}^2 س - 1) - 2 (1 - \text{جتا}^2 س) \, د س$

$= \frac{\text{ظا} 2ك}{2} \, س + \frac{\text{جا} 2ك}{2} + ج$

٣١. $\int \frac{1 - \text{جتا}^3 س}{\text{جا}^2 س} \, د س$ تمرين

اكمل البرهان: $\frac{1}{4} \, \text{قا} س - \frac{1}{4} \, \text{ظا} س \, \text{جتا} س + ج$

$\int \frac{\text{جتا} 2س}{\text{جتا} س - \text{جا} س} \, د س$ البرهان

اكمل البرهان: $\text{جا} س + \text{جتا} س + ج$

الضرب بأطراف

$1 + \text{جا} س$ ، $1 - \text{قا} س$ بأطراف

٣٢. $\int \frac{\text{جا} س}{1 - \text{جا} س} \, د س$

$= \int \frac{\text{جا} س}{1 - \text{جا} س} \times \frac{1 + \text{جا} س}{1 + \text{جا} س} \, د س$ توزيع

$= \int \frac{\text{جا} س + \text{جا}^2 س}{1 - \text{جا}^2 س} \, د س = \int \frac{\text{جا} س + \text{جا}^2 س}{\text{جتا}^2 س} \, د س$

$= \int \text{قا} س \, \text{ظا} س + \text{ظا}^2 س \, د س$

$= \int \text{قا} س \, \text{ظا} س + \text{قا}^2 س - 1 \, د س$

$= \text{قا} س + \text{ظا} س - س + ج$

٣٣. $\int \frac{\text{قا}^2 س + 1}{\text{قا}^2 س - 1} \times \frac{\text{قا}^2 س \, د س}{\text{قا}^2 س + 1}$

$= \int \frac{\text{قا}^2 س + 1}{\text{ظا}^2 س} \, د س = \int \frac{\text{قا}^2 س}{\text{ظا}^2 س} + \frac{1}{\text{ظا}^2 س} \, د س$

$= \int \frac{1}{\text{جتا}^2 س} \times \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{جا}^2 س} + \text{ظتا}^2 س \, د س$

$= \int \text{قتا}^2 س + \text{ظتا}^2 س \, د س$

$= \int \text{قتا}^2 س + \text{قتا}^2 س - 1 \, د س$

$= -\text{ظتا} س + -\text{ظتا} س - س + ج$

٣٤. $\int \frac{\text{جتا}^2 س}{1 + \text{جا}^2 س \cdot \text{جتا}^2 س} \, د س$ مرافقه

الجواب : $س + \text{ظا} س + \text{ظتا} س + ج$

ب. $\int \text{جا}^2 س \, \text{قتا}^2 س \, د س$

الجواب : $س + \text{ظا}^2 س + ج$

٣٥. $\int \frac{1 - \text{جا} س}{1 + \text{جا} س} \, د س$ مرافقه المقام

$= \int \frac{1 - \text{جا} س}{1 + \text{جا} س} \times \frac{1 - \text{جا} س}{1 - \text{جا} س} \, د س$

$= \int \frac{1 - 2\text{جا} س + \text{جا}^2 س}{1 - \text{جا}^2 س} \, د س$

$= \int \frac{1 - 2\text{جا} س + \text{جا}^2 س}{\text{جتا}^2 س} \, د س$ توزيع

$= \int \text{قا}^2 س - 2 \, \text{قا} س \, \text{ظا} س + \text{ظا}^2 س \, د س$

$= \int \text{قا}^2 س - 2 \, \text{قا} س \, \text{ظا} س + \text{قا}^2 س - 1 \, د س$

$= \text{ظا} س - 2 \, \text{قا} س + \text{ظا} س - س + ج$

٣٦. $\int \frac{\text{جتا}^3 س}{1 - \text{جا}^2 س} \, د س$

الجواب : $\text{جا} س - \text{جا}^3 س + ج$

ب. $\int \text{جا}^3 س \, \text{قتا} س \, د س$

الجواب : $س + \text{جتا} س + ج$

ج. $\int (\text{قتا} س - \text{ظتا} س)^2 \, د س$

الجواب : $\text{ظتا} س - 2 \, \text{قتا} س + س + ج$

٣٧. $\int (\text{جا} س + \text{جتا} س)^4 \, د س$

د. $\int \frac{\text{جتا} 4 س}{(\text{جا} 2 س + \text{جتا} 2 س)^2} \, د س$

هـ. $\int \frac{1}{(\text{جا} س + \text{جتا} س)^2} \, د س$

الجواب : $\frac{1}{2} \text{ظا} 2 س - \frac{1}{2} \text{قا} 2 س + ج$

التكامل المحدود

مقدمة بسيطة :

$\int 3 س^2 \, د س = س^3 + ج$ تكامل غير محدود

$\int_{0.1}^{0.8} 3 س^2 \, د س = س^3 \Big|_{0.1}^{0.8} = (0.8)^3 - (0.1)^3$ تكامل محدود

$= 0.8 - 0.001 = 0.799$

وبما أنه يتم حذف $ج$ دائماً لذلك لا نضعها في المحدود ، وخطوات التكامل المحدود = نظيره لقواعد وخوارزمية التكامل (تعويض بحد الأسفل) - (تعويض بحد الأعلى).

* $\int_{ب}^{أ} \text{قا}(س) \, د س = \text{قا}(س) \Big|_{ب}^{أ}$

$= \text{قا}(أ) - \text{قا}(ب)$

حيث أ : الحد العلوي .

ب : الحد السفلي .

ملاحظة : التكامل غير المحدود = اقتران بدلالة س

التكامل المحدود = خاصية دائماً

خواص التكامل المحدود :-

١. $\int_{1}^{3} 2 س + 5 \, د س$

$= [س^2 + 5 س]_{1}^{3}$

$= (3^2 + 5 \cdot 3) - (1^2 + 5 \cdot 1)$

$= (24) - (6) = 18$

٢. $\int_{9}^{4} \frac{7}{\sqrt{x}}\,dx$ نخرج 7 للبسط

$= \int_{9}^{4} 7x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 7\times 2\sqrt{x}\,]_{9}^{4}$

$= 14\sqrt{x}\,]_{9}^{4} = (28) - (42) = -14$

٣. $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int_{1}^{8} x^{\frac{2}{3}}\,dx$

$= \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\,]_{1}^{8} = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}\,]_{1}^{8}$

$= \left(\frac{96}{5}\right) - \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{93}{5}$

٤. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \tan x\,dx$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \times \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx$

$= \left(\frac{1}{2}\times 1\right) - \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}\right) - (0) = \frac{1}{2}$

٥. $\int_{1}^{4} \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx$ نخرج

$= \int_{1}^{4} x + 5\sqrt{x} + 5\,dx = \frac{x^2}{2} + 5x\,]_{1}^{4}$

$= (8+20) - (\frac{1}{2}+5) = (28) - \left(\frac{11}{2}\right) = \frac{45}{2}$

٦. $\int_{2}^{4} \frac{5}{(x-1)^2}\,dx$ نخرج 5

$= \int_{2}^{4} 5(x-1)^{-2}\,dx = \frac{5(x-1)^{-1}}{-1\times 1}\,]_{2}^{4}$

$= -5(x-1)^{-1}\,]_{2}^{4} = \left(\frac{-5}{(4-1)}\right) - \left(\frac{-5}{(2-1)}\right)$

$= \left(-\frac{5}{3}\right) + 5 = \frac{10}{3}$

٧. $\int_{2}^{4} 6\,dx = 6x\,]_{2}^{4} = (24) - (12) = 12$

عكس استخدام قاعدة $\int_{a}^{b} c\,dx = c(b-a)$

بالمثل $\int_{2}^{4} 6\,dx = 6(4-2) = 12$

٨. $\int_{2a+3}^{a+1} 5\,dx = 40$ ، جد الثابت a؟

الطرف الأيمن $= 5x\,]_{2a+3}^{a+1} = 40$

$5(a+1) - 5(2a+3) = 40$

$5a + 5 - 10a - 15 = 40$

$-10a - 10 = 40 \Leftarrow -10a = 50$

$\Leftarrow a = \frac{50}{-10} = -5$

٩. $\int_{1}^{3} (x^2 + 2x^2 y)\,dy\,dx$

نبدأ بالتكامل الداخلي $\int_{1}^{2} x^2 y\,dy\,dx = \frac{x^2 y^2}{2}\,]_{1}^{2}$

$= \frac{4x^2}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{3x^2}{2}$

$= \int_{1}^{3} \left(x^2 + 2x\times\frac{3}{2}\right)dx$

$= \int_{1}^{3} x^2 + 3x\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\,]_{1}^{3}$

$= \left(9+\frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right) = (18) - \left(\frac{11}{3}\right)$

$= \frac{43}{3}$

١٠. جد $\int_{2}^{-1} (6x^2 - 4x + 1)\,dx$

نبدأ بالداخلي

$\int_{2}^{-1} 3x^2 - 4x + 1\,dx = x^3 - 2x^2 + x\,]_{2}^{-1}$

$= (-1-2-1) - (8-8+2) = (-4) - (2) = -6$

$\therefore \int 6x^2 + 4x + c\,dx$

$= \frac{6x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + cx + c$

$= 2x^3 + 2x^2 + cx + c$

العلاقة بين التفاضل والتكامل :-

١. $\int_{ج}^{ج} f(س)\,د س = ٠$ ، $ج \in [أ, ب]$

٢. $\int_{أ}^{ب} f(س)\,د س = -\int_{ب}^{أ} f(س)\,د س$

٣. $\int_{أ}^{ب} f(س)\,د س = \int_{أ}^{ج} f(س)\,د س + \int_{ج}^{ب} f(س)\,د س$

٤. خاصية التكامل المحدود = صفر.

٥. $\int$ تكامل $\cdot\, د س = f(س) + ج$

حيث $f(س)$: قاعدة اقترانية ...

أسئلة منوعة

١. $ص = \int_{١}^{٦} ٣س^{٢}\,د س + ٥$

حيث $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = ٢$

$\frac{د ص}{د س} = ٣س^{٢} + ٠$

$= ٣(٢)^{٢} + ٠ = ١٢$

٢. $ق(س) = \int ٣س^{٢} - ٤س + ٥\,د س$

حيث $ق(٣)$

$ق(س) = س^{٣} - ٢س^{٢} + ٥س$

$ق(٣) = ٢٧ - ١٨ + ١٥ = ٢٤$

٣. $ق(س) = \int ٤س^{٣} - ٣س^{٢}\,د س$

حيث $ق(-١)$

$ق(س) = س^{٤} - س^{٣}$

$ق(-١) = ١ - (-١) = ٢$

$ق(٣) = ٨١ - ٢٧ = ٥٤$

$ق(٣) - ق(-١) = ٥٤ - ٢ = ٥٢$

---

١١. $\int_{ج}^{ج} س(١-س)\,د س = ٠$ ، $ج \neq ٠$ ، $ج$ = ؟

$\int_{ج}^{ج} س - س^{٢}\,د س = \left[\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٣}}{٣}\right]_{ج}^{ج} = ٠$

$\left(\frac{ج^{٢}}{٢} - \frac{ج^{٣}}{٣}\right) - (\quad) = ٠$

$\frac{٣ج^{٢} - ٢ج^{٣}}{٦} = ٠ \Leftarrow ٣ج^{٢} - ٢ج^{٣} = ٠$

$ج^{٢}(٣ - ٢ج) = ٠$

$ج = \frac{٣}{٢}$ ، $ج \neq ٠$

١٢. $\int_{م}^{٢} ٣س^{٢}\,د س = -٣٠$ ، حيث $م$ ثابت

$س^{٣}\Big]_{م}^{٢} = -٣٠$

$٨ - م^{٣} = -٣٠$

$م^{٣} = ٣٨$

$م^{٣} - ٢م^{٢} = -٣٠$

$٢م^{٢} - م^{٣} - ٣٠ = ٠$

$م^{٢} - ٢م - ١٥ = ٠$

$(م - ٥)(م + ٣) = ٠$

$م = ٥$ ، $م = -٣$

١٣. $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{١ + ظا^{٢}س}{ظاس + ظتاس}\,د س$

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{ظا^{٢}س + ظتا^{٢}س + ٢ظاس ظتاس}{ظاس + ظتاس}\,د س$

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{(ظاس + ظتاس)(ظاس + ظتاس)}{(ظاس + ظتاس)}\,د س$

لأن $ظاس \cdot ظتاس = ١$

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} ١ظاس + ظتاس\,د س$ لا يوجد تكامل محدود

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} ظا^{٢}س + ظتا^{٢}س\,د س$

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} ١ + ظتا^{٢}س + ظتا^{٢}س\,د س$

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} ١ + ٢ظتا^{٢}س\,د س$

$= \frac{\pi}{١٢}$

تمرين : $م = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} ظا^{٢}س\,د س$ ، $ن = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} ظتا^{٢}س\,د س$

حيث : $م + ن$ ؟

الجواب : $\frac{\pi}{٣}$

٤. $\int$ قتا(س) . ظتا(س) دس = جتا^{2}س − ٢ جتاس + ١

فأوجد قتا$\left(\frac{\pi}{4}\right)$: إذا كان جذرا المقدار المميز صفراً ؟

نشتق المقدار المميز

قتا(س) = ٢ (جتاس)^{1} × (−جاس) − ٢ × جتاس

قتا$\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = ٢ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ − ٢ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{1}{2}$ − $\frac{2}{\sqrt{2}}$

∴ = $\frac{1}{2}$ − $\frac{2\sqrt{2}}{2}$ = −١

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ = ١ − ← $\sqrt{2}$ = ٢

٥. قا(١) = ٤ ، قا(٢) = ١٢ ،

$\int_{1}^{2}$ ٢ قتا(س) . دس = ١٦ ، جد ٢ ؟

$\int_{1}^{2}$ ٢ قتا(س) . دس = ٢ قا(س)]$_{1}^{2}$

٢ قا(٢) − ٢ قا(١) = ١٦

٢ × ١٢ − ٢ × ٤ = ١٦ ← ٢ = ٢

٦. قا(س) = س^2 + $\int$ $\frac{2س}{س^2+٧}$ دس ، $\int_{0}^{1}$ $\frac{5س^2}{س^3+٩}$ دس

جد قا(١) ؟

قتا(س) = ٢س + $\frac{2س}{س^2+٧}$ ∴

قتا(١) = ٢ + $\frac{2}{8}$ = ٢ + $\frac{1}{4}$ = $\frac{9}{4}$

٧. قا(س) = س^3 − $\int$ (٢س^2 − $\int_{0}^{س}$ ٢ قا(ص) دص) دس

جد قتا(س) ؟

قتا(س) = ٣س^2 − (٢س^2 − ٢ قا(س))

قتا(س) = ٣س^2 − ٢س^2 + ٢ قا(س)

٨. ص = $\int$ ($\int$ ٤ دس − ٢س) دس

عندما س = ٠ ، ص = ٠

ص = $\int$ (٤ − ٢س) دس

$\frac{دص}{دس}$ = ٤ − ٢س

٩. قتا(س) = ٢ س − ٣ جد

قا(٢) − قا(١)

نشتق تكامل طرفين

$\int$ قتا(س) دس = $\int$ ٢ س − ٣ دس

قتا(س) = س^2 − ٣س + ج

نجد قا(٢) − قا(١)

(٤ − ٦ + ج) − (١ − ٣ + ج)

(−٢ + ج) − (−٢ + ج) = صفر

١٠. $\int$ قتا(س) + ٣ س^2 دس = ٢ س^3 ، قا(٢) = ٥

قتا(١) = ١ ، جد قا(١) ؟

نجد المشتقة للطرفين

قتا(س) + ٢ س = ٦ س^2 ، أجد ٢

قتا(١) + ٢ × ١ = ٦ × ٢

١ + ٢ = ٢ ← ٢ = ١

كذلك قتا(س) + ٢ س = ١٢ س^2

قتا(س) = ٢ كا^2 − ٢ كا نوجد تكامل طرفين

$\int$ قتا(س) . دس = $\int$ ٢ كا^2 − ٢ كا . دس

قا(س) = ٢ كا^3 − ٢ كا + ج

نجد جـ حيث قا(٠) = ٨ − ٤ + ج = ٥

٤ + ج = ٥

ج = ١

∴ قا(س) = ٢ كا^3 − ٢ كا + ١

نجد قا(١) = ١ − ١ + ١ = ١

١١. $\int$ ٢ (١ + قا(س)) . دس = س^3 + ٢ س^2 − ٣ س + ٩

قا(١) = ٨ ، جد ٢ بالمثابة ؟

← نشتق الطرفين

٢ + قا(س) = ٣ ٢ س^2 + ٢ س − ٣

٢ + قا(١) = ٦ ٢ + ٢ − ٣

٢ + ٨ = ٦ ٢ + ٢ − ٣

١٠ = ٦ ٢ − ١ ← ٦ ٢ = ١١ ← ٢ = $\frac{11}{6}$

لا تنسى بالبسملة

$\int$ قـ(س) ٥ س = عـ(س) + ج

$\frac{ك}{س^{ن}}$ $\int$ عـ (س) ٠ س = عـ(س)

١٢. عـ(س) = ٣ س^{٢} − ٢ ك + ٧ ، حيث قاعدة الاقتران عـ(س) عندما س = ٢ تمر بالنقطة (٠، ٣) ؟

الحل: $\int$ قـ(س) ٠ س = $\int$ (٣ س^{٢} − ٢ ك + ٧) ٠ س

عـ(س) = س^{٣} − ٢ ك س + ٧ س + ج

بتعويض عـ(٠) = ٣ ⟵ ٠ − ٠ + ٠ + ج = ٣

ج = ٣

∴ عـ(س) = س^{٣} − ٢ ك س + ٧ س + ٣

١٣. إذا كان قـ(س) = ٦ س ، وكان ع يمر بالنقطة (١، ٢) بالمشتقة الأولى ، وكان عـ(س) يمر بالنقطة (٠، ٣) ، حيث قاعدة الاقتران عـ(س) .

$\int$ قـ(س) ٠ س = $\int$ ٦ س ٠ س

قـ(س) = ٣ س^{٢} + ج

بتعويض ⟵ قـ(١) = ٢ ⟵ ٣ + ج = ٢ ⟵ ج = −١

∴ قـ(س) = ٢ س^{٣} − ١

نوجد تكامل طرفي المعادلة الأخيرة ——

$\int$ قـ(س) ٠ س = $\int$ (٢ س^{٣} − ١) ٠ س

عـ(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} − س + ج ، بتعويض

عـ(١) = ٣ ⟵ $\frac{١}{٢}$ − ١ + ج = ٣ ⟵ ج = ٣ $\frac{١}{٢}$

∴ عـ(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} − س + ٣ $\frac{١}{٢}$

١٤. قـ(س) = $\frac{٦}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$ ، حيث عـ(٨) = ١١ ، عـ(١) = ٥ ، أجد عـ(س)

الحل: $\int$ قـ(س) ٠ س = $\int$ ٦ س$^{-\frac{٢}{٣}}$ ٠ س

عـ(س) = $\frac{٦ س^{\frac{١}{٣}}}{\frac{١}{٣}}$ + ج

عـ(س) = ١٨ $\sqrt[٣]{س}$ + ج

بتعويض ⟵ عـ(١) = ٥ ⟵ ١٨ + ج = ٥

ج = −١٣

بتعويض ⟵ عـ(٨) = ١٨ $\sqrt[٣]{٨}$ − ١٣ = ٣١

١٥. قـ(س) = س + ط س ، كان ميل المماس عند (١، ١) الواقع على منحنى عـ(س) يساوي ٢ ، أجد قاعدة عـ(س) ؟

الحل: $\int$ قـ(س) ٠ س = $\int$ (س + ط س) ٠ س

عـ(س) = $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ط س + ج

بتعويض

قـ(١) = $\frac{١}{٢}$ + ط + ج = ٢

ج = ٢

∴ $\int$ قـ(س) ٠ س = $\int$ ($\frac{س^{٢}}{٢}$ + ط س + ٢) ٠ س

عـ(س) = $\frac{س^{٣}}{٦}$ + ط س^{٢} + ٢ س + ج

بتعويض

عـ(١) = ١ ⟵ $\frac{١}{٦}$ + ط + ٢ + ج = ١

ج = ٠

∴ عـ(س) = $\frac{س^{٣}}{٦}$ + ط س^{٢} + ٢ س

انتهى الحل

١٦. ج $\int$ ق(س) د س = جتا س − جا س + ٣

اثبت أن ق($\frac{\pi}{2}$) − ق(٠) = ٢

الحل: نشتق ق(س) = جتا س + جا س

ق'(س) = − جا س + جتا س

المطلوب ق($\frac{\pi}{2}$) = جتا $\frac{\pi}{2}$ + جا $\frac{\pi}{2}$ = ١

ق($\frac{\pi}{2}$) = − جا $\frac{\pi}{2}$ + جتا $\frac{\pi}{2}$ = −١

∴ ق($\frac{\pi}{2}$) − ق($\frac{\pi}{2}$) = ١ − (−١) = ٢ ✓

١٧. إذا كان ق'(س) = − ٤ جا ٢س ، وكان منحنى ق(س) يمر بالنقطة (٠، ٤) ، فجد قاعدة ق(س) ؟

الجواب: ق(س) = جتا ٢س − ١

ب) ج $\int$ ق(س) د س = ٢س^٣ − ٤س + ٦

حيث ق(١) عظمى = أ ، ق(٠) = −٣

١٨. جد كثير حدود من الدرجة الثالثة (ق(س)) حيث ج $\int_{١}^{١}$ ق(س) د س = ٤ ،

ج $\int_{١}^{٣}$ ق(س) د س = ٢

الحل: ق(س) = ٣ب س^٢ + ب

ج $\int_{١}^{١}$ ٣ب س^٢ + ب د س = ٤ ⟹ ٢ب + ب = ٤

⟹ ب = ٢ ⟹ ٣ب = ٤ ⟹ ب = $\frac{٤}{٣}$

∴ ق(س) = ٣ س^٣ + $\frac{٤}{٣}$ س + ج

ج $\int_{١}^{٣}$ ٣ س^٣ + $\frac{٤}{٣}$ س + ج د س = ٢

(٨١ + ٣٦ + ٣ج) − ($\frac{٣}{٤}$ + $\frac{٤}{٦}$ + ج) = ٢

ج = −٢٩ ⟹ ٣ج = −٨٧

∴ ق(س) = ٣ س^٣ + $\frac{٤}{٣}$ س − ٨٧

١٩. جد كثير حدود من الدرجة الثالثة

حيث ق(٠) = ٥ ، ق'(س) = ٤ ،

ج $\int$ ق'(س) د س = ٣ ، جد ق(س) ؟

الحل: ق(س) = ٢ س^٢ + ب س + ج

نجد أ من التكامل لأن الذي معنا الاشتقاق

ج $\int$ ق'(س) د س = ج $\int$ ٤ د س

ق(س) = ٤ س + ء ⟹ نجد ج

ج $\int_{٠}^{٣}$ ٤ س + ء د س = ٣ ⟹ [٢ س^٢ + ء س]$_{٠}^{٣}$ = ٣

٢ س^٢ + ء س |$_{٠}^{٣}$ = ٣

(١٨ + ٣ء) − (٠ + ٠) = ٣

ء = ١

∴ ق(س) = ٤ س + ١

نجد ج $\int$ ق(س) د س = ج $\int$ ٤ س + ١ د س

ق(س) = ٢ س^٢ + س + ء

نجد ج ⟸ ق(٠) = ٠ + ٠ + ء = ٥

ء = ٥

∴ ق(س) = ٢ س^٢ + س + ٥

٢٠. إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (س، ص) يعطى بـ ٢س + ٨ ، فما قاعدة ق(س) علما بأن منحنى ق يمر بالنقطة (−٢، ٣) ؟

الحل: ج ميل المماس د س = ج $\int$ ٢س + ٨ د س

ق(س) = س^٢ + ٨س + ء

نجد ء

ق(−٢) = ٤ − ١٦ + ء = ٣

ء = ١٥

∴ ق(س) = س^٢ + ٨س + ١٥

مرتب

٢١. اذا كان ميل المماس للمنحنى ق(س) عند اي نقطة مثل (س، ص) يساوي مربع المسافة بين هذه النقطة، جد قاعدة ق(س) علما بان ق يمر بالنقطة (-١، ٣)

الحل: $م = س^2 \times$ ثابت $= -١$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{\text{ميل المماس}}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س^2} \leftarrow ق(س) = \frac{-١}{س}$$

$$\therefore ق(س) = \int \frac{-١}{س^2} \, دس$$

$$ق(س) = \int -س^{-2} \, دس$$

$$= \frac{-١}{-١} س^{-١} + ج$$

$$\therefore ق(س) = \frac{١}{س} + ج \quad \text{نجد ج}$$

$$ق(-١) = \frac{١}{-١} + ج = ٣ \leftarrow ج = ٤$$

$$\therefore ق(س) = \frac{١}{س} + ٤$$

٢٢. مرتب ق. اذا كان ق(س) يمر بالنقطة (١، ٩) وماميل ضمن ميل المماس لمنحنى ق(س) عند اي نقطة عليه في هذه المسافة الى اليمين طوله نقطة يساوي (٤) جد قاعدة ق(س).

الجواب: $ق(س) = ٨\sqrt{س} + ١$

ب. ق كثير حدود درجته ثلاثة، ق(١) = ٥، ق(٣) = ٤، ق(-١) = ٥

الجواب: $ق(س) = ٢س^3 + س + ٥$

٢٣. اذا كان

$$\int_{هـ-ك}^{هـ+ك} ٣ \, دس = \sqrt{١٣٦}$$ ، هـ محورة

جد ن؟

الجواب: $ن = \frac{٣\pi}{٣} + ٣\pi ك$

$$ن = \frac{\pi}{٣} + ٣\pi ك$$

حيث ك عدد صحيح موجب ...

٢٤. اذا كان

$$ل = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} ظا^٢ س \, دس$$

$$ق = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} قتا^٢ س \, دس$$

جد ق + ل؟

الجواب $\frac{\pi}{٤} - ١$

معكوس المشتقة

شرح بسيط: اذا كان ق(س) = ٢س جد الاقتران الذي مشتقته ق(س)؟

الحل: م(س) = س^٢ + ٣ لان م(٢) = ٧

م(س) = س^٣ + ٧ + ٣ لان م(٣) = ٣٧

م(س) = س^٣ - ١١ + ٣ لان م(٣) = ٣٧

حيث م(س) معكوس المشتقة.

ملاحظات

١. ن هو عدد الاقترانات التي اختلف بثابت

معكوس المشتقة لـ ق(س).

٢. ن هو عدد الاقترانات التي اختلف بثابت

المشتقة = عددها

٣. لجد ق(س) بالقاعدة ق(س) = ...

تعريف :- إذا كان f اقترانًا متصلًا على الفترة $[a, b]$ ، فإن $m(x)$ يسمى اقترانًا معكوسًا لمشتقة الاقتران $f(x)$ إذا كان

$$m'(x) = f(x)$$

لكل $x \in (a, b)$

والتكامل $\int f(x)\,dx = m(x) + c$ حيث $m(x)$: معكوس لمشتقة

أسئلة منوعة

١. بيّن أن $m(x)$ هو معكوس لمشتقة $f(x)$ فيما يلي :-

(أ) $m(x) = x^5 + 4x^2 + c$

$f(x) = 5x^4 + 8x$

الحل: f متصل على $\mathbb{R}$ لأنه كثير حدود

$m'(x) = 5x^4 + 8x = f(x)$

$\therefore m(x)$ معكوس لمشتقة $f(x)$.

(ب) $m(x) = \frac{x}{1+x}$

$f(x) = (1+x)^{-2}$ ، $x \neq -1$

الحل: f متصل على مجاله

$$m'(x) = \frac{(1)(1+x) - x(1)}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = f(x)$$

حيث $m'(x) = f(x)$ ، $f(x)$ معكوس لمشتقة $f(x)$

٣. $m(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3 + c$

معكوس لمشتقة $f(x)$ حيث $f(3)$ ، $f(5)$ ؟

الحل: $m'(x) = f(x) = 3x^2 + 4x - 5$

$\therefore f(x) = x^2 + 2x - 1$

المطلوب: $f(3) = 9 + 6 - 1 = 14$

، $f(5) = 25 + 10 - 1 = 34$

٤. $m(x)$ ، $h(x)$ معكوسين لمشتقة $f(x)$ ، حيث $h(1) = 6$ فإن الدالة المشتقة حيث $f(1) =$

١. $h(x) = 5f(x) - m(x)$

$h'(x) =$ صفر (غير دالة x) ؟

$h'(1) =$ صفر

٢. $h(x) = m(x) - 5f(x) + x^3$

$h'(x) =$ صفر $+ 3x^2$

$h'(1) = 0 + 3 = 3$

٣. $h(x) = 5m(x) - 3f(x) + x^2$

$h'(x) = 5f(x) - 3f(x) + 2x$

$h'(1) = 2f(1) + 2 = 12 + 2 = 14$

٤. $h(x) = 6x\,m(x) - 4f(x) + \sqrt{x}$

$h'(x) = 6m(x) + 6x f(x) - 4f(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$h'(1) = 6f(1) + 6m(1) - 4f(1) + \frac{1}{2}$

$= 2f(1) + 6m(1) + \frac{1}{2}$

$= 24 + 6(6) + \frac{1}{2} = \frac{109}{2}$

٥ . $هـ(س) = ١ + ظتا س$ ، وكان
$م(س)$ معكوسا لـ $هـ(س)$ ،
جد $م'(\frac{\pi}{٤})$ ؟

الحل: $م(هـ(س)) = س$

$م'(هـ(س)) \times هـ'(س) = ١$

$م'(س) = -$ قتا^٢ س

$م'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{-١}{هـا^٢ س}$

$= \frac{-١}{(هـا \frac{\pi}{٤})^٢} = -٢$

٦ . $م(س)$ ، $ل(س)$ معكوسين لمشتقة
$هـ(س)$ وكان

$م(س) = س^٣ - ٣س + ٤$ ، $ل(١١) = ١٠$

جد $ل'(س)$.

الحل: $م(س) - ل(س) = ج$ (عدد ثابت)

$ل(س) = م(س) - ج$

$ل(س) = س^٣ - ٣س + ٤ - ج$

لكن $ل(١) = ١ - ٣ + ٤ - ج = ١٠$

$ج = -٧$

$\therefore ل(س) = س^٣ - ٣س + ١١$

٧ . $م(س)$ ، $هـ(س)$ معكوسين
لمشتقة $هـ(س)$ ، اثبت ان
$م(س) - هـ(س) =$ ثابتة .

الحل: $م'(س) = هـ(س)$ ، $هـ'(س) = هـ(س)$

$\therefore م'(س) - هـ'(س) = هـ(س) - هـ(س)$

$م'(س) - هـ'(س) =$ صفر

$(م(س) - هـ(س))' =$ صفر

$($ ثابت $)' =$ صفر

$\therefore م(س) - هـ(س) =$ ثابتة .

٨ . $م(س)$ ، $هـ(س)$ معكوسين
لمشتقة $هـ(س)$ ، كان
$م(س) - هـ(س) = ١٠$ ، جد
$\int_{١}^{٣} م(س) \, د س$ بدلالة $\int_{١}^{٣} هـ(س) \, د س$

الحل: نعلم أن $م(س) - هـ(س) = ج$

$\therefore \int_{١}^{٣} (م(س) - هـ(س)) \, د س = \int_{١}^{٣} ج \, د س$

$\therefore \int_{١}^{٣} م(س) \, د س - \int_{١}^{٣} هـ(س) \, د س = ج س \Big]_{١}^{٣}$

$\therefore ١٠ = ٢ج$

$\therefore ج = ٥$

المطلوب $= ٢ج = ١٠$

خصائص التكامل :-

بفرض $م$ ثابت

(١) الحدود : $\int_{م}^{م} هـ(س) \, د س =$ صفر

(٢) قلب الحدود : $\int_{م}^{ب} هـ(س) \, د س = - \int_{ب}^{م} هـ(س) \, د س$

عند قلب حدود التكامل تغير الإشارة

(٣) أنواع الثابت : $\int_{م}^{ب} ج \times هـ(س) \, د س = ج \int_{م}^{ب} هـ(س) \, د س$

(٤) التوزيع : يوزع التكامل على الجمع والطرح وعكسه اطرح الثابت خارج التكامل .

(٥) خاصية الإضافة : $\int_{م}^{ب} هـ(س) \, د س = \int_{م}^{ج} هـ(س) \, د س + \int_{ج}^{ب} هـ(س) \, د س$

تحذير شديد : $\int_{أ}^{ب} هـ(س).دس = صفر$ ليس شرطاً "أ = ب" .

مثال ١: $\int_{-٢}^{٢} س^٣ - ١.دس = صفر$ (حل بسؤال)

مع ان الحد الادنى ≠ الحد الاعلى.

مثال ٢ أوجد: $\int_{-م}^{م} س^٢ - س.دس = صفر$ حيث م ≠ ٠

$\frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٢}{٢}]_{-م}^{م} = ٠$

$\frac{م^٣}{٣} - \frac{م^٢}{٢} - (\frac{-م^٣}{٣} - \frac{م^٢}{٢}) = ٠$

$\frac{٢م^٣}{٣} - ٢م^٢ = ٠$

$م^٢(\frac{٢م}{٣} - ٢) = ٠$

$م = ٠$ (مرفوض) $\frac{٢م}{٣} = ٢$

لان م ≠ احدى حدود التكامل (أكبر أو أصغر)

مثال ٣: $\int_{١}^{م} ٢س.دس = ٠$ ، حيث م

$س^٢]_{١}^{م} = ٠$

$م^٢ - ١ = ٠ \leftarrow م^٢ = ١ \leftarrow م = \pm ١$

مثال ٤: $\int_{-٢}^{٢} (-٣س^٢ + ٧س^٤).دس$ = صفر، جد ج

الحل: $-س^٣ + \frac{٧س^٥}{٥}]_{-٢}^{٢} = ٠$

$(-٨ + \frac{٢٢٤}{٥}) - (٨ - \frac{٢٢٤}{٥}) = ٠$

$\frac{-٤٠ + ٢٢٤}{٥} - \frac{٤٠ + ٢٢٤}{٥} = ٠$

$\frac{-٨٠}{٥} = ٠$ ← تحتاج تكملة

بالتجريب ج = ١ تحقق تكملة

$ج^٢ + ٧ج + ٦ = ٠$

$(ج + ٦)(ج + ١) = ٠$

ج = -٦ ، ج = -١

مثال ٥: إذا كان $\int_{١}^{٣} هـ(س).دس = ٤$ ،

فجد $\int_{٣}^{١} (٥هـ(س) - ٢س).دس$

الحل: المعطى جاهز

المطلوب:

$٥\int_{٣}^{١} هـ(س).دس - \int_{٣}^{١} ٢س.دس$

$= ٥ \times -٤ - س^٢]_{٣}^{١}$

$= -٢٠ - (١ - ٩)$

$= -٢٠ - (-٨) = -١٢$

مثال ٦: إذا كان $\int_{٢}^{٥} هـ(س).دس = ٦$

$\int_{٢}^{٥} \frac{هـ(س)}{٢}.دس = \frac{١}{٢} \times ٦ = ٣$

$\int_{٥}^{٢} ٥هـ(س) - ٧هـ(س) + ٣دس$

الحل: خواص التكاملات

$\int_{٥}^{٢} هـ(س).دس = -٣$ | $\int_{٢}^{٥} هـ(س).دس = ٣$

المطلوب:

$٥\int_{٥}^{٢} هـ(س).دس - ٧\int_{٥}^{٢} هـ(س).دس + \int_{٥}^{٢} ٣دس$

$٥ \times ٣ - ٧ \times ٣ + س]_{٥}^{٢}$

$١٥ - ٢١ + ٤ = -٨$

مثال ٧: $\int_{٢}^{٥} (هـ(س) + ٢).دس = ٩$ ، $\int_{٥}^{٢} ٣هـ(س).دس = -٣$

جد $\int_{٢}^{٥} ٤هـ(س).دس$

الحل: خواص التكاملات $\int_{٢}^{٥} هـ(س).دس + \int_{٢}^{٥} ٢.دس = ٩$

$\int_{٢}^{٥} هـ(س).دس + ٦ = ٩ \leftarrow \int_{٢}^{٥} هـ(س).دس = ٣$

$\int_{٢}^{٥} هـ(س).دس = -٤$

المطلوب $\int_{٢}^{٥} ٤هـ(س).دس = ٤ \times -٤$

$= -١٦$

مثال : جد $\int_1^3 \frac{1}{2}(هـ(س) - 3س^2)\,د س$

الحل : بخواص التكامل

$= \frac{1}{2}\int_1^3 هـ(س)\,د س + \int_1^3 (-\frac{3}{2}س^2)\,د س$

$= \frac{1}{2}\int_1^3 هـ(س)\,د س - \frac{3}{2}\int_1^3 س^2\,د س$

$= \frac{1}{2}\int_1^2 هـ(س)\,د س + \frac{1}{2}\int_2^3 هـ(س)\,د س - \frac{3}{2}\left[\frac{س^3}{3}\right]_1^3$

$= \frac{1}{2}\int_1^2 هـ(س)\,د س + \frac{1}{2}\int_2^3 هـ(س)\,د س - \frac{3}{2}(9 - \frac{1}{3})$

$= \frac{1}{2}(-6) + \frac{1}{2}(4+1) - \frac{3}{2}(\frac{26}{3})$

$= -3 + \frac{5}{2} - 13$

$= -\frac{27}{2}$

المطلوب

$\frac{1}{2}\int_1^2 هـ(س)\,د س - \int_2^3 2س\,د س$

$\frac{1}{2}\times\frac{5}{2} - [س^2]_2^3$

$\frac{5}{4} - (9-4)$

$\frac{5}{4} - 5 = \frac{-15}{4}$

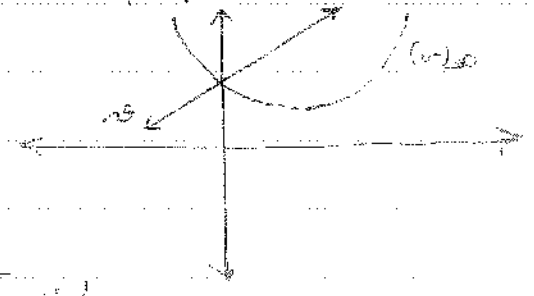
مثال : ١. $\int_1^3 (\frac{1}{3}هـ(س) + 3)\,د س$

جد $\int_1^3 (4هـ(س) - 2س)\,د س$

٢. الشكل المجاور يمثل منحنى $هـ(س)$،

$هـ(س) = س + 2$ ،

$هـ(س) = 2س - س^2$ جد $\int_1^3 هـ(س)\,د س$



الجواب

أسئلة على خاصية الإضافة :

١. إذا كان $\int_2^6 هـ(س)\,د س = 6$ ،

$\int_2^5 هـ(س)\,د س = 9$ ، احسب $\int_5^6 هـ(س)\,د س$

الحل : $\int_2^6 هـ(س)\,د س = \int_2^5 هـ(س)\,د س + \int_5^6 هـ(س)\,د س$

$6 = 9 + \int_5^6 هـ(س)\,د س$

$\int_5^6 هـ(س)\,د س = 6 - 9 = -3$

٢. $\int_1^4 \frac{هـ(س)}{4}\,د س = 1$ ، $\int_4^6 8هـ(س)\,د س = 24$

احسب $\int_1^6 (5هـ(س) - 2)\,د س$

الحل : بخواص التكامل

$\int_1^6 هـ(س)\,د س = \int_1^4 هـ(س)\,د س + \int_4^6 هـ(س)\,د س = 4$

المطلوب $= 5\int_1^6 هـ(س)\,د س - \int_1^6 2\,د س$

$= 5(\int_1^4 هـ(س)\,د س + \int_4^6 هـ(س)\,د س) - 12$

$= 5(-4+3) - 12 = -17$

٣. $\int_3^5 \frac{هـ(س)}{3}\,د س = -2$ ،

$\int_3^5 (2هـ(س) + 3)\,د س = -17$ ،

جد $\int_5^9 (4هـ(س) - 1)\,د س$ ١٢

ب. $\int_1^8 هـ(س)\,د س = 10$

جد $\int_1^5 هـ(س)\,د س - \int_8^5 هـ(س)\,د س$ ١٠

ج. $\int_1^4 \frac{هـ(س)}{2}\,د س = 4$ ،

$\int_{10}^1 هـ(س)\,د س + 2\int_1^4 هـ(س)\,د س = 9$ ، جد

$\int_{10}^4 (هـ(س) + 3\sqrt{2})\,د س$ -٧

٤ ·

٥ ·

٦ ·

خاصية المقارنة :-

* إذا كان $هـ(س)$ قابلاً للتكامل على $[أ، ب]$ وكان
١) $هـ(س) \geq ٠$ ، $\forall س \in [أ، ب]$ فإن $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,د س \geq$ صفر
٢) $هـ(س) \leq ٠$ ، $\forall س \in [أ، ب]$ فإن $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,د س \leq$ صفر

* إذا كان $هـ$ ، $ه$ اقترانين قابلين للتكامل مع $[أ، ب]$ وكان $هـ(س) \geq ه(س)$ في $[أ، ب]$ فإن $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,د س \geq \int_{أ}^{ب} ه(س)\,د س$

* إذا كان $هـ(س)$ قابلاً للتكامل على $[أ، ب]$ وكان $ل \leq هـ(س)$ لكل $س \in [أ، ب]$ ، فإن $\int_{أ}^{ب} ل\,د س \leq \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,د س$

سنتدرس خاصية المقارنة من عدة جوانب :-

أولاً : نستخدم خاصية المقارنة بالحالتين الأولى والثانية عندما يكون السؤال كالتالي :-

١. الحيز أسفل $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,د س$

$د س$ هي $ب$ لتكامل من :

بسيط $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,د س \leq$ صفر

أو $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,د س \geq$ صفر

طريقة الحل :

أسئلة :

١. دون حساب التكامل اثبت العبارة التكاملات التالية :-

(أ) $\int_{-3}^{1} (س^2 + 3)\, دس$

نفرض $ع(س) = س^2 + 3$ ، $س \in [-3, 1]$

نبحث في $س^2 + 3 = 0$ ⟸ $س^2 = -3$ (مستحيل)

إشارة ع(س)	+ + + +
	$س^2 + 3$
	$-\infty$ ∞

⟸ ع(س) ≥ صفر على $[-3, 1]$

⟸ $\int_{-3}^{1} ع(س)\, دس \geq$ صفر

(ب) $\int_{-2}^{2} (س^2 - 9)\, دس$

نفرض $ع(س) = س^2 - 9$ ، $[-2, 2]$

نبحث في الإشارة $س^2 - 9 = 0$ ⟸ $س = \pm 3$

⟸ عندما $س^2 - 9 \leq$ صفر

⟸ $\int_{-2}^{2} (س^2 - 9)\, دس \leq$ صفر

(ج) $\int_{2}^{5} \frac{س^2 - 1}{س + 5}\, دس$

نفرض $ع(س) = \frac{س^2 - 1}{س + 5}$ ، $[2, 5]$

إشارة البسط	- - - - - - + +
إشارة المقام	- - - + + + + +
إشارة المقدار	+ + + - - - + +
	$-\infty$ -5 -1 1 ∞

⟸ ع(س) ≤ صفر

⟸ $\int_{2}^{5} ع(س)\, دس \leq$ صفر

٢. دون حساب التكامل بين أيهما

(أ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sin س)\, دس$ ≤ صفر

(ب) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin س \cdot دس$ ≥ صفر

الحل :

(أ) نفرض $ع(س) = 1 + \sin س$ ، $س \in [0, \frac{\pi}{4}]$

طبعاً نعلم أن $-1 \leq \sin س \leq 1$ نضيف 1

$0 \leq 1 + \sin س \leq 2$ يعني

$0 \leq ع(س) \leq 2$

بما أن $ع(س) \geq 0$ على $[0, \frac{\pi}{4}]$

⟸ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} ع(س)\, دس \geq$ صفر

⟸ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sin س)\, دس \geq$ صفر

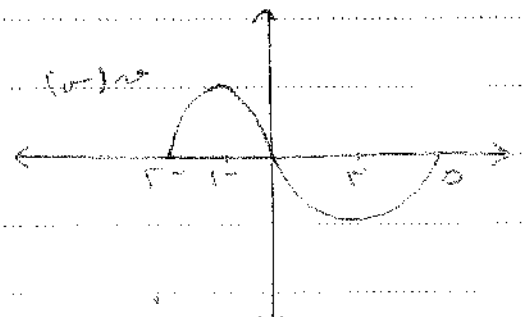
(ب) نفرض $ع(س) = \sin س$ ، $س \in [0, \frac{\pi}{4}]$

بما أن الدالة تقترن ضمن الربع الأول

$\therefore \sin س \geq$ صفر

يعني $ع(س) \geq 0$ ⟸ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin س \cdot دس \geq$ صفر.

٣. ع ، شكل المجاور الذي يمثل منحنى ع(س) على $[-3, 5]$ ، أجب عن الأسئلة التالية :-



(أ) . اكتب قيم $\int_{-3}^{5} ع(س)\, دس$

بما أن : ع(س) ≥ صفر على $[-3, 5]$ لذا فإن ع(س) يقع فوق محور السينات

وبالتالي $\int_{-3}^{5} ع(س)\, دس \geq$ صفر

(٢) : اكتب اشارة $\int_{-3}^{5} هـ(س)\,د س$

الحل : $هـ(س)$ متصل على $[-3, 5]$ لأنه

معكوس $هـ(س)$ غير موجود عند $س = 0$ والتالي

$\int_{-3}^{5} هـ(س)\,د س$ يمر بـ $س = 0$ ∈ المجال .

(٣) : اكتب اشارة $\int_{-3}^{-1} هـ(-س)\,د س$

الحل : بما أن $هـ(س)$ متزايد على $[-3, -1]$

$\Rightarrow هـ(س) < 0$ على المجال

$\Rightarrow \int_{-3}^{-1} هـ(س)\,د س < 0$

ملاحظة : نستخدم الحالة الثالثة لهذه المقارنة عندما يكون نفس الدستور كالتالي :

① : للمقارنة بين تكاملين نقارن كل $هـ$

$\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,د س$ ، $\int_{أ}^{ب} هـ(-س)\,د س$

② : بين أن $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,د س \le \int_{أ}^{ب} هـ(-س)\,د س$

دون حساب التكامل .

أسئلة :-

١. دون حساب التكامل بين أن

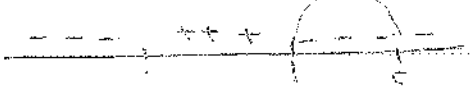
$\int_{1}^{2} س\,د س \ge \int_{1}^{2} س^2\,د س$

الحل : نفرض أن $هـ(س) = س$ ، $ل(س) = س^2$

$ل(س) = س - س^2$ على $[1, 2]$

نفرض أن $ل(س)$ على $[1, 2]$

$س - س^2 = 0 \Leftrightarrow س = 0$ ، $س = 1$



$\Rightarrow ل(س) \le 0$ على $[1, 2]$

$\Rightarrow -ل(س) \ge 0$ على $[1, 2]$

$\Rightarrow \int_{1}^{2} (-ل(س))\,د س \ge 0$

$\Rightarrow \int_{1}^{2} هـ(س)\,د س - \int_{1}^{2} ل(س)\,د س \ge 0$

$\Rightarrow \int_{1}^{2} هـ(س)\,د س \ge \int_{1}^{2} ل(س)\,د س$

$\Rightarrow \int_{1}^{2} س\,د س \ge \int_{1}^{2} س^2\,د س$

٢. دون حساب التكامل بين أن

$\int_{-2}^{0} (س^2 + 4)\,د س < \int_{-2}^{0} 3س\,د س$

الحل : نفرض أن $هـ(س) = س^2 + 4$ ، $ل(س) = 3س$

$ل(س) - هـ(س) = -س^2 + 3س - 4$

نفرض أن $ل(س) - هـ(س) = 0$

$\Leftarrow -س^2 + 3س - 4 = 0$

$\Leftarrow س = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{-2}$ لا يوجد حل

$\therefore ل(س) - هـ(س) < 0$ لكل $س \in ح$

$\Rightarrow ل(س) < هـ(س)$ على $[-2, 0]$

$\Rightarrow هـ(س) - ل(س) > 0$ على $[-2, 0]$

$\Rightarrow \int_{-2}^{0} (هـ(س) - ل(س))\,د س > 0$

$\Rightarrow \int_{-2}^{0} (س^2 + 4 - 3س)\,د س > 0$

$\Rightarrow \int_{-2}^{0} (س^2 + 4)\,د س > \int_{-2}^{0} 3س\,د س$

ثالثاً : إذا كان $ل \le هـ(س)$ على $[أ, ب]$ فإن

لكل $س \in [أ, ب]$ فإن

$\int_{أ}^{ب} ل\,د س \le \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,د س \le \int_{أ}^{ب} ك\,د س$

ونستخدم هذه الحالة للإجابة عن الأسئلة :

① : إثبات أن التكامل يقع بين عددين

② : جد أقل قيمة وأكبر قيمة للتكامل

التالي :

الحل : $٢ \le هـ(س) \le 9$ نعوض أكبر

أقل قيمة للمقدار على $هـ$

أكبر قيمة للمقدار على $هـ$

تذكير :- للحصول على متباينة لتكامل يجب وجود (محلة أصلية) متباينة ه(س) ثم نقوم بإدخال التكامل على المحلة الأصلية .

للتوضيح :- ١ ≤ ه(س) ≤ ٤

$\int_{1}^{5} 1\,dx \le \int_{1}^{5} h(x)\,dx \le \int_{1}^{5} 4\,dx$

$5 \le \int_{1}^{5} h(x)\,dx \le 20$

اي ان اقل قيمة للتكامل ٥ ، واكبر قيمة للتكامل ٢٠

وهي حالتين :-

١. اذا علمت متباينة ه(س)

٢. متباينة ه(س) مجهولة .

سنحل كل حالة على حده :-

١. اذا علمت متباينة ه(س)

س١ : اذا كان ٢ ≤ ه(س) ≤ ٤

هـ اكبر قيمة واقل قيمة للمقدار التالية :-

أ. $\int_{-2}^{3} 5\,h(x) - 1\,dx$

ب. $\int_{1}^{-2} 3 - 6\,h(x)\,dx$

جـ. $\int_{-3}^{2} \frac{h(x)}{2} + 3\,dx$

الحل : نبدأ بالمحلة الأصلية دائماً

أ. ٢ ≤ ه(س) ≤ ٤

١٠ ≤ ٥ ه(س) ≤ ٢٠

٩ ≤ ٥ ه(س) - ١ ≤ ١٩

$\int_{-2}^{3} 9\,dx \le \int_{-2}^{3} 5\,h(x) - 1\,dx \le \int_{-2}^{3} 19\,dx$

$45 \le \int_{-2}^{3} 5\,h(x) - 1\,dx \le 95$

اقل قيمة = ٤٥ ، اكبر قيمة = ٩٥

ب. ٢ ≤ ه(س) ≤ ٤ × -٦

-١٢ ≤ -٦ ه(س) ≤ -٢٤ (نقسم المتباينة)

-٩ ≤ -٦ ه(س) + ٣ ≤ -٢١ + ٣

$\int_{-2}^{1} -9\,dx \le \int_{-2}^{1} -6\,h(x) + 3\,dx \le \int_{-2}^{1} -21\,dx$ (نقسم على $\int_{-2}^{1}$)

-٢٧ ≤ ... ≤ -٦٣

اقل قيمة = -٦٣ ، اكبر قيمة = -٢٧

جـ. ٢ ≤ ه(س) ≤ ٤ × $\frac{1}{2}$

١ ≤ $\frac{h(x)}{2}$ ≤ ٢ + ٣

٣ ≤ $\frac{h(x)}{2}$ + ٣ ≤ ٥ نضرب $\int_{-3}^{2}$

$\int_{-3}^{2} 3\,dx \le \int_{-3}^{2} \frac{h(x)}{2} + 3\,dx \le \int_{-3}^{2} 5\,dx$

١٥ ≤ ... ≤ ٢٥

اقل قيمة = ١٥ ، اكبر قيمة = ٢٥

س٢ : اذا كان ١ ≤ ه(س) - ٢ ≤ ٣ ، س ∈ [-٢ ، ٦]

وكان ٩ + ٢ $\int_{-2}^{6}$ ه(س) دس = ب - ٥

هـ ٩ ، ب

الحل : نحسب ما بداخل التكامل

١ ≤ ه(س) - ٢ ≤ ٣ + ٢

٣ ≤ ه(س) ≤ ٥ × ٢

٦ ≤ ٢ ه(س) ≤ ١٠ نضرب $\int_{-2}^{6}$

$\int_{-2}^{6} 6\,dx \le \int_{-2}^{6} 2\,h(x)\,dx \le \int_{-2}^{6} 10\,dx$

٣٢ ≤ ... ≤ ٨٠

$\therefore 2+\beta = -8 \Leftarrow \beta = -10$

$\alpha - 5 = -4 \Leftarrow \alpha = 5$

س٣ : اذا كان $\text{هـ}(س) \leq 6$ ، $س \in [0,3]$

جـ١ . اقل قيمة للمقدار $\int_0^3 \text{هـ}(س)\,د س$

٢. اكبر قيمة للمقدار $\int_0^3 (4-2\text{هـ}(س))\,د س$

الحل:

١. $\text{هـ}(س) \leq 6$ نضرب $\int_0^3$

$\int_0^3 \text{هـ}(س)\,د س \leq \int_0^3 6\,د س$

$\int_0^3 \text{هـ}(س)\,د س \leq 18$

اقل قيمة $= 18$

٢. $\text{هـ}(س) \leq 6$ $\times -2$

$-2\text{هـ}(س) \geq -12$ $+4$

$4-2\text{هـ}(س) \geq -8$ نضرب $\int_0^3$

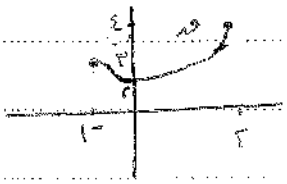
$\int_0^3 (4-2\text{هـ}(س))\,د س \geq \int_0^3 -8\,د س$

$\int_0^3 (4-2\text{هـ}(س))\,د س \geq -24$

اكبر قيمة -24

س٤ : هـ متصل $\text{هـ}(س)$ هـ اقل قيمة

للمقدار $\int_1^4 (5-3\text{هـ}(س))\,د س$



الحل : هـ شكل

$2 \leq \text{هـ}(س) \leq 4$ $\times -3$

$-6 \leq -3\text{هـ}(س) \leq -12$ $+5$

$-1 \leq 5-3\text{هـ}(س) \leq -7$ نضرب $\int_1^4$

$\int_1^4 -1\,د س \leq \int_1^4 (5-3\text{هـ}(س))\,د س \leq \int_1^4 -7\,د س$

$-3 \leq \quad \leq -21$

اقل قيمة $= -21$

٣. اذا كانت المعادلة التفاضلية المعطاة بالصورة $\frac{د ص}{د س} = \text{هـ}(س)$ حيث $\text{هـ}(س)$ دالة متصلة

س١ : اذا كان $\text{هـ}(س) = \sqrt{9-س^2}$ ، $س \in [0,3]$ [٣]

اوجد حساب التكامل بيساوي $\int_0^2 \sqrt{9-س^2}\,د س$ ١٨

الحل : بجد اولا المعادلة التفاضلية (المعادلة المعطاة)

علينا ايجاد هذا بقسمة ① على ② واضرب

① . $\frac{د ص}{د س} = \frac{س}{\sqrt{9-س^2}}$ ← $س = 0$ ، $س \in [-3,3]$

$\text{هـ}(0) = 0$ ، $\text{هـ}(2) = \sqrt{5}$ ، $\text{هـ}(-2) = \sqrt{5}$

$\therefore$ $\int_0^2 \sqrt{9-س^2} \leq 3$ نضرب $\int_0^2$

$\int_0^2 \sqrt{9-س^2}\,د س \leq \int_0^2 3\,د س$

$\int_0^2 \sqrt{9-س^2}\,د س \leq 6$

$\text{هـ}(س) \leq 6$

س٢ : جد اقل و اكبر قيمة للمقدار $\int_1^2 \sqrt{2س+1}\,د س$

الحل : $\text{هـ}(س) = \sqrt{2س+1}$ ، $س \in [0,2]$

$\text{هـ}'(س) = \frac{2}{2\sqrt{2س+1}}$ ← $\text{هـ}'(س) = 0$ ← $س = \varnothing$ ← لا يوجد

$\text{هـ}(1) = \sqrt{3}$ ، $\text{هـ}(0) = 1$

$1 \leq \sqrt{2س+1} \leq 3$ نضرب $\int_0^2$

$\int_0^2 1\,د س \leq \int_0^2 \sqrt{2س+1}\,د س \leq \int_0^2 3\,د س$

$2 \leq \quad \leq 6$

اصغر قيمة ، اكبر قيمة

س٣ : ١. اذا كان $م \leq \int_1^{س} \frac{1}{\sqrt{2ن+1}}\,د ن \leq ك$ ، $س \in [1,4]$

هـ $م$ ، $ك$ دوال حساب التكامل .

$م = 0$ ، $ك = \frac{1}{2}$

مرة اخرى : هـ اقل قيمة للمقدار $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{2ن+1}}\,د ن$

اقل قيمة $= 0$

عليكم صلوا على النبي

اخر تعديل ـــ

س٤: بين أن $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x - \sin x \cos x}\,dx \geq \frac{\pi}{6}$

الحل: نفرض $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x - \sin x \cos x}$ على $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{(\sin^2 x - \sin x \cos x)^2} = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \notin [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

x	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$f'(x) = 0$	
$f(x)$	$f(\frac{\pi}{3}) = 1$		$f(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\therefore \sin^2 x - \sin x \cos x \geq 0$ لأن $x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x - \sin x \cos x\,dx \geq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 0\,dx$

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 2x) - \frac{1}{2}\sin 2x\,dx \geq 0$

$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx \geq 0$

$\frac{1}{2}[x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}[\sin 2x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}[\cos 2x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \geq 0$

$\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{4}(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{4}(-1 - \frac{1}{2}) \geq 0$

$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{3}{8} \geq 0$

$\frac{\pi}{12} \geq \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

$\frac{\pi}{12} \geq \frac{3-\sqrt{3}}{8}$

$\pi \geq \frac{3}{2}(3-\sqrt{3})$

$\pi \geq \frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\pi \geq 4.5 - 2.598$

$\pi \geq 1.902$ ✓

س٥: بين أن $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cot^2 x + 2\cot x + 3}\,dx \geq \frac{3\pi}{8}$

الحل: $-1 \leq \cos x \leq 1$ لكل $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

بضرب

$\therefore \cot^2 x \leq 1$

$\cot^2 x + 3 \leq 4$ نأخذ $\sqrt{\ }$

$\sqrt{\cot^2 x + 3} \leq 2$ نأخذ $\int$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cot^2 x + 3}\,dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\,dx$

π

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cot^2 x + 3}\,dx \leq 2[x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$\leq 2(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$

$\leq \frac{\pi}{2}$

π

س٦: بين أن $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sin^2 x + 2\sin x + 1}\,dx \geq \frac{\pi}{5}$

الحل: $-1 \leq \cos x \leq 1$ لكل $x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

$0 \leq \sin x \leq 1$ ×2

$0 \leq 2\sin^2 x \leq 2$ +3

$3 \leq 2\sin^2 x + 2 \leq 5$ مقلوب

$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{2\sin^2 x + 2} \leq \frac{1}{3}$ نأخذ $\int$

$\frac{1}{5}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sin^2 x + 2}\,dx \leq \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx$

$\frac{1}{5}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sin^2 x + 2}\,dx \leq \frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$

$\frac{\pi}{30} \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sin^2 x + 2}\,dx \leq \frac{\pi}{18}$

$\frac{\pi}{30} \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sin^2 x + 2}\,dx \leq \frac{\pi}{6}$

س٧: دون حساب التكامل بين أن $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (5 + 2\sin^3 x)\,dx \geq \frac{7\pi}{6}$

خطر

الحل: لمقلوب $-1 \leq \sin x \leq 1$ نكعب

$-1 \leq \sin^3 x \leq 1$ وهذا خطأ لأن

الفترة $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ لا $\sin^3 x$ ضمن هذه الفترة

يكون وفق موجبة محصورة بين صفر، ١

يجب أن نبدأ

$0 \leq \sin x \leq 1$ نكعب

$0 \leq \sin^3 x \leq 1$ ×2

$0 \leq 2\sin^3 x \leq 2$ +5

$5 \leq 5 + 2\sin^3 x \leq 7$ نأخذ $\int$

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 5\,dx \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (5 + 2\sin^3 x)\,dx \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 7\,dx$

$5(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (5 + 2\sin^3 x)\,dx \leq 7(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$

$\frac{5\pi}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (5 + 2\sin^3 x)\,dx \leq \frac{7\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (5 + 2\sin^3 x)\,dx \leq \frac{7\pi}{6}$

س٨: تمرين وزارة ٢٠١٦ (١) إذا علمت أن $m \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{7+3\cos^2 x}}\,dx \leq M$

جد أصغر قيمة لـ m وأكبر قيمة لـ M دون حساب التكامل.

الحل:

$m = \frac{1}{\sqrt{10}}$، $M = \frac{1}{\sqrt{7}}$

(٢) دون حساب التكامل بين أن $\frac{\pi}{\sqrt{10}} \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{7+3\cos^2 x}}\,dx \leq \frac{\pi}{\sqrt{7}}$

(٣) دون حساب التكامل بين أن $\pi \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (5 + \tan^2 x)\,dx \leq \frac{7\pi}{3}$

(٤) بين أن $\frac{\pi}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3+\cos x}\,dx \leq \frac{\pi}{4}$

تكامل الدوال المتشعبة

١. إذا كان $f(س) = \begin{cases} ٣س^٢ + ٦ & ، س < ٣ \\ ٤ - ٢س & ، س \geq ٣ \end{cases}$

جد ① $\int_{٤}^{٣} f(س)\,د س$

② $\int_{٤}^{٢} f(س)\,د س$

③ $\int_{١}^{-١} f(س)\,د س$

الحل:

① $\int_{٤}^{٣} f(س)\,د س = \int_{٤}^{٣} (٣س^٢ + ٦)\,د س \oplus \int_{٣}^{٣} (٤ - ٢س)\,د س$

$= [س^٣ + ٦س]_{٤}^{٣} \oplus [٤س - س^٢]_{٣}^{٣}$

$= (٣٠) - (٤٥) \oplus (١٦) - (٠)$

$= -١٥ \oplus ٤٥ = ٢٩$

② $\int_{٤}^{٢} f(س)\,د س = \int_{٤}^{٢} (٣س^٢ + ٦)\,د س$

$= [س^٣ + ٦س]_{٤}^{٢}$

$= (٨ + ١٢) - (٠) = (٢٠)$

③ $\int_{١}^{-١} f(س)\,د س = -\int_{-١}^{١} f(س)\,د س$

$= \ominus \left(\int_{-١}^{١} ٣س^٢\,د س + \int_{١}^{١} (٤ - ٢س)\,د س \right)$

$= \ominus \left([س^٣]_{-١}^{١} + [٤س - س^٢]_{١}^{١} \right)$

$= \ominus \left((١) - (-١) + (٤ - ١) - (٨ - ٤) \right)$

$= \ominus (٢ + ٣ - ٤) = (-٦)$

٢. جد $\int_{-٣}^{٣} |س^٢ - ٢س - ٦|\,د س$

الحل: نفك المطلق بتعيين إشارة $س^٢ - ٢س - ٦ = (س - ٣)(س + ٢)$

$س$	-٣		-٢		٣
$(س-٣)(س+٢)$	$+$	$+$	٠	$-$	٠

$= \int_{-٣}^{-٢} (س^٢ - ٢س - ٦)\,د س + \int_{-٢}^{٣} -(س^٢ - ٢س - ٦)\,د س$

$= \left[\frac{١}{٣}س^٣ - س^٢ - ٦س \right]_{-٣}^{-٢} + \left[-\frac{١}{٣}س^٣ + س^٢ + ٦س \right]_{-٢}^{٣}$

$= \left(-\frac{٨}{٣} - ٤ + ١٢ \right) - (٩ - ١ - ١٨) + (-٩ + ٩ + ١٨) - \left(\frac{٨}{٣} - ٤ - ١٢ \right)$

$= \frac{٢٨}{٣} + ٢٨ + ٢٨ - \frac{٢٨}{٣} = ٥٦$

٣. جد $\int_{٣}^{٤} [٦ - \frac{٣}{٢}س]\,د س$

الحل: نغير تعريف المقدار الصحيح $س = ٤ \Rightarrow [٦ - \frac{٣}{٢}س] = ٢$

$س$	٣		٤		٦		٨		١٠		١٢
$[٦ - \frac{٣}{٢}س]$	٢	٢	١	١	٠	٠	-١	-١	-٢	-٢	-٣

$= \int_{٣}^{٤} ٢\,د س + \int_{٤}^{٦} ١\,د س + \int_{٦}^{٨} ٠\,د س + \int_{٨}^{١٠} -١\,د س + \int_{١٠}^{١٢} -٢\,د س$

$= ٢ + ٢ + ٠ + ٨ + ١٠ + ١٢ = ٣٤$

٤. جد $\int_{-٢}^{٢} |س| + [س]\,د س$

الحل: نوزع التكامل ونغير تعريف المطلق والصحيح

$|س| = س \Leftarrow س = ٠$ (− | +)

$[س] = ٠ \Leftarrow ٠ \leq س < ١$ ، $= -١ \Leftarrow -١ \leq س < ٠$ ، $= -٢ \Leftarrow -٢ \leq س < -١$

المطلوب

$= \int_{-٢}^{-١} -س - ٢\,د س + \int_{-١}^{٠} -س - ١\,د س + \int_{٠}^{١} س\,د س + \int_{١}^{٢} س + ٠\,د س$

$= \left[-\frac{١}{٢}س^٢ - ٢س \right]_{-٢}^{-١} + \left[-\frac{١}{٢}س^٢ - س \right]_{-١}^{٠} + \left[\frac{١}{٢}س^٢ \right]_{٠}^{١} + \left[\frac{١}{٢}س^٢ \right]_{١}^{٢}$

$= \left(-\frac{١}{٢} + ٢ \right) - (٢) + (٠) - \left(-\frac{١}{٢} + ١ \right) + \left(\frac{١}{٢} \right) - (٠) + (٢) - \left(\frac{١}{٢} \right)$

$= \frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = \frac{٦}{٢}$

٥. $\int_{١}^{٣} \frac{س - ١}{\sqrt{س^٢ - ٢س + ١}}\,د س$

الحل: $\int_{١}^{٣} \frac{س - ١}{\sqrt{(س - ١)^٢}}\,د س$

$= \int_{١}^{٣} \frac{س - ١}{|س - ١|}\,د س$ نغير تعريف المطلق

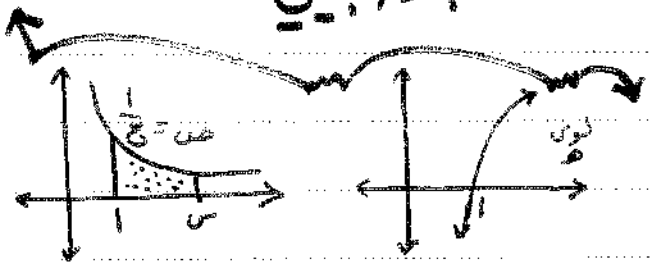
$س$	١		٣
$س - ١$	٠	$+$	

$= \int_{١}^{٣} ١\,د س = [س]_{١}^{٣} = ٣ - ١ = ٢$

٦. ① جد $\int_{٢}^{٤} \sqrt{٤ - ١٢س + ٩س^٢}\,د س$ $\left(\frac{١٣}{٢}\right)$

② جد $\int_{١}^{٣} \sqrt{١٧ + ١٠س + س^٢}\,د س$ الجواب $\frac{٤}{٣}(١٠\sqrt{٣} - ٢٧)$

اقتران اللوغاريتم الطبيعي



مراجعة هامة للوغاريتم :-

* $\log_ب م = ن \longleftarrow ب^ن = م$

هذه الصورة اللوغاريتمية

* وتسمى $(ب)^ن = م$ الصورة الأسية.

بشرط $م ، ب > ٠ ، ب \neq ١$

حيث $ن \in ح$

المعنى : لوغاريتمي = القوة (أساسه)

مثلاً :

١. $\log_{١٠} ١٠٠ = ٢ \longleftarrow ١٠^٢ = ١٠٠$

٢. $\log_{٥} ١٢٥ = ٣ \longleftarrow ٥^٣ = ١٢٥$

٣. $\log_{٥} ١ = ٠ \longleftarrow ٥^٠ = ١$

٤. $\log_{٢} \frac{١}{٨} = -٣ \longleftarrow ٢^{-٣} = \frac{١}{٨}$

← اللوغاريتم الطبيعي هو لوغ أساسه هـ

حيث هـ هو العدد النيبيري مثل ($\log_{هـ}$) لوغاريتم طبيعي

قوانين اللوغاريتم :-

١. $\log_{هـ} ١ = ٠ \longleftarrow \log_{هـ} ١ =$ صفر

٢. $\log_{هـ} م^ن = ن \log_{هـ} م \longleftarrow \log_{هـ} ٢^٥ = ٥ \log_{هـ} ٢$

٣. $\log_{هـ} ل = \log_{هـ} م - \log_{هـ} ن$

* تعريف مميز للوغاريتم :-

$\log_{هـ} س = \int_{١}^{س} \frac{١}{ع} \, د ع$ حيث $س > ٠$

مثلاً : $\log_{هـ} ٤ = \int_{١}^{٤} \frac{١}{ع} \, د ع$

سؤال مهم : كيف نشتق اللوغاريتم ؟

متى نتقاطع جواب لوغاريتم :

أولاً : $ق(س) = \log_{هـ} م(س)$ ، $م(س) > ٠$

فإن $ق'(س) = \frac{م'(س)}{م(س)}$

أسئلة :-

١. $ص = \log_{هـ} (س^٢ - ٣س + ٥)$

$ص' = \frac{٢س - ١}{س^٢ - ٣س + ٥}$

٢. $ص = \log_{هـ} (٥ - س^٣)$

$ص' = \frac{-٣س^٢}{٥ - س^٣}$

٣. $ص = \log_{هـ} (\sin س)$

$ص' = \frac{\cos س}{\sin س} = ظا س$

٤. $ص = \log_{هـ} |س - ١|$ ، $س \neq ١$

$ص' = \frac{١}{س - ١}$ عكس الاشتقاق مباشرة مع إهمال القيمة المطلقة.

٥. $ق(س) = س^٣ \log_{هـ} س$ جد $ق'(١)$

$ق'(س) = \frac{١}{س} \times س^٣ + \log_{هـ} س \times ٣س^٢$

$ق'(١) = ١ \times ١ + \log_{هـ} ١ \times ٣ = ١$

٦. $ص = \log_{هـ} (\sin^٥ س)$

نبسط باستخدام قوانين اللوغاريتم

$ص = ٥ \times \log_{هـ} (\sin س)$

$ص' = ٥ \times \frac{\cos س}{\sin س} = ٥ ظا س$

٧. $ه(س) = \log_{هـ} \frac{(س^2+1)^5}{(3-2س)^9}$ ، جد $ه'(س)$

الحل: $ه(س) = \log_{هـ}(س^2+1)^5 - \log_{هـ}(2-3س)^9$

$ه(س) = 5\log_{هـ}(س^2+1) - 9\log_{هـ}(2-3س)$

$ه'(س) = 5 \times \frac{2س}{س^2+1} - 9 \times \frac{-3}{2-3س}$

$= \frac{10س}{س^2+1} + \frac{27}{2-3س}$

٨. $ص = \log_{هـ}^{5} \sqrt{س^2+3س+6}$

الحل: $ص = \log_{هـ}(س^2+3س+6)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\log_{هـ}(س^2+3س+6)$

$ص' = \frac{1}{5} \times \frac{2س+3}{س^2+3س+6} = \frac{2س+3}{5س^2+15س+30}$

٩. $ص = \log_{هـ} س^2 \, حا 5س$

الحل: بالتبسيط $ص = \log_{هـ} س^2 + \log_{هـ} حا 5س$

$ص' = \frac{2}{س} + \frac{5 \, جتا 5س}{حا 5س}$

$= \frac{2}{س} + 5 \, ظتا 5س$

١٠. $ه(س) = س \log_{هـ} س$ جد $\int_1^2 ه'(س) \, دس$

الحل: $\int_1^2 ه'(س) \, دس = [ه(س)]_1^2$

بجد $ه'(س) = س \times \frac{1}{س} + \log_{هـ} س \times 1$

$\boxed{ه'(س) = 1 + \log_{هـ} س}$

المطلوب $[ه(س)]_1^2 = ه(2) - ه(1)$

$= (1+\log_{هـ} 2) - (1+\log_{هـ} 1)$

$= (1+1) - (1+1) = 0$

١١. $ه(س) = \log_{هـ}(\sqrt{3س^2-1} + س)$

اثبت أن $ه'(س) = \frac{1}{\sqrt{3س^2-1}}$

الحل: $ه'(س) = \frac{\frac{6س}{2\sqrt{3س^2-1}} + 1}{\sqrt{3س^2-1} + س}$ بضرب البسط والمقام بـ $2\sqrt{3س^2-1}$

$= \frac{3س + \sqrt{3س^2-1}}{\sqrt{3س^2-1}(\sqrt{3س^2-1}+س)}$

$= \frac{1}{\sqrt{3س^2-1}}$

١٢. إذا كان $\int_{3.14}^{2} (ه'(س) - س) \, دس = \log_{هـ}|قتا س + ظا س| - 2$

أثبت أن $ه(س) = س - قتا س$

الحل: باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س

$ه'(س) - س = -\frac{قتا س ظتا س + قتا^2 س}{جتا س + ظتا س}$

$ه'(س) - س = -\frac{قتا س (ظتا س + قتا س)}{جتا س + ظتا س}$

$ه'(س) = س - قتا س$ •

تمرين :

١٣. $\int_{\pi}^{2\pi} (ه'(س) - س) \, دس = \log_{هـ}|قتا س + ظا س|$ اثبت أن

$ه(س) = س + قتا س$.

١٤. $ص = ه(\log_{هـ} س)$ اثبت أن $س^2 ص'' + س ص' + ص = 0$

١٥. $ص = \log_{هـ} \sqrt{\frac{1+حا س}{1-حا س}}$ اثبت أن $ه'(س) = قا س$.

١٦. $ص = س^{ظا س}$ ، جد $\frac{دص}{دس}$ ؟

١٧. $ص^{ص} \times 2^{ص} = س$ ، جد $\frac{دص}{دس}$ ؟

١٨. $ص = \log_{هـ} \sqrt{\frac{2-س}{3+س}}$ اثبت أن $ص' = \frac{-5}{4-س^2}$

حل هذه المسألة : نلاحظ أن المقام يكون موجباً دائماً بينما البسط يكون موجباً عندما $س < 2$ وسالباً عندما $س > 2$ ، لذلك لا يمكن أن نأخذ لوغاريتم العلاقة كما هي ولكن نأخذ لوغاريتم القيمة المطلقة لكل طرف ثم نشتق

حل آخر : $ص = س^{\frac{4}{س}}$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل: $\log_{هـ} ص = \log_{هـ} س^{\frac{4}{س}}$

$\log_{هـ} ص = \frac{4}{س} \log_{هـ} س$ بأخذ لوغاريتم الطرفين

$\frac{ص'}{ص} = \frac{4}{س} \times \frac{1}{س} + \log_{هـ} س \times -\frac{4}{س^2}$

$ص' = ص \times \frac{4}{س^2}(1 - \log_{هـ} س)$

$ص' = س^{\frac{4}{س}} \times \frac{4}{س^2}(1 - \log_{هـ} س)$

١٩ : $ه(س) = ٣^{ل(س)}$ اشتق ال

$ه'(س) = ٣^{ل(س)} \times ل'(س) \times \ln ٣$

الحل: نأخذ $\log_{ه}$ للطرفين $\ln ه(س) = ل(س) \ln ٣$

$\therefore \ln ه(س) = ل(س) \times \ln ٣$

نشتق $\frac{ه'(س)}{ه(س)} = \ln ٣ \times ل'(س)$

$\therefore ه'(س) = \ln ٣ \times ل'(س) \times ه(س)$

$ه'(س) = \ln ٣ \times ل'(س) \times ٣^{ل(س)}$ #

ثانياً: حل بقية الجوانب بالمثل

قاعدة: $\int \frac{ه'(س)}{ه(س)} د س = \ln |ه(س)| + ج$

أسئلة:

١. $\int \frac{١}{س} د س = \ln |س| + ج$

٢. $\int \frac{٢س}{س^٢ + ٧} د س = \ln |س^٢ + ٧| + ج$

٣. $\int \frac{٥ + ٢س}{س^٢ + ٥س - ٧} د س = \ln |س^٢ + ٥س - ٧| + ج$

٤. $\int \frac{س + ١}{س^٢ + ٢س - ٩} د س$ إذا استعنا بالمقام $(س + ٢)$ نحتاج ضرب البسط بـ (٢)

Made Logarithm

$= \frac{١}{٢} \int \frac{٢(س + ١)}{س^٢ + ٢س - ٩} د س$

$= \frac{١}{٢} \ln |س^٢ + ٢س - ٩| + ج$

٥. $\int \frac{٢س - ١}{س(س - ١)} د س$

$= \int \frac{(س - ١)}{س(س - ١)} د س$

$= \ln |س| + ج$

٦. $\int ظا ٥س \, د س = \int \frac{جا ٥س}{جتا ٥س} د س \times \frac{-٥}{-٥}$

$= -\frac{١}{٥} \int \frac{-٥ جا ٥س}{جتا ٥س} د س$

$= -\frac{١}{٥} \ln |جتا ٥س| + ج$

٧. $\int ظتا ٣س \, د س = \int \frac{جتا ٣س}{جا ٣س} د س$

نضرب $\times \frac{٣}{٣}$

$= \frac{١}{٣} \int \frac{٣ جتا ٣س}{جا ٣س} د س$

$= \frac{١}{٣} \ln |جا ٣س| + ج$

٨. $\int_{١}^{٣} \frac{٦س}{س^٢ - ٣س - ٥} د س = \ln |س^٢ - ٣س - ٥| \Big]_{١}^{٣}$

$= \ln (\ln ٢٢) - \ln (\ln ٣) = \ln ١١$

٩. $\int \frac{٧ \sqrt{س}}{١ + ٧ س \sqrt{س}} د س$

$= \int \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{١ + س^{\frac{٣}{٢}}}$ لاحظ مشتقة المقام $\frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}}$

نضرب بسر $\frac{\frac{٣}{٢}}{\frac{٣}{٢}}$

$= \frac{١}{\frac{٣}{٢}} \int \frac{\frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}}}{١ + س^{\frac{٣}{٢}}} د س$

$= \frac{٢}{٣} \ln |١ + س^{\frac{٣}{٢}}| + ج$

١٠. $\int \frac{١ + \ln س}{٣ + س \ln س} د س$

$= \ln |٣ + س \ln س| + ج$

١١. $\int \frac{س - ١}{١ - ٢س} د س$

$= -\frac{١}{٤} \int \frac{-٤}{١ + ٢س} د س = -\frac{١}{٤} \ln |١ + ٢س| \Big]_{٠}^{٤}$

$= -\ln ٩ - \ln ١ = -\ln ٩$

١٢. $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{٣ جا ٢س \, جتا ٢س}{جتا^٤ ٢س} د س$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{جا ٢س}{جتا^٣ ٢س} د س$

$\ln ٣$

فكرة جميلة جدا" :-

س١ : جد $\int \frac{5}{س^3+س}$ د س

الحل: $\int \frac{5}{س(س^2+1)}$ د س $= \int \frac{أ}{س} + \frac{ب س + ج}{س^2+1}$ د س

$5 = أ(س^2+1) + (ب س + ج)س$

$5 = أ س^2 + أ + ب س^2 + ج س$

$5 = (أ+ب)س^2 + ج س + أ$

$\therefore أ = 5$ ، $ج = 0$ ، $ب = -5$

$= \int \frac{5}{س} - \frac{5س}{س^2+1}$ د س

$= 5 \ln|س| - \frac{5}{2} \ln|س^2+1| + ث$

س٢ : جد $\int \frac{3}{س^4 - 7س}$ د س

الحل: $3 \int \frac{1}{س(س^3-7)}$ د س

$= 3 \int \frac{س^3}{س^4(س^3-7)}$ د س $\times \frac{3}{3}$

$= \frac{1}{7} \int \frac{3س^2}{س^4(س^3-7)}$ د س

$= \frac{1}{7} \ln|س^3-7| + ث$

س٣ : جد $\int \frac{س^4}{س^5 + 4س^3}$ د س

الحل: $\int \frac{س^4}{س^5(س^2+4)}$ د س

$= \int \frac{1}{س(س^2+4)}$ د س $= \int \frac{أ}{س} + \frac{ب س + ج}{س^2+4}$ د س

$1 = أ(س^2+4) + (ب س + ج)س$

$1 = أ س^2 + 4أ + ب س^2 + ج س$

$\therefore أ = \frac{1}{4}$ ، $ج = 0$ ، $ب = -\frac{1}{4}$

$= \int \frac{\frac{1}{4}}{س} - \frac{\frac{1}{4}س}{س^2+4}$ د س $\times \frac{2}{2}$

$= \frac{1}{8} \ln|س| - \frac{1}{8} \ln|س^2+4| + ث$

س٤ : جد $\int \frac{س^2}{س^4 - 9}$ د س

الحل: $\int \frac{س^2}{(س^2-3)(س^2+3)}$ د س $= \int \frac{أ}{س^2-3} + \frac{ب}{س^2+3}$ د س

$س^2 = أ(س^2+3) + ب(س^2-3)$

$\therefore أ = \frac{3}{6}$ ، $ب = \frac{-3}{6}$

$= \int \frac{\frac{1}{2}}{س^2-3} - \frac{\frac{1}{2}}{س^2+3}$ د س $\times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{س - \sqrt{3}}{س + \sqrt{3}}\right| + ث$

س٥ : جد $\int \frac{1}{س^2+2س+1}$ د س

تحريرية

الحل: $\int \frac{1}{(س+1)^2}$ د س $= -(س+1)^{-1} + ث$

$= -\frac{1}{س+1} + ث$

الاقتران الأسي الطبيعي

هو الاقتران الذي أساسه هـ

وحوله متغير، حيث هـ: العدد النيبري

مثلا" هـ = هـ^س ، هـ = هـ^{٢س} ، هـ = هـ^{-س} ، هـ = هـ^{٣س+١}

كيف نشتق الاقتران الأسي الطبيعي ؟!؟!

القاعدة: $\frac{د}{د س}(هـ^{ق(س)}) = ق'(س) \times هـ^{ق(س)}$

البرهان: هـ = هـ^{ق(س)} نأخذ لو هـ

$\ln هـ = \ln هـ^{ق(س)}$

$\ln هـ = ق(س) \times \ln هـ$

نشتق

$\frac{هـ'}{هـ} = ق'(س)$

$هـ' = ق'(س) \times هـ$

$\therefore \frac{د}{د س}(هـ^{ق(س)}) = ق'(س) \times هـ^{ق(س)}$

أسئلة :- جد $\frac{دص}{دس}$ فيما يلي :

١) $ص = هـ^{س^٣ - س - ٥}$

$\frac{دص}{دس} = (٣س^٢ - ١) \times هـ^{س^٣ - س - ٥}$

٢) $ص = \frac{١}{٥} هـ^{٣س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٥} \times ٣ س^٢ هـ^{س^٣} = \frac{٣}{٥} س^٢ هـ^{س^٣}$

٣) $ص = \sqrt{هـ^{س} + س^٢ - ١}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{س} + ٢س}{٢\sqrt{هـ^{س} + س^٢ - ١}}$

٤) $ص = ٢هـ^{٥س} - \frac{١}{٤} هـ^{٤س}$

$\frac{دص}{دس} = ٢ \times ٥ هـ^{٥س} - \frac{١}{٤} \times ٤ هـ^{٤س}$

$= ١٠ هـ^{٥س} - هـ^{٤س}$

٥) $ص = جا(هـ^{٢س})$

$\frac{دص}{دس} = ٢ هـ^{٢س} \times جتا(هـ^{٢س})$

٦) $ص = جا^٣(هـ^{٢س})$

$\frac{دص}{دس} = ٣ (جا هـ^{٢س})^٢ \times ٢ هـ^{٢س} جتا هـ^{٢س}$

٧) $ص^٢ = هـ^{ص} + جا س$ ، جد $\frac{دص}{دس}$

$٢ص \frac{دص}{دس} = هـ^{ص} \frac{دص}{دس} + جتا س$

$٢ص \frac{دص}{دس} - هـ^{ص} \frac{دص}{دس} = جتا س$

$\frac{دص}{دس} (٢ص - هـ^{ص}) = جتا س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{جتا س}{(٢ص - هـ^{ص})}$

ملاحظة : $ص = هـ^{لو_هـ هـ(س)} = هـ(س)$

$لو_هـ ص = لو_هـ هـ(س)$

$لو_هـ ص = لو_هـ هـ(س)$

$ص = هـ(س)$ ...

البرهان : $ص = هـ^{لو_هـ هـ(س)}$ نأخذ لوغاريتم الطرفين

$لو_هـ ص = لو_هـ هـ^{لو_هـ هـ(س)}$

$لو_هـ ص = لو_هـ هـ(س) \times لو_هـ هـ$

$لو_هـ ص = لو_هـ هـ(س)$

٨) $ص = هـ^{٣س^٢ - ١}$

$\frac{دص}{دس} = ٦س$

٩) $ص = هـ^{لو(س^٢ - ١)^٥}$

$ص = (س^٢ - ١)^٥$

$\frac{دص}{دس} = ٥(س^٢ - ١)^٤ \times ٢س$

$= ١٠ س (س^٢ - ١)^٤$

١٠) $ص = هـ^{٣ لو_هـ س + س^٢}$

$ص = هـ^{لو_هـ (س^٣ + س^٢)}$

$ص = (س^٣ + س^٢)^٣$

$\frac{دص}{دس} = ٣(س^٣ + س^٢)^٢ (٣س^٢ + ٢س)$

١١) $ص = هـ^{- لو_هـ جا س}$

$ص = هـ^{لو_هـ (جا س)^{-١}} = \frac{١}{جا س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-١ \times جتا س}{(جا س)^٢} = - قتا س ظا س$

١٢) $ص = هـ^{٤ لو_هـ ظا س} + \frac{٣س}{١ + جتا ٢س}$ وزارة

جد $\frac{دص}{دس}$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$

الحل : $\frac{دص}{دس} = ٤ هـ^{٤ لو_هـ ظا س} \frac{قا^٢ س}{ظا س} + \frac{٣(١ + جتا ٢س) - ٣س(-٢ جا ٢س)}{(١ + جتا ٢س)^٢}$

بتعويض $س = \frac{\pi}{٤}$

$= ٤ هـ^{٤ لو_هـ ظا \frac{\pi}{٤}} \frac{قا^٢ \frac{\pi}{٤}}{ظا \frac{\pi}{٤}} + \frac{٣(١ + جتا \frac{\pi}{٢}) + \frac{٣\pi}{٤} جا \frac{\pi}{٢}}{(١ + جتا \frac{\pi}{٢})^٢}$

$= ٤ هـ^{٤ لو_هـ ١} \times \frac{٤}{١} + \frac{٣(١ + ٠) + \frac{٣\pi}{٤} \times ١}{(١ + ٠)^٢}$

$= ٤ هـ^{٠} + ٣ + \frac{٣\pi}{٤}$

١٣) [illegible]

١٤. $ص = هـ^{م س}$ حيث م ثابت ، إذا تحقق المعادلة

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} - ٥ \frac{د ص}{د س} + ٦ ص = صفر$

الحل: $\frac{د ص}{د س} = م هـ^{م س}$ ، $\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = م^٢ هـ^{م س}$

بالتعويض $م^٢ هـ^{م س} - ٥ م هـ^{م س} + ٦ هـ^{م س} = ٠$

$هـ^{م س} (م^٢ - ٥م + ٦) = ٠$

$هـ^{م س} \neq ٠$ لجميع $س$ $\Leftarrow$ $م^٢ - ٥م + ٦ = ٠$

$(م - ٣)(م - ٢) = ٠$

$م = ٢$ أو $م = ٣$

١٥. $هـ^{س ص} = س + ص$ اثبت أن

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١ - س ص - ص^٢}{س^٢ + س ص - ١}$

الحل: $(س ص + ص) هـ^{س ص} = ١ + ص$ نفرض مقام $هـ$

$(س ص + ص)(س + ص) = ١ + ص$

$س^٢ ص + س ص^٢ + س ص + ص^٢ = ١ + ص$

$س^٢ ص + س ص^٢ - ص = ١ - س ص - ص^٢$

$ص = \frac{١ - س ص - ص^٢}{س^٢ + س ص - ١}$

١٦. $ص = هـ^{ظا س} + ٢ \ln(\tan س + \sec س)$ ، $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{د س}{١ + ظا^٢ س}$

كان $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$ يساوي $٢ هـ + ١$

جد، بدلالة $م$.

الحل: $\frac{د ص}{د س} = ظا^٢ س \times هـ^{ظا س} + ٢ \times \frac{١}{\tan س} \times \sec^٢ س$

بالتعويض

$= ٢ هـ + ١ = ٢ م - ٣ \Leftarrow$ $م = ٢$

١٧. $م هـ^{س ص} = س - ص$ اثبت أن

$ص = \frac{هـ^{ص} - س ص + ص^٢}{س^٢ - س ص + ١}$

ب. $هـ(س) = \int_{\ln ٢}^{س} \frac{هـ^ص}{\sqrt{هـ^ص + ٢}} د ص$ ، جد $هـ'(٠)$ ؟

الحل: $\ln ٢ = \ln ٢$ ، $هـ(٠) = ٠$

١٨. $\int_{١}^{س^٢} هـ(س) . د س = هـ^{س^٢ - ١} + ٢ هـ$

$هـ(ب) = -٢ ب$ ، $ب \neq ٠$ جد، أشتقاق ب؟

الحل: نشتق بالطرفين

$هـ(س) = -٢ س هـ^{١ - س^٢} + ٠$

$هـ(ب) = -٢ ب هـ^{١ - ب^٢} = -٢ ب$

$-٢ ب هـ^{١ - ب^٢} - ٢ ب = ٠$

$-٢ ب (هـ^{١ - ب^٢} + ١) = ٠$

$هـ^{١ - ب^٢} = -١$ مرفوض

لأن $ب \neq ٠$

$١ - ب^٢ = ٠$

$ب = \pm ١$

١٩. $هـ(س) = م هـ^{٢ س} + هـ \ln(\tan س)$ حيث

$هـ'(\frac{\pi}{٤}) = ٨ هـ^{\frac{\pi}{٢}} - ١$ ، جد م

الحل: $هـ'(س) = ٢ م هـ^{٢ س} + \frac{١}{\tan س} . \sec^٢ س$

$هـ'(\frac{\pi}{٤}) = ٢ م هـ^{\frac{\pi}{٢}} + ٢ \times هـ^{\ln ١} + هـ^{\ln ١} \times \frac{١}{\frac{١}{٢}}$

بالتعويض

$= ٢ م هـ^{\frac{\pi}{٢}} + ٢ \times ١ + ١ \times ٢$

$= ٢ م هـ^{\frac{\pi}{٢}} + ٤$

$٨ هـ^{\frac{\pi}{٢}} - ١ = ٢ م هـ^{\frac{\pi}{٢}} + ٤$

$م = ٢ \Leftarrow$

٢٠. $\frac{م}{٢}$ ، $هـ(س) = \int_{١}^{س^٢} \frac{١}{ن} د ن$ ، $هـ(٠)$

$٢ م$ ، $\frac{١}{٢}$

تكامل الاقتران الأسي :-

القاعدة : $\int \frac{م س + ب}{م} هـ^{م س + ب} + ج$

ملاحظة : الأس هو اقتران خطي (مشتقه ثابت)

أسئلة :

١. $\int (هـ^{-س} - ١) \, د س = \int [هـ^{-س} - ١^{١}] \, د س$

$= \frac{هـ^{-س}}{-١} - س + ج$

$= -هـ^{-س} - س + ج$

٢. $\int \frac{١}{هـ^{س}} \, د س = \int هـ^{-س} \, د س = \int [هـ^{-س} \times \frac{-١}{-١}] \, د س$

$= -\frac{هـ^{-س}}{-١} + ج$

$= هـ^{-س} + ج$

٣. $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١} \, د س = \int \frac{هـ^{س}}{(هـ^{س})^{٢} + ٤ هـ^{س} + ٤} \, د س$

$= \int \frac{هـ^{س}}{(هـ^{س} + ٢)^{٢}} \, د س$

$= \int هـ^{س} (هـ^{س} + ٢)^{-٢} \, د س$

$= \frac{(هـ^{س} + ٢)^{-١}}{-١} + ج$

$= -\frac{١}{هـ^{س} + ٢} + ج$

٤. $\int [هـ^{٣ لو_{هـ} س} - \frac{١}{س^{٢}}] \, د س$

$= \int (س^{٣} - \frac{١}{س^{٢}}) \, د س$

$= \frac{س^{٤}}{٤} - (-\frac{١}{س}) + ج$

$= \frac{س^{٤}}{٤} + \frac{١}{س} + ج$

٥. $\int \frac{هـ^{-س} - ١}{هـ^{-س} - ١} \, د س$

$= \int \frac{(هـ^{-س} - ١)(هـ^{-س} + ١)}{(هـ^{-س} - ١)} \, د س$

$= \int (هـ^{-س} + ١) \, د س$

$= -هـ^{-س} + س + ج$

٦. $\int \sqrt{هـ^{س}} \, د س = \int (هـ^{س})^{\frac{١}{٢}} \, د س$

$= \int هـ^{\frac{١}{٢} س} \, د س$

$= \frac{هـ^{\frac{١}{٢} س}}{\frac{١}{٢}} + ج$

$= ٢ \sqrt{هـ^{س}} + ج$

لاحظ أن : $\sqrt{هـ^{س}} \neq هـ^{\frac{١}{٢} س}$

$(هـ^{س})^{\frac{١}{٢}} \neq هـ^{\frac{١}{٢} س}$

٧. $\int ٥ س - \frac{١}{٢} + ٣ هـ^{٢ س + ١} \, د س$

$= \frac{٥ س^{٢}}{٢} - \frac{١}{٢} س + \frac{٣ هـ^{٢ س + ١}}{٢} + ج$

٨. $\int \frac{هـ^{٣ س} - ٨}{هـ^{٢ س} - ٢} \, د س$

$= \int \frac{(هـ^{س})^{٣} - ٨}{(هـ^{س})^{٢} - ٢} \, د س$

$= \int \frac{(هـ^{س} - ٢)((هـ^{س})^{٢} + ٢ هـ^{س} + ٤)}{(هـ^{س} - ٢)} \, د س$

$= \int هـ^{٢ س} + ٢ هـ^{س} + ٤ \, د س$

$= \frac{هـ^{٢ س}}{٢} + ٢ هـ^{س} + ٤ س + ج$

٩. $\int (٣ هـ^{س} - هـ^{-س})^{٢} \, د س$ نفك المربع

$= \int ٩ هـ^{٢ س} - ٢ \times ٣ هـ^{س} \times هـ^{-س} + هـ^{-٢ س} \, د س$

$= \int ٩ هـ^{٢ س} - ٦ + هـ^{-٢ س} \, د س$

$= \frac{٩ هـ^{٢ س}}{٢} - ٦ س + \frac{هـ^{-٢ س}}{-٢} + ج$

١٠. $\int هـ^{\text{لو}_{هـ} جتا س + جا س} \, د س$

$= \int جتا س + جا س \, د س$

$= جا س - جتا س + ج$

رقم الصفحة (٣٤)

١١. $\int \frac{هـ^{لو_{هـ}(٢س+١)}}{٢س+١}$ د س

$= \int هـ^{لو_{هـ}(٢س+١)} \times \frac{١}{٢س+١}$ د س

$= \int هـ^{لو_{هـ}(٢س+١)} \times (٢س+١)^{-١}$ د س

$= \int (٢س+١)^{-١} \times (٢س+١)$ د س

$= \int ١$ د س

$= س + ج$

١٢. $\int \frac{هـ^{٢+لو_{هـ}(٢س+١)}}{س^٢+س-١١}$ د س

$= \int \frac{هـ^٢ \times هـ^{لو_{هـ}(٢س+١)}}{س^٢+س-١١}$ د س

$= هـ^٢ \int \frac{٢س+١}{س^٢+س-١١}$ د س

$= هـ^٢ \times لو_{هـ}|س^٢+س-١١| + ج$

ورقة عمل شاملة

١. (أ) $ق''(س) = هـ^{٢س}$ جا س + هـ^{٢س} جتا س

$ق(٠) = \frac{١}{٤}$ ، $ق'(٠) = \frac{١}{٢}$ ، جد قيمة جا س ؟

(ب) $ص = هـ^{-٢س}$ جا س المعادلة

$جـ'' + ٢جـ' + ٢جـ = ٠$

(ج) $ص = هـ^{-٣س}$ ، جد م حيث

$جـ'' - ٢جـ' - ٢٨ = ٠$

(د) $\int_{١}^{٢} ٣س^٢ \times هـ^{لو_{هـ}(س^٣-١)}$ د س

(هـ) $ص = هـ^{\frac{\pi}{٢} جتا س}$ جد $\frac{ص''}{ص}$ ؟

(صفر)

(و) $\int \frac{جتا س}{جا^٢ س} - \frac{١}{هـ^{٢س}}$ د س

٢. $\int_{لو_{هـ}٢}^{لو_{هـ}٣} هـ^{٢س}(٩ - ٤هـ^{٢س})$ د س

(٣)

٣. $\int_{-١}^{١} |هـ^س - ١|$ د س

$[هـ^{-س} + \frac{١}{هـ^س} - ٣]$

٤. $\int \frac{ظا س}{جتا س} - \sqrt{هـ^{٢س}}$ د س

٥. $م''(س) = ٨ لو_{هـ}(هـ^{٢س} + هـ^{-٢س})$

اقترانه معكوس يشتق للاقتران ق(س)

المتصل على $[١، ٥]$ ، جد ق'(٤)

(صفر)

٦. $\int ق(س)$ د س $= هـ^{جا ٢س} - لو_{هـ} جتا س - ١$

جد ق(٠)

(٣)

٧. جد التكاملات التالية :-

(١) $\int \frac{٥ + هـ^{٣س}}{هـ^{٣س} + ٣٥ هـ^{س} - ٣}$ د س

(٢) $\int \frac{٤}{س^٣ + ٣س}$ د س

(٣) $\int \frac{٢س^٣ - ١٦}{س^٤ + ٣س^٢ + ٤}$ د س

(٤) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جا س}{١ + جتا^٢ س}$ د س

(٥) $\int \frac{٢}{(٢\sqrt{٤ + ٣\sqrt{٢}} - ٢٥)^٦}$ د س

٨. $ق(س) = هـ^{(س-١)^٢} + \int_{٢}^{س^٥} ا(لو_{هـ} س^٢)$ د س

علماً بأن $ق'(١) = ٦$ ، جد

النهاية ق ؟

طرق التكامل

التكامل بالتعويض :-

شرح بسيط : التكامل يوزع على الجمع والطرح ولا يوزع على الضرب والقسمة ، وبالتالي جميع المسائل التي تحوي ضرب وقسمة ولا عكسيه نتخلص منها عكسيه حلها بعدة طرق :-

١) التعويض ٢) الأجزاء ٣) بكسور جزئية وكل طريقة لها درسها مستقل بذاته .

الحالات

١) التعويض : نستخدم عندما حاصل ضرب اقترانين احدهما مشتقة للآخر .

$$\int \underbrace{هـ(هـ(س))}_{\text{ك داخلي}} \times \underbrace{هـ'(س)}_{\text{مشتقة الداخلي}} \, د س$$

* خطوات إجراء التكامل بالتعويض :-

١. نفرض ص = هـ(س)

٢. نجد د س = $\frac{د ص}{\text{مشتقة } هـ(س)}$

٣. استبدال حسب المفروض .

٤. ايجاد التكامل باستخدام القاعدة .

٢) في حالة الزاوية غير الخطية نفرض ص = الزاوية .

٣) التكامل بالتعويض والرجوع للمفروض

٤) اخراج عامل مشترك والتحليل مع

٥) تكامل دالة كثيرة حدود .

* أسئلة شاملة على * الموضوع بالترتيب :-

١) $\int_{٥}^{٢} س (س^٢ - ٧) \, د س$

نفرض $ص = س^٢ - ٧$

$\frac{د ص}{٢} = س \, د س$

$= \int_{٥}^{٢} ص^٥ \, د ص = \frac{ص^٦}{٦} + ج = \frac{(س^٢ - ٧)^٦}{٦} + ج$

٢) $\int_{٠}^{٧} \frac{س - ٤}{\sqrt[٥]{٩ + ٤\sqrt{٢} - ١٢س}} \, د س$

نفرض $ص = ٩ + ٤\sqrt{٢} - ١٢س$

$\frac{د ص}{-١٢} = د س$

$= \int_{٥}^{١} (س - ٤)(ص)^{-\frac{١}{٥}} \times \frac{د ص}{-١٢}$

$= \int_{٥}^{١} \frac{-١}{١٢} ص^{-\frac{١}{٥}} \, د ص = \frac{-١}{١٢} \times \frac{٥}{٤} ص^{\frac{٤}{٥}} + ج$

$= -\frac{٥}{٤٨} \sqrt[٥]{(٩ + ٤\sqrt{٢} - ١٢س)^٤} + ج$

٣) $\int_{٠}^{٧} \frac{س}{\sqrt{٥ + ٦س}} \, د س$

$= \int_{٥}^{١} س \times (٥ + ٦س)^{-\frac{١}{٢}} \, د س$

نفرض $ص = ٥ + س^{\frac{١}{٢}}$

$د س = \frac{د ص}{\frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}}}$ نفرض

$= \int س^{\frac{١}{٢}} \times ص^{٢} \cdot \frac{د ص}{\frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}}}$

$= ٢ \int ص^{٣} \cdot د ص = ٢ \times \frac{ص^{٤}}{٤} + ج$

$= \frac{١}{٢} ص^{٤} + ج$

$= \frac{١}{٢} \times (٥ + \sqrt{س})^{٤} + ج$

٤ $\int_{٠}^{٢} (س+٣) \sqrt{٦س + س^{٢}} \, د س$

نفرض $ص = ٦س + س^{٢}$

$د س = \frac{د ص}{٢س + ٦}$

نغير الحدود $٢ \leftarrow ١٦$ ، $٠ \leftarrow ٠$

نفوض $\int_{٠}^{١٦} (س+٣) \times ص^{\frac{١}{٢}} \cdot \frac{د ص}{٢(س+٣)}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} \Big]_{٠}^{١٦} = \frac{١}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} \Big]_{٠}^{١٦}$

$= \frac{١}{٣} (٦٤ - ٠) = \frac{٦٤}{٣}$

لاحظ أنه ص لا ترجع لأصلها ...

٥ $\int \frac{(٥ + \sqrt{٣س})^{٧}}{\sqrt{٣س}} \, د س$

نفرض $ص = ٥ + \sqrt{٣س}$ $د س = \frac{٢ د ص}{\sqrt{٣س}}$

$د س = \frac{٢ د ص}{ص - ٥}$

$= \int \frac{ص^{٧}}{\sqrt{٣س}} \cdot \frac{٢ د ص}{ص - ٥} = \frac{٢}{\sqrt{٣}} \int \frac{ص^{٧}}{ص - ٥} \, د ص$

$= \frac{٢}{\sqrt{٣}} \int \left(ص^{٦} + ٥ ص^{٥} + ٢٥ ص^{٤} + ١٢٥ ص^{٣} + ٦٢٥ ص^{٢} + ٣١٢٥ ص + ١٥٦٢٥ + \frac{٧٨١٢٥}{ص - ٥} \right) د ص$

$= \frac{٢}{\sqrt{٣}} \left(\frac{ص^{٧}}{٧} + \frac{٥ ص^{٦}}{٦} + \frac{٢٥ ص^{٥}}{٥} + \frac{١٢٥ ص^{٤}}{٤} + \frac{٦٢٥ ص^{٣}}{٣} + \frac{٣١٢٥ ص^{٢}}{٢} + ١٥٦٢٥ ص + ٧٨١٢٥ \ln|ص - ٥| \right) + ج$

٦ $\int_{١}^{٣} \frac{١}{س \sqrt{١ + \ln س}} \, د س$

نفرض $ص = ١ + \ln س$

$د س = س \, د ص$ $د ص = \frac{د س}{س}$

$س \leftarrow ٣$ ، $١ \leftarrow ١$

نغير الحدود

نفوض $\int_{١}^{٤} \frac{١}{س \sqrt{ص}} \cdot س \, د ص$

$= \int_{١}^{٤} ص^{-\frac{١}{٢}} \, د ص = ٢ ص^{\frac{١}{٢}} \Big]_{١}^{٤} = ٢ (٤)^{\frac{١}{٢}} - ٢ (١)^{\frac{١}{٢}} = ٢$

٧ $\int \frac{١}{س + س \ln س} \, د س$

نفرض $ص = \ln س$ $د س = س \, د ص$

$د س = \frac{د ص}{\frac{١}{س}}$

$= \int \frac{١}{س (١ + ص)} \cdot س \, د ص$

$= \ln|١ + ص| + ج$

$= \ln|١ + \ln س| + ج$

٨ $\int \frac{١}{س} \times \sqrt{\frac{١ + \sqrt{٣س}}{س}} \, د س$

$= \int س^{-\frac{٣}{٢}} \times (١ + س^{\frac{١}{٢}})^{\frac{١}{٢}} \, د س$

نفرض $ص = ١ + س^{\frac{١}{٢}}$ $د س = \frac{٢ د ص}{س^{-\frac{١}{٢}}}$

$= \int س^{-١} \times ص^{\frac{١}{٢}} \cdot \frac{٢ د ص}{س^{-\frac{١}{٢}}} = ٢ \int ص^{\frac{١}{٢}} \cdot د ص = ٢ \times \frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ج$

$= \frac{٤}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + ج = \frac{٤}{٣} (١ + س^{\frac{١}{٢}})^{\frac{٣}{٢}} + ج$

نلاحظ أن

١. ∫ اقتا^ن س (اقتا س ظا س) د س

٢. ∫ اقتا^ن س × مشتقة زاوية مشتقة مظلية د س

٣. ∫ اقتا^ن س × اقتا^ن س مرة مشتقة مظلية د س

٤. ∫ دالة × دالة د س وكلاهما مرفوع لقوة تخير لزاوية واحدة وهما نفس الزاوية والزاوية مظلية فالتكامل بالتعويض

ملاحظة إذا اختلفا في الزاوية (مختلفة) نحاول توحيد الزاوية.

* **إذا كانت** ∫ ظا^ن س × قتا^ن س د س

نفرض ص = تحت القوة الزوجية للتخلص منه

القوة الفردية ونستخدم متطابقة

- إذا كانت كلاهما فردي نفرض ص = تحت الأكبر
- إذا كانت كلاهما زوجي ← متطابقة.
- عند وجود قوة عزيزة (كسرية أو مجهولة) نفرض ص = تحت القوة العزيزة.

لاحظ أيضاً:

عند وجود حالة قاس، ظاس أو قتاس، ظتاس

∫ قا^ن س × ظا^م س د س

ن فردي نفرض ص = قاس

ن زوجي نفرض ص = ظاس

وتطبيق مع قتاس، ظتاس

من الأمثلة:

التكامل بالتعويض تحايل لطالب قسم رياضيات وفقان بالفرض...

لاتنسى لتكاملات ∫ اقتا^ن س × داخلي × داخلي . ك

انظر للزاوية (عشوة مظلية) ← تعويض..

٩ ∫ جا س . جتا^٥ س د س

الحل: نفرض ص = جتاس ، ك ص = −جا س د س

∫ جا س . ص^٥ . ك ص / −جا س

= −∫ ص^٥ د ص = −ص^٦/٦ + ج = −جتا^٦ س/٦ + ج

١٠ ∫ جا^٣ س / √(١ + جتا^٤ س) . د س ، ∫ ٠ ← π/٤

الحل: ∫ جا س (١ + جتا^٤ س)^(−١/٢) د س

نفرض ص = ١ + جتا^٤ س

ك س = ك ص / (٢ (جتاس)^٣ × −جا س)

ك ص = −٤ جا س جتا^٣ س ك س

نستبدل الحدود: π/٤ ← ١ ، ٠ ← ٢

∫ جا س × جتا^٣ س . ك ص / −٤ جا س جتا^٣ س

= −١/٤ ∫ ص^(−١/٢) = −١/٤ [٢ √ص] = −١/٢ [√٢ − ١]

= −١/٢ (√٢ − ١) = ١/٢ − √٢/٢

١١ ∫ ٢ جا س (١ + جتا^٢ س)^٥ . د س

= ∫ ٢ جا س (٢ جتا^٢ س)^٥ . د س = ∫ ٢ جا س ٣٢ جتا^١٠ س د س

نفرض ص = جتاس ، ك ص = −جا س د س

∫ ٦٤ جا س ص^١٠ . ك ص / −جا س

= ∫ −٦٤ ص^١٠ د ص = −٦٤ ص^١١/١١ + ج

= −٦٤ (جتا س)^١١/١١ + ج

رقم الصفحة (٣٨)

[١٣] . $\int$ قا²س ظا⁴س . دس

نفرض: ص = ظاس ، دس = $\frac{دص}{قا^2س}$

= $\int$ قا²س . ص⁴ . $\frac{دص}{قا^2س}$

= $\frac{ص^5}{5}$ + جـ = $\frac{ظا^5س}{5}$ + جـ

[١٣] . $\int$ قاس (قاس + ظاس)^ن . دس حيث ن ∈ ص⁺

نفرض ص = قاس + ظاس

دس = $\frac{دص}{قاس ظاس + قا^2س}$

= $\int$ قاس ص^ن × $\frac{دص}{قاس (ظاس + قاس)}$

= $\int$ $\frac{ص^ن}{ص}$. دص

= $\int$ ص$^{ن-1}$. دص = $\frac{ص^ن}{ن}$ + جـ

= $\frac{(قاس + ظاس)^ن}{ن}$ + جـ

[١٤] . $\int$ $\frac{جا^2س}{\sqrt{2س - جا2س}}$. دس

الحل: $\int$ جا²س (2س − جا2س)$^{-\frac{1}{2}}$. دس

نفرض ص = 2س − جا2س

دس = $\frac{دص}{2 - 2جتا2س}$

دس = $\frac{دص}{2(1 - جتا2س)}$ = $\frac{دص}{2 جا^2س}$

$\int$ جا²س × ص$^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{دص}{2 جا^2س}$

= $\frac{1}{2}$ × $\frac{2 ص^{\frac{1}{2}}}{1}$ + جـ

= $\sqrt{ص}$ + جـ = $\sqrt{2س - جا2س}$ + جـ

[١٥] . $\int$ جتا³س . جا²س . دس

الحل: ص = جاس ، دس = $\frac{دص}{جتاس}$

$\int$ جتا³س . ص² . $\frac{دص}{جتاس}$ = $\int$ جتا²س . ص² . دص

= $\int$ (1 − جا²س) ص² . دص

= $\int$ (1 − ص²) ص² . دص = $\int$ ص² − ص⁴ . دص

= $\frac{ص^3}{3}$ − $\frac{ص^5}{5}$ + جـ

= $\frac{جا^3س}{3}$ − $\frac{جا^5س}{5}$ + جـ

[١٦] . $\int$ جا³2س جتا⁵2س . دس

الحل: ص = جتا2س ، دس = $\frac{دص}{-2 جا2س}$

= $\int$ جا³2س × ص⁵ . $\frac{دص}{-2 جا2س}$

= $\frac{-1}{2}$ $\int$ جا²2س × ص⁵ . دص

= $\frac{-1}{2}$ $\int$ (1 − جتا²2س) ص⁵ . دص

= $\frac{-1}{2}$ $\int$ (1 − ص²) ص⁵ . دص

= $\frac{-1}{2}$ $\int$ ص⁵ − ص⁷ . دص

= $\frac{-1}{2}$ ($\frac{ص^6}{6}$ − $\frac{ص^8}{8}$) + جـ

= $\frac{-1}{2}$ ($\frac{جتا^6 2س}{6}$ − $\frac{جتا^8 2س}{8}$) + جـ

[١٧] . $\int$ جا³س . دس

= $\int$ جاس × جا²س . دس

= $\int$ جاس (1 − جتا²س) . دس

نفرض ص = جتاس ، دس = $\frac{دص}{-جاس}$

= $\int$ جاس (1 − ص²) $\frac{دص}{-جاس}$

= $\int$ ص² − 1 . دص

= $\frac{ص^3}{3}$ − ص + جـ

= $\frac{جتا^3س}{3}$ − جتاس + جـ

١٨ ∫ جتا⁵س . دس

= ∫ جتا س جتا⁴س . دس

= ∫ جتا س (١ − جا²س)² . دس

ص = جا س ، دص = جتا س دس ، دس = دص / جتا س

= ∫ جتا س (١ − ص²)² . دص / جتا س

= ∫ (١ − ٢ص² + ص⁴) . دص

= ص − ٢ص³/٣ + ص⁵/٥ + ج

= جا س − ٢جا³س/٣ + جا⁵س/٥ + ج

١٩ ∫ جتا³س / جا^(١/٢) س . دس

= ∫ جتا²س (جا س)^(−١/٢) . دص

نفرض ص = جا س ، دس = دص / جتا س

= ∫ جتا²س ص^(−١/٢) دص

= ∫ (١ − جا²س) ص^(−١/٢) . دص

= ∫ (١ − ص²) ص^(−١/٢) دص

= ∫ ص^(−١/٢) − ص^(٣/٢) . دص

= ٢ص^(١/٢) − ٢ص^(٥/٥) + ج

= ٢√ص − ٢/٥ ص²√ص + ج

= ٢√جا س − ٢/٥ جا²س √جا س + ج

٢٠ ∫ ٣ / (٥ قا²س قتا²س) . دس حيث مقام عامل

= ∫ ٣ جتا²س جا²س . دس

نفرض ص = جا س ، دس = دص / جتا س

= ∫ ٣ جتا²س ص² دص

= ∫ ٣ (١ − ص²) ص² . دص

= ∫ ٣ص² − ٣ص⁴ . دص

= ٣ص³/٣ − ٣ص⁵/٥ + ج

= ص³ − ٣/٥ ص⁵ + ج

= جا³س − ٣/٥ جا⁵س + ج

٢١ ∫ جتا⁴س . دس عمر سيد

٢٢ ∫ جا⁴س × جتا²س . دس

= ∫ (جا²س)² × جتا²س . دس

= ∫ ((١/٢)(١ − جتا ٢س))² × (١/٢)(١ + جتا ٢س) . دس

= ∫ (١/٤)(١ − جتا ٢س)(١ − جتا ٢س)(١/٢)(١ + جتا ٢س) . دس

= ١/٨ ∫ (١ − جتا ٢س)(١ − جتا ٢س)(١ + جتا ٢س) . دس

= ١/٨ ∫ جا²٢س (١ − جتا ٢س) . دس

= ١/٨ ∫ جا²٢س − جا²٢س جتا ٢س . دس نوزع

= ١/٨ (∫ جا²٢س بجس − ∫ جا²٢س جتا ٢س . دس)

⇐ ١/٨ (∫ (١/٢)(١ − جتا ٤س) . دس − ∫ ص² دص / ٢) نفرض ص = جا ٢س ، دس = دص / ٢ جتا ٢س

= ١/٨ ((١/٢)(س − جا ٤س / ٤) − ص³/٦ + ج)

= ١/١٦ (س − جا ٤س / ٤) − جا³٢س / ٤٨ + ج

٢٣ ∫ ٢ جا ٢س / (جتا²س + ٢ جتا س + ١) . دس حيث مقام عامل مربع

= ∫ ٤ جا س جتا س / (جتا²س + ٢ جتا س + ١) . دس

= ∫ ٤ جا س جتا س / (جتا س + ١)² . دس

= ∫ ٤ جا س (جتا س + ١)^(−٢) جتا س . دس

نفرض ص = جتا س + ١ ، دس = دص / −جا س

= ∫ ٤ جا س ص^(−٢) جتا س / −جا س . دص

= ∫ −٤ ص^(−٢) (ص − ١) . دص

= ∫ −٤ + ٤ص^(−٢) . دص

= −٤ص + ٤ص^(−١) / −١ + ج

= −٤ص − ٤/ص + ج

= −٤(جتا س + ١) − ٤/(جتا س + ١) + ج

= −٤ جتا س − ٤ − ٤/(جتا س + ١) + ج

= −٤ جتا س − ٤/(جتا س + ١) + ج

٢٤ ∫ ٧ جا س جا ٣س / جا ٢س . دس

= ∫ ٧ جا س جا ٣س / ٢ جا س جتا س . دس

= ∫ ٧ جا ٣س / ٢ جتا س . دس

= ∫ ٧ (٣ جا س − ٤ جا³س) / ٢ جتا س . دس

= ∫ ٢١ جا س / ٢ جتا س − ٢٨ جا³س / ٢ جتا س . دس

= ∫ ٢١ جا س / ٢ جتا س − ١٤ جا³س / جتا س . دس

= ∫ ٢١ جا س / ٢ جتا س − ١٤ جا س (١ − جتا²س) / جتا س . دس

= ∫ ٢١ جا س / ٢ جتا س − ١٤ جا س / جتا س + ١٤ جا س جتا²س / جتا س . دس

= ∫ ٢١ جا س / ٢ جتا س − ١٤ جا س / جتا س + ١٤ جا س جتا س . دس

= ∫ ٢١ جا س / ٢ جتا س − ١٤ جا س / جتا س + ٧ جا ٢س . دس

= ٢١/٢ (−لو |جتا س|) − ١٤ (−لو |قا س + ظا س|) − ٧ جتا ٢س / ٢ + ج

= −٢١/٢ لو |جتا س| + ١٤ لو |قا س + ظا س| − ٧/٢ جتا ٢س + ج

٢٤ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{حتا}س - \text{حتا}^3 س}\ د س$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{حتا}س(1-\text{حتا}^2 س)}\ د س$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{حتا}س \times \text{جا}^2 س}\ د س$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{حتا}س} \times |\text{جا}س|\ د س$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\text{حتا}س)^{\frac{1}{2}} \times \text{جا}س\ د س$

نفرض $ص = \text{حتا}س$ ، $د ص = -\text{جا}س\ د س$ ، $د س = \frac{-د ص}{\text{جا}س}$

$س \leftarrow 0 \Rightarrow ص \leftarrow 1$ ، $س \leftarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow ص \leftarrow 0$

$= \int_{1}^{0} ص^{\frac{1}{2}} \cdot \text{جا}س \cdot \frac{-د ص}{\text{جا}س}$

$= \int_{1}^{0} -ص^{\frac{1}{2}}\ د ص = \left[-\frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{0} = \frac{2}{3}$ (٢٤)

٢٥ $\int \text{ظتا}^2 س (\text{جا}^2 س - \text{جتا}^2 س)^2\ د س$

رهيب

$= \int (\text{جتا}^2 س - \text{جا}^2 س)(\text{جا}س - \text{جتا}س)^2\ د س$

$= \int (\text{جتا}س - \text{جا}س)(\text{جتا}س + \text{جا}س)(\text{جا}س - \text{جتا}س)^2\ د س$

$= \ominus \int (\text{جتا}س + \text{جا}س)(\text{جا}س - \text{جتا}س)^9\ د س$

نفرض $ص = \text{جا}س - \text{جتا}س$

$د س = \frac{د ص}{\text{جتا}س + \text{جا}س}$

$= \ominus \int (\text{جتا}س + \text{جا}س) ص^9 \cdot \frac{د ص}{(\text{جتا}س + \text{جا}س)}$

$= \ominus \int ص^9\ د ص$

$= -\frac{ص^{10}}{10} + ج$

$= -\frac{(\text{جا}س - \text{جتا}س)^{10}}{10} + ج$

٢٦ $\int \text{قتا}^2 س\ \text{ظتا}^2 س\ د س$

نفرض $ص = \text{ظتا}^2 س$

$د ص = \frac{-د س}{-\text{قتا}^2 س}$

$= \int \text{قتا}^2 س \cdot ص^2 \cdot \frac{د ص}{\text{قتا}^2 س}$

$= \int ص^2\ د ص$

$= \frac{ص^3}{3} + ج$

$= \frac{(\text{ظتا}^2 س)^3}{3} + ج$

٢٧ $\int \text{قتا}^4 س \cdot \text{ظتا}^3 س\ د س$

نفرض $ص = \text{ظتا}س$ ، $د ص = \frac{-د س}{\text{قتا}^2 س}$

$= \int \text{قتا}^4 س \cdot ص^3 \cdot \frac{د ص}{-\text{قتا}^2 س}$

$= \ominus \int \text{قتا}^2 س \cdot ص^3\ د ص$

$= \ominus \int (1 + \text{ظتا}^2 س) \cdot ص^3\ د ص$

$= \ominus \int (1 + ص^2) ص^3\ د ص$

$= \ominus \int ص^3 + ص^5\ د ص$

$= -\frac{ص^4}{4} - \frac{ص^6}{6} + ج$

$= -\frac{(\text{ظتا}س)^4}{4} - \frac{(\text{ظتا}س)^6}{6} + ج$

٢٨ $\int \text{قا}^4 س \cdot \text{ظا}^3 س\ د س$

نفرض $ص = \text{قا}س$ ، $د س = \frac{د ص}{\text{قا}س \text{ظا}س}$

$= \int ص^4 \cdot \text{ظا}^3 س \cdot \frac{د ص}{\text{قا}س \text{ظا}س}$

$= \int ص^3 (\text{قا}^2 س - 1)\ د ص$

$= \int ص^3 (ص^2 - 1)\ د ص$ ، $ع = ص^2 - 1$

$= \frac{ص^5}{5} - \frac{ص^3}{3} + ج$

$= \frac{\text{قا}^5 س}{5} - \frac{\text{قا}^3 س}{3} + ج$

٢٩ $\int$ قا^{6}س . ظاس . دس

الحل: نفرض $ص = ظاس$ ، $دس = \frac{دص}{قا^2 س}$

$= \int قا^4 س . ص . \frac{دص}{قا^2 س}$

$= \int قا^4 س . ص . دص$

$= \int قا^4 س \times (1 + ظا^2 س) \times ص . دص$

$= \int (1 + ص^2) \times ص . دص$

$= \int (1 + 2ص^2 + ص^4) \times ص . دص$

$= \int ص + 2ص^3 + ص^5 . دص$

$= \frac{ص^2}{2} + \frac{2ص^4}{4} + \frac{ص^6}{6} + ج$

$= \frac{ظا^2 س}{2} + \frac{ظا^4 س}{4} + \frac{ظا^6 س}{6} + ج$

٣٠ $\int$ قا^{4}س . دس

$= \int قا^2 س \times قا^2 س . دس$

$= \int قا^2 س \times (1 + ظا^2 س) . دس$

نفرض $ص = ظاس$ ، $دس = \frac{دص}{قا^2 س}$

$= \int قا^2 س (1 + ص^2) \times \frac{دص}{قا^2 س}$

$= ص + \frac{ص^3}{3} + ج$

$= ظاس + \frac{ظا^3 س}{3} + ج$

٣١ $\int$ قا^{n}س . ظاس . دس

الحل: $ص = قاس$ ، $دس = \frac{دص}{قاس ظاس}$

$= \int ص^n . ظاس . \frac{دص}{قاس ظاس}$

$= \int ص^{n-1} . دص = \frac{ص^n}{n} + ج$

$= \frac{قا^n س}{n} + ج$

٣٢ $\int$ ظا^{4}س . دس

الحل:

$= \int ظا^2 س \times ظا^2 س . دس$

$= \int (قا^2 س - 1) \times ظا^2 س . دس$

$= \int قا^2 س \times ظا^2 س - ظا^2 س . دس$

$= \int \frac{ظا^2 س}{(قا^2 س - 1)} . دس$

$ص = ظا^2 س$ ، $دس = \frac{دص}{2 قا^2 س}$

$= \int \frac{ص}{2} . دص - \int ظا^2 س . دس$

$= \frac{1}{2} \times \frac{ص^2}{2} - (ظا^2 س - س) + ج$

$= \frac{(ظا^2 س)^2}{4} - ظا^2 س + س + ج$

٣٣ $\int \frac{9}{ظا^2 س ظا^2 س}$. دس

نختصر لسهولة الحل

$= \int 9 قتا^2 س . ظتا^2 س . دس$

نفرض $ص = ظتاس$ ، $دس = \frac{دص}{-قتا^2 س}$

$= \int 9 قتا^2 س . ص^2 . \frac{دص}{-قتا^2 س}$

$= \int -9 ص^2 . دص = -3ص^3 + ج$

$= -3 ظتا^3 س + ج$

٣٤ $\int$ حتاس . ظا(حاس) . دس

الحل: نفرض الزاوية $ص = حاس$ ، $دس = \frac{دص}{حتاس}$

$= \int حتاس \times ظاص . \frac{دص}{حتاس}$

$= \int قاص - 1 . دص$

$= ظاص - ص + ج$

$= ظا(حاس) - حاس + ج$

٣٥ تمرين ∫ ظتا س / حا٣س . دس

الجواب: -١/٢ حتا٢س + جـ

٣٦ ∫ س^٢ حا س^٣ حتا س^٣ . دس

الحل: نفرض ص = س^٣ ⇒ دص = ٣س^٢ دس ⇒ دس = دص / ٣س^٢

= ∫ س^٢ حا ص حتا ص . دص / ٣س^٢

= ١/٣ ∫ حا ص حتا ص . دص

= ١/٣ ∫ ١/٢ حا٢ص . دص

= ١/٦ × - حتا٢ص / ٢ + جـ

= - حتا٢س^٣ / ٦ + جـ

٣٧ ∫ ظتا(لو س) / س . دس

الحل: نفرض ص = لو س ⇒ دص = دس / س

دس = س . دص

= ∫ ظتا ص / س . س . دص

= ∫ حتا ص / حا ص . دص ، لو حا ص + جـ

= لو حا(لو س) + جـ

٣٨ تمرين ∫ ٣ + ظتا س / ٢ + ٢ حتا^٢ س . دس

ب ∫ حا س / ٤ + ٥ حتا س . دس

جـ ∫ ١ / حتا^٢ س √(٧ + ظا س) . دس

د ∫ √(حتا س) جا ٢س . دس

٣٩ ∫ √(١ - جا س) . دس

الحل: مرافوه ... ثم نفرض ص = √(١ - جا س)

فكرة: ∫ (مشتقة)^ن . دس

∫ مشتقة / مثله مرفوع . دس

∫ (كسر حدود)^ن . دس أو لعكس

تحتاج تشغل بطريقة مثلية لتبسيط شكل السؤال ثم التكامل بالتعويض.

٤٠ ∫ (س+١)^٩ / س^١١ . دس

= ∫ س^-١١ (س + ١)^٩ . دس

= ∫ س^-١١ (س (١ + ١/س))^٩ . دس

= ∫ س^-١١ س^٩ (١ + ١/س)^٩ . دس

= ∫ س^-٢ (١ + ١/س)^٩ . دس

نفرض ص = ١ + ١/س ⇒ دص = دس / -س^٢

= ∫ ص^٩ × -دص

= - ص^١٠ / ١٠ + جـ

= - (١ + ١/س)^١٠ / ١٠ + جـ

٤١ ∫ س^٥ / (٢ + س)^٧ . دس

= ∫ (س - ٢ + ٢)^٥ / (س + ٢)^٧ . دس

= ∫ (س - ٢)^٥ / (س + ٢)^٧ + ∫ ٢^٥ / (س + ٢)^٧ . دس

نفرض ص = س + ٢ ⇒ دص = دس

٤٢) $\int \sqrt[3]{س^7 - س^3}\ د س$

$= \int س^3 \sqrt[3]{س^4 - 1}\ د س$

$= \int س^3 \times (س^4 - 1)^{\frac{1}{3}}\ د س$

نفرض $ص = س^4 - 1$ ، $\frac{د ص}{د س} = 4 س^3$ ، $د س = \frac{د ص}{4 س^3}$

$= \int س^3 \times ص^{\frac{1}{3}} \times \frac{د ص}{4 س^3} = \frac{1}{4} \int ص^{\frac{1}{3}}\ د ص$

$= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} ص^{\frac{4}{3}} + ج = \frac{3}{16} ص \sqrt[3]{ص} + ج$

$= \frac{3}{16} (س^4 - 1) \sqrt[3]{س^4 - 1} + ج$

٤٣) $\int \frac{\sqrt[3]{س - س^3}}{س^4}\ د س$

$= \int \frac{\sqrt[3]{س (1 - س^2)}}{س^4}\ د س = \int \frac{س^{\frac{1}{3}} (1 - س^2)^{\frac{1}{3}}}{س^4}\ د س$

$= \int س^{-\frac{11}{3}} (1 - س^2)^{\frac{1}{3}}\ د س$

نفرض $ص = 1 - س^2$ ، $\frac{د ص}{د س} = -2 س$ ، $د س = \frac{د ص}{-2 س}$

$= \int س^{-\frac{11}{3}} \times ص^{\frac{1}{3}} \times \frac{د ص}{-2 س} = -\frac{1}{2} \int س^{-\frac{14}{3}} ص^{\frac{1}{3}}\ د ص$

$= -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{11} س^{-\frac{11}{3}} ص^{\frac{4}{3}} + ج = \frac{3}{22} س^{-\frac{11}{3}} (1 - س^2)^{\frac{4}{3}} + ج$

٤٤) $\int \frac{\sqrt[3]{س^2 - س^4}}{س^5}\ د س$ (مرتين)

$\int \frac{1}{س^4 \sqrt[3]{1 + س^2 - س^4}}\ د س$

جـ) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{س^2 + س^4}}\ د س$

٤٥) $\int (س + 5)^{-2} (س^2 + 5)\ د س$

الحل : نفرض $ص = س^2 + 5 س + 10$

$د س = \frac{د ص}{2 س + 5}$

$\int (س + 5)^{-2} \times ص \times \frac{د ص}{2 س + 5}$

$= \int ص \times (2 س + 5)^{-3}\ د ص$

$= ص \times \frac{-1}{2} (2 س + 5)^{-2} + \int \frac{1}{2} (2 س + 5)^{-2}\ د ص$

$= -\frac{1}{2} ص (2 س + 5)^{-2} + \frac{1}{2} \int (2 س + 5)^{-2}\ د ص$

$= -\frac{1}{2} ص (2 س + 5)^{-2} - \frac{1}{4} (2 س + 5)^{-1} + ج$

$= -\frac{1}{2} (س^2 + 5 س + 10) (2 س + 5)^{-2} - \frac{1}{4} (2 س + 5)^{-1} + ج$

٤٦) $\int ص^2\ د س$

$= \int ص^2 \times 3 ص^2\ د ص$

$= \frac{3}{5} ص^5 + ج$

$= \frac{3}{5} (س^3 + 3 ص)^5 + ج$

٤٧) $\int قا^2 س \cdot ظا س\ د س$

الحل : نفرض $ص = ظا س$

$\frac{د ص}{د س} = قا^2 س$

$د س = \frac{د ص}{قا^2 س}$

$\int قا^2 س \times ص \times \frac{د ص}{قا^2 س} = \int ص\ د ص$

$= \frac{1}{2} ص^2 + ج = \frac{1}{2} ظا^2 س + ج$

٤٨) (مرتين)

٤٩ . اثبت ان $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(س-1)^{ن}}{س^{ن+2}}$. دس =

$$\begin{cases} \frac{-1}{ن+1} & ، ن \text{ فردي} \\ \frac{1}{ن+1} & ، ن \text{ زوجي} \end{cases}$$

الحل :

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(س-1)^{ن}}{س^{ن} \times س^{2}} \, دس$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(س(1-\frac{1}{س}))^{ن}}{س^{ن} \times س^{2}} \, دس$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{س^{ن} \times (-1)^{ن} (1-\frac{1}{س})^{ن}}{س^{ن} \times س^{2}} \, دس$$

نفرض $ص = 1 - \frac{1}{س}$ ⟸ $دص = \frac{دس}{س^{2}}$

$س = \frac{1}{2} \Rightarrow ص = -1$

$س = 1 \Rightarrow ص = 0$

$$= \int_{-1}^{0} (-1)^{ن} ص^{ن} \, دص = \left[\frac{(-1)^{ن} ص^{ن+1}}{ن+1} \right]_{-1}^{0}$$

$$= (0) - \left(\frac{(-1)^{ن}}{ن+1} \right)$$

$$= \begin{cases} \frac{-1}{ن+1} & ، ن \text{ فردي} \\ \frac{1}{ن+1} & ، ن \text{ زوجي} \end{cases}$$

٥٠ $\int_{2}^{3} \sqrt{\frac{س-2}{س^{7}}} \, دس$

نفرض $ص = \frac{س-2}{س}$ ⟸ $دص = \frac{2}{س^{2}} دس$

$س = 3 \Rightarrow ص = \frac{1}{3}$

$س = 2 \Rightarrow ص = 0$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{3}} \sqrt{ص^{7}} \, دص = \int_{0}^{\frac{1}{3}} ص^{\frac{7}{2}} \, دص$$

$$= \left[\frac{ص^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} \right]_{0}^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{9} \left[ص^{\frac{9}{2}} \right]_{0}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{9}{2}} - 0$$

$$= \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3^{\frac{9}{2}}} \right) = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3^{4} \times \sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{2}{9} \left(\frac{1}{81\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{729\sqrt{3}}$$

فكرة : اذا كان داخل التكامل $هـ(ص س)$ نأخذ التكامل بالتعويض ونكتب بجانب الانتباه لوجود اقتران بجانب هـ و لكونه مشتقة الفرض .

٥١ . اذا كان $\int_{1}^{2} هـ(س) \, دس = 24$

جد $\int_{1}^{2} س^{2} هـ(س^{3}) \, دس$

نفرض $ص = س^{3}$ ⟸ $دص = 3س^{2} دس$

$س = 2 \Rightarrow ص = 8$

$س = 1 \Rightarrow ص = 1$

$$= \frac{1}{3} \int_{1}^{8} هـ(ص) \, دص = \frac{1}{3} \times 24 = 8$$

٥٢ . اذا كان $هـ(16) = 7$ ، $هـ(1) = 3$

جد $\int_{1}^{4} س \, هـ(س^{2}) \, دس$

الحل : نفرض $ص = س^{2}$ ⟸ $دص = 2س \, دس$

$س = 4 \Rightarrow ص = 16$

$س = 1 \Rightarrow ص = 1$

$$= \frac{1}{2} \int_{1}^{16} هـ(ص) \, دص = \frac{1}{2} [هـ(ص)]_{1}^{16}$$

$$= \frac{1}{2} (هـ(16) - هـ(1)) = \frac{1}{2} (7 - 3) = 2$$

التكامل بالأجزاء

استخدامات :

١. ∫ اعتبر × (باقي) . دس

٢. ∫ اعتبر × جا (زاوية خطية) . دس

٣. ∫ اعتبر × اللوغاريتم . دس

لا تنسى : ∫ دا دوس × دا دوس . دس لتوزيع

هاهنا يعرف الحالة الاستثنائية

أسئلة متنوعة :-

١. ∫ (٤ + ٢س)(١ - ٢س)^٧ . دس

الحل : ع = ١ - ٢س ⟵ دع = -٢ دس

دس = -دع/٢

∫ (٤ + ٢س)(١ - ٢س)^٧ . دس = ∫ (٤ + ٢س) ع^٧ . (-دع/٢)

= -١/٢ ∫ (٤ + ٢س) ع^٧ . دع

= -١/٢ ∫ (٤ + ١ - ع) ع^٧ . دع

= -١/٢ ∫ (٥ - ع) ع^٧ . دع

= -١/٢ ∫ (٥ع^٧ - ع^٨) . دع

= -١/٢ [٥/٨ ع^٨ - ١/٩ ع^٩] + ج

= -١/٢ [٥/٨ (١ - ٢س)^٨ - ١/٩ (١ - ٢س)^٩] + ج

٢. ∫ س جا ٣س . دس

ع = س ⟵ دع = دس

دس = جا ٣س ⟵ هـ = -جتا ٣س / ٣

∫ س جا ٣س . دس = -س جتا ٣س / ٣ + ∫ جتا ٣س / ٣ . دس

= -س جتا ٣س / ٣ + ١/٣ × جا ٣س / ٣ + ج

= -س جتا ٣س / ٣ + جا ٣س / ٩ + ج

∫ (٦ + ٣س - س^٢) هـ^(١٠ + ٤س - س^٢) دس

∫ ٣ س هـ^س . دس = ٤ ، هـ

∫ س هـ^(س) . دس = ٤ ، هـ

∫ هـ^س (١ + هـ^س) . دس

∫ ٢ هـ^(س) . دس = ١٠ ، هـ

∫ هـ^(-س) - ٣ س . دس

∫ س هـ^(٢س) . دس = ٤ ، هـ

∫ (٦ + ٣س - س^٢) هـ^(١٠ + ٤س - س^٢) دس

٥٣ . اثبت أن ∫ هـ^(٢س) . دس = ∫ هـ^(٢(٣-س)) . دس

الحل : نستقل بالجهة اليسرى فقط

نفرض (ص = ٣ - س) ⟵ دص = -دس ⟵ دس = -دص

عندما س = ٣ ⟵ ص = ٠ ، عندما س = ٢ ⟵ ص = ١

∫ هـ^(٢س) . دس = ∫ هـ^(٢(٣-ص)) . (-دص)

= ∫ هـ^(٦-٢ص) . دص

= ∫ هـ^(٦) هـ^(-٢ص) . دص

= ∫ هـ^(٦) هـ^(٢(٣-ص)) . دص

= ∫ هـ^(٢(٣-س)) . دس

٥٤ . إذا كان ∫ س هـ^(س) . دس = ٤ ، هـ

فجد ∫ (٢س + ٦) هـ^(س+٢) . دس

الحل : ع = س + ٢ ⟵ دع = دس

∫ (٢س + ٦) هـ^(س+٢) . دس = ∫ (٢س + ٦) هـ^س هـ^٢ . دس

= هـ^٢ ∫ (٢س + ٦) هـ^س . دس

= هـ^٢ ∫ ٢ هـ^س (س + ٣) . دس

= ٢ هـ^٢ ∫ هـ^س (س + ٣) . دس

= ٢ هـ^٢ ∫ س هـ^س . دس + ٦ هـ^٢ ∫ هـ^س . دس

= ٢ هـ^٢ (٤ ، هـ) + ٦ هـ^٢ هـ^س + ج

= ٨ ، هـ^٣ + ٦ هـ^(س+٢) + ج

٥٥ . ∫ هـ^(س) . دس = ∫ هـ^(س-٥) . دس

حيث ، ثابت جـ

∫ س هـ^(س) . دس = ٤ ، هـ

∫ هـ^(س) (١ + هـ^س) . دس

∫ ٢ هـ^(س) . دس = ١٠ ، هـ

∫ هـ^(-س) - ٣ س . دس

∫ س هـ^(٢س) . دس = ٤ ، هـ

[٣] $\int (1-5س)^{2} \, هـ^{3س+٤} \, د س$

الحل: نفرض $ع = 1-5س$ ، $د ع = -5 \, د س$

$\frac{د هـ}{د س} = هـ^{3س+٤}$ ، $هـ = \int هـ^{3س+٤} \, د س$

$\frac{هـ}{3} = هـ$ ، $د هـ = هـ^{3س+٤} \, د س$

وبالتعويض في العلاقة الأولى:

$= ع^{2} \cdot \frac{هـ}{3} - \int \frac{هـ}{3} \cdot (-5) \, د س$

$= ع^{2} \cdot \frac{هـ}{3} + \frac{5}{3} \int هـ \, د س$

$= (1-5س)^{2} \cdot \frac{هـ^{3س+٤}}{3} + \frac{5}{3} هـ^{3س+٤} + ج$

[٤] $\int \frac{س}{\sqrt{7-9س}} \, د س$

الحل: نفرض $ع = 7-9س$ ، $س = \frac{7-ع}{9}$

$د ع = -9 \, د س$ ، $د س = -\frac{1}{9} د ع$

$= \int \frac{\frac{7-ع}{9}}{\sqrt{ع}} \cdot (-\frac{1}{9}) \, د ع$

$= \frac{1}{81} \int \frac{7-ع}{\sqrt{ع}} \, د ع$

$= \frac{1}{81} \int (ع^{-\frac{1}{2}} - ع^{\frac{1}{2}}) \, د ع$

$= \frac{1}{81} [2ع^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} ع^{\frac{3}{2}}] + ج$

$= \frac{2}{81} \sqrt{ع} (3 - \frac{ع}{3}) + ج$

$= \frac{2}{243} \sqrt{7-9س} (21 - 7 + 9س) + ج$

$= \frac{2}{243} (9س + 14) \sqrt{7-9س} + ج$

[٥] $\int س \sqrt[3]{س+1} \, د س$

نفرض $ع^{3} = س+1$ ، $س = ع^{3} - 1$

$د س = 3ع^{2} \, د ع$

$= \int (ع^{3} - 1) \cdot ع \cdot 3ع^{2} \, د ع$

$= 3 \int (ع^{6} - ع^{3}) \, د ع$

$= 3 [\frac{ع^{7}}{7} - \frac{ع^{4}}{4}] + ج$

$= \frac{3}{28} ع^{4} (4ع^{3} - 7) + ج$

$= \frac{3}{28} (س+1)^{\frac{4}{3}} (4س - 3) + ج$

[٦] $\int س^{2} (حاس + حتاس) \, د س$

الحل: $= \int س^{2} حاس \, د س + \int س^{2} حتاس \, د س$

$= \int س^{2} (-د(حتاس)) + \int س^{2} \, د(حاس)$

$= -س^{2} حتاس + \int 2س حتاس \, د س + س^{2} حاس - \int 2س حاس \, د س$

$= -س^{2} حتاس + 2 \int س حتاس \, د س + س^{2} حاس - 2 \int س حاس \, د س$

بالتجزئة: $ع = س$ ، $د ع = د س$

$د هـ = حتاس \, د س$ ، $هـ = حاس$

$= -س^{2} حتاس + 2 [س حاس - \int حاس \, د س] + س^{2} حاس - 2 \int س حاس \, د س$

$= -س^{2} حتاس + 2س حاس + 2 حتاس + س^{2} حاس - 2 \int س حاس \, د س$

$= -س^{2} حتاس + 2س حاس + 2 حتاس + س^{2} حاس + 2 حتاس + ج$

$= س^{2} حاس + 2س حاس + 4 حتاس + ج$

[٧] $\int \frac{5 حاس حتاس}{حا^{2}س} \, د س$

الحل: $= \int 5 \, س \, حاس \, حتاس \, د س$

$= \int 5س \times \frac{1}{2} حا2س \, د س$

$= \int \frac{5}{2} س \, حا2س \, د س$

نفرض $ع = \frac{5}{2} س$ ، $د ع = \frac{5}{2} د س$

$د هـ = حا2س \, د س$ ، $هـ = -\frac{1}{2} حتا2س$

$= -\frac{5}{4} س \times حتا2س + \int \frac{5}{4} حتا2س \, د س$

$= -\frac{5}{4} س \times حتا2س + \frac{5}{8} حا2س + ج$

[٨] $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} جتاس (س + قاس)^{3} \, د س$

الجواب: $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}$

$= \int \frac{س}{1 - حتاس} \, د س$

٩) $\int \frac{س هـ^{س}}{(س+١)^{٢}} \, د س$

حلو جدا

الحل:

تكاملات تحتوي $(لو_{هـ} س)$:-

$\int ق(س) \times لو_{هـ}(س) \, د س$

عليه حل السؤال بالأجزاء و لتعويض وتكتب بعضهم للسؤال السهل مع اهدى لهم التعبير.

بالأجزاء نفرض $ق = لو_{هـ}(س)$

بالتعويض نفرض $هـ = لو_{هـ}(س)$

أمثلة متنوعة :-

١) $\int س^{٢} لو_{هـ} س \, د س$

الحل: $ق = لو_{هـ} س$ ، $د ق = \frac{١}{س} د س$

$د ق = \frac{١}{س}$ ← $هـ = \frac{س^{٣}}{٣}$

القانون:

$\frac{س^{٣}}{٣} لو_{هـ} س - \int \frac{١}{س} \times \frac{س^{٣}}{٣} \, د س$

$\frac{س^{٣}}{٣} لو_{هـ} س - \int \frac{س^{٢}}{٣} \, د س$

$\frac{س^{٣}}{٣} لو_{هـ} س - \frac{س^{٣}}{٩} + جـ$

٢) $\int (لو_{هـ} س)^{٢} \, د س$

الحل: نوخا بسيط لحاله أعو عليه حوه أجزاء

$ق = (لو_{هـ} س)^{٢}$ ، $د ق = د س$

$د ق = (لو_{هـ} س) \times \frac{١}{س} \, د س$ ← $هـ = س$

القانون:

$س (لو_{هـ} س)^{٢} - \int ٢ لو_{هـ} س \times \frac{١}{س} \times س \, د س$

$س (لو_{هـ} س)^{٢} - ٢ \int لو_{هـ} س \, د س$

أجزاء مرة ثانية

$ق = لو_{هـ} س$ ، $د ق = د س$

$د ق = \frac{١}{س}$ ← $هـ = س$

$س لو_{هـ} س - \int ١ \, د س$

$س (لو_{هـ} س)^{٢} - ٢ (س لو_{هـ} س - س) + جـ$

٣) $\int س^{٢} لو_{هـ}^{٢} س \, د س$

$= \int ٢ س لو_{هـ} س \, د س$

$ق = لو_{هـ} س$ ، $د ق = ٢ س$

$د ق = \frac{١}{س} د س$ ← $هـ = س^{٢}$

القانون:

$س^{٢} لو_{هـ} س - \int \frac{١}{س} \times س^{٢} \, د س$

$س^{٢} لو_{هـ} س - \int س \, د س$

$س^{٢} لو_{هـ} س - \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

٤) $\int \frac{١}{س} لو_{هـ} س \, د س$

الحل: $ق = لو_{هـ} س$ ، $د ق = \frac{١}{س} د س$

$\int ق \, د ق = \frac{ق^{٢}}{٢} + جـ$

$= \frac{(لو_{هـ} س)^{٢}}{٢} + جـ$

٥ $\int$ س قا^{2}س ظاس . دس

ضرب مشترك

الحل : فرض $ف = س$ ، $دف = 1 . دس$

$دهـ = قا^2س$ دس ، $هـ = \int قا^2س$ دس $= ظاس$

$هـ = ظاس$

$دس = \frac{دف}{قا^2س}$

$\int ف . دهـ = ف هـ - \int هـ . دف$

$= س ظاس - \int ظاس . دس$

القانون :

$\int ظا^2س$ دس $= \int ظاس$ دس $- س$

$\int قا^2س$ دس $= ظاس - س + ج$

$\int ظا^2س$ دس $= ظاس - س + ج$

٦ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{س \, جاس}{جتا^3س}$ دس

ضرب

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} س \times \frac{1}{جتاس} \times \frac{جاس}{جتاس}$ دس

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} س \, قاس \, ظاس$ دس

فرض $ف = س$ ، $دف = 1 . دس$

$دهـ = قاس ظاس$ دس ، $هـ = \int قاس ظاس$ دس $= قاس$

$= ف هـ - \int هـ . دف$

$= س قاس - \int قاس$ دس

$= س قاس - لو|قاس + ظاس| + ج$

$= \left[س قاس - لو|قاس + ظاس| \right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left(\frac{\pi}{4} \sqrt{2} - لو|\sqrt{2} + 1| \right) - (0 - لو|1|)$

$= \frac{\pi}{4} \sqrt{2} - لو(\sqrt{2} + 1)$

ب $\int \frac{س \, جتاس}{قتاس}$ دس

$= \int س \, جتا^2س$ دس

$= \int س \left(\frac{1 + جتا2س}{2} \right)$ دس

$= \frac{1}{2} \int س$ دس $+ \frac{1}{2} \int س \, جتا2س$ دس

$= \frac{1}{2} \left(\frac{س^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left[س \frac{جا2س}{2} - \int \frac{جا2س}{2} \right]$ دس

$= \frac{س^2}{4} + \frac{س \, جا2س}{4} + \frac{جتا2س}{8} + ج$

جـ $\int \frac{لو(س+3)}{\sqrt{س+3}}$ دس

$= \int (س+3)^{-\frac{1}{2}} \, لو(س+3)$ دس

فرض $ف = لو(س+3)$ ، $دف = \frac{1}{س+3} . دس$

$دهـ = (س+3)^{-\frac{1}{2}}$ دس ، $هـ = \int (س+3)^{-\frac{1}{2}}$ دس $= 2\sqrt{س+3}$

$= ف هـ - \int هـ . دف$

$= 2\sqrt{س+3} \, لو(س+3) - \int 2\sqrt{س+3} \cdot \frac{1}{س+3}$ دس

$= 2\sqrt{س+3} \, لو(س+3) - 2 \int (س+3)^{-\frac{1}{2}}$ دس

$= 2\sqrt{س+3} \, لو(س+3) - 2 \times 2\sqrt{س+3} + ج$

$= 2\sqrt{س+3} \, لو(س+3) - 4\sqrt{س+3} + ج$

د $\int ظا^4س \times لو_{هـ}(جاس)$ دس

هـ $\int قا^2س \times لو_{هـ}(جاس)$ دس

و $\int \frac{لو(ظاس)}{جا^2س}$ دس

ز $\int جتاس \times لو_{هـ}(جاس)$ دس

ح $\int قا^2س \times لو_{هـ}(ظاس)$ دس

فكرة حلوة وسهلة :-

٧ إذا كان $\int_{1}^{2} هـ(س) . دس = 10$ ،

$هـ(2) = 3$ ، $هـ(1) = 1$ ، جد

$\int_{0}^{1} س^3 \, هـ(س^2 + 1) . دس$

الحل : نفرض $ف = س^2 + 1$

$دف = 2س . دس$

$س = \frac{دف}{2س}$

$س$	$ف$
$1 \leftarrow 0$	$2 \leftarrow 1$

$\int_{0}^{1} س^3 \, هـ(ف) \cdot \frac{دف}{2س} = \frac{1}{2} \int_{1}^{2} س^2 \, هـ(ف) . دف$

$= \frac{1}{2} \int_{1}^{2} (ف - 1) \, هـ(ف) . دف$

فرض $هـ = ف - 1$ ، $دهـ = هـ(ف)$

$دهـ = 1 . دف$ ، $هـ = هـ(ف)$

$= \frac{1}{2} \left((ف-1) هـ(ف) \right]_{1}^{2} - \int_{1}^{2} هـ(ف) . دف$

$= \frac{1}{2} \left((1) هـ(2) - (0) هـ(1) \right) - 10$

$= \frac{1}{2} (3 - 0) - 10 = \frac{7}{3}$

٨ إذا كان $\int_{0}^{3} س \, هـ(س) . دس = 15$

حيث $هـ(3) = 5$ ، جد

$\int_{0}^{3} س^2 \, هـ'(س) . دس$

الحل : فرض $ف = س^2$ ، $دهـ = هـ'(س)$

$دف = 2س . دس$ ، $هـ = هـ(س)$

القانون :

$\int_{0}^{3} ف \, دهـ = \left[ف هـ \right]_{0}^{3} - \int_{0}^{3} هـ . دف$

$= (9 هـ(3)) - (0 هـ(0)) - 2 \int_{0}^{3} س \, هـ(س) . دس$

$= (45 - صفر) - 2 \times 15$

$= 45 - 30 = 15$

٩ إذا كان $\int_{0}^{4} هـ(س) . دس = 8$ ، حيث

$هـ(0) = هـ(4) = 4$ ، جد $\int_{0}^{4} س \, هـ'(س^2) . دس$

١٠. $\frac{ق(س)}{س}$ = جا س ، س ≠ ٠ ، ق(٠) = ٢

أوجد قاعدة ق(س) ثم أوجد ق($\frac{\pi}{2}$)

الجواب : ق(س) = ٢ + جا س − س جتا س

ب) ق(٥) = ٧ ، ق(٥) = ١١ ،

ق(٤) = ٦ ، ق(٤) = ٩ ، ق(٣) = ٤

$\int_{1}^{2}$ س ق(س + ٣) د س

ج) إذا علمت أن $\int_{2}^{5}$ ق(س) د س = ٣

جد $\int_{2}^{5}$ ق(س) د س علماً أن

ق(٥) = ٨ ، ق(٢) = ٣

أسئلة متنوعة

تفويض في أجزاء ...

١. $\int$ جا٢س . د س

الحل: نفرض ص = ٢س ، ص' = ٢

٢ ص . د ص = ٢ د س

$\int$ جا ص . ٢ ص . د ص = $\int$ ٢ ص جا ص د ص

أجزاء

ق = ٢ ص ، ق = ٢

ق = جا ص ، ق = − جتا ص

= − ٢ ص جتا ص + ٢ $\int$ جتا ص . د ص

= − ٢ ص جتا ص + ٢ جا ص + ج

= − ٢س جتا ٢س + ٢ جا ٢س + ج

٢. $\int_{0}^{1}$ ه$^{٢س+١}$ − ٤س^{٣} د س

الحل: $\int_{0}^{1}$ ه$^{٢س+١}$ د س − $\int_{0}^{1}$ ٤س^{٣} د س

= $\int$ ه^{ص} × $\frac{١}{٢}$ د ص − [س^{٤}]$_{0}^{1}$

= $\frac{١}{٢}$ ه^{ص} − ١

= $\frac{١}{٢}$ ه$^{٢س+١}$ − ١

٣. $\int$ قا^{٢}س . ظا س . د س

الحل: ص = ظا س ، ص^{٢} = ظا س

٢ ص . د ص = قا^{٢}س . د س

$\int$ قا^{٢}س . ص . $\frac{٢ ص . د ص}{قا^{٢}س}$

$\int$ = ص . ص . د ص

ق = ص ، ق = ص . د ص

ق = ١ ، ق = $\frac{ص^{٢}}{٢}$

= ص $\frac{ص^{٢}}{٢}$ − $\int \frac{ص^{٢}}{٢}$. د ص

= $\frac{١}{٢}$ ص^{٣} − $\frac{١}{٢}$ $\int$ ص^{٢} . د ص

= $\frac{١}{٢}$ ص^{٣} − $\frac{١}{٢}$ $\frac{ص^{٣}}{٣}$ + ج

= $\frac{١}{٢}$ ظا^{٣}س − $\frac{١}{٦}$ ظا^{٣}س + ج

= $\frac{١}{٣}$ ظا^{٣}س + ج

= $\int$ ه^{ص} × ه^{ص} . د ص

= ه^{ص} ه^{ص} − $\int$ ه^{ص} ه^{ص} . د ص

= ه^{ص} ه^{ص} − $\int$ ه^{ص} × ه^{ص} . د ص

= ه^{ص} ه^{ص} − ه^{ص} + ج

= ه$^{ظا س}$ ظا س − ه$^{ظا س}$ + ج

= ه$^{ظا س}$ (ظا س − ١) + ج

٤. $\int$ ه$^{جتا س}$ جا^{٣}س . د س

= $\int$ ه$^{جتا س}$ جا^{٢}س . جا س . د س

= $\int$ ه$^{جتا س}$ (١ − جتا^{٢}س) جا س . د س

= $\int$ ه^{ص} (١ − ص^{٢}) (− د ص)

= $\int$ ه^{ص} (ص^{٢} − ١) د ص

= $\int$ ه^{ص} ص^{٢} . د ص − $\int$ ه^{ص} د ص

= ه^{ص} ص^{٢} − $\int$ ه^{ص} × ٢ ص . د ص − ه^{ص}

= ه^{ص} ص^{٢} − ٢ $\int$ ه^{ص} ص . د ص − ه^{ص}

= ه^{ص} ص^{٢} − ٢ [ه^{ص} ص − $\int$ ه^{ص} د ص] − ه^{ص}

= ه^{ص} ص^{٢} − ٢ ه^{ص} ص + ٢ ه^{ص} − ه^{ص}

= ه^{ص} ص^{٢} − ٢ ه^{ص} ص + ه^{ص} + ج

= ه$^{جتا س}$ جتا^{٢}س − ٢ ه$^{جتا س}$ جتا س + ه$^{جتا س}$ + ج

٤ : $\int \frac{حا^2 س \cdot هـ^{حاس}}{حتاس} \cdot دس$

الحل: نفرض $ص = حاس$ ، $جـ = \frac{دص}{حتاس}$

$\int \frac{ص^2 \cdot هـ^{ص}}{حتاس} \cdot \frac{دص}{حتاس}$

$\int ص^2 هـ^{ص} \cdot دص$ أجزاء

$ع = ص^2$ ، $دع = 2ص \cdot دص$

$دف = هـ^{ص} دص$ ، $ف = هـ^{ص}$

القانون:

$\int ع \cdot دف = ع ف - \int ف \cdot دع$

$= ص^2 هـ^{ص} - \int هـ^{ص} \cdot 2ص \cdot دص$

$= ص^2 هـ^{ص} - 2\int ص هـ^{ص} \cdot دص$ + جـ

٥ : $\int \frac{2س + ظاس}{حتا^2 س} \cdot دس$ ٢٠١٥

الحل: نوزع $\int \frac{2س}{حتا^2 س} + \frac{ظاس}{حتا^2 س} \cdot دس$

$\int 2س قا^2 س + ظاس قا^2 س \cdot دس$ نوزع

$\int 2س قا^2 س \cdot دس + \int ظاس قا^2 س \cdot دس$

$دف = 2دس$ ، $ف = قاس ظاس$ عائلة

$دف = 2دس$ ، $هـ = ظاس$ $س = \frac{دص}{قاس ظاس}$

$ص ظاس - 2\int ظاس \cdot دس$ $\int ص \cdot قاس ظاس \cdot \frac{دص}{قاس ظاس}$

$ص ظاس + 2$ لوا قاس ا $\int ص$

$ص ظاس + 2$ لوا قاس ا + $ظا^2 س$ + جـ

٦ : $\int س جاس حا2س \cdot دس$

الحل: $\int س \times \frac{1}{2}(جتاس - جتا3س) \cdot دس$

$\int \frac{1}{2} س \times (جتاس - جتا3س) \cdot دس$

$دف = \frac{1}{2} دس$ ، $ف = حاس - \frac{حا3س}{3}$

القانون:

$\int ع \cdot دف = ع ف - \int ف \cdot دع$

$\frac{1}{2} س(حاس - \frac{حا3س}{3}) - \frac{1}{2}\int حاس - \frac{حا3س}{3} \cdot دس$

$\frac{1}{2} س(حاس - \frac{حا3س}{3}) - \frac{1}{2}(-جتاس + \frac{جتا3س}{9})$ + جـ

٧ : $\int س^5 حا^2(س^3) \cdot دس$

$\int ص^2 حا^2 ص \cdot \frac{1}{3} دص$ ، $ص = س^3$

$دص = 3س^2 دس$

$\frac{1}{3}\int ص^2 حا^2 ص \cdot دص$

$دف = \frac{1}{2} دص$ ، $ف = ص$

$دف = حا^2 ص$ ، $هـ = \frac{1}{2}(ص - حاص جتاص)$

القانون:

$\frac{1}{3} ص \times \frac{1}{2}(ص - حاص جتاص) - \frac{1}{6}\int (ص - حاص جتاص) \cdot دص$

$\frac{1}{6} ص^2 - \frac{1}{6}(\frac{ص^2}{2} + \frac{جتا^2 ص}{2}) + جـ$

٨ : $\int حا^3 س \cdot جتا^7 س \cdot دس$ نوزع

الحل: $ص = جاس$ ، $ص^2 = س$ ، $2ص \cdot دص = دس$

$\int ص^3 \cdot ص^7 \cdot 2ص \cdot دص$

$\int 2ص^{11} \cdot دص$

$دف = 2ص \cdot دص$ ، $ف = \frac{ص^{12}}{12}$

$هـ = \int ص^3 \cdot ص^7 \cdot دص$ $ع = ص^3$ ، $دع = 3ص^2 \cdot دص$

$= \int ص^{10} \cdot دص$ $دف = ص^7 \cdot دص$ ، $ف = \frac{ص^{11}}{11}$

$= \frac{ص^{11}}{11}$

القانون:

$ص^2 \times \frac{ص^{12}}{12} - \frac{2}{12}\int ص^{13} \cdot دص$

$\frac{ص^{14}}{12} + \frac{2}{12} \times \frac{ص^{14}}{14} + جـ$

$\frac{ص^{14}}{12} + \frac{ص^{14}}{84} + جـ$

$\frac{1}{2}$ ∫ هـ^{جتا ٢س} + ١ / ٢ ∫ (١ + ٢ جتا ٢س + جتا^٢ ٢س) . دس

$\frac{1}{2}$ س + $\frac{1}{4}$ جا ٢س + $\frac{1}{2}$ ∫ (١ + جتا ٤س) . دس

$\frac{1}{2}$ س + $\frac{1}{4}$ جا ٢س + $\frac{1}{2}$ (س + $\frac{1}{4}$ جا ٤س) + ج

$\frac{3}{4}$ س + $\frac{1}{4}$ جا ٢س + $\frac{1}{8}$ جا ٤س + ج

التكاملات الدورية

∫ جا س . هـ^س . دس ، ∫ جتا س . هـ^س . دس

∫ جا (لو س) . دس ، ∫ جتا (لو س) . دس

١ . ∫ هـ^س جا س . دس

ع = هـ^س ، دع = جا س . دس

دع = هـ^س دس ، ع = − جتا س

القانون :

− هـ^س جتا س + ∫ هـ^س جتا س . دس

ع = هـ^س ، دع = جتا س . دس

دع = هـ^س دس ، ع = جا س

∫ هـ^س جا س . دس = − هـ^س جتا س + هـ^س جا س − ∫ هـ^س جا س . دس

٢ ∫ هـ^س جا س . دس = − هـ^س جتا س + هـ^س جا س

∴ ∫ هـ^س جا س . دس = $\frac{1}{2}$ (− هـ^س جتا س + هـ^س جا س) + ج

٢ . ∫ جتا (لو س) . دس

ع = لو س ، دع = $\frac{1}{س}$ دس ، دس = س دع

∫ جتا س . هـ^س . دس

∫ جتا س . هـ^س . دس بالتكامل

ع = هـ^س ، دع = جتا س . دس

دع = هـ^س دس ، ع = جا س

∫ هـ^س جتا س . دس = هـ^س جا س − ∫ هـ^س جا س . دس

∫ هـ^س جتا س . دس = $\frac{1}{2}$ (هـ^س جا س + هـ^س جتا س) + ج

طريقة جدول ∫

تستخدم هذه الطريقة عند وجود اقترانين وضوبهما أحدهما كثير حدود، والاقتران الآخر = جا ب س ، جتا ب س ، هـ^{ب س} ، (ب س + ج)^ن ، ن ≠ ١ ، ب ≠ ٠

١ . ∫ س^٢ جا س . دس

ع	دع
س^٢	جا س
٢س	− جتا س
٢	− جا س
٠	جتا س

∫ س^٢ جا س . دس = (س^٢ × − جتا س) − (٢س × − جا س) + (٢ × جتا س) + ج

= − س^٢ جتا س + ٢ س جا س + ٢ جتا س + ج

[٢] $\int س^{٣} \times$ جا س . د س

الحل: بالجدول

عد نشتقه	دهـ : تكامل
$س^{٣}$ ⊕	جا س
$٣س^{٢}$ ⊖	− جتا س
٦س ⊕	− جا س
٦ ⊖	جتا س
٠ ⊕	

$= ⊕ (س^{٣} \times$ جتا س$) ⊖ (٣س^{٢} \times$ جا س$) ⊕ (٦س \times$ جتا س$) ⊖ (٦ \times$ جا س$) + ج$

$= س^{٣}$ جتا س $+ ٣س^{٢}$ جا س $- ٦س$ جتا س $- ٦$ جا س $+ ج$

[٣] $\int$ جتا^{٣} ٤س $\times$ هـ^{س} . د س

الحل: بالجدول

عد نشتقه	دهـ : تكامل
جتا^{٣} ٤س ⊕	هـ^{س}
− ٣ جتا^{٢} ٤س جا ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٣ جتا^{٢} ٤س − ٣ جا^{٢} ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٢٤ جتا ٤س جا ٤س − ٢٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٢٤ جتا^{٢} ٤س − ٧٢ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٩٦ جتا ٤س جا ٤س − ٩٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٩٦ جتا^{٢} ٤س − ٣٨٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٣٨٤ جتا ٤س جا ٤س − ٣٨٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٣٨٤ جتا^{٢} ٤س − ١٥٣٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٥٣٦ جتا ٤س جا ٤س − ١٥٣٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٥٣٦ جتا^{٢} ٤س − ٦١٤٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٦١٤٤ جتا ٤س جا ٤س − ٦١٤٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٦١٤٤ جتا^{٢} ٤س − ٢٤٥٧٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٢٤٥٧٦ جتا ٤س جا ٤س − ٢٤٥٧٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٢٤٥٧٦ جتا^{٢} ٤س − ٩٨٣٠٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٩٨٣٠٤ جتا ٤س جا ٤س − ٩٨٣٠٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٩٨٣٠٤ جتا^{٢} ٤س − ٣٩٣٢١٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٣٩٣٢١٦ جتا ٤س جا ٤س − ٣٩٣٢١٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٣٩٣٢١٦ جتا^{٢} ٤س − ١٥٧٢٨٦٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٥٧٢٨٦٤ جتا ٤س جا ٤س − ١٥٧٢٨٦٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٥٧٢٨٦٤ جتا^{٢} ٤س − ٦٢٩١٤٥٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٦٢٩١٤٥٦ جتا ٤س جا ٤س − ٦٢٩١٤٥٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٦٢٩١٤٥٦ جتا^{٢} ٤س − ٢٥١٦٥٨٢٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٢٥١٦٥٨٢٤ جتا ٤س جا ٤س − ٢٥١٦٥٨٢٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٢٥١٦٥٨٢٤ جتا^{٢} ٤س − ١٠٠٦٦٣٢٩٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٠٠٦٦٣٢٩٦ جتا ٤س جا ٤س − ١٠٠٦٦٣٢٩٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٠٠٦٦٣٢٩٦ جتا^{٢} ٤س − ٤٠٢٦٥٣١٨٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٤٠٢٦٥٣١٨٤ جتا ٤س جا ٤س − ٤٠٢٦٥٣١٨٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٤٠٢٦٥٣١٨٤ جتا^{٢} ٤س − ١٦١٠٦١٢٧٣٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٦١٠٦١٢٧٣٦ جتا ٤س جا ٤س − ١٦١٠٦١٢٧٣٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٦١٠٦١٢٧٣٦ جتا^{٢} ٤س − ٦٤٤٢٤٥١٠٢٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٦٤٤٢٤٥١٠٢٤ جتا ٤س جا ٤س − ٦٤٤٢٤٥١٠٢٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٦٤٤٢٤٥١٠٢٤ جتا^{٢} ٤س − ٢٥٧٦٩٨٠٤٠٩٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٢٥٧٦٩٨٠٤٠٩٦ جتا ٤س جا ٤س − ٢٥٧٦٩٨٠٤٠٩٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٢٥٧٦٩٨٠٤٠٩٦ جتا^{٢} ٤س − ١٠٣٠٧٩٢١٦٣٨٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٠٣٠٧٩٢١٦٣٨٤ جتا ٤س جا ٤س − ١٠٣٠٧٩٢١٦٣٨٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٠٣٠٧٩٢١٦٣٨٤ جتا^{٢} ٤س − ٤١٢٣١٦٨٦٥٥٣٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٤١٢٣١٦٨٦٥٥٣٦ جتا ٤س جا ٤س − ٤١٢٣١٦٨٦٥٥٣٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٤١٢٣١٦٨٦٥٥٣٦ جتا^{٢} ٤س − ١٦٤٩٢٦٧٤٢٢١٤٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٦٤٩٢٦٧٤٢٢١٤٤ جتا ٤س جا ٤س − ١٦٤٩٢٦٧٤٢٢١٤٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٦٤٩٢٦٧٤٢٢١٤٤ جتا^{٢} ٤س − ٦٥٩٧٠٦٩٦٨٨٥٧٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٦٥٩٧٠٦٩٦٨٨٥٧٦ جتا ٤س جا ٤س − ٦٥٩٧٠٦٩٦٨٨٥٧٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٦٥٩٧٠٦٩٦٨٨٥٧٦ جتا^{٢} ٤س − ٢٦٣٨٨٢٧٨٧٥٤٣٠٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٢٦٣٨٨٢٧٨٧٥٤٣٠٤ جتا ٤س جا ٤س − ٢٦٣٨٨٢٧٨٧٥٤٣٠٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٢٦٣٨٨٢٧٨٧٥٤٣٠٤ جتا^{٢} ٤س − ١٠٥٥٢٣١١٥١٧٢١٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٠٥٥٢٣١١٥١٧٢١٦ جتا ٤س جا ٤س − ١٠٥٥٢٣١١٥١٧٢١٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٠٥٥٢٣١١٥١٧٢١٦ جتا^{٢} ٤س − ٤٢٢٠٩٢٤٦٠٦٨٦٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٤٢٢٠٩٢٤٦٠٦٨٦٤ جتا ٤س جا ٤س − ٤٢٢٠٩٢٤٦٠٦٨٦٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٤٢٢٠٩٢٤٦٠٦٨٦٤ جتا^{٢} ٤س − ١٦٨٨٣٦٩٨٤٢٧٤٥٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٦٨٨٣٦٩٨٤٢٧٤٥٦ جتا ٤س جا ٤س − ١٦٨٨٣٦٩٨٤٢٧٤٥٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٦٨٨٣٦٩٨٤٢٧٤٥٦ جتا^{٢} ٤س − ٦٧٥٣٤٧٩٣٦٩٨٢٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٦٧٥٣٤٧٩٣٦٩٨٢٤ جتا ٤س جا ٤س − ٦٧٥٣٤٧٩٣٦٩٨٢٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٦٧٥٣٤٧٩٣٦٩٨٢٤ جتا^{٢} ٤س − ٢٧٠١٣٩١٧٤٧٩٢٩٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٢٧٠١٣٩١٧٤٧٩٢٩٦ جتا ٤س جا ٤س − ٢٧٠١٣٩١٧٤٧٩٢٩٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٢٧٠١٣٩١٧٤٧٩٢٩٦ جتا^{٢} ٤س − ١٠٨٠٥٥٦٧٠١٩١٨٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٠٨٠٥٥٦٧٠١٩١٨٤ جتا ٤س جا ٤س − ١٠٨٠٥٥٦٧٠١٩١٨٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٠٨٠٥٥٦٧٠١٩١٨٤ جتا^{٢} ٤س − ٤٣٢٢٢٦٨٠٧٦٧٣٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٤٣٢٢٢٦٨٠٧٦٧٣٦ جتا ٤س جا ٤س − ٤٣٢٢٢٦٨٠٧٦٧٣٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٤٣٢٢٢٦٨٠٧٦٧٣٦ جتا^{٢} ٤س − ١٧٢٨٩٠٧٢٣٠٧٠٤٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٧٢٨٩٠٧٢٣٠٧٠٤٤ جتا ٤س جا ٤س − ١٧٢٨٩٠٧٢٣٠٧٠٤٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٧٢٨٩٠٧٢٣٠٧٠٤٤ جتا^{٢} ٤س − ٦٩١٥٦٢٨٩٢٨٢٨١٧٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٦٩١٥٦٢٨٩٢٨٢٨١٧٦ جتا ٤س جا ٤س − ٦٩١٥٦٢٨٩٢٨٢٨١٧٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٦٩١٥٦٢٨٩٢٨٢٨١٧٦ جتا^{٢} ٤س − ٢٧٦٦٢٥١٥٧١٣١٢٧٠٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٢٧٦٦٢٥١٥٧١٣١٢٧٠٤ جتا ٤س جا ٤س − ٢٧٦٦٢٥١٥٧١٣١٢٧٠٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٢٧٦٦٢٥١٥٧١٣١٢٧٠٤ جتا^{٢} ٤س − ١١٠٦٦٠٦٢٨٥٢٥٠٨١٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١١٠٦٦٠٦٢٨٥٢٥٠٨١٦ جتا ٤س جا ٤س − ١١٠٦٦٠٦٢٨٥٢٥٠٨١٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١١٠٦٦٠٦٢٨٥٢٥٠٨١٦ جتا^{٢} ٤س − ٤٤٢٦٤٢٥١٤١٠٠٣٢٦٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٤٤٢٦٤٢٥١٤١٠٠٣٢٦٤ جتا ٤س جا ٤س − ٤٤٢٦٤٢٥١٤١٠٠٣٢٦٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٤٤٢٦٤٢٥١٤١٠٠٣٢٦٤ جتا^{٢} ٤س − ١٧٧٠٥٦٧٠٥٦٤٠١٣٠٥٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٧٧٠٥٦٧٠٥٦٤٠١٣٠٥٦ جتا ٤س جا ٤س − ١٧٧٠٥٦٧٠٥٦٤٠١٣٠٥٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٧٧٠٥٦٧٠٥٦٤٠١٣٠٥٦ جتا^{٢} ٤س − ٧٠٨٢٢٧٠٢٢٥٦٠٥٢٢٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٧٠٨٢٢٧٠٢٢٥٦٠٥٢٢٤ جتا ٤س جا ٤س − ٧٠٨٢٢٧٠٢٢٥٦٠٥٢٢٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٧٠٨٢٢٧٠٢٢٥٦٠٥٢٢٤ جتا^{٢} ٤س − ٢٨٣٣٠٨٠٩٠٢٢٤٢٠٨٩٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٢٨٣٣٠٨٠٩٠٢٢٤٢٠٨٩٦ جتا ٤س جا ٤س − ٢٨٣٣٠٨٠٩٠٢٢٤٢٠٨٩٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٢٨٣٣٠٨٠٩٠٢٢٤٢٠٨٩٦ جتا^{٢} ٤س − ١١٣٣٢٣٦٣٦٠٨٨٩٦٨٣٥٢ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١١٣٣٢٣٦٣٦٠٨٨٩٦٨٣٥٢ جتا ٤س جا ٤س − ١١٣٣٢٣٦٣٦٠٨٨٩٦٨٣٥٢ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١١٣٣٢٣٦٣٦٠٨٨٩٦٨٣٥٢ جتا^{٢} ٤س − ٤٥٣٢٩٤٥٤٤٣٥٥٣٧٩٤٠٨ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٤٥٣٢٩٤٥٤٤٣٥٥٣٧٩٤٠٨ جتا ٤س جا ٤س − ٤٥٣٢٩٤٥٤٤٣٥٥٣٧٩٤٠٨ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٤٥٣٢٩٤٥٤٤٣٥٥٣٧٩٤٠٨ جتا^{٢} ٤س − ١٨١٣١٨١٧٧٤٢٢١٥١٩١٦٣٢ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٨١٣١٨١٧٧٤٢٢١٥١٩١٦٣٢ جتا ٤س جا ٤س − ١٨١٣١٨١٧٧٤٢٢١٥١٩١٦٣٢ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٨١٣١٨١٧٧٤٢٢١٥١٩١٦٣٢ جتا^{٢} ٤س − ٧٢٥٢٧٢٧١٠٩٠٠٦٠٧٦٧٦٨ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٧٢٥٢٧٢٧١٠٩٠٠٦٠٧٦٧٦٨ جتا ٤س جا ٤س − ٧٢٥٢٧٢٧١٠٩٠٠٦٠٧٦٧٦٨ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٧٢٥٢٧٢٧١٠٩٠٠٦٠٧٦٧٦٨ جتا^{٢} ٤س − ٢٩٠١١٠٨٤٣٦٠٠٢٤٣٠٧٠٧٢ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٢٩٠١١٠٨٤٣٦٠٠٢٤٣٠٧٠٧٢ جتا ٤س جا ٤س − ٢٩٠١١٠٨٤٣٦٠٠٢٤٣٠٧٠٧٢ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٢٩٠١١٠٨٤٣٦٠٠٢٤٣٠٧٠٧٢ جتا^{٢} ٤س − ١١٦٠٤٤٣٣٧٤٤٠٠٩٧٢١٢٨٨ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١١٦٠٤٤٣٣٧٤٤٠٠٩٧٢١٢٨٨ جتا ٤س جا ٤س − ١١٦٠٤٤٣٣٧٤٤٠٠٩٧٢١٢٨٨ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١١٦٠٤٤٣٣٧٤٤٠٠٩٧٢١٢٨٨ جتا^{٢} ٤س − ٤٦٤١٧٧٣٥٠٩٧٦٠٠٣٨٨٤٨٥٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٤٦٤١٧٧٣٥٠٩٧٦٠٠٣٨٨٤٨٥٦ جتا ٤س جا ٤س − ٤٦٤١٧٧٣٥٠٩٧٦٠٠٣٨٨٤٨٥٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٤٦٤١٧٧٣٥٠٩٧٦٠٠٣٨٨٤٨٥٦ جتا^{٢} ٤س − ١٨٥٦٧١٠٣٤٠٣٩٠٤٠١٥٥٣٩٤٢٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٨٥٦٧١٠٣٤٠٣٩٠٤٠١٥٥٣٩٤٢٤ جتا ٤س جا ٤س − ١٨٥٦٧١٠٣٤٠٣٩٠٤٠١٥٥٣٩٤٢٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٨٥٦٧١٠٣٤٠٣٩٠٤٠١٥٥٣٩٤٢٤ جتا^{٢} ٤س − ٧٤٢٦٨٤١٣٦١٥٦١٦٠٦٢١٥٧٦٩٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٧٤٢٦٨٤١٣٦١٥٦١٦٠٦٢١٥٧٦٩٦ جتا ٤س جا ٤س − ٧٤٢٦٨٤١٣٦١٥٦١٦٠٦٢١٥٧٦٩٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٧٤٢٦٨٤١٣٦١٥٦١٦٠٦٢١٥٧٦٩٦ جتا^{٢} ٤س − ٢٩٧٠٧٣٦٥٤٦٢٦٤٦٤٢٤٨٦٣٠٧٨٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٢٩٧٠٧٣٦٥٤٦٢٦٤٦٤٢٤٨٦٣٠٧٨٤ جتا ٤س جا ٤س − ٢٩٧٠٧٣٦٥٤٦٢٦٤٦٤٢٤٨٦٣٠٧٨٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٢٩٧٠٧٣٦٥٤٦٢٦٤٦٤٢٤٨٦٣٠٧٨٤ جتا^{٢} ٤س − ١١٨٨٢٩٤٦٢٠٩٨٥٨٥٦٩٩٤٢٤٣٢١٣٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١١٨٨٢٩٤٦٢٠٩٨٥٨٥٦٩٩٤٢٤٣٢١٣٦ جتا ٤س جا ٤س − ١١٨٨٢٩٤٦٢٠٩٨٥٨٥٦٩٩٤٢٤٣٢١٣٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١١٨٨٢٩٤٦٢٠٩٨٥٨٥٦٩٩٤٢٤٣٢١٣٦ جتا^{٢} ٤س − ٤٧٥٣١٨٤٨٣٩٤٣٤٣٢٧٩٨٩٦٩٧٢٨٥٤٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٤٧٥٣١٨٤٨٣٩٤٣٤٣٢٧٩٨٩٦٩٧٢٨٥٤٤ جتا ٤س جا ٤س − ٤٧٥٣١٨٤٨٣٩٤٣٤٣٢٧٩٨٩٦٩٧٢٨٥٤٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٤٧٥٣١٨٤٨٣٩٤٣٤٣٢٧٩٨٩٦٩٧٢٨٥٤٤ جتا^{٢} ٤س − ١٩٠١٢٧٣٥٣٥٧٧٣٧٣١١٩١٥٨٧٩٠٨٩١٤١٧٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٩٠١٢٧٣٥٣٥٧٧٣٧٣١١٩١٥٨٧٩٠٨٩١٤١٧٦ جتا ٤س جا ٤س − ١٩٠١٢٧٣٥٣٥٧٧٣٧٣١١٩١٥٨٧٩٠٨٩١٤١٧٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٩٠١٢٧٣٥٣٥٧٧٣٧٣١١٩١٥٨٧٩٠٨٩١٤١٧٦ جتا^{٢} ٤س − ٧٦٠٥١٠٩٤١٤٣١٠٩٤٩٣٢٧٦٣١٦٣٥٦٥٦٧٠٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٧٦٠٥١٠٩٤١٤٣١٠٩٤٩٣٢٧٦٣١٦٣٥٦٥٦٧٠٤ جتا ٤س جا ٤س − ٧٦٠٥١٠٩٤١٤٣١٠٩٤٩٣٢٧٦٣١٦٣٥٦٥٦٧٠٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٧٦٠٥١٠٩٤١٤٣١٠٩٤٩٣٢٧٦٣١٦٣٥٦٥٦٧٠٤ جتا^{٢} ٤س − ٣٠٤٢٠٤٣٧٦٥٧٢٤٣٩٧٣٠٩٠٥٢٦٥٤٢٢٧٠١٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٣٠٤٢٠٤٣٧٦٥٧٢٤٣٩٧٣٠٩٠٥٢٦٥٤٢٢٧٠١٦ جتا ٤س جا ٤س − ٣٠٤٢٠٤٣٧٦٥٧٢٤٣٩٧٣٠٩٠٥٢٦٥٤٢٢٧٠١٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٣٠٤٢٠٤٣٧٦٥٧٢٤٣٩٧٣٠٩٠٥٢٦٥٤٢٢٧٠١٦ جتا^{٢} ٤س − ١٢١٦٨١٧٥٠٦٣٠٩٧٥٩٨٩٢٣٦٢١٠٤٥٠٨٨٩٠٦٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٢١٦٨١٧٥٠٦٣٠٩٧٥٩٨٩٢٣٦٢١٠٤٥٠٨٨٩٠٦٤ جتا ٤س جا ٤س − ١٢١٦٨١٧٥٠٦٣٠٩٧٥٩٨٩٢٣٦٢١٠٤٥٠٨٨٩٠٦٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٢١٦٨١٧٥٠٦٣٠٩٧٥٩٨٩٢٣٦٢١٠٤٥٠٨٨٩٠٦٤ جتا^{٢} ٤س − ٤٨٦٧٢٧٠٢٥٢٥٣٩٠٣٩٨٣٥٦٩٤٨٤٢٠١٨٠٣٥٥٦٢٥٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٤٨٦٧٢٧٠٢٥٢٥٣٩٠٣٩٨٣٥٦٩٤٨٤٢٠١٨٠٣٥٥٦٢٥٦ جتا ٤س جا ٤س − ٤٨٦٧٢٧٠٢٥٢٥٣٩٠٣٩٨٣٥٦٩٤٨٤٢٠١٨٠٣٥٥٦٢٥٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٤٨٦٧٢٧٠٢٥٢٥٣٩٠٣٩٨٣٥٦٩٤٨٤٢٠١٨٠٣٥٥٦٢٥٦ جتا^{٢} ٤س − ١٩٤٦٨٠٨١٠٠٩٠١٥٦١٥٩٣٤٢٧٦٩٣٦٨٠٧٢١٤٠٢٢٥٠٢٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٩٤٦٨٠٨١٠٠٩٠١٥٦١٥٩٣٤٢٧٦٩٣٦٨٠٧٢١٤٠٢٢٥٠٢٤ جتا ٤س جا ٤س − ١٩٤٦٨٠٨١٠٠٩٠١٥٦١٥٩٣٤٢٧٦٩٣٦٨٠٧٢١٤٠٢٢٥٠٢٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٩٤٦٨٠٨١٠٠٩٠١٥٦١٥٩٣٤٢٧٦٩٣٦٨٠٧٢١٤٠٢٢٥٠٢٤ جتا^{٢} ٤س − ٧٧٨٧٢٣٢٤٠٣٦٠٦٢٥٦٣٧٦٩١٠٨٧٤٢٧٢٨٥٦٠٨٨٩٠٠٩٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٧٧٨٧٢٣٢٤٠٣٦٠٦٢٥٦٣٧٦٩١٠٨٧٤٢٧٢٨٥٦٠٨٨٩٠٠٩٦ جتا ٤س جا ٤س − ٧٧٨٧٢٣٢٤٠٣٦٠٦٢٥٦٣٧٦٩١٠٨٧٤٢٧٢٨٥٦٠٨٨٩٠٠٩٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٧٧٨٧٢٣٢٤٠٣٦٠٦٢٥٦٣٧٦٩١٠٨٧٤٢٧٢٨٥٦٠٨٨٩٠٠٩٦ جتا^{٢} ٤س − ٣١١٤٨٩٢٩٦١٤٤٢٤٢٥٠٤٧٥٠٧٦٤٣٥١٠٩٨٣٠٢٢٧١٢٣٥٢٠٣٨٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٣١١٤٨٩٢٩٦١٤٤٢٤٢٥٠٤٧٥٠٧٦٤٣٥١٠٩٨٣٠٢٢٧١٢٣٥٢٠٣٨٤ جتا ٤س جا ٤س − ٣١١٤٨٩٢٩٦١٤٤٢٤٢٥٠٤٧٥٠٧٦٤٣٥١٠٩٨٣٠٢٢٧١٢٣٥٢٠٣٨٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٣١١٤٨٩٢٩٦١٤٤٢٤٢٥٠٤٧٥٠٧٦٤٣٥١٠٩٨٣٠٢٢٧١٢٣٥٢٠٣٨٤ جتا^{٢} ٤س − ١٢٤٥٩٥٧١٨٤٥٧٦٩٨٧٠١٩٠٣١٠٢٧٥٤٣٩٢٣٣٠٩٠٨٨٥٠٨٩٠١٥٣٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٢٤٥٩٥٧١٨٤٥٧٦٩٨٧٠١٩٠٣١٠٢٧٥٤٣٩٢٣٣٠٩٠٨٨٥٠٨٩٠١٥٣٦ جتا ٤س جا ٤س − ١٢٤٥٩٥٧١٨٤٥٧٦٩٨٧٠١٩٠٣١٠٢٧٥٤٣٩٢٣٣٠٩٠٨٨٥٠٨٩٠١٥٣٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٢٤٥٩٥٧١٨٤٥٧٦٩٨٧٠١٩٠٣١٠٢٧٥٤٣٩٢٣٣٠٩٠٨٨٥٠٨٩٠١٥٣٦ جتا^{٢} ٤س − ٤٩٨٣٨٢٨٧٣٨٣٠٧٩٥٢٨٠٧٦١٢٤١٠٨٢٠١٨٠٣٥٣٢٣٥٦٠٣٥٦٠٦٤٤ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٤٩٨٣٨٢٨٧٣٨٣٠٧٩٥٢٨٠٧٦١٢٤١٠٨٢٠١٨٠٣٥٣٢٣٥٦٠٣٥٦٠٦٤٤ جتا ٤س جا ٤س − ٤٩٨٣٨٢٨٧٣٨٣٠٧٩٥٢٨٠٧٦١٢٤١٠٨٢٠١٨٠٣٥٣٢٣٥٦٠٣٥٦٠٦٤٤ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
٤٩٨٣٨٢٨٧٣٨٣٠٧٩٥٢٨٠٧٦١٢٤١٠٨٢٠١٨٠٣٥٣٢٣٥٦٠٣٥٦٠٦٤٤ جتا^{٢} ٤س − ١٩٩٣٥٣١٤٩٥٣٢٣١٨١٠٧٩٢١١٢٠٤٣٢٧٢١٤٠٧٢٠٦٣٠٢٢٥٤٢٤٠١٤٤٠٢٥٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
١٩٩٣٥٣١٤٩٥٣٢٣١٨١٠٧٩٢١١٢٠٤٣٢٧٢١٤٠٧٢٠٦٣٠٢٢٥٤٢٤٠١٤٤٠٢٥٦ جتا ٤س جا ٤س − ١٩٩٣٥٣١٤٩٥٣٢٣١٨١٠٧٩٢١١٢٠٤٣٢٧٢١٤٠٧٢٠٦٣٠٢٢٥٤٢٤٠١٤٤٠٢٥٦ جا^{٣} ٤س ٤ ⊖	هـ^{س}
١٩٩٣٥٣١٤٩٥٣٢٣١٨١٠٧٩٢١١٢٠٤٣٢٧٢١٤٠٧٢٠٦٣٠٢٢٥٤٢٤٠١٤٤٠٢٥٦ جتا^{٢} ٤س − ٧٩٧٤١٢٥٩٨١٢٩٢٧٢٤٣١٦٨٤٤٨٠١٧٢٩٠٨٨٢٨٠٢٤٢٠١٢٢١٦٩٦٠٥٧٦٠٥٧٦ جا^{٢} ٤س جتا ٤س ٤ ⊕	هـ^{س}
٧٩٧٤١٢٥٩٨١٢٩٢٧٢٤٣١٦٨٤٤٨٠١٧٢٩٠٨٨٢٨٠٢٤٢٠١٢٢١٦٩٦٠٥٧٦٠٥٧٦ جتا ٤س ج

٢) $\int \frac{\log_{هـ}(س+1)}{\sqrt{س+1}}\,د س$

الحل: $\int \log_{هـ}(س+1) \times (س+1)^{-\frac{1}{2}}\,د س$

$ع = \log_{هـ}(س+1)$ ← $د ع = \frac{1}{س+1}$

$د ه = (س+1)^{-\frac{1}{2}}$ ← $ه = \frac{(س+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$

القانون

$= 2\sqrt{س+1}\log_{هـ}(س+1) - 2\int (س+1)^{-\frac{1}{2}}\,د س$

$= 2\sqrt{س+1}\log_{هـ}(س+1) - 4\sqrt{س+1} + ج$

٣) $\int \frac{1}{\sqrt{س}} \log_{هـ} س\,د س$

الحل: $\int س^{-\frac{1}{2}} \log_{هـ} س\,د س$

$ع = \log_{هـ} س$ ← $د ع = \frac{1}{س}$

$د ه = س^{-\frac{1}{2}}$ ← $ه = \frac{س^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$

القانون:

$= 2\sqrt{س}\log_{هـ} س - \int 2 س^{-\frac{1}{2}}\,د س$

$= 2\sqrt{س}\log_{هـ} س - 2\times 2\sqrt{س} + ج$

$= 2\sqrt{س}\log_{هـ} س - 4\sqrt{س} + ج$

٤) $\int س^{ن} \log_{هـ} س\,د س$

الحل: $ع = \log_{هـ} س$ ← $د ع = \frac{1}{س}$

$د ه = س^{ن}$ ← $ه = \frac{س^{ن+1}}{ن+1}$

القانون:

$= \frac{س^{ن+1}}{ن+1}\log_{هـ} س - \int \frac{1}{س}\times\frac{س^{ن+1}}{ن+1}\,د س$

$= \frac{س^{ن+1}}{ن+1}\log_{هـ} س - \frac{1}{ن+1}\int س^{ن}\,د س$

$= \frac{س^{ن+1}}{ن+1}\log_{هـ} س - \frac{1}{ن+1}\times\frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ج$

$= \frac{س^{ن+1}}{ن+1}\log_{هـ} س - \frac{س^{ن+1}}{(ن+1)^2} + ج$

٥) $\int \frac{9}{س \log_{هـ} س}\,د س$

الحل: $ه = \log_{هـ} س$ ← $س = هـ^{ه}$ ← $د س = هـ^{ه}\,د ه$

$\frac{د ه}{د س} = \frac{1}{س}$

بالتعويض

$\int \frac{9}{هـ^{ه}\times ه}\times هـ^{ه}\,د ه = \int \frac{9}{ه}\,د ه$

$= 9\times \log_{هـ}|ه| + ج$

$= 9\times \log_{هـ}|\log_{هـ} س| + ج$

٦) إذا علمت أن $\int_{1}^{هـ} س^{٤}\log_{هـ} س\,د س = \frac{1+٤هـ^{٥}}{٢٥}$ وزارة ٢٠١٦

جد $\int_{1}^{هـ} س^{٤}\times(\log_{هـ} س)^{٢}\,د س$

الحل:

$ع = (\log_{هـ} س)^{٢}$ ← $د ع = س^{٤}$

$د ع = ٢(\log_{هـ} س)\times\frac{1}{س}$ ← $ه = \frac{س^{٥}}{٥}$

القانون:

$= \left[\frac{س^{٥}}{٥}\times(\log_{هـ} س)^{٢}\right]_{1}^{هـ} - \int_{1}^{هـ}\frac{س^{٥}}{٥}\times\log_{هـ} س\times\frac{2}{س}\,د س$

$= (\frac{هـ^{٥}}{٥}\times 1) - (0\times\frac{1}{٥}) - \frac{2}{٥}\times\frac{1+٤هـ^{٥}}{٢٥} + ج$

$= \frac{هـ^{٥}}{٥} - \frac{2+٨هـ^{٥}}{١٢٥} + ج$

٧) $\int \frac{\log_{هـ}(س+٣)}{\sqrt{س+٣}}\,د س$

الحل: $\int (س+٣)^{-\frac{1}{2}}\times\log_{هـ}(س+٣)\,د س$

$ع = \log_{هـ}(س+٣)$ ← $د ع = (س+٣)^{-\frac{1}{2}}$

$د ع = \frac{1}{س+٣}$ ← $ه = \frac{(س+٣)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$

القانون:

$= 2\sqrt{(س+٣)}\times\log_{هـ}(س+٣) - 2\int (س+٣)^{-\frac{1}{2}}\,د س$

$= 2\sqrt{(س+٣)}\times\log_{هـ}(س+٣) - 4\sqrt{(س+٣)} + ج$

٨) $\int \tan^2 7x \, dx$

الحل: $u = 7x$ | $du = 7\,dx$ | $\frac{1}{7}du = dx$

$\int \tan^2 u \cdot \frac{1}{7} du = \frac{1}{7}\int \tan^2 u \, du$ ، $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$

$= \frac{1}{7}\int (\sec^2 u - 1)\, du$

$= \frac{1}{7}(\tan u - u) + c$

$= \frac{1}{7}\tan 7x - x + c$

٩) $\int \sin^3 7x \, dx$

الحل: نفرض $u = 7x$ | $\cos u = v$

$\frac{1}{7}du = dx$ | $-\frac{1}{7}dv = \sin 7x\, dx$

$\int \sin^3 7x \, dx = \int \sin^2 7x \cdot \sin 7x \, dx$

$= \int (1-\cos^2 7x)\sin 7x \, dx$

$= -\frac{1}{7}\int (1-v^2)\, dv$

$= -\frac{1}{7}(v - \frac{v^3}{3}) + c$

$= -\frac{1}{7}\cos 7x + \frac{1}{21}\cos^3 7x + c$

١٠) $\int \sec^4 3x \, dx$

الحل: $u = 3x$ | $\tan u = v$

$\frac{1}{3}du = dx$ | $\sec^2 u = 1 + v^2$

$\int \sec^4 u \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3}\int \sec^2 u \cdot \sec^2 u \, du$

$= \frac{1}{3}\int (1+v^2)\, dv$

$= \frac{1}{3}(v + \frac{v^3}{3}) + c$

$= \frac{1}{3}\tan 3x + \frac{1}{9}\tan^3 3x + c$

بالأجزاء $u = \sec x$ ، $dv = \sec^2 x\, dx$

$du = \sec x \tan x\, dx$ ، $v = \tan x$

القانون:

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\, dx$

$= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\, dx$

$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$

$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + c$

$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$

١١) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \, dx$

الحل: $\int \tan^2 x \cdot \sec^3 x \, dx$

$u = \tan^2 x$ | $dv = \sec^3 x\, dx$

$du = 2\tan x \sec^2 x\, dx$ | $v = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x|$

القانون:

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$= \tan^2 x \left(\frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x|\right) - \int \left(\frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x|\right) 2\tan x \sec^2 x\, dx$

$= \frac{1}{2}\tan^3 x \sec x + \frac{1}{2}\tan^2 x \ln|\sec x + \tan x| - \int \left(\tan^2 x \sec^3 x + \tan x \sec^2 x \ln|\sec x + \tan x|\right) dx$

$\frac{1}{2}\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\tan^3 x \sec x + \frac{1}{2}\tan^2 x \ln|\sec x + \tan x| - \int \tan x \sec^2 x \ln|\sec x + \tan x|\, dx + c$

١٢) $\int (9x^2 \tan^2 3x + 9x^3 \sec^2 3x)\, dx$

الحل: لاحظ أنه يوجد علاقة بين المجدود

$\int 9x^2 \tan^2 3x\, dx + \int 9x^3 \sec^2 3x\, dx$

$u = x^3$ | $dv = \tan^2 3x\, dx$

$du = 3x^2\, dx$ | $v = \frac{1}{3}\tan 3x - x$

$= x^3 \tan 3x - \int \tan^2 3x \cdot 3x^2\, dx + \int 9x^3 \sec^2 3x\, dx$

$= x^3 \tan 3x - \int (\sec^2 3x - 1) 3x^2\, dx + \int 9x^3 \sec^2 3x\, dx$

$= x^3 \tan 3x - x^3 \tan 3x + \int 3x^2\, dx + \int 9x^3 \sec^2 3x\, dx$

$= x^3 + \int 9x^3 \sec^2 3x\, dx + c$

$\int (x+1)^2 (2x+1)\, dx$

ولعلك :

١) اذا كانت $ع_ن = \int ظا^ن س \, د س$ ،

ن عدد طبيعي ≥ 2 ، اثبت أن

$ع_ن = \frac{1}{ن-1} ظا^{ن-1} س - ع_{ن-2}$

الحل : $ع_ن = \int ظا^{ن-2} س \times ظا^2 س \, د س$

$= \int ظا^{ن-2} س (قا^2 س - 1) \, د س$

$= \int قا^2 س \cdot ظا^{ن-2} س \, د س - \int ظا^{ن-2} س \, د س$

نفرض $ص = ظا س$ ، $د ص = قا^2 س \, د س$

$= \int ص^{ن-2} \, د ص - ع_{ن-2}$

$ع_ن = \frac{ص^{ن-1}}{ن-1} - \int ظا^{ن-2} س \, د س$

$= \frac{ظا^{ن-1} س}{ن-1} - ع_{ن-2}$

٢) اذا كان $ع_ن = \int س^ن \times هـ^س \, د س$

حيث ن عدد طبيعي ، اثبت أن :

$ع_ن = س^ن \times هـ^س - ن ع_{ن-1}$

الحل :

$و = س^ن$ ، $د و = هـ^س \, د س$

$د و = ن س^{ن-1} \, د س$ ، $هـ = هـ^س$

$\therefore س^ن هـ^س - \int ن س^{ن-1} \times هـ^س \, د س$

$= س^ن هـ^س - ن ع_{ن-1}$

٣) اذا كان $ع_ن = \int (لو س)^ن \, د س$

ن : عدد طبيعي ، اثبت أن :

$ع_ن = س (لو س)^ن - ن ع_{ن-1}$

الحل : $و = (لو س)^ن$ ، $د و = د س$

$د و = ن (لو س)^{ن-1} \times \frac{1}{س} د س$ ، $هـ = س$

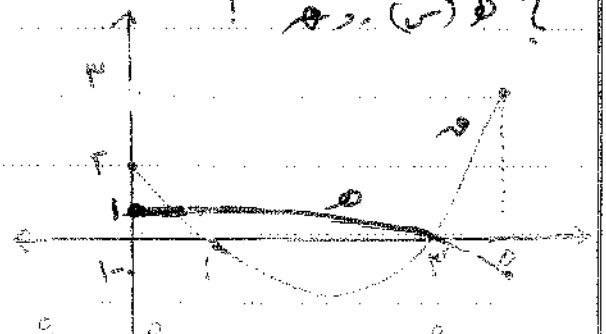
$\therefore س (لو س)^ن - \int ن \times \frac{1}{س} \times (لو س)^{ن-1} \, د س$

$\therefore س (لو س)^ن - ن \times ع_{ن-1}$

تدريب جميل :

$\int \frac{1 + هتا^2 س}{قا^2 س - ظا^2 س} \, د س$ الحل (مراجعة المقام)

٢) صمم شكل $و(س)$ ، $هـ(س)$ ، اذا كان $\int_0^9 و(س) \, د س = 9$ ، صمم $\int_0^9 هـ(س) \, د س$ ؟



الحل : $\int_0^9 هـ(س) \, د س = [س هـ(س)]_0^9 - \int_0^9 س \, د هـ$

$= (9 هـ(9) - 0) - \int_0^9 و(س) \, د س$

$= 9 - 9 = 0$