التكامل

أ. اياد جاد الله

الرياضيات العلمي

مدارس المعالي الثانوية

٢٠١٨-٢٠١٩

٠٧٩٥٤٧٥٤٥٧

٠٧٨٨٥١٣٦٥٩

(الكسور الجزئية)

عند وجود $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ يجب التخلص من المقام

ونستطيع التقليل بالاستعانة بالخطوات التالية :-

١. نجزئ البسط حيث نتخلص من المقام ونرفعه ونغير إشارة العوة ، واذا كان المقام عوته = ١ نتركه للتخلص

٢. $\frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$ درجة البسط $\geq$ درجة المقام

نستخدم القسمة الطويلة والناتج يكتب على الصورة $\text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

٣. اللوغاريتم : نتخلص منه عندما يكون $\frac{\text{ق}}{\text{ه}}$ أو عليه ١ نجعل المقام مشتقة في البسط ويكون الجواب لوغاريتم

٤. $\frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$ درجة البسط $<$ درجة المقام

وعليه تحليل المقام لعوامله المختلفة

ونفرض $\frac{أ}{ب} + \frac{ج}{د} + \ldots$

٥. التعويض : حركة فنية : عندما يوجد $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}^{\text{ن}}}$ فإنه يستطيع استخدام إحدى الخطوات السابقة ، حيث نفرض $\text{هـ} = \text{المقام}$ أو أكبر

---

١. $\int \frac{٣س}{س^٢ - ١} \, د س$

الحل :

$= \ln|س^٢ - ١| + ج$

٢. $\int \frac{س^٥}{س^٣ - ١} \, د س$

الحل : نفرض البسط $\int ٣$ ليسهل لوغاريتم

$\frac{١}{٣} \int \frac{٣س^٢}{س^٣ - ١} \, د س = \frac{١}{٣} \ln|س^٣ - ١| + ج$

٣. $\int \frac{س^٣}{٩(٥ + س^٤)} \, د س$

$= \int س (٥ + س^٤)^{-٩} \, د س$ نفرض

$\text{هـ} = ٥ + س^٤$ $\quad$ $د س = \frac{د \text{هـ}}{٤ س^٣}$

$= \int \frac{س^٣ \times د \text{هـ}}{٩ \text{هـ} \times ٤ س^٣} = \frac{-١}{٣٦} \int \text{هـ}^{-٩} \, د \text{هـ}$

$= \frac{-١}{٣٦} \times \frac{\text{هـ}^{-٨}}{-٨} + ج$

$= \frac{١}{٢٨٨ (٥ + س^٤)^٨} + ج$

٤. $\int \frac{٥}{س^٢ - ٤س + ٤} \, د س$

الحل : $\int \frac{٥}{(س - ٢)(س - ٢)} \, د س$

$\int ٥ (س - ٢)^{-٢} \, د س$

$= \frac{٥ (س - ٢)^{-١}}{-١ \times ١} + ج$

$= \frac{-٥}{س - ٢} + ج$

٥. $\int \frac{٣ \text{هـ}}{\text{هـ} + ٥} \, د س$

الحل :

٣هـ لغة $س + ٥ + ١$

٦. $\int \frac{٥}{س^٢-٩}$ د س

الحل: $\int \frac{٥}{(س-٣)(س+٣)}$ د س وهنا نفرق

$\frac{٥}{(س-٣)(س+٣)} = \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س+٣}$

$= \frac{أ(س+٣)+ب(س-٣)}{(س-٣)(س+٣)}$

وبما أن المقام متساوي ← البسط متساوي

$\therefore ٥ = أ(س+٣)+ب(س-٣)$

ولإيجاد أ، ب نستخدم أصفار المقام

$س = -٣ \longrightarrow ٥ = -٦ب \leftarrow ب = -\frac{٥}{٦}$

$س = ٣ \longrightarrow ٥ = ٦أ \leftarrow أ = \frac{٥}{٦}$

$\Leftarrow \int \frac{٥}{(س-٣)(س+٣)}$ د س $= \int \frac{\frac{٥}{٦}}{س-٣}$ د س $+ \int \frac{-\frac{٥}{٦}}{س+٣}$ د س

$= \frac{٥}{٦}$ لو|س−٣| $+ \frac{-٥}{٦}$ لو|س+٣| $+$ د

٧. $\int \frac{س^٢}{س-١}$ د س

الحل: بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام

نستخدم القسمة الطويلة

$\frac{س+١}{س-١ \overline{)\ س^٢ + ٠س - ١}}$

$\ominus س^٢ \oplus س$

$س - ١$

$\ominus س \oplus ١$

$= \int س+١$ د س $+ \int \frac{١}{س-١}$ د س

$= \frac{١}{٢}س^٢ + س +$ لو|س−١| $+$ د

٨. $\int \frac{س^٣}{١-س^٤}$ د س بتجزئ ورتين

الحل: $\int \frac{س^٣}{١-س^٤}$ د س بما أنه درجة البسط = درجة المقام

← نستخدم القسمة الطويلة

$\frac{-١}{-س^٤ + ١ \overline{)\ س^٣ + ٠س^٢ + ٠س - ١}}$

$\ominus س^٣ \oplus ٠س^٢ \ominus ٠س \oplus ١$

١

$= \int -١$ د س $+ \int \frac{-١}{١-س^٤}$ د س كسور جزئية

$= -س + \int \frac{\frac{١}{٢}}{١+س^٢} + \int \frac{\frac{١}{٢}}{١-س^٢}$ د س

$١ = أ(١+س)(١-س) + ب(١+س)$

نفرض $س = ١ \leftarrow ١ = ٢ب \leftarrow ب = \frac{١}{٢}$

$س = -١ \leftarrow ١ = ٢أ \leftarrow أ = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ $\int \frac{\frac{١}{٢}}{١+س^٢}$ د س $+ \int \frac{\frac{١}{٢}}{١-س^٢}$ د س $= -س$

$+ \frac{١}{٢}$ لو|س+١| $+ \frac{١}{٢}$ لو|س−١| $+$ د

٩. $\int \frac{س}{س^٤+٤س^٢+١٣}$ د س

الحل: $\int \frac{س}{(س^٢+٢)^٢+٩}$ د س $= \int \frac{١}{س^٢+١٣}$ د س

$= \int \frac{١}{س^٢(١+\frac{١٣}{س^٢})}$ د س $= \int \frac{س^{-٣}}{١+(\frac{-٣}{س})^٢}$ د س

$= \frac{١}{-٣} \int \frac{-٣س^{-٤}}{١+(\frac{-٣}{س})^٢}$ د س

$= \frac{-١}{٣}$ ظا$^{-١}(\frac{-٣}{س}) +$ د

١٠. $\int \frac{٥س}{س^٤-٤س^٢+١٢}$ د س

الحل: $\int \frac{٥س}{(س^٢-٢)^٢-٤}$ د س $= \int \frac{٥س}{(س^٢-٦)(س^٢-٢)}$ د س

$\frac{٥س}{(س^٢-٦)(س^٢-٢)} = \frac{أ}{س^٢-٦} + \frac{ب}{س^٢-٢}$

$٥س = أ(س^٢-٢) + ب(س^٢-٦)$

$س = \sqrt{٦} \leftarrow ٥\sqrt{٦} = ٤أ \leftarrow أ = \frac{٥\sqrt{٦}}{٤}$

$س = \sqrt{٢} \leftarrow ٥\sqrt{٢} = -٤ب \leftarrow ب = -\frac{٥\sqrt{٢}}{٤}$

$\therefore \int \frac{\frac{٥\sqrt{٦}}{٤}}{س^٢-٦}$ د س $+ \int \frac{-\frac{٥\sqrt{٢}}{٤}}{س^٢-٢}$ د س

$= \frac{٥\sqrt{٦}}{٤} \times \frac{١}{٢\sqrt{٦}}$ لو$\left|\frac{س-\sqrt{٦}}{س+\sqrt{٦}}\right| - \frac{٥\sqrt{٢}}{٤} \times \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ لو$\left|\frac{س-\sqrt{٢}}{س+\sqrt{٢}}\right| +$ د

$= \frac{٥}{٨}$ لو$\left|\frac{س-\sqrt{٦}}{س+\sqrt{٦}}\right| - \frac{٥}{٨}$ لو$\left|\frac{س-\sqrt{٢}}{س+\sqrt{٢}}\right| +$ د

١١. $\int_{1}^{2} \frac{٤س}{س^{٣}-٤س^{٢}-٣} \, د س$

الحل: $\int \frac{٤س}{(س-٣)(س+١)^{٢}} \, د س$

نفرض: $\frac{٤س}{(س-٣)(س+١)^{٢}} = \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س+١}$

$= \frac{أ(س+١)^{٢} + ب(س-٣)}{(س-٣)(س+١)^{٢}}$

$\therefore ٤س = أ(س+١)^{٢} + ب(س-٣)$

نجد أ، ب باستخدام أصفار المقام

$س = -١ \Leftarrow -٤ = -٤ب \Leftarrow ب = ١$

$س = ٣ \Leftarrow ١٢ = ١٦أ \Leftarrow أ = ٣$

$\Leftarrow ٣ \int \frac{١}{س-٣} \, د س + \int \frac{١}{(س+١)^{٢}} \, د س$

$\Leftarrow ٣ لو_{هـ}|س-٣| + لو_{هـ}|س+١|^{-١}$

$= (٢ لو_{هـ}٢ + لو_{هـ}٩) - (٣ لو_{هـ}٣ + لو_{هـ}أ)$

$= (لو_{هـ}٨ + لو_{هـ}٩) - لو_{هـ}٢٧ = لو_{هـ}\frac{١٦}{٢٧}$

١٢. $\int_{١}^{٢} \frac{|س-١١|}{س^{٣}-٥س+٦} \, د س$

الحل: لتحديد تعريف المطلق $\Leftarrow$ (+) $\Leftarrow$ $١ \quad ٢$

$= \int_{١}^{٢} \frac{١-س}{(س-٣)(س-٢)} \, د س$

$= \int_{١}^{٢} \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س-٢} \, د س$

$\therefore ١-س = أ(س-٢) + ب(س-٣)$

$س = ٢ \Leftarrow -١ = -ب \Leftarrow ب = ١$

$س = ٣ \Leftarrow -٢ = أ \Leftarrow أ = -٢$

$\Leftarrow -٢ \int \frac{١}{س-٣} \, د س + \int \frac{١}{س-٢} \, د س$

$= -٢ لو_{هـ}|س-٣| + لو_{هـ}|س-٢|^{١}_{٠}$

$= (-٢ لو_{هـ}٢ + لو_{هـ}١) - (-٢ لو_{هـ}٤ + لو_{هـ}٣)$

$= لو_{هـ}\frac{١}{٤} - (لو_{هـ}\frac{١}{٤} + لو_{هـ}٣)$

$= لو_{هـ}\frac{١}{٤} - لو_{هـ}\frac{٣}{٤} = لو_{هـ}\frac{٤}{٣}$

١٣. $\int \frac{٢}{س^{٢}-٥} \, د س$

الحل: $\int \frac{٢}{(س-\sqrt{٥})(س+\sqrt{٥})} \, د س$

نفرض $\frac{٢}{(س-\sqrt{٥})(س+\sqrt{٥})} = \frac{أ}{س-\sqrt{٥}} + \frac{ب}{س+\sqrt{٥}}$

$\therefore ٢ = أ(س+\sqrt{٥}) + ب(س-\sqrt{٥})$

عند $س = -\sqrt{٥} \Leftarrow ٢ = -٢\sqrt{٥}ب \Leftarrow ب = -\frac{١}{\sqrt{٥}}$

عند $س = \sqrt{٥} \Leftarrow ٢ = ٢\sqrt{٥}أ \Leftarrow أ = \frac{١}{\sqrt{٥}}$

$\therefore \int \frac{٢}{س^{٢}-٥} \, د س = \int \frac{\frac{١}{\sqrt{٥}}}{س-\sqrt{٥}} \, د س + \int \frac{-\frac{١}{\sqrt{٥}}}{س+\sqrt{٥}} \, د س$

$= \frac{١}{\sqrt{٥}} لو_{هـ}|س-\sqrt{٥}| - \frac{١}{\sqrt{٥}} لو_{هـ}|س+\sqrt{٥}|$

١٤. $\int \frac{س^{٤}-٨س}{س^{٣}-٢س} \, د س$

الحل: $\int \frac{س(س^{٣}-٨)}{س(س^{٢}-٢)} \, د س$

$= \int \frac{(س^{٢}-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}{(س^{٢}-٢)} \, د س$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + س^{٢} + ٤س + ج$

١٥. $\int \frac{٣س^{٣}-٥}{س^{٣}}$ د س حيث توجد

الحل: $\int ٣ - \frac{٥}{س^{٣}}$ د س

$= ٣س + \frac{٥}{٢س^{٢}} + ج$

١٦. $\int \frac{٣س^{٣}+٤س-٨}{٩-س^{٢}}$ د س

الحل:

$$\begin{array}{r|l} ٣س^{٣}+٤س-٨ & س^{٢}-٩ \\ \ominus\ ٣س^{٣} \oplus ٢٧س & س \\ \hline ١٣س-٨ & \end{array}$$

$\therefore \int س$ د س $+ \int \frac{١٣س-٨}{(س-٣)(س+٣)}$ د س

$\frac{س^{٢}}{٢} + \int \frac{ب}{س-٣} + \frac{ج}{س+٣}$ د س

$\frac{ب(س+٣)+ج(س-٣)}{(س-٣)(س+٣)}$ د س

$\therefore ١٣س-٨ = ب(س+٣)+ج(س-٣)$

عند $س=٣ \Leftarrow ٣١ = ٦ب \Leftarrow ب = \frac{٣١}{٦}$

عند $س=-٣ \Leftarrow -٤٧ = -٦ج \Leftarrow ج = \frac{٤٧}{٦}$

$\therefore \frac{س^{٢}}{٢} + \int \frac{\frac{٣١}{٦}}{س-٣}$ د س $+ \int \frac{\frac{٤٧}{٦}}{س+٣}$ د س

$\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٣١}{٦}$ لو$_{هـ}$ $|س-٣| + \frac{٤٧}{٦}$ لو$_{هـ}$ $|س+٣| + ج$

١٧. $\int \frac{س}{س^{٤}-١}$ د س

حلو

الحل: $\int \frac{س}{(س^{٢})^{٢}-١}$ د س نفرض $ص = س^{٢}$

$ص = س^{٢}$

$د ص = ٢س$ د س

$\therefore \int \frac{\frac{١}{٢}}{ص^{٢}-١}$ د ص $= \frac{١}{٢} \int \frac{١}{ص^{٢}-١}$ د ص

نفرض $\frac{١}{ص^{٢}-١} = \frac{أ}{ص-١} + \frac{ب}{ص+١}$

$\therefore ١ = أ(ص+١) + ب(ص-١)$

عند $ص=١ \Leftarrow ١ = ٢أ \Leftarrow أ = \frac{١}{٢}$

عند $ص=-١ \Leftarrow ١ = -٢ب \Leftarrow ب = -\frac{١}{٢}$

$\therefore$ الجواب:

$\frac{١}{٢} \int \frac{\frac{١}{٢}}{ص-١}$ د ص $- \int \frac{\frac{١}{٢}}{ص+١}$ د ص)

$\frac{١}{٢} (\frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$ $|ص-١| + \frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$ $|ص+١|) + ج$

$\frac{١}{٤}$ لو$_{هـ}$ $|س^{٢}-١| - \frac{١}{٤}$ لو$_{هـ}$ $|س^{٢}+١| + ج$

١٨. $\int \frac{س^{٣}+٥س+٦}{س-١}$ د س

الحل:

$$\begin{array}{r|l} س^{٣}+٥س+٦ & س-١ \\ \ominus\ س^{٣} \oplus س^{٢} & س^{٢}+س+٦ \\ \hline ٦س+٦ & \\ \ominus\ ٦س \oplus ٦ & \\ \hline ٠ & \end{array}$$

$\therefore$ الجواب $= \int س^{٢}+س+٦$ د س $+ \int \frac{٦}{س-١}$ د س

$= \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} + ٦س + ٦$ لو$_{هـ}$ $|س-١| + ج$

١٩. $\int_{٢}^{٣} \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}-١}$ د س

الحل: $= [$ لو$_{هـ}$ $(هـ^{س}-١)]_{٢}^{٣}$

$=$ (لو$_{هـ}$ $(هـ^{٣}-١)$ $-$ (لو$_{هـ}$ $(هـ^{٢}-١)$

$=$ لو$_{هـ}$ $\frac{هـ^{٣}-١}{هـ^{٢}-١}$

٢٠. $\int \frac{٥}{٢س^{٢}+س-٣}\,د س$

الحل: $\int \frac{٥}{(٢س+٣)(س-١)}\,د س$

نفرض $\frac{٥}{(٢س+٣)(س-١)} = \frac{أ}{٢س+٣} + \frac{ب}{س-١}$

$\therefore ٥ = أ(س-١) + ب(٢س+٣)$

عندما $س = ١ \leftarrow ٥ = ٥ب \leftarrow ب = ١$

عندما $س = -\frac{٣}{٢} \leftarrow ٥ = -\frac{٥}{٢}أ \leftarrow أ = -٢$

$\therefore$ الجواب $= \int \frac{-٢}{٢س+٣}\,د س + \int \frac{١}{س-١}\,د س$

$= -٢ \ln|٢س+٣| + \ln|س-١| + ج$

٢١. $\int \frac{٥س^{٢}-٧س-٨}{س^{٣}-٣س+٢}\,د س$

الحل: قسمة طويلة

$\begin{array}{r|l} ٥س^{٢}-٧س-٨ & س^{٣}-٣س+٢ \\ \hline ٥س^{٢}-١٥س+١٠ & ٥ \\ \hline ٨س-١٨ & \end{array}$

$= \int ٥\,د س + \int \frac{٨س-١٨}{(س^{٣}-٣س+٢)}\,د س$

$= ٥س + \int \frac{٨س-١٨}{(س-١)^{٢}(س+٢)}\,د س$

$\frac{٨س-١٨}{(س-١)^{٢}(س+٢)} = \frac{أ}{س-١} + \frac{ب}{(س-١)^{٢}} + \frac{ج}{س+٢}$

$٨س-١٨ = أ(س-١)(س+٢) + ب(س+٢) + ج(س-١)^{٢}$

عندما $س = ١ \leftarrow -١٠ = ٣ب \leftarrow ب = -\frac{١٠}{٣}$

عندما $س = -٢ \leftarrow -٣٤ = ٩ج \leftarrow ج = -\frac{٣٤}{٩}$

عندما $س = ٠ \leftarrow -١٨ = -٢أ + ٢ب + ج$

$-١٨ = -٢أ - \frac{٢٠}{٣} - \frac{٣٤}{٩}$

$-٢أ = -١٨ + \frac{٢٠}{٣} + \frac{٣٤}{٩} = -\frac{٤٨}{٩}$

$أ = \frac{٢٤}{٩}$

$= ٥س + \int \frac{\frac{٢٤}{٩}}{س-١}\,د س + \int \frac{-\frac{١٠}{٣}}{(س-١)^{٢}}\,د س + \int \frac{-\frac{٣٤}{٩}}{س+٢}\,د س$

$= ٥س + \frac{٢٤}{٩}\ln|س-١| + \frac{١٠}{٣(س-١)} - \frac{٣٤}{٩}\ln|س+٢| + ج$

٢٢. سؤال وزاري محترم ٢٠١٦

$\int \frac{س+١}{س^{٢}+١٧-٧س}\,د س$

الحل: نضرب بمرافق البسط أو المقام فقط

$\int \frac{س+١}{س^{٢}+١٧-٧س} \times \frac{س^{٢}+١٧-٧س}{س^{٢}+١٧-٧س}\,د س$

$\int \frac{س^{٣}+١٧س-٧س^{٢}+س^{٢}+١٧-٧س}{(س^{٢}+١٧-٧س)^{٢}}\,د س$

$\int \frac{س^{٣}-٦س^{٢}+١٠س+١٨}{(س-٢)(س-٩)}\,د س$

$\int \frac{(س+١)(س-٢)(س-٩)}{(س-٢)(س-٩)}\,د س$

$\int (س+١)\,د س = \frac{س^{٢}}{٢} + س + ج$

تعويض دائري جزء ١

$ص = ١٧-س^{٢}$ | $ص^{٢} = ١-س^{٢}$

$٢ص\,د ص = -٢س\,د س \leftarrow س\,د س = -\frac{ص}{٢}\,د ص$

$\int \frac{١-ص}{س} \times -\frac{ص}{٢}\,د ص = \int \frac{ص^{٢}-ص}{س^{٢}}\,د ص$

لكن $س^{٢} = ١-ص^{٢}$

$= \int \frac{ص^{٢}-ص}{١-ص^{٢}}\,د ص = \int \frac{-ص^{٢}+ص}{ص^{٢}-١}\,د ص$

قسمة طويلة

$\begin{array}{r|l} -ص^{٢}+ص & ص^{٢}-١ \\ \hline -ص^{٢}+١ & -١ \\ \hline ص+١ & \end{array}$

$= \int -١\,د ص + \int \frac{ص+١}{ص^{٢}-١}\,د ص$

$= -ص + \int \frac{١}{ص-١}\,د ص$

$= -ص + \ln|ص-١| + ج$

$= -\sqrt{١-س^{٢}} + \ln|\sqrt{١-س^{٢}}-١| + ج$

أمثلة مختلفة

٢٣. $\int \frac{٢}{س^{٤} - ٣س^{٢} - ٤}$ د س

الحل: نفرض $ص = س^{٢}$ ، $ص^{٢} = س$

$٢ ص$ د ص $=$ د س

$= \int \frac{٢}{ص^{٤} - ٣ص^{٢} - ٤} \cdot ٢ ص$ د ص

$= \int \frac{٤ ص}{ص^{٤} - ٣ص^{٢} - ٤}$ د ص

$= \int \frac{أ}{ص - ٤} + \frac{ب}{ص + ١}$ د ص

$= \int \frac{أ(ص + ١) + ب(ص - ٤)}{ص^{٤} - ٣ص - ٤}$ د ص

$\therefore ٤ ص = أ(ص + ١) + ب(ص - ٤)$

عندما $ص = -١ \Leftarrow -٤ = -٥ب \Leftarrow ب = \frac{٤}{٥}$

عندما $ص = ٤ \Leftarrow ١٦ = ٥أ \Leftarrow أ = \frac{١٦}{٥}$

$\frac{١٦}{٥} \int \frac{١}{ص - ٤}$ د ص $+ \frac{٤}{٥} \int \frac{١}{ص + ١}$ د ص

$= \frac{١٦}{٥}$ لو$|ص - ٤| + \frac{٤}{٥}$ لو$|ص + ١| + ج$

٢٤. $\int \frac{هـ^{٣س}}{هـ^{٣س} - ٣هـ^{س} - ٤}$ د س

الحل: $\int \frac{(هـ^{س})^{٣}}{(هـ^{س})^{٢} - ٣(هـ^{س}) - ٤}$ د س

نفرض $ص = هـ^{س}$ ، $\frac{د ص}{ص} = د س$

$\int \frac{ص^{٣}}{ص^{٢} - ٣ص - ٤} \cdot \frac{د ص}{ص}$

$= \int \frac{ص^{٢}}{ص^{٢} - ٣ص - ٤}$ د ص

ناتج قسمة $\frac{ص^{٢}}{ص^{٢} - ٣ص - ٤}$ $= ١ + \frac{٣ص + ٤}{ص^{٢} - ٣ص - ٤}$

$= \int ١$ د ص $+ \int \frac{٣ص + ٤}{(ص - ٤)(ص + ١)}$ د ص

$= ص +$ كسور جزئية ..... الجواب

الجواب النهائي :-

$هـ^{س} + \frac{١٦}{٥}$ لو$|هـ^{س} - ٤| - \frac{٤}{٥}$ لو$|هـ^{س} + ١| + ج$

٢٥. $\int \frac{٥ جتا س}{٣ جا^{٢} س + جا س - ٢}$ د س

الحل: نفرض $ص = جا س$ ، $د س = \frac{د ص}{جتا س}$

$= \int \frac{٥ جتا س}{٣ ص^{٢} + ص - ٢} \cdot \frac{د ص}{جتا س}$

$= \int \frac{٥}{(٣ص - ٢)(ص + ١)}$ د ص

كسور جزئية ..... الجواب

٢٦. $\int \frac{ظا^{٤} س}{٣ ظا^{٣} س - ظا س - ٢}$ د س

الحل: نفرض $ص = ظا س$ ، $د س = \frac{د ص}{ظا^{٢} س}$

$= \int \frac{ظا^{٤} س}{٣ص^{٣} - ص - ٢} \cdot \frac{د ص}{ظا^{٢} س}$

$= \int \frac{١ + ظا^{٢} س}{٣ص^{٣} - ص - ٢}$ د ص

$= \int \frac{ص^{٢} + ١}{٣ص^{٣} - ص - ٢}$ د ص ... ناتج قسمة جزئية على كسور جزئية

٢٧. $\int \log_{هـ}(س^2-1)\,د س$

حلو

الحل: $ه = \log_{هـ}(س^2-1)$ $\quad د ه = د س$

$د ه = \frac{2س}{س^2-1}\,د س$ $\quad \leftarrow \quad ه = س$

$س \log_{هـ}(س^2-1) - \int \frac{2س^2}{س^2-1}\,د س$

بقسمة $س^2$ على البسط

٢٨. $\int \frac{أ^س}{1+س^2 أ^س}\,د س$

الحل: $\boxed{ص = أ^س}$ $\boxed{ص^2 = س}$

$\boxed{2ص\,د ص = د س}$

$\int \frac{ص}{1+ص^4}\,د ص$

$\int \frac{ص^2}{1+ص^4}\,د ص = \frac{2}{3}\log_{هـ}(ص^2+\sqrt{1+ص^4}) + ث$

$= \frac{2}{3}\log_{هـ}(أ^س)^2 + \sqrt{1+(أ^س)^4} + ث$

٢٩. $\int \frac{3\log_{هـ}س}{(س-2)^2}\,د س$

الحل: $\int 3(س-2)^{-2} \times \log_{هـ}س\,د س$

$ه = \log_{هـ}س$ $\quad د ه = 3(س-2)^{-2}$

$د ه = \frac{1}{س}$ $\quad \leftarrow \quad ه = \frac{3(س-2)^{-1}}{-1}$

قانون الاجزاء

$\frac{-3}{س-2}\log_{هـ}س + \int \frac{1}{س(س-2)}\,د س$

$+ 3\int \frac{1}{س^2(1+\frac{2}{س})}\,د س$

$+ 3\int \frac{س^{-2}}{1+2س^{-1}}\,د س$

نفرض $ص = 1+2س^{-1}$

$د س = \frac{د ص}{-2س^{-2}}$

$\int \frac{س^{-2}}{ص}\,\frac{د ص}{-2س^{-2}} = \log_{هـ}|ص| + ث$

الجواب النهائي

$-3\log_{هـ}\frac{س}{س-2} + \log_{هـ}|1+\frac{2}{س}| + ث$

٣٠. $\int \frac{1}{س(\log_{هـ}س - 2)(\log_{هـ}س + 5)}\,د س$

الحل: $\boxed{ص = \log_{هـ}س}$ $\quad د س = س\,د ص$

$\int \frac{1}{(ص-2)(ص+5)}\,د ص$

$\int \frac{أ}{ص-2} + \frac{ب}{ص+5}\,د ص$

$أ(ص+5) + ب(ص-2) = 1$

$ص = 2 \Leftarrow 7أ = 1 \Leftarrow أ = \frac{1}{7}$

$ص = -5 \Leftarrow -7ب = 1 \Leftarrow ب = -\frac{1}{7}$

$\therefore \int \frac{\frac{1}{7}}{ص-2} + \frac{-\frac{1}{7}}{ص+5}\,د ص$

$= \frac{1}{7}\log_{هـ}|ص-2| - \frac{1}{7}\log_{هـ}|ص+5| + ث$

٣١. $\int \frac{1}{س^2-1}\,د س$ $\quad$ ٣٢. $\int \frac{س^3}{س^8-1}\,د س$

٣٣. $\int \frac{\sqrt{س}}{9-س}\,د س$ $\quad$ ٣٤. $\int \frac{1}{\sqrt{س}-3\sqrt{س}}\,د س$

٣٢. $\int \frac{\sqrt[3]{س} - ١}{\sqrt[3]{س} - ٤}$ د س

الحل: نفرض $ص = \sqrt[3]{س}$ ، $ص^٣ = س$

$٣ ص^٢ د ص = د س$

$\int \frac{ص - ١}{ص^٢ - ٤} \cdot ٣ ص^٢ د ص$

$\int \frac{٣ ص^٣ - ٣ ص^٢}{ص^٢ - ٤}$ د ص قسمة طويلة ثم تكسير كسور جزئية

٣٣. $\int \sqrt{١ - هـ^{-س}}$ د س

الحل: $ع = \sqrt{١ - هـ^{-س}}$

$ع^٢ = ١ - هـ^{-س}$

$٢ ع$ د ع $= - هـ^{-س}$ د س

$\frac{٢ ع \, د ع}{- هـ^{-س}} =$ د س

$\int ص \cdot \frac{٢ ص \, د ص}{- هـ^{-س}} = \int \frac{٢ ص^٢}{ع^٢ - ١}$ د ص قسمة ثم كسور

٣٤. $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} + هـ^{س}}$ د س

الحل: $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}(هـ^{س} + ١)}$ د س $= \int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} + ١}$ د س

نفرض $ص = هـ^{س}$

$= \int \frac{هـ^{س}}{ص^٢ + ١}$ د س

$\frac{د ص}{ص} = د س$ ← $\int \frac{ص}{ص^٢ + ١} \cdot \frac{د ص}{ص}$

$= \int \frac{١}{ص^٢ + ١}$ د ص $= \frac{١}{ظا}$ ظا$^{-١}$ ص + ث

$= \frac{١}{١}$ ظا$^{-١}(هـ^{س})$ + ث

٣٥. $\int \frac{جتا س}{٨ + جتا^٢ س}$ د س

الحل: $\int \frac{جتا س}{١ + ٨ جا^٢ س}$ د س

$= \int \frac{جتا س}{٩ - جا^٢ س}$ د س

$ص = جا س$ ، $د س = \frac{د ص}{جتا س}$

$\frac{\pi}{٤} \to ١$

$\int \frac{١}{٩ - ص^٢} \cdot$ د ص

$\int \frac{١}{(٣ - ص)(٣ + ص)}$ د ص كسور جزئية

٣٦. $\int \frac{٢ ظا س}{١ + ٣ ظا^٢ س - ظا^٢ س}$ د س

الحل: $\int \frac{ظا س}{١ + ٣ ظا^٢ س - (١ - ٢ ظا^٢ س)}$ د س

$= \int \frac{ظا س}{١ + ٣ ظا^٢ س - ١ + ٢ ظا^٢ س}$ د س

$= \int \frac{ظا س}{٣ ظا^٢ س + ٣ ظا^٢ س}$ د س

نفرض $ص = ظا س$ ، $د س = \frac{د ص}{ظا س}$

$= \int \frac{ظا س}{٣ ص^٢ + ٣ ص^٢} \cdot$ د ص

$= \int \frac{١}{ص(٣ + ٣ ص^٢)}$ د ص كسور جزئية

٣٧. $\int \frac{س}{س^٢ - ١٠ س + ٢٤}$ د س

ب. $\int \frac{٤ س}{س^٢ - ٧ س + ٣}$ د س

ورقة عمل شاملة ...

جد التكاملات التالية :-

١. $\int \frac{س}{س^٤ - س^٢ - ٢}$ د س

٢. $\int \frac{\text{لو}_{هـ}(س^٢+١)}{س^٣}$ د س

٣. $\int \frac{٤س}{\text{ها}^٢س - ٤\text{هتا}^٢س}$

٤. $\int \frac{د س}{(س-١)\sqrt{٧س^٢ - ٤س+٢}}$

٥. $\int \frac{س^٣}{\sqrt{٢+٤٧-س^٤}}$ د س

٦. $\int \frac{\text{ظتا س قتا س}}{٩ - ٤\text{قتا}^٢س}$ د س

٧. $\int \frac{\text{هتا}٢س}{\text{هتا س} + \text{جا س} - ١}$ د س

٨. $\int \frac{\text{هتا س}}{\text{جا س} \sqrt{١٧ + \text{هتا}^٢س}}$ د س

٩. $\int \frac{د س}{س(\text{لو}_{هـ} س)^٢ - ٤ - س}$

١٠. $\int \frac{\text{ظا س}}{٩ - (\text{لو}_{هـ}\text{هتا س})^٢}$ د س

١١. $\int \frac{١}{\text{لو}_{هـ} س}$ د س

١٢. $\int \frac{٦ هـ^{س}}{٩ - هـ^{٢س}}$ د س

١٣. $\int \frac{\sqrt{١+٤س^٢}}{س} - \frac{س}{\sqrt{١+٤س^٢}}$ د س

١٤. $\int \frac{\sqrt{٦}}{١+\sqrt{٦}}$ د س

١٥. $\int \frac{١٦}{١+٦س+٩س^٢}$ د س

١٦. $\int هـ^{س} \times \text{لو}_{هـ}(هـ^{س} - ١)$ د س

١٧. $\int \frac{\text{قا}^٢س}{٥ - \text{قا}^٢س}$ د س

١٨* $\int \text{لو}_{هـ} س^{س}$ د س

سؤال تكامل جزاء = وزاري ٢٠١٧م

إذا كان $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا س}}{(١+\text{جا س})^٢}$ د س = P ، P ثابت

جد بدلالة P قيمة $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}٢س}{١+\text{جا س}}$ د س

الحل : عندما نختلف حدود لتكامل نفكر بالتعويض

$ن = ٢س \Leftarrow \frac{ن}{٢} = س \Leftarrow د ن = ٢ د س$

$\frac{\pi}{٢} \leftarrow \frac{\pi}{٤}$

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا ن}}{١+\text{جا ن}} \cdot \frac{د ن}{٢} = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا ن}}{٢(١+\text{جا ن})}$ د ن

الزاوية خطية نفكر بالك جزاء

$ص = \frac{١}{١+\text{جا ن}} \Leftarrow د ص = \text{جا ن}$

$د ص = \frac{-\text{جتا ن}}{(١+\text{جا ن})^٢} \Leftarrow \text{جتا ن} = -(١+\text{جا ن})^٢ د ص$

$= -\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا ن}}{(١+\text{جا ن})^٢}$ د ص $= -\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} (١+\text{جا ن})^{-٢}$ د ص

$= -\left[\frac{(١+\text{جا ن})^{-١}}{-١}\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} = \left[\frac{١}{١+\text{جا ن}}\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{١+\frac{\sqrt{٢}}{٢}}$

المعادلات التفاضلية

هي معادلة تحتوي المتغيرات ومشتقاتها،
س ، ص ، $\frac{ص}{س}$ ، $\frac{ص}{س}$ ... وتقصد بحلها إيجاد
ص بدلالة س .

خطوات الحل: ١. نفصل المتغيرات مع دس
و المشتقات مع دص .
٢. نجري التكامل للطرفين
ونضع س في الطرف
و الثوابت في جهة المتغير

** ضروري دس وحيدة ، دص وحيدة
في البسط فقط **

مثال: حل المعادلات التفاضلية التالية

١. $\frac{دص}{دس} = \frac{٢س + ٥}{٣ص^{٢} - ١}$

الحل: ضرب تبادلي

$(٢ص^{٢} - ١)\,دص = (٢س + ٥)\,دس$

$\int (٢ص^{٢} - ١)\,دص = \int (٢س + ٥)\,دس$

$ص^{٣} - ص = س^{٢} + ٥س + ج$

٢. $\frac{دص}{دس} = س^{٢} ص^{٣}$

الحل: ضرب تبادلي $دص = س^{٢} ص^{٣}\,دس$

$\frac{دص}{ص^{٣}} = س^{٢}\,دس$

$\int ص^{-٣}\,دص = \int س^{٢}\,دس$

$\int ص^{-٣}\,دص = \frac{١}{٣}س^{٣} + ج$

$\frac{ص^{-٢}}{-٢} = \frac{١}{٣}س^{٣} + ج$

$\frac{-١}{٢ص^{٢}} = \frac{١}{٣}س^{٣} + ج$

٣. $س^{٢} \cdot \frac{دص}{دس} = ص^{٣}$

الحل: $س^{٢}\,دص = ص^{٣}\,دس$

$\frac{دص}{ص^{٣}} = \frac{دس}{س^{٢}}$

$\int ص^{-٣}\,دص = \int س^{-٢}\,دس$

$\frac{ص^{-٢}}{-٢} = \frac{س^{-١}}{-١} + ج$

$\frac{-١}{٢ص^{٢}} = \frac{-١}{س} + ج$

٤. $\frac{دص}{دس} = \frac{٧ص}{٤س}$ ، $ص(٢) = ٧$

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{٧ص}{٤س}$

$\frac{١}{٧ص}\,دص = \frac{١}{٤س}\,دس$

$\int \frac{١}{٧ص}\,دص = \int \frac{١}{٤س}\,دس$

$\frac{١}{٧}\ln|ص| = \frac{١}{٤}\ln|س| + ج$

$\frac{٢}{٧}\sqrt{ص^{٧}} = \frac{٢}{٤}\sqrt{س^{٤}} + ج$

٥. $2\tan^2 x \sec^2 y\,dy + \sec^2 y\tan^2 y\,dx = 2\,dy$

الحل: $(2\tan^2 x - 2)\,dy = -\sec^2 y\tan^2 y\,dx$

$$\frac{2(\tan^2 x - 1)\,dy}{2(\tan^2 x-1)\times\tan^2 y} = \frac{-\sec^2 y\tan^2 y\,dx}{2(\tan^2 x-1)}$$

$$\int \tan^2 y\,dy = \int \frac{1}{2}\tan^2 x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\tan y - y = \frac{1}{2}\tan x - x + c$$

$$\frac{1}{2}\tan y = \frac{1}{2}\tan x + x + c$$

٦. إذا كان $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$، فجد قاعدة العلاقة علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة $(2,1)$ ثم أوجد قيمة y عندما $x=0$

الحل: $dy = 2xy^2\,dx$

$$\frac{dy}{y^2} = 2x\,dx$$

$$\int y^{-2}\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = x^2 + c$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c$$

بتعويض $x=2, y=1$

$$-1 = 4 + c \Leftarrow c = -5$$

$$\therefore -\frac{1}{y} = x^2 - 5$$

$$y = \frac{-1}{x^2-5}$$

٧. $\sec^2\frac{x}{2}\,dy - \tan^2\frac{x}{2}\,dx = 0$

الحل: $\sec^2\frac{x}{2}\,dy = \tan^2\frac{x}{2}\,dx$

$$dy = \frac{\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}\,dx$$

$$\int dy = \int \tan^2\frac{x}{2}\,dx$$

$$y = \int \left(\tan\frac{x}{2}\right)^2\,dx$$

$$y = \int \left(\sec^2\frac{x}{2} - 1\right)\,dx$$

$$y = \frac{1}{2}\int \sec^2\frac{x}{2}\,dx - x$$

$$y = \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} - x + c$$

٨. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 64x = 0$ صفر

الحل: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 64x$ بأخذ الجذر التكعيبي

$$\frac{dy}{dx} = 4x^{\frac{1}{3}}$$

$$\int dy = \int 4x^{\frac{1}{3}}\,dx$$

$$y = \frac{4x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$y = 3x^{\frac{4}{3}} + c$$

٩. $\frac{dy}{dx} = 1 - y + x^2 - yx^2$

الحل: فكرة جميلة (تجميع الحدود بطريقة مختلفة)

$$\frac{dy}{dx} = (1-y) + x^2(1-y)$$ عامل مشترك

$$\frac{dy}{dx} = (1-y)(1+x^2)$$

$$dy = (1-y)(1+x^2)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{1-y} = \int (1+x^2)\,dx$$

$$-\ln|1-y| = x + \frac{x^3}{3} + c$$

١٠. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x+xy+y+1}$

الحل: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x(1+y)+(y+1)}$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1+y)(x+1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+y}\sqrt{x+1}$$

$$dy = \sqrt{1+y}\sqrt{x+1}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y}} = \int \sqrt{x+1}\,dx$$

$\int (1+ص)^{\frac{1}{2}} \, د ص = \int (1+س)^{\frac{1}{2}} \, د س$

$\frac{(1+ص)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{(1+س)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + ج$

$\frac{2}{3}(1+ص)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(1+س)^{\frac{3}{2}} + ج$

١١. $\left(\frac{د ص}{د س}\right)^2 - 5\left(\frac{د ص}{د س}\right) + 6 = 0$

جنبيه : نعتبرها معادله تربيعيه

الحل: $\left(\frac{د ص}{د س} - 3\right)\left(\frac{د ص}{د س} - 2\right) = 0$

$\frac{د ص}{د س} = 3$ ، $\frac{د ص}{د س} = 2$

$ص = 3س + ج$ ، $ص = 2س + ج$

١٢. $\frac{د ص}{د س} + ص \, ظا س = جتا^2 س$

الحل: $ه^{\int ظا س \, د س} = ه^{\ln |قا س|} = |قا س|$

$ص \cdot قا س = \int جتا^2 س \, د س$

$ص \cdot قا س = \int \frac{1}{2}(1 + جتا 2س) \, د س$

$ص \cdot قا س = \frac{1}{2}س + \frac{1}{4} جا 2س + ج$

$ص = \frac{1}{2}س \, جتا س + \frac{1}{2} جا س \, جتا س + ج \, جتا س$

١٣. $\frac{د ص}{د س} + \frac{3س^2}{1+س^3} ص = 5س$ عندما $س = 0$ ، $ص = 1$

أوجد قاعدة الاقتران ص

الحل: $ه^{\int \frac{3س^2}{1+س^3} \, د س} = ه^{\ln |1+س^3|} = |1+س^3|$

$ص (1+س^3) = \int 5س (1+س^3) \, د س$

$ص (1+س^3) = \int 5س + 5س^4 \, د س$

$ص (1+س^3) = \frac{5}{2}س^2 + \frac{5}{5}س^5 + ج$

$ص = \frac{\frac{5}{2}س^2 + س^5 + ج}{1+س^3}$

لما $س = 0$ ، $ص = 1$

$1 = \frac{0 + 0 + ج}{1}$ ← $ج = 1$

$ص = \frac{\frac{5}{2}س^2 + س^5 + 1}{1+س^3}$

إذا أردنا إكمال الحل (اختياري)

$\ln |ص| = \ln \left|\frac{\frac{5}{2}س^2 + س^5 + 1}{1+س^3}\right|$

$\ln |ص| = \ln \left|\frac{\frac{1}{2}س^2(5 + 2س^3) + 1}{1+س^3}\right|$

١٤. $\frac{د ص}{د س} = \frac{(3س^2 + 2س)}{(1+س^3)(9-س^2)} ص$

الحل: نفصل المتغيرات

$\frac{د ص}{ص} = \frac{(3س^2 + 2س)}{(1+س^3)(9-س^2)} \, د س$

$\int \frac{د ص}{ص} = \int \frac{(3س^2 + 2س)}{(1+س^3)(9-س^2)} \, د س$

$\ln |ص| = \int \frac{1}{1+س^3} + \frac{1}{9-س^2} \, د س$

$\ln |ص| = \frac{1}{3}\ln |1+س^3| - \frac{1}{2}\ln |9-س^2| + \ln |ج|$

$\ln |ص| = \ln \left|\frac{ج \sqrt[3]{1+س^3}}{\sqrt{9-س^2}}\right|$

١٥. $\frac{د ص}{د س} + ص = ه^{-س} + س$ حيث

$س = 0$ عندما $ص = 0$

$\frac{د ص}{د س} + ص = ه^{-س} + س$

$\int ه^{\int 1 \, د س} = ه^{س}$

$ه^{س} ص = \int ه^{س}(ه^{-س} + س) \, د س$

$ه^{س} ص = \int 1 + س ه^{س} \, د س$

$ه^{س} ص = س + س ه^{س} - ه^{س} + ج$

$ص = س + س - 1 + ج ه^{-س}$

$ص = 2س - 1 + ج ه^{-س}$

$0 = 0 - 1 + ج$ ← $ج = 1$

$ص = 2س - 1 + ه^{-س}$

فكرة أسئلة كلاسية

١٦. آلة صناعية قيمتها عند شراءها (٢٥٠٠) دينار وكانت قيمتها تتناقص بمرور الزمن حسب العلاقة $\frac{ك ق}{ك ن} = \frac{-٥٠٠}{(١+ن)^٢}$ حيث ق: قيمة الآلة بعد ن سنة من شرائها. جد قيمة الآلة بعد سنتين من شرائها.

الحل: $ق = \int \frac{-٥٠٠}{(١+ن)^٢} ك ن$

$= -٥٠٠ \int (١+ن)^{-٢} ك ن$

$= \frac{-٥٠٠ (١+ن)^{-١}}{-١} + ج$

$= \frac{٥٠٠}{(١+ن)} + ج$ حيث ق = ٢٥٠٠ عند ن = ٠

$٢٥٠٠ = ٥٠٠ + ج \leftarrow ج = ٢٠٠٠$

$\therefore ق = \frac{٥٠٠}{١+ن} + ٢٠٠٠$

عند ق(٣) $= \frac{٥٠٠}{١+٢} + ٢٠٠٠ = ٢١٢٥$ دينار

١٧. خزان للأحماض فيه ١٠ لترات، يزداد عدد لترات الأحماض بمعدل $\frac{ك ل}{ك ن} = \frac{٥}{\sqrt{ن}}$ لتر كل شهر، حيث ل: عدد لترات الأحماض بعد (ن) شهر. جد عدد لترات الأحماض بعد ٤ أشهر.

الحل: $\frac{ك ل}{ك ن} = \frac{٥}{\sqrt{ن}}$

$\leftarrow ك ل = ٥ ن^{-\frac{١}{٢}} ك ن$

$\leftarrow ل = \frac{١}{-\frac{١}{٢}} ٥ ن^{\frac{١}{٢}} + ج$

$\leftarrow ل = ١٠ \sqrt{ن} + ج$ حيث ل = ١٠ عند ن = ٠

$\leftarrow ١٠ = ٠ + ج \leftarrow ج = ١٠$

$\leftarrow ل = ١٠ \sqrt{ن} + ١٠$

$\therefore ل(٤) = ١٠ \sqrt{٤} + ١٠ = ٣٠$

١٨. سقط حجر بخار، وكانت مساحة الحجر لحظة اصطدامه (هـ) كم^٢، ثم لوحظ أن مساحته تزداد بمعدل $\frac{ك م}{ك ن} = ١٠ م$ كم^٢/ساعة حيث م: مساحة الحجر بعد (ن) ساعة. جد مساحة الحجر بعد ساعتين من اصطدامه !!

الحل: $\frac{ك م}{ك ن} = \frac{١}{١٠} م$

$\leftarrow \frac{ك م}{م} = \frac{١}{١٠} ك ن$

$\int \frac{ك م}{م} = \int \frac{١}{١٠} ك ن$ حيث م = هـ عند ن = ٠

$\ln|م| = \frac{١}{١٠} ن + ج$

$\ln هـ = \frac{١}{١٠} \times ٠ + ج$

$ج = ١$

$\therefore \ln|م| = \frac{١}{١٠} ن + ١$

جد م؟ عندما ن = ٢

$\ln م = \frac{١}{١٠} \times ٢ + ١$

$\ln م = \frac{٦}{٥} \leftarrow م = هـ^{\frac{٦}{٥}}$ كم^٢

١٩. ف. يزداد عدد سكان مدينة حسب العلاقة $\frac{ك ع}{ك ن} = ٠.٣٥ ع$ حيث ع: عدد السكان، ن: الزمن بالسنوات، إذا علمت أن عدد السكان ٢٠٠٠٠ نسمة عام ٢٠١٠، أحسب عدد السكان عام ٢٠٥٠ م ؟ ٢٠٠٠٠ هـ

٢٠. خزان ماء سعته (٢٠٥) م^٣، يُضخ فيه الماء بمعدل (ن + ٢) م^٣/د، جد الزمن اللازم لامتلاء الخزان ٥ ث

جـ . اذا كان معدل تغير مساحة سطح مستطيل بالنسبة لطول أحد أضلاعه يعطى بالعلاقة $\frac{ds}{dx} = 0.24 + 0.03x^2$ فجد مساحة السطح عندما يبدأ التغير علماً أن مساحة سطح المستطيل بالسنتيمتر تساوي ٣ عندما $x = 1$

(٢٥)

٤ . آلة تصوير تطبع ٢٠ ورقة بالدقيقة

$\frac{dw}{dt} = k$ عدد الأوراق ، حيث w عدد الأوراق ، t الزمن بالدقائق ، اذا كان عدد الأوراق المطبوعة بعد (١) دقيقة هو (٢٠) ورقة . فجد عدد الأوراق المطبوعة بعد دقيقتين

(١٦٠)

** التطبيقات الهندسية **

٣٠ . اذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة $(س ، ص)$ يساوي $\frac{س - ص}{س + ص + 1}$ ، فجد قاعدة العلاقة ص علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة $(1 ، 0)$

الحل :

٣١ . اذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(س ، ص)$ هو $\frac{\sqrt{2ص + 1}}{\sqrt{2س - 4}}$ فجد قاعدة العلاقة علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة $(1 ، 4)$ ؟

الحل : $\frac{\sqrt{2ص + 1}}{\sqrt{2س - 4}} = \frac{ds}{dx}$

$\sqrt{2ص + 1} \cdot dص = \sqrt{2س - 4} \cdot dس$

$\frac{dص}{\sqrt{2ص + 1}} = \frac{dس}{\sqrt{2س - 4}}$

$\int (2ص + 1)^{-\frac{1}{2}} dص = \int (2س - 4)^{-\frac{1}{2}} dس$

$\frac{(2ص + 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \times 2} = \frac{(2س - 4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \times 2} + ج$

$\sqrt{2ص + 1} = \sqrt{2س - 4} + ج$

بما أن المنحنى يمر بالنقطة $(4 ، 1)$ تحقق

$3 = 2 + ج \leftarrow ج = 1$

$\therefore \sqrt{2ص + 1} = \sqrt{2س - 4} + 1$

٢٢. إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ، ص) يساوي $-س\sqrt{٣+لو_{هـ} س}$ ، جد قاعدة العلاقة علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (هـ ، ٤) حيث هـ العدد النيبيري

الحل: ميل العمودي = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$

$س\sqrt{٣+لو_{هـ} س} = \frac{-١}{\text{ميل المماس}}$

ميل المماس = $\frac{-١}{س\sqrt{٣+لو_{هـ} س}}$

$\frac{ص}{س} = \frac{-١}{س\sqrt{٣+لو_{هـ} س}}$

$ص = \int \frac{-١}{س\sqrt{٣+لو_{هـ} س}}\, س$

$ص = \int \frac{-١}{س\sqrt{٣+لو_{هـ} س}}\, س$

بالتعويض

$ع = \sqrt{٣+لو_{هـ} س}$

$ع^٢ = ٣ + لو_{هـ} س$

$٢ع\, ع = \frac{١}{س}\, س$

$٢ع\, س\, ع = س$

$= \int \frac{-١}{ع} \cdot ٢ع\, ع$

$= -٢ \int ع$

$= -٢ع + ج$

$ص = -٢\sqrt{٣+لو_{هـ} س} + ج$

نجد ج (هـ ، ٤) تحقق

$٤ = -٢\sqrt{٣+لو_{هـ} هـ} + ج$

$٤ = -٢ + ج \leftarrow ج = ٦$

$\therefore ص = -٢\sqrt{٣+لو_{هـ} س} + ٦$

٢٣. إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة (س ، ص) يساوي ٢ س ص ، جد قيم ص عندما س = ٢ علماً بأن منحنى العلاقة يمر بالنقطة (٢ ، ١) ؟

الحل: $\frac{ص}{س} = ٢ س ص$

$ص = ٢ س ص \cdot س$

$\frac{ص}{ص} = ٢ س \cdot س$

$لو_{هـ} |ص| = س^٢ + ج$

نجد ج

$لو_{هـ} ١ = ٤ + ج \leftarrow ج = -٤$

$\therefore لو_{هـ} |ص| = س^٢ - ٤$ نجد ص

$لو_{هـ} |ص| = ٢^٢ - ٤$

$لو_{هـ} |ص| = ٠$

$|ص| = هـ^٠ \leftarrow$

$\therefore ص = \pm هـ^٠$

٢٤. إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{ص}{١ - جتاس}$ حيث قاعدة (ص) هي $(\frac{\pi}{٤} ، ١)$ تقع على العلاقة .

الحل: $\frac{د ص}{د س} = \frac{ص}{١ - جتاس}$

$\frac{١}{ص}\, د ص = \frac{١}{١ - جتاس}\, د س$

$\frac{١}{ص}\, د ص = \frac{١}{١ - جتاس} \times \frac{١ + جتاس}{١ + جتاس}\, د س$

$\frac{١}{ص}\, د ص = \frac{١ + جتاس}{١ - جتا^٢ س}\, د س$

$\frac{١}{ص}\, د ص = \frac{١ + جتاس}{جا^٢ س}\, د س$

$\int \frac{١}{ص}\, د ص = \int (قتا^٢ س + قتاس ظاس)\, د س$

$لو_{هـ} |ص| = -ظتاس - قتاس + ج$

نجد ج $(\frac{\pi}{٤} ، ١)$ تحقق

$لو_{هـ} ١ = -ظتا\frac{\pi}{٤} - قتا\frac{\pi}{٤} + ج$

$٠ = -١ - \sqrt{٢} + ج$

$ج = ١ + \sqrt{٢}$

$لو_{هـ} |ص| = -ظتاس - قتاس + ١ + \sqrt{٢}$

$\frac{-٢}{٧\,هـ ص} = -ظتا س + ع$ بأخذ جـ

$\frac{-٣}{٧\,هـ ص} = -ظتا\left(س + \frac{\pi}{٤}\right) + ع$ عندما $س = -١$

$\therefore \frac{-٢}{٧\,هـ ص} = -ظتا س - ١$

$\frac{٢}{٧\,هـ ص} = ظتا س + ١$ بأخذ مقلوب الطرفين

$\frac{٢}{٧} = هـ ص$ بأخذ لو هـ للطرفين

$\frac{٢}{(ظتا س + ١)^{٧}} = هـ ص$ بالضرب لو هـ

$لو_{هـ}\left(\frac{٢}{(ظتا س + ١)^{٧}}\right) = لو_{هـ} هـ ص$

$ص = لو_{هـ}\left(\frac{٢}{(ظتا س + ١)^{٧}}\right)$

** تطبيقات فيزيائية **

نعلم أن $ع = ف'$ ، $ت = ع'$

$\therefore ف(ن) = \int ع(ن)\,د ن$ وعند $ع(ن) = \int ت(ن)\,د ن$

لاحظ أن: $ع = \frac{د ف}{د ن}$ ، $ت = \frac{د ع}{د ن}$

معلوماتٌ خاصةٌ جداً جداً جداً :-

١. $ع(٠)$ = السرعة الابتدائية .

٢. أقصى ارتفاع ⟵ $ع$ = صفر (السكون)

٣. عند الوصول للأرض ⟵ ف (الارتفاع) = صفر

٤. إذا تحرك الجسم من السكون

$ع(٠) = ٠$

٥. عندما يتحرك الجسم من نقطة الأصل $ف(٠) = ٠$

٢٥. يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة $ت = ٦ن + ٤$ ، $ن \geq ٠$

سرعته الابتدائية $ع(٠) = ٧$ ، وموقعه الابتدائي $ف(٠) = ٣$ ، احسب المسافة المقطوعة بعد (٣) ثوانٍ

الحل: $ت = ٦ن + ٤$

$\frac{د ع}{د ن} = ٦ن + ٤$

$\int د ع = \int (٦ن + ٤)\,د ن$

$ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٤ن + ج$ بأخذ D

$ع(٠) = ٠ + ٠ + ج = ٧ \Leftarrow ج = ٧$

$\therefore ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٤ن + ٧$

$\frac{د ف}{د ن} = ٣ن^{٢} + ٤ن + ٧$

$\int د ف = \int (٣ن^{٢} + ٤ن + ٧)\,د ن$

$ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٧ن + د$ بأخذ D

$ف(٠) = ٠ + ٠ + ٠ + د = ٢ \Leftarrow د = ٢$

$\therefore ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٧ن + ٢$

٢٦. قذفت كرة من قمة برج ارتفاعه ٤٥ متر عن سطح الأرض لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠ م/ث . وتسارع مقداره -١٠ م/ث^{٢} جد ما يلي :-

١. أقصى ارتفاع يصله الجسم عن الأرض.

٢. الزمن الذي استغرقته الكرة للعودة إلى سطح الأرض.

٣. سرعة الكرة لحظة وصولها سطح الأرض.

الحل: $ت(ن) = -١٠$ ، $ع(٠) = ٤٠$ ،

$\frac{دع}{دن} = -١٠ \leftarrow$ $ع(ن) = \int -١٠ \, دن$

$ع(ن) = -١٠ن + ﺟ$ حيث ﺟ

$ع(٠) = ٠ + ﺟ = ٤٠ \leftarrow$ ﺟ $= ٤٠$

$\therefore$ $\boxed{ع(ن) = -١٠ن + ٤٠}$

عندما يقف الصاروخ $ع = ٠ \leftarrow ٠ = -١٠ن + ٤٠$

$\leftarrow$ $\boxed{ن = ٤}$ $\Rightarrow$ نجد ف لتقويم ن = ٤

لإيجاد أقصى ارتفاع

$\frac{دف}{دن} = -١٠ن + ٤٠$

$\int دف = \int -١٠ن + ٤٠ \, دن$

$ف(ن) = -٥ن^٢ + ٤٠ن + ﺟ$ نجد ﺟ

عند بداية الحركة ن = ٠ عندما ف = ٤٥

$٤٥ = ٠ + ٠ + ﺟ \leftarrow$ ﺟ $= ٤٥$

$\therefore ف(ن) = -٥ن^٢ + ٤٠ن + ٤٥$

$\therefore$ ① أقصى ارتفاع ف(٤) $= ٢٥$ م

② الزمن اللازم للوصول للأرض

ف عندما ع = صفر

$-٥ن^٢ + ٤٠ن + ٤٥ = ٠$

$ن^٢ - ٨ن - ٩ = ٠$

$(ن + ١)(ن - ٩) = ٠$

$ن = ٩$ $\quad$ $ن = -١$ مرفوض

② $ع(٩) = -١٠ \times ٩ + ٤٠ = -٥٠$ م/ث

٢٧. حركة كرة على خط مستقيم بتسارع مقداره $(\frac{٣}{٥ن^٢} + ن)$ م/ث^٢ ، إذا علمت أن سرعتها ٥٠ م/ث عندما ن = ٩ ث أثرت قطعت مسافة ٢٢ متر بعد ٤ ثوان من بدء الحركة ، جد المسافة المقطوعة بعد ٩ ثوان.

الحل: $ت(ن) = \frac{٣}{٥ن^٢} + ن$

$\frac{دع}{دن} = ٣ن^{-٢} + ن$

$\int دع = \int ٣ن^{-٢} + ن \, دن$

$ع = ٣ \times \frac{ن^{-١}}{-١} + \frac{ن^٢}{٢} + ﺟ$ نجد ﺟ

$ع = -\frac{٣}{ن} + \frac{ن^٢}{٢} + ﺟ$ نجد ﺟ

معلوم ع = ٥٠ عند ن = ٩

$٥٠ = -\frac{٣}{٩} + \frac{٨١}{٢} + ﺟ \leftarrow$ ﺟ $= \frac{٥٠}{٢}$

$\therefore ع = -\frac{٣}{ن} + \frac{ن^٢}{٢} + \frac{٥٠}{٢}$

$\frac{دف}{دن} = -\frac{٣}{ن} + \frac{ن^٢}{٢} + \frac{٥٠}{٢}$

$\int دف = \int -\frac{٣}{ن} + \frac{ن^٢}{٢} + \frac{٥٠}{٢} \, دن$

$ف(ن) = -٣ \ln ن + \frac{ن^٣}{٦} + \frac{٥٠}{٢}ن + ﺟ$

نجد ﺟ من معلوم ف = ٢٢ عند ن = ٤

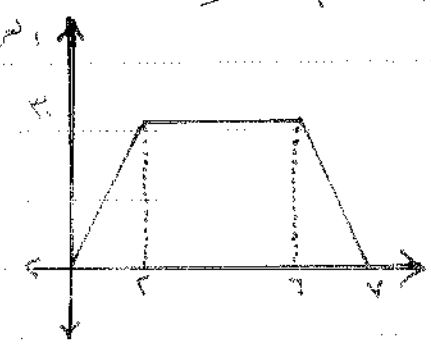
$٢٢ = -٣ \ln ٤ + \frac{٦٤}{٦} + ٢٥ + ﺟ \leftarrow$ ﺟ $= -٣ \ln ٤ - ٣٥$

$\therefore ف(ن) = -٣ \ln ن + \frac{ن^٣}{٦} + \frac{٥٠}{٢}ن - ٣ \ln ٤ - ٣٥$

المطلوب

$ف(٩) = ١٧١$ م

٢٨. عجلة يتحرك بعلاقة بين سرعة ز ومن لحظة ن على خط مستقيم ، جد المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية [٠ ، ٧]



الحل: ف(ن) = ∫ ع(ن) . دن

= مساحة المضلع تحت المنحنى

= ½ (مجموع القاعدتين المتوازيتين) × الارتفاع

= ½ (٧ + ٤) × ٣٠

ف = ١٦٥ متر

تحذير جداً جداً جداً :

عندما تقل علاقة بين المسافة والسرعة مثل ع = ف² أو ت = ع³

نقوم بحل السؤال كالمعادلة تفاضلية بحيث الرمز للأعلى يتحول إلى مشتقة

ت = دع/دن ، ع = دف/دن

٢٩. يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ت = √ع ، ع > ٠ ،

ت : تسارع الجسم ، ع : سرعة الجسم

فإذا كانت سرعة الجسم عند بدء الحركة ٩ م/ث ، جد المسافة المقطوعة بعد ٣ ثوانٍ من بدء الحركة علماً بأن الجسم وقف بعد ٣/٦٤ متر في اول ثانية من الحركة .

الحل: ت = √ع

دع/دن = ع^½ ← ∫ ع^-½ . دع = ∫ دن

٢√ع = ن + ج

√ع = ½ن + ج نجد ج

معلومة ع = ٩ عند ن = ٠

٦ = ٠ + ج ← ج = ٦

∴ √ع = ½ن + ٦

√ع = ن + ١٢

ع = (ن + ٣)²

ف = ∫ ع . دن = ∫ (ن + ٣)² دن

ف = (ن + ٣)³/٣ + ج نجد ج

معلومة ف = ٦٤/٣ عند ن = ١

٦٤/٣ = ٦٤/٣ + ج ← ج = ٠

∴ ف(ن) = (ن + ٣)³/٣

المطلوب ف(٣) = (٣+٣)³/٣ = ٢١٦/٣ = ٧٢ م

٣٠. يتحرك جسم حسب العلاقة ع = √ف

وكانت المسافة بعد مرور ثانيتين هي ٩ م ،

جد المسافة بعد مرور ٤ ثوانٍ .

الحل: ع = √ف

دف/دن = √ف ← دف/√ف = دن

∫ ف^-½ . دف = ∫ دن

٢√ف = ن + ج

معلومة ف = ٩ عند ن = ٢

٦ = ٢ + ج ← ج = ٤

∴ ٢√ف = ن + ٤

نعوض ن = ٤

٢√ف = ٨

√ف = ٤

ف = ١٦ متر

٣١. يسير جسيم على أحد محاور المستقيم حسب العلاقة
$ت = \frac{1}{ع}$ ، $ع > ٠$ ، حيث ت : تسارع ،
ع : سرعة . إذا تحرك الجسيم من السكون فقطع
مسافة مقدارها $\frac{٢}{٣}\sqrt{١٠}$ م بعد ٤ ثوانٍ من حركته
جد المسافة التي قطعها بعد ثانية واحدة
من الحركة .

الحل: $ت = \frac{1}{ع} \leftarrow \frac{دع}{دن} = \frac{1}{ع}$

$\leftarrow ع \, دع = ١ \, دن$

$\leftarrow \frac{ع^٢}{٢} = ن + ج$ بفرض $ن = ٠ \Rightarrow ع = ٠$ معلومة

$\leftarrow ج = ٠$

$\therefore \frac{ع^٢}{٢} = ن \leftarrow ع^٢ = ٢ن \leftarrow ع = \sqrt{٢ن}$

لكن $ع > ٠ \Leftarrow ع = \sqrt{٢ن}$

$\frac{دف}{دن} = \sqrt{٢ن} \Leftarrow دف = \sqrt{٢ن} \, دن$

$\therefore ف(ن) = \frac{٢}{٣}ن^{\frac{٣}{٢}} + ﻫ$

$\leftarrow ف(٢) = \frac{٢}{٣}(٢)^{\frac{٣}{٢}} + ﻫ$

بفرض $ن = ٤$ ، $ف = \frac{٣}{٢}\sqrt{١٠}$ معلومة

$\frac{٣}{٢}\sqrt{١٠} = \frac{١٦}{٣}\sqrt{٢} + ﻫ \leftarrow$ $\boxed{ﻫ = \frac{١٤}{٣}\sqrt{٢}}$

$\therefore ف(ن) = \frac{٢}{٣}ن^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١٤}{٣}\sqrt{٢}$

المطلوب $ف(١) = \frac{١٦}{٣}\sqrt{٢}$

٣٢. يسير جسيم على أحد محاور المستقيم حسب
العلاقة $ت = ع + ١$ ، $ع > ٠$ ، حيث ت : تسارع
ع : سرعة ، إذا تحرك الجسيم من السكون فقطع
٦ م بعد ٣ ثوانٍ من حركته . جد المسافة
المقطوعة بعد ٩ ثوانٍ من الحركة

الحل: $ت = ع + ١$

$\frac{دع}{دن} = ع + ١$

$\leftarrow \int \frac{١}{ع + ١} \, دع = \int ١ \, دن$

$\boxed{لو_ه(ع + ١) = ن + ﻫ}$ لأن $ع > ٠$

$ع(٠) = ٠$ (السكون)

$\therefore لو_ه ١ = ٠ + ﻫ \leftarrow ﻫ = ٠$

$\Leftarrow ن = لو_ه(ع + ١)$

$\leftarrow ﻫ^ن = ع + ١$

$ع = ﻫ^ن - ١$

$\frac{دف}{دن} = ﻫ^ن - ١$

$\int دف = \int ﻫ^ن - ١ \, دن$

$\boxed{ف(ن) = ﻫ^ن - ن + ﻫ}$ بفرض

معلومة $ف(٣) = ٦$

$٦ = ﻫ^٣ - ٣ + ﻫ$

$ﻫ = ٩ - ﻫ^٣$

$\leftarrow ف(ن) = ﻫ^ن - ن + ٩ - ﻫ^٣$

المطلوب

$ف(٩) = ﻫ^٩ - ٩ + ٩ - ﻫ^٣$

$= (ﻫ^٩ - ﻫ^٣)$ مترًا .

٣٣. قذف جسم رأسيًا لأعلى من مستوى
بناية تبلغ ٣٠ م عن سطح الأرض فكانت
سرعته بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة
$ع = ٤٠ - ١٠ن$ ، جد ارتفاع هذا الجسم
عن سطح الأرض بعد ثانية واحدة من بدء
الحركة .

الجواب ٣٥ م

٣٤. ابتدأ جسم بالحركة من نقطة بداية على محور بحيث ن بالثواني حيث ع = ٤ ع$^{\frac{3}{2}}$ ، ع ≥ ٠ حيث ع : السرعة بالمتر/ث ، ع : سرعة الجسم بعد ن ثانية من بدء الحركة ، ع : المسافة بالأمتار

سرعته عند بدء الحركة ٤ سم/ث .

المسافة التي قطعها عندما ع = ٣٢ سم/ث .

الحل : $\frac{دع}{دن} = -٤ ع^{\frac{3}{2}}$

$\frac{دع}{ع^{\frac{3}{2}}} = -٤ دن$

$\int \frac{دع}{ع^{\frac{3}{2}}} = \int -٤ دن$

$-٢ ع^{-\frac{1}{2}} = -٤ن + ج$ نجد ج بمعلومية ع = ٤ عندما ن = ٠

$-\frac{٢}{\sqrt{٤}} = -٤ \times ٠ + ج$

$ج = -١$

$-\frac{٢}{\sqrt{ع}} = -٤ن - ١$ نجد ع بموضوع القانون

$\frac{\sqrt{ع}}{-٢} = \frac{١}{-٤ن - ١} \times -٢$

$\sqrt{ع} = \frac{٢}{٤ن + ١}$ بتربيع

$ع = \frac{٤}{(٤ن + ١)^{٢}}$ نستخدم ع = $\frac{دف}{دن}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٤}{(٤ن + ١)^{٢}}$

$\int دف = \int \frac{٤}{(٤ن + ١)^{٢}} دن = \int ٤ (٤ن + ١)^{-٢} دن$

$ف(ن) = \frac{٤ (٤ن + ١)^{-١}}{٤ \times -١} + ج$

$ف(ن) = \frac{-١}{٤ن + ١} + ج$ بمعلومية ف = ٠ عندما ن = ٠ نجد ج

$٠ = -١ + ج \leftarrow$ **ج = ١**

$ف(ن) = \frac{-١}{٤ن + ١} + ١$ نوحد المقامات

$ف(ن) = \frac{٤ن}{٤ن + ١} = ٤ن \times \frac{١}{٤ن + ١}$

لكن $(٤ن + ١) = \frac{٢}{\sqrt{ع}}$

$\sqrt{ع} = \frac{٢}{٤ن + ١} \leftarrow \frac{١}{٢} \sqrt{ع} = \frac{١}{٤ن + ١}$

$\therefore ف(ن) = ٤ن \times \frac{١}{٢} \sqrt{ع} = ٢ن \sqrt{ع}$.

٣٥. تحرك جسم حسب العلاقة ن = $\frac{١}{٢} ع^{٣}$ ، ع ≥ ٠ ، وصل لسكون . جد قيمة م التي تجعل سرعته (٨ سم/ث) بعد ٣ ثوانٍ .

الحل : ن = $\frac{١}{٢} ع^{٣}$

$\frac{دع}{دن} = ٣ \times \frac{١}{٢} ع^{٢} \leftarrow \frac{دع}{دن} = \frac{٣}{٢} ع^{٢}$

$\int \frac{دع}{ع^{٢}} = \int \frac{٣}{٢} دن$ معلومية ع = ٨ عندما ن = ٣

$-\frac{١}{ع} = \frac{٣}{٢} ن + ج$ نجد ج بمعلومية (ع = ٠ ، ن = ٠)

$ج = ٠ \leftarrow ٠ = \frac{٣}{٢} \times ٠ + ج$

$-\frac{١}{ع} = \frac{٣}{٢} ن \leftarrow -\frac{١}{ع} = \frac{٣}{٢} \times ٣$

$ع^{٢} = \frac{٤}{٩}$ م

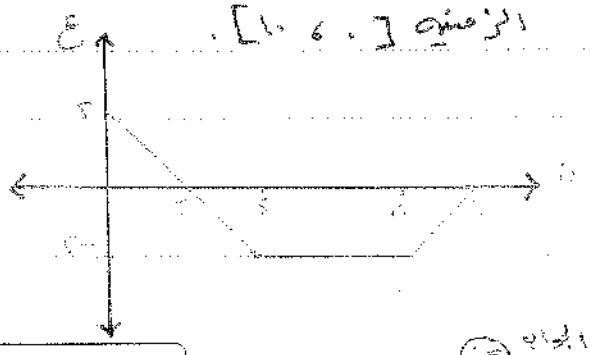
لكن $\sqrt[٣]{٨} \times ٣ = ٣ \times م$

$٢٤ = ٦ م$

م = ٤

٣٦. الشكل المجاور يمثل العلاقة بين السرعة المتجهة ع ، لزمن ن لجسم يتحرك على خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) . جد :

* المسافة التي قطعها الجسم خلال الفترة الزمنية [٠ ، ٦ ، ١٠] .



٣٧. تحرك جسيم على خط مستقيم من نقطة (أ)
بسرعة مقدارها ع = [٤ن ، ٠ ≤ ن < ١ ، ٣ن² + ٣ن ، ١ ≤ ن ≤ ٦]
جد إزاحة الجسم على [٠ ، ٥].

الحل:

الإزاحة = $\int_0^5 ع(ن)\,دن = \int_0^1 ٤ن\,دن + \int_1^5 (٣ن^2 + ٣ن)\,دن$

$= [٢ن^2]_0^1 + [ن^3 + ن^2]_1^5$

$= (٢) - (٠) + (١٥٠) - (٢)$

$= ٢ + ١٤٨$

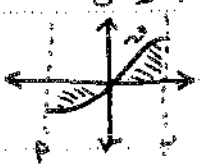
$= ١٥٠$

" المساحة "

حالات إيجاد المساحة المحصورة بدون رسم :-

(١) إيجاد المساحة بين منحنى $f(x)$ ومحور السينات في الفترة $[a,b]$

$$م = \int_{a}^{b} |f(x)| \, dx$$



س١: جد المساحة المحصورة بين منحنى $f(x) = 4 - x^2$ ومحور السينات على $[0, 3]$.

اقتران السينات $f(x) = 4 - x^2$

نجد التقاطع $4 - x^2 = 0$

$x = \pm 2$

الحل:

$$م = \int_{0}^{3} |4 - x^2| \, dx$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} + \left|\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{2}^{3}\right|$$

$$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - (0) + \left|(9 - 9) - \left(8 - \frac{8}{3}\right)\right| = \frac{16}{3}$$

$$م_2 = \int_{2}^{3} |x^2 - 4| \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{2}^{3}$$

$$= (9 - 12) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{7}{3}$$

$$\therefore م = م_1 + م_2$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}$$

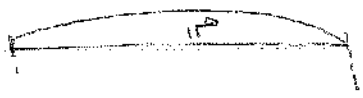
س٢: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = 2 - x^2$ ، $g(x) = -x$ ومستقيمين $x = 0$ ، $x = 1$

الحل: عند وجود اقترانين لا نحتاج رسم نجد التقاطع بمساواة المعادلتين

$2 - x^2 = -x \Leftarrow x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2$ $x = -1$

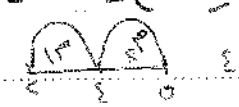


$$م = \int_{0}^{1} |2 - x^2 - (-x)| \, dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{13}{6}$$

س٣: جد المساحة المحصورة بين $f(x) = x^2 - 8$ ومحور السينات على $[0, 5]$

الحل: $x^2 - 8 = 0 \Leftarrow x = 4$



$$م = م_1 + م_2$$

$$= \int_{0}^{4} |x^2 - 8| \, dx + \int_{4}^{5} |x^2 - 8| \, dx$$

$$= 4 + 1 = 5$$

لاحظ نجد المساحة للأولى و إذا كانت سالبة نأخذ معكوسها المطلق دائما. وبنفس الطريقة المساحة بقانون عدم تجمع المساحات.

س٤: جد المساحة المحصورة بين منحنى $f(x) = \tan x$ ومحور السينات على $[0, 2\pi]$

الحل: نجد نقط التقاطع $\tan x = 0$

$x = 0 \, ، \, \frac{\pi}{2} \, ، \, \pi \, ، \, \frac{3\pi}{2} \, ، \, 2\pi$

$$م = \int_{0}^{\pi/2} |\tan x| \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |\tan x| \, dx + \int_{\pi}^{3\pi/2} |\tan x| \, dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} |\tan x| \, dx$$

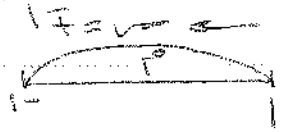
$= \boxed{4}$ وحدة مساحة.

لاحظ كل مساحة موجبة

س٥ : جد مساحة المحصورة بين منحنى
ص = ٣س^{٢} - ٣ ومحور السينات على [-١، ١]

الحل : نجد التقاطع ٣س^{٢} - ٣ = ٠

س = ±١



م = $\int_{-١}^{١}$ |٣س^{٢} - ٣| د س = |-٤| = ٤ وحدة مربعة

س٦ : جد مساحة المحصورة بين منحنى
ص = ٣س^{٢} - ٣ ومحور السينات
والمستقيمين ص = ٠ ، س = ٢

الحل : نجد التقاطع ٣س^{٢} - ٣ = ٠

س = ±١

م = $\int_{-١}^{١}$ |٣س^{٢} - ٣| د س + $\int_{١}^{٢}$ |٣س^{٢} - ٣| د س

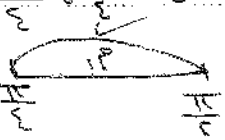
= ٢ + |-٤| + ٤ = ٢٨

س٧ : أحسب مساحة المحصورة بين
ص = جتا٢س ومحور السينات على $[\frac{\pi}{٤}, \frac{\pi}{٢}]$

الحل : نجد تقاطع جتا٢س = ٠

٢س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$

س = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$



م = $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}}$ |جتا٢س| د س

= $\left[\frac{\text{جا}٢س}{٢}\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}}$

= (-$\frac{١}{٢}$) - ($\frac{١}{٢}$) = |-١| = ١

= $\frac{١}{٢}$

س٨ : جد مساحة المحصورة بين منحنى
ص = جا٢س + جتا٢س ومحور السينات
والعمودان مع المستقيم س = $\frac{\pi}{٤}$.

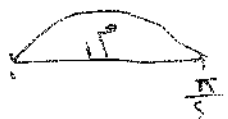
الحل : محور العمودان معادلتها س = ٠

نجد التقاطع

جا٢س + جتا٢س = ٠ ← جا٢س = -جتا٢س

ظا٢س = -١ ← ٢س = ١٣٥ ، ٣١٥

س = ١٢٥ ، ٣١٥ / ٤ / ٤

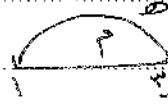


م = $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$ |جا٢س + جتا٢س| د س

= $\left[\frac{-\text{جتا}٢س}{٢} + \frac{\text{جا}٢س}{٢}\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$ ... (١)

س٩ : جد مساحة المحصورة بين
ص = لوس ومحور السينات على
[١، هـ^{٣}] .

الحل : نجد التقاطع لوس = ٠ ← س = ١



م = $\int_{١}^{هـ^{٣}}$ لوس د س

= ٣ جزاء ..... الجواب (٣هـ^{٣} + ١)

س١٠ : جد مساحة المنطقة المحصورة
بين منحنى ص = س هـ^{س}
ومحور السينات والمستقيم س = ٠ ،
س = ١

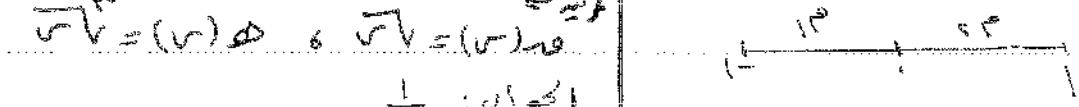
س١١ : أحسب مساحة المحصورة
بين منحنى ص = جاس - $\frac{١}{٢}$ ومحور السينات على $[-\frac{\pi}{٢}, \frac{\pi}{٢}]$ ، الجواب $\{\frac{\pi}{٢} + ٢\}$

(٤) إيجاد المساحة بين $f(x)$ و محور السينات بدون فترة.

س١: جد المساحة المحصورة بين $f(x) = 4x^3 - 4x$ ومحور السينات.

الحل: نجد التقاطع $4x^3 - 4x = 0$

$x = 0$ ، $x = \pm 1$



$$م_1 = \int_{-1}^{0} (4x^3 - 4x)\,dx = \left[x^4 - 2x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$= (0) - (-1) = 1$$

$$م_2 = \int_{0}^{1} (4x^3 - 4x)\,dx = \left[x^4 - 2x^2\right]_{0}^{1} = 1 - 1 = 0$$

$$\therefore م = م_1 + م_2 = 1 + 1 = 2$$

فكرة جملوة

س٢: جد مساحة المنطقة المحصورة بين $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ ومحوري السينات والصادات.

الحل: نجد التقاطع $2 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2$

$\Rightarrow x = 4$

نلاحظ محور الصادات $x = 0$

$$\therefore م = \int_{0}^{4} (2 - \sqrt{x})\,dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{4}$$

$$= \left[2x - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_{0}^{4}$$

$$= (8 - \frac{16}{3}) - (0) = \frac{8}{3}$$

س٣: احسب المساحة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ ، $g(x) = 3 - x$

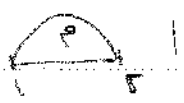
الحل: نجد التقاطع $\frac{2}{\sqrt{x}} = 3 - x$

$2 = 3\sqrt{x} - x\sqrt{x}$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x - 2)(x - 1) = 0$

$x = 2 \quad x = 1$



$$م = \int_{1}^{2} (3 - x) - \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int_{1}^{2} 3 - x - 2x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

س٤: جد المساحة المحصورة بين $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = \sqrt[3]{x}$

الجواب: $\frac{1}{12}$

س٥: جد المساحة المحصورة بين $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = \frac{1}{3}x^3$

الجواب: $\frac{1}{6}$

ملاحظة خطيرة: بعض المسألة تفضل الحل بدلالة ص و ص كما قدامه

س٦: جد المساحة المحصورة بين منحنى العلاقة $ص^2 = س$ ، $ص = س - 2$

الحل: $س_1 = ص^2$ ، $س = ص + 2$

نجد التقاطع $ص^2 = ص + 2$

$ص^2 - ص - 2 = 0 \Rightarrow ص = 2 ، -1$

$$\therefore م = \int_{-1}^{2} ص + 2 - ص^2\,dص$$

$$= \left[\frac{ص^2}{2} + 2ص - \frac{ص^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= (2 + 4 - \frac{8}{3}) - (\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}) = (\quad)$$

س٧: احسب المساحة المحصورة بين ص٢ = س + ٤ والمستقيم س - ٤ = -٢ ص

الحل: س١ = ص٢ - ٤ ، س٢ = ٤ - ٢ ص

التقاطع: ص٢ - ٤ = ٤ - ٢ ص

ص٢ + ٢ ص - ٨ = ٠

(ص + ٤)(ص - ٢) = ٠

ص = -٤ ، ص = ٢

∴ م = ∫ من -٤ إلى ٢ (٤ - ٢ ص - (ص٢ - ٤)) د ص

= ∫ من -٤ إلى ٢ (ص٢ + ٢ ص - ٨) د ص

= [ص٣/٣ + ص٢ - ٨ ص] من -٤ إلى ٢ = ٣٦

س٨: احسب المساحة المحصورة بين س = ص + ٣ ، س = ص٢/٤

الحل: س١ = ص + ٣ ، س٢ = ص٢/٤

التقاطع: ص + ٣ = ص٢/٤

ص٢ = ٤ ص + ١٢

ص٢ - ٤ ص - ١٢ = ٠

(ص - ٦)(ص + ٢) = ٠

ص = ٦ ، ص = -٢

∴ م = ∫ من -٢ إلى ٦ (ص + ٣ - ص٢/٤) د ص .....

سجان الله وبحمده

سجان الله العظيم

س٩: احسب المساحة المحصورة بين ق(س) = س٢ ، ك(س) = ٥ + ٤ س

مع المستقيم س = ٧

الحل: تقاطع س٢ = ٤ س + ٥

س٢ - ٤ س - ٥ = ٠

(س - ٥)(س + ١) = ٠

س = ٥ ، س = -١ لا يحقق الشكل

∴ م = ∫ من ٠ إلى ٥ (٤ س + ٥ - س٢) د س ....

بالرسم ستكون واضحة أكثر.

س١٠: احسب المساحة المحصورة بين العلاقة √س + √ص = ١ ومحوري الإحداثيات

الحل: √ص = ١ - √س ⇒ ص = (١ - √س)٢

لاحظ أنه محور الصادات ص = ٠

ومحور السينات محور س = ٠

التقاطع ص = ص

(١ - √س)٢ = ٠ ⇒ ∴ س = ١

∴ م = ∫ من ٠ إلى ١ (١ - √س)٢ د س = ... (١/٦)

تمرين:

١. جد المساحة بين ق(س) = ١ + جتا س ، ك(س) = ١ مع [٠ ، ٢π]

(٢)

٢. جد المساحة بين ق(س) = جا س ، ك(س) = جا ٢ س وبواقعة بالربع الأول من [٠ ، π/٢]

الجواب: م = ∫ من ٠ إلى π/٣ (جا ٢ س - جا س) د س + ∫ من π/٣ إلى π/٢ (جا س - جا ٢ س) د س

..... (١/٢)

س١١: احسب المساحة المحصورة بين
$ق(س) = \sqrt{س}$ ، $هـ(س) = س - ٢$
ومحور الصادات .

الحل: نجد أولاً محور الصادات $س = ٠$ ، عمود
التقاطع $\sqrt{س} = س - ٢$ ... $س = ٤ ، س = ١$
لاحظ $س = ٤$ تحقق ، $س = ١$ لا تحقق
$\therefore م = \int_{٠}^{٤} |\sqrt{س} - س + ٢| \, د س$
.....

فكرة جميلة: عند وجود اقترانين
مختلفين بالنوع ← نتابع للرسم

س١٢: جد المساحة المحصورة بين
$ق(س) = جتا س$ ، $م$ لمعقلة المستقيم
الواصلة بين النقطتين
$(٠ ، \frac{\pi}{٢})(١ ، ٠)$

الحل: لاحظ المستقيم يجب أن نجد معادلته أولاً

$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٠ - ١}{\frac{\pi}{٢} - ٠} = \frac{٢}{\pi}$

المعادلة $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ١ = \frac{٢}{\pi}(س - ٠)$

$\leftarrow ص = \frac{٢}{\pi} س + ١$

التقاطع $جتا س = \frac{٢}{\pi} س + ١$

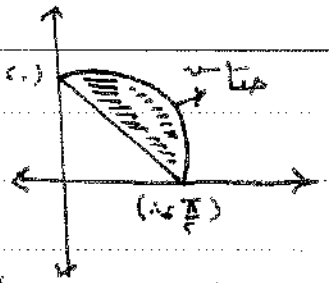
بصعب جداً حل هذه المعادلة

لاحظ $هـ(٠) = ١$ ، $هـ(\frac{\pi}{٢}) = ٠$

هي نقطة تقاطع

$\therefore م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} |جتا س + \frac{٢}{\pi} س - ١| \, د س$

..... كمل حل



للتوضيح:

س١٣: احسب المساحة المحصورة
بين $هـ(س) = ظا س$ ، $ق(س) = ١$ ، لمعقلة
المستقيمة الواصلة بين النقطتين
$(٠ ، ٠)(\frac{١}{٢} ، \frac{\pi ٥}{٦})$

الحل: نجد معادلة المستقيم

$م = \frac{\frac{١}{٢} - ٠}{\frac{\pi ٥}{٦} - ٠} = \frac{٣}{\pi ٥}$

المعادلة $ص - ٠ = \frac{٣}{\pi ٥}(س - ٠)$

$\therefore ص = \frac{٣}{\pi ٥} س$

التقاطع: حسب جد ١ = أيجاد ه
ولاحظ أن $هـ(٠) = ٠$ هي تقاطع
$هـ(\frac{\pi ٥}{٦}) = \frac{١}{٢}$ نقطة

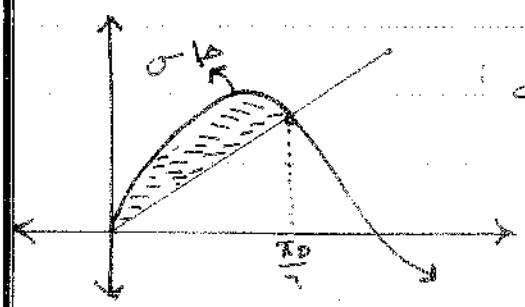
$\therefore م = \int_{٠}^{\frac{\pi ٥}{٦}} |ظا س - (\frac{٣}{\pi ٥} س)| \, د س$

$= -[\ln|جتا س| - \frac{٣}{\pi ٥} \times \frac{س^٢}{٢}]_{٠}^{\frac{\pi ٥}{٦}}$

.....

الجواب: $\ln\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{\pi ٥}{٢٤}$ وحدة مساحة

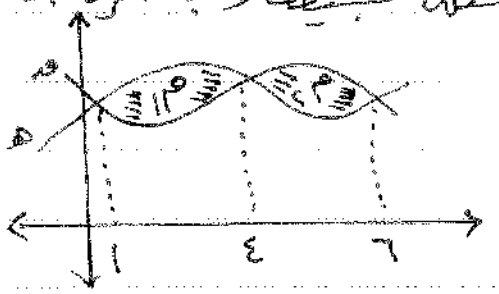
للتوضيح:



مذكرة (المساحة)

أسئلة بسيطة وهي شهيرة :-

س١ :



إذا كانت م١ = ١٥ وحدة مساحة

م٢ = ٨ وحدة مساحة ، فـ

① $\int_{1}^{6} |ص(س) - هـ(س)| \, د س$

$= م_1 + |م_2| = ١٥ + ٨ = ٢٣$

② $\int_{1}^{6} ص(س) - هـ(س) \, د س$

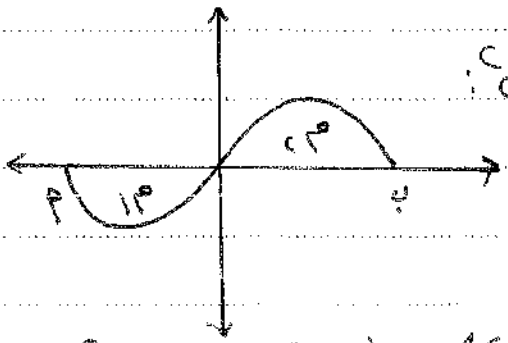
$= \int_{1}^{4} ص(س) - هـ(س) \, د س + \int_{4}^{6} ص(س) - هـ(س) \, د س$

$= ١٥ - ٨ = ٧$

③ $\left| \int_{1}^{6} ص(س) - هـ(س) \, د س \right|$

$= |١٥ - ٨| = |٧| = ٧$

س٢ :



إذا كانت م١ = ٨ ، م٢ = ٥

وهما مربعة . فـ ما يلي :-

١. $\int_{أ}^{ب} ص(س) \, د س = -٨ + ٥ = -٣$

٢. $\int_{أ}^{ب} |ص(س)| \, د س$ = المساحة

$= ٨ + ٥ = ١٣$

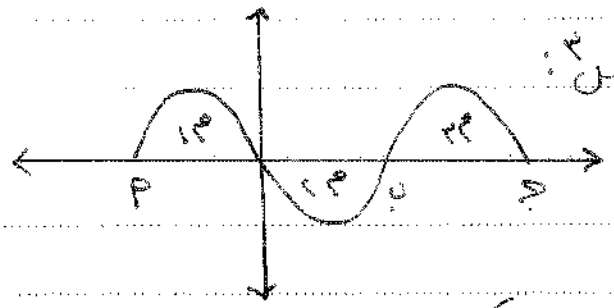
٣. $\left| \int_{أ}^{ب} ص(س) \, د س \right|$

$= |-٨ + ١٥| = |-٣| = ٣$

٤. المساحة المحصورة بين منحنى ص(س) ومحور السينات على $[أ ، ب]$

$م = م_1 + |م_2| = ٨ + ٥ = ١٣$

س٣ :



الشكل المجاور يمثل منحنى ص(س) وقيم المساحات م١ = ٨ ، م٢ = ٣

م٣ = ٩ وحدة مربعة . فـ

① $\int_{أ}^{جـ} ص(س) \, د س = ٨ - ٢ + ٩ = ١٤$

② $\int_{أ}^{جـ} |ص(س)| \, د س = م_1 + |م_2| + م_3$

$= ٨ + ٢ + ٩ = ٢٠$

③ $\left| \int_{أ}^{جـ} ص(س) \, د س \right|$

$= \left| \int_{أ}^{ب} ص(س) \, د س + \int_{ب}^{جـ} ص(س) \, د س \right|$

$= |-٣ + ٩| = ٦$

لاتنسى : $م = \int_{أ}^{ب}$ ص(س) − هـ(س) د س

ص فوق هـ تحت

ب يمين ، أ يسار

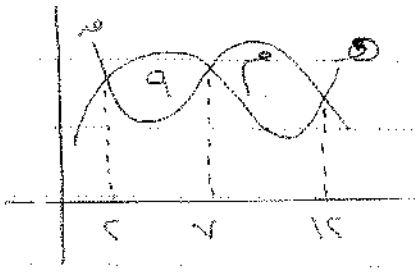
لاتنسى : بالرسم : المساحة بين ص وهـ محورة لسنة

ص فوق السينات (التكامل موجب)

هـ تحت السينات (التكامل سالب)

المساحة فوق تحت موجبة

س٤:



اذا كانت المساحة المحصورة بين
هـ(س)، هـ(س) تساوي ١٤ عل
[٢، ١٢] ، جد $\int_{٢}^{١٢}$ هـ − هـ .دس

الحل: $١٤ = \int_{٢}^{٧}$ هـ − هـ .دس + $\int_{٧}^{١٢}$ هـ − هـ .دس

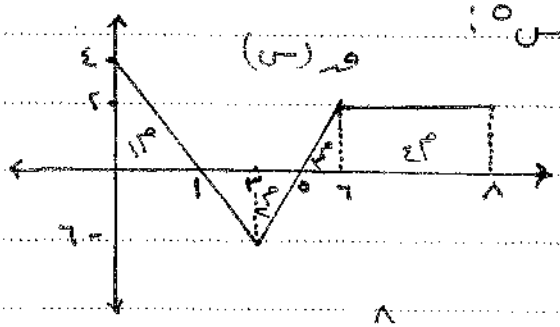
$١٤ = ٩ + \int_{٧}^{١٢}$ هـ − هـ .دس

$٥ = \int_{٧}^{١٢}$ هـ − هـ .دس

$-٥ = \int_{١٢}^{٧}$ هـ − هـ .دس

هو الطول

س٥:



جد ١. $\int_{١}^{٨}$ هـ(س) .دس

٢. $\int_{١}^{٨}$ |هـ(س)| .دس

٣. $\left|\int_{١}^{٨}$ هـ(س) .دس$\right|$

الحل: نحسب المساحات

$م_١ = \frac{١}{٢} \times ١ \times ٤ = ٢$

$م_٢ = \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٦ = ١٢$

$م_٣ = \frac{١}{٢} \times ١ \times ٢ = ١$ ، $م_٤ = ٢ \times ٢ = ٤$

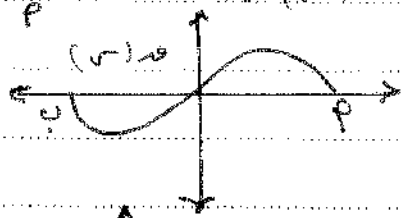
الطول:

١. $(٤) + (١) + (-١٢) + (٢) = -٥$

٢. $|٤ + ١ + ١٢ - ٢| = |-٥| = ١٩$

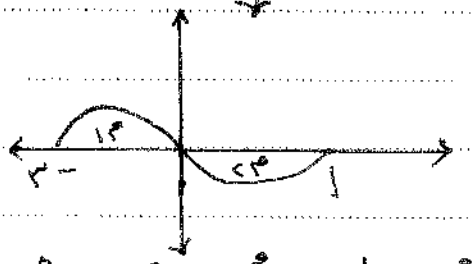
٣. $٤ + ١ + ١٢ + ٢ = ١٩$

س٦: من الشكل اذا كانت المساحة المحصورة
بين هـ(س) ومحور السينات تساوي (١٤) وحدة
مربعة $\int_{ب}^{م}$ هـ(س) .دس = ٦ ، جد $\int_{م}^{ب}$ هـ(س) .دس



الجواب (-٨)

س٧:



كانت م١ = ١٠ ، م٢ = ٢ ، جد
$\int_{-٣}^{١}$ س هـ(١ − س٢) .دس

الحل: نفرض هـ = ١ − س٢ ، دس = $\frac{دهـ}{-٢س}$

س = -٣ ← هـ = -٨
س = ١ ← هـ = ٠

$\int_{١}^{-٣}$ س هـ(هـ) $\frac{دهـ}{-٢س}$ = $\frac{١}{-٢}\int_{١}^{-٨}$ هـ(هـ) .دهـ

$= -\frac{١}{٢} \times \int_{-٨}^{٢}$ هـ(هـ) .دهـ

$= -\frac{١}{٢}(-٤ + ١٠)$

$= -\frac{١}{٢} \times ٦ = -٣$

المساحة المحصورة بين أكثر من اقترانين :

الحل : ١. نرسم إجباري .
٢. نظلل المنطقة حسب السؤال
٣. نجد نقط التقاطع (نساوي الاقترانات ببعضها)
٤. نقسم الأعمدة عند نقط التقاطع
٥. كل منطقة كونك اقترانين فوهم وحت .
٦. نطبق قانون المساحة .

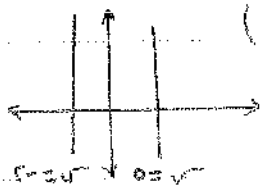
ملاحظة مهمة :
محور الصادات معادلته س = ٠
محور السينات معادلته ص = ٠

قبل تطبيق تكامل الفرق يجب أن نحدد الأعمدة والاقترانات

مراجعة بسيطة للرسم :-

١. ص = ٢ (خط أفقي)

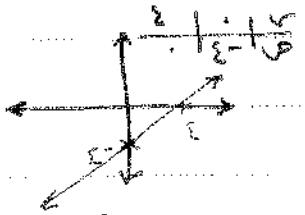
٢. س = ٢ (عمود)



لاتنسى : محور السينات ص = ٠
محور الصادات س = ٠

٣. ص = أ س + ب اقترانه خطي

١. نرسم ص = س = ٤

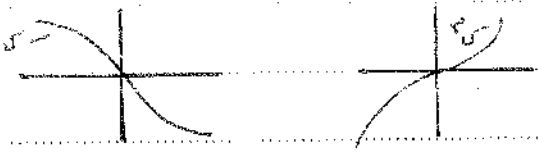


٢. ص(س) = أ س٢ + ب س + جـ تربيعي

نجد رأس القطع = $\frac{-ب}{٢أ}$ ← (س ، ص(س)) = ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، ص($\frac{-ب}{٢أ}$))

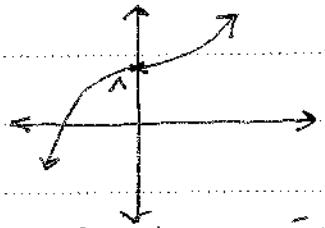
أ > ٠ ، مفتوح للأعلى . أ < ٠ ، مفتوح للأسفل .

٤. اجمع بحسة ص = س٣ ، ص = -س٣



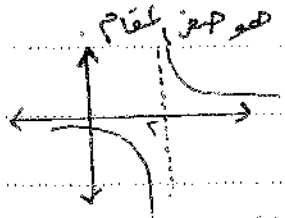
نرسم ص = -س٣ + ثابتة نفوض س = ٠

ونجد ص ؟ ← النقطة ارتكاز



س : ص = -س٣ + ٨

٥. لنسبي ص = $\frac{\text{ثابتة}}{\text{ط(س)}}$ نجد خط التقارب وهو خط المقام



س : ص = $\frac{١}{س-٢}$

خط المقام هو س = ٢

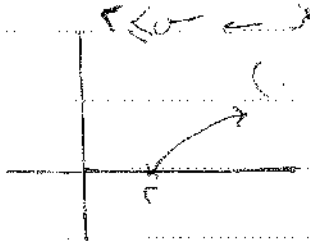
طبعاً ينطبق الرسم بالعشرة ٣ نقطع اليمين و٢ نقاط اليسار .

٦. الجذور الكروية :-
يجب تحديد المجال أولاً

س : $ص = \sqrt{س - ٣}$

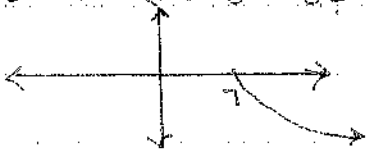
نجد المجال $س - ٣ \geq$ صفر $\Leftarrow س \geq ٣$

∴ نقطة البداية $(٣ ، ٠)$



س : $ص = \sqrt{٦ - س}$

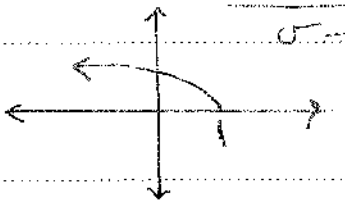
نجد المجال $٦ - س \geq ٠ \Leftarrow س \leq ٦$



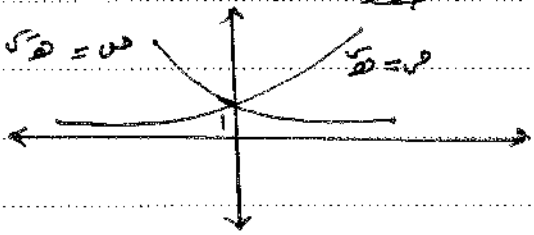
س : $ص = \sqrt{١ - س}$

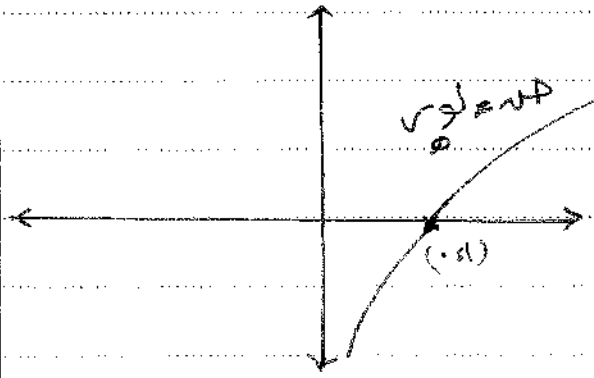
نجد المجال

$١ - س \geq ٠ \Leftarrow ١ \geq س$



٨) أ. أحفظ $ص = هـ^{س}$ ، $ص = هـ^{-س}$



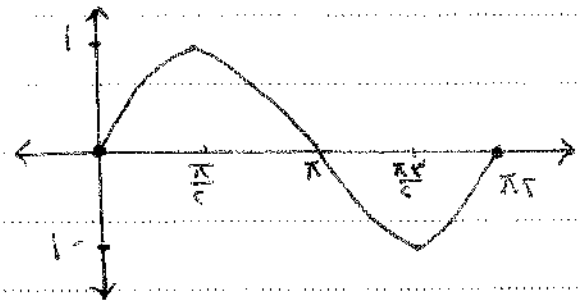


٩) أقترب جاس ، جتاس عدد $[٠ ، ٢\pi]$

الحل : نكمل جدول ونختار زوايا المحاور

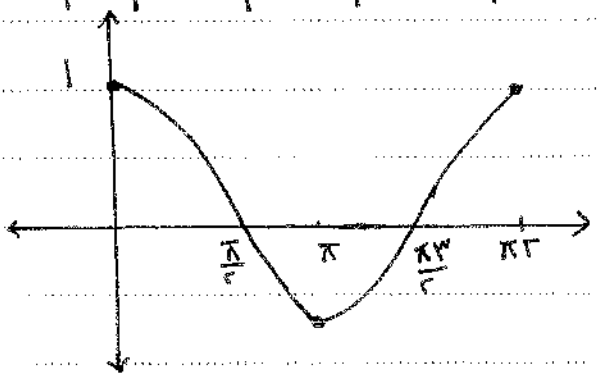
جاس

س	٠	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
ص	٠	١	٠	-١	٠



جتاس

س	٠	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
ص	١	٠	-١	٠	١



أسئلة شاملة للفكرة

[1] أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين
$هـ(س) = -س^3$ ، $ل(س) = 6 - س$
$هـ(س) = \frac{س}{س}$

الحل: نجد الأعمدة والمقترانات

أعمدة — مقترانات

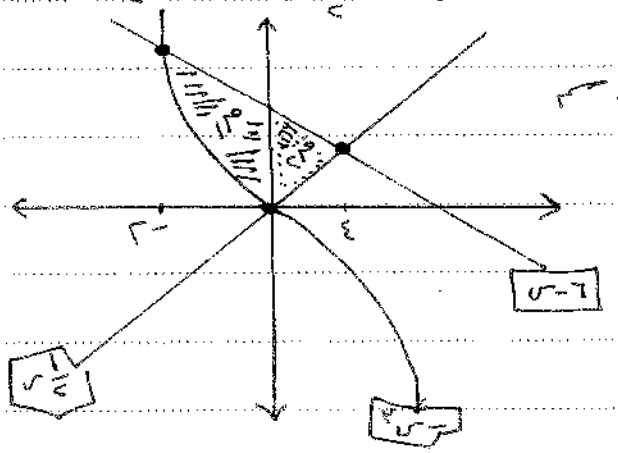
× $هـ = -س^3$ ، $هـ = \frac{س}{س}$ ، $ل = 6 - س$

التقاطعات:

$هـ = هـ$ ← $-س^3 = \frac{س}{س}$ ← $س = 0$

$هـ = ل$ ← $-س^3 = 6 - س$ ← $س = -2$

$هـ = ل$ ← $\frac{س}{س} = 6 - س$ ← $س = 4$



$م = \int_{-2}^{0} (6 - س - -س^3) \, د س$ ..... (١)

$م = \int_{0}^{4} (6 - س - \frac{1}{4}س) \, د س$ ..... (٢)

$\therefore م = م_1 + م_2$

$= 10 + 12 = 22$

[2] جد مساحة المنطقة المحصورة بين
$هـ(س) = س^2 - 4$ ، $م$ المستقيم المار بالنقطة $(-2, 0)$ والمماس لمنحنى $هـ$ عند نقطة التماس في الربع الأول.

الحل: لاحظ محور تماثل $ص$ هو $س = 0$

محور تماثل محور $س$ هو $ص = 0$

أعمدة — مقترانات

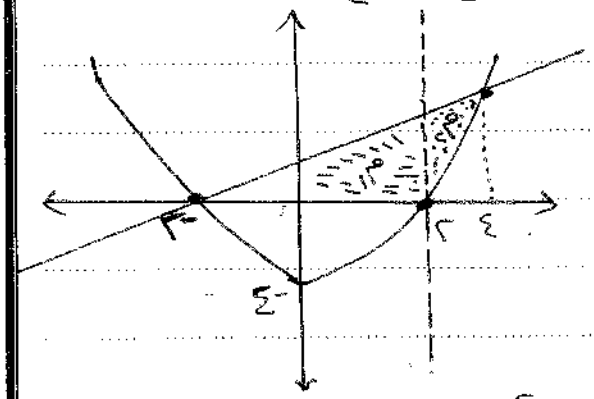
$س = 0$ ، $ط = 0$ ، $ط = 2ك + 4$ ، $ق = ك^2 - 4$

التقاطعات:

$0 = 2ك + 4$ ← $ك = -2$

$\therefore ق = -4 - 4$ ← $ق = -8$

$ك^2 + 4ك = ك^2 - 4$ ← $س = 4 ، -2$



$م_1 = \int_{-2}^{4} (2س + 4) \, د س$

$م_2 = \int_{4}^{c} (س^2 - 4) - (2س + 4) \, د س$

$م = م_1 + م_2$ .....

٣ احسب المساحة المحصورة بين

$ل(س) = ٣$ ، $هـ(س) = \frac{١}{س}$ ، $هـ(س) = س$

الحل: أعمدة أقترانات

$س = ٣$ ، $هـ = س$ ، $هـ = \frac{١}{س}$ ، $ل = ٣$

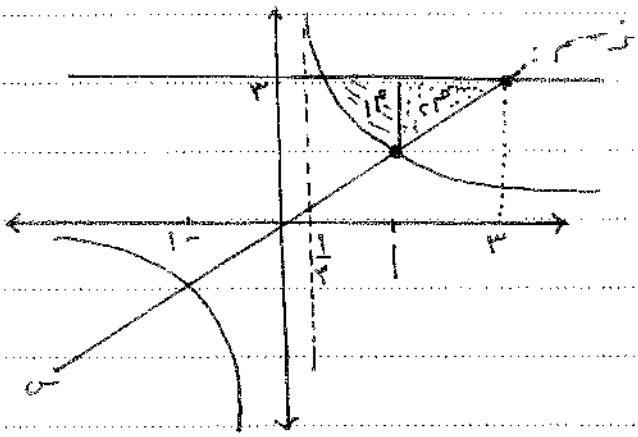
نقاط طعان:

$س = ٣$ ←

$س = \frac{١}{س}$ ← $س = \pm ١$

$\frac{١}{س} = س$ ← $س = \frac{١}{٣}$

نرسم:



$م_١ = \int_{\frac{١}{٣}}^{١} (٣ - \frac{١}{س}) \, د س$

$م_٢ = \int_{١}^{٣} (٣ - س) \, د س$

$م = م_١ + م_٢$

$= ٤ + لو_{هـ} \frac{١}{٣}$ وحدة مربعة

٤ احسب المساحة المحصورة بين

$هـ(س) = س^٣$ ، $هـ(س) = -س^٣$

والمستقيم $ص = ٨$.

الحل: أعمدة أقترانات

$هـ = س^٣$ ، $هـ = -س^٣$ ، $ص = ٨$

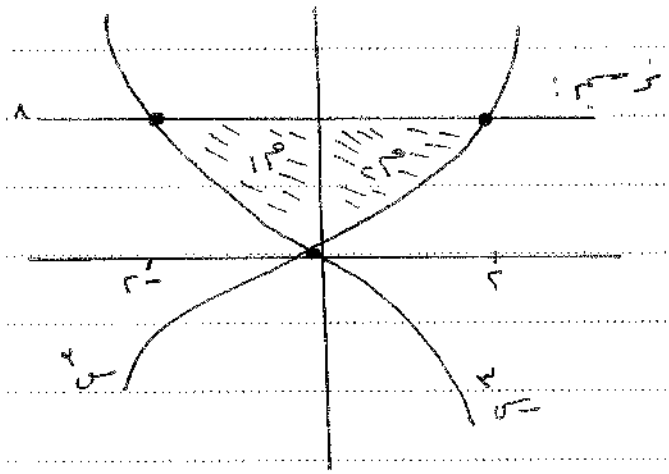
نقاط طعان

$س^٣ = -س^٣$ ← $س = ٠$

$س^٣ = ٨$ ← $س = ٢$

$-س^٣ = ٨$ ← $س = -٢$

نرسم:



$م_١ = \int_{-٢}^{٠} (-س^٣ - ٨) \, د س$

$م_٢ = \int_{٠}^{٢} (٨ - س^٣) \, د س$

$م = م_١ + م_٢$

$= ٨$ وحدة مربعة

٥ . أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم ص = س - ٢ ، ص = ٦ - س والمنحنى الذي معادلته ص = ٤ - س² وتقع في الربع الأول.

الحل: أعمدة — اقترانات

س = ٠ ← ص = ٤ ، ص = ٦ ← تقاطع المستقيمين

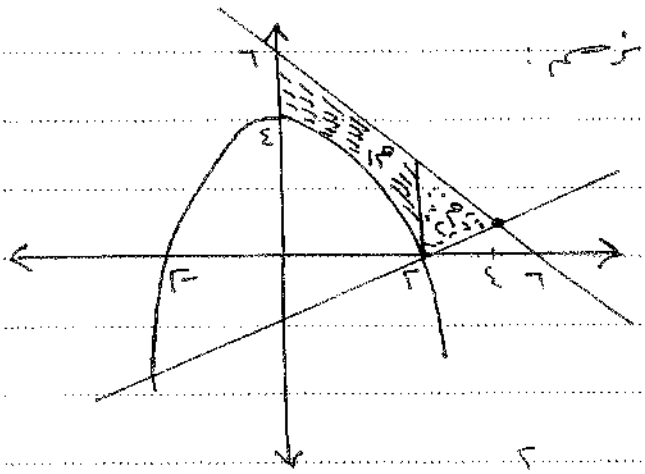
تقاطعات:

٤ - س² = ٦ - س ← س = ٢ ، س = -٣ (لا يتقاطعان)

٤ - س² = ٠ ← س = ٢

٦ - س = ٠ ← س = ٦

نرسم:



$م_1 = \int_{2}^{4} (6 - س) - (4 - س^2) \, د س$

$م_2 = \int_{0}^{2} (6 - س) - (س - 2) \, د س$

$م = م_1 + م_2$

$= \frac{26}{3}$ وحدة مربعة

٦ أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) = |س - ١| ، هـ(س) = ٣ - س²

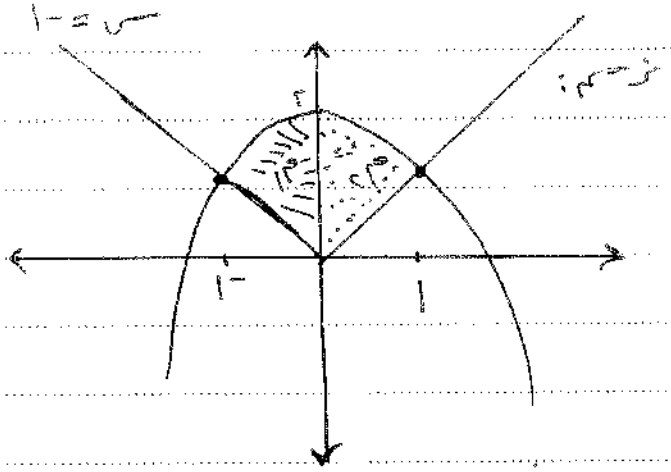
الحل: ق(س) = { س ، س ≥ ٠ ; -س ، س < ٠ }

تقاطعات:

س ≥ ٠ ← س = ٣ - س² ← س = ٢ ← ص = ١

س < ٠ ← -س = ٣ - س² ← س = -١ ← ص = ١

نرسم:



$م_1 = \int_{-1}^{0} (3 - س^2) - (-س) \, د س$

$م_2 = \int_{0}^{1} (3 - س^2) - (س) \, د س$

$م = م_1 + م_2$

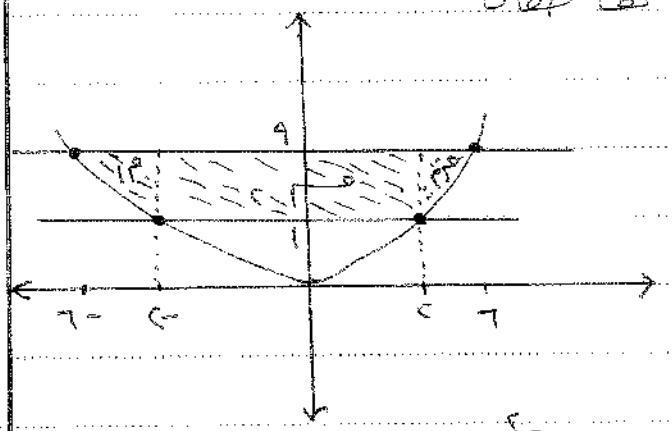
$= \frac{7}{3}$ وحدة مربعة

[٧] . جد $\int_{-6}^{6}$ المحصورة بين $\int_{-6}^{6}$ ، $\int_{-6}^{6}$ ، $\int_{-6}^{6}$ ، $\int_{-6}^{6}$

الحل : اعتبر أولاً

$\int_{-6}^{6}$ ، $\int_{-6}^{6}$

تقاطعات



$$\int_{-6}^{-2} = \int_{-6}^{-2} 9 - \frac{1}{4}x^2 \, dx$$

$$\int_{-2}^{2} = \int_{-2}^{2} 9 - 1 \, dx$$

$$\int_{2}^{6} = \int_{2}^{6} 9 - \frac{1}{4}x^2 \, dx$$

$$= \int_{-6}^{6} + \int_{-2}^{2} + \int_{2}^{6}$$

$$= \frac{208}{3}$$ وحدة مربعة

[٨] . أجد $\int_{-6}^{6}$ المحصورة بين

$\int_{-6}^{6}$ ، $\int_{-6}^{6}$ ، $\int_{-6}^{6}$

$\int_{-6}^{6}$ المستقيم $\int_{-6}^{6}$ ، $\int_{-6}^{6}$

الحل : اعتبر أولاً $\int_{-6}^{6}$

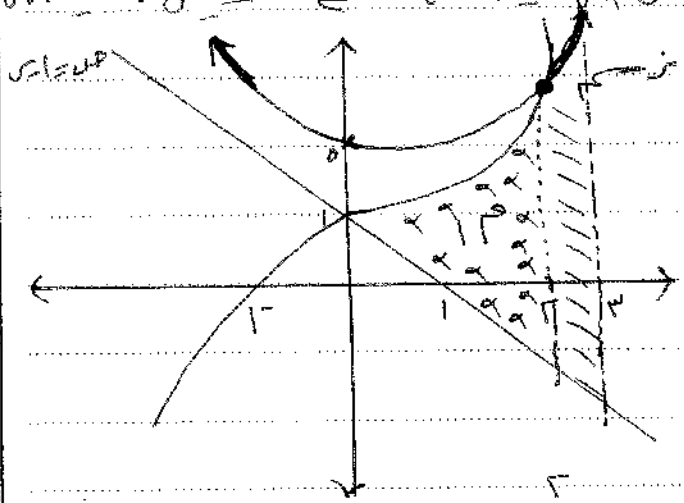
$\int_{-6}^{6}$ ، $\int_{-6}^{6}$

تقاطعات :

$\int_{-6}^{6}$ بالتجريب

$\int_{-6}^{6}$

$\int_{-6}^{6}$ للحل ، لاتقاطعات



$$\int_{-1}^{2} = \int_{-1}^{2} x^2 + 1 - (-x+1) \, dx$$

$$\int_{2}^{3} = \int_{2}^{3} x^2 + 5 - (-x+1) \, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} + \int_{2}^{3}$$

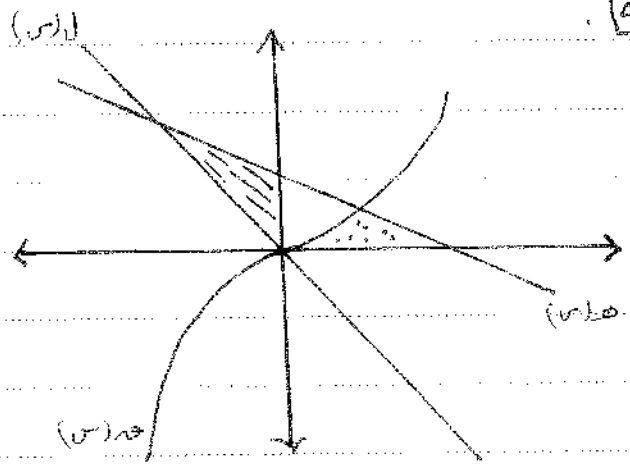
$$= \frac{11}{6}$$ وحدة مربعة

أشكال مرسومة وأوجد مساحاتها

المعطوفة

جد مساحة المنطقة المظللة في كل مما يأتي :

٩ .



ه(س) = ٢س^{٣} ، هـ(س) = ٣ - س

ل(س) = -٢ك

الحل : نجد تقاطع ل(س) مع هـ(س)

٣ - س = -٢ك ← س = -٣

$\therefore م_{١} = \int_{-٣}^{١} (٣ - س) - (-٢ك) \cdot دس$

* نجد تقاطع ه(س) مع هـ(س)

٢س^{٣} = ٣ - س ← ٢س^{٣} + س - ٣ = ٠

بالتجريب س = ١ وبالقسمة التركيبية ينتج عبارة تربيعية مميزها سالب

$\therefore م_{٢} = \int_{١}^{١} ٢س^{٣} - (-٢) \cdot دس$

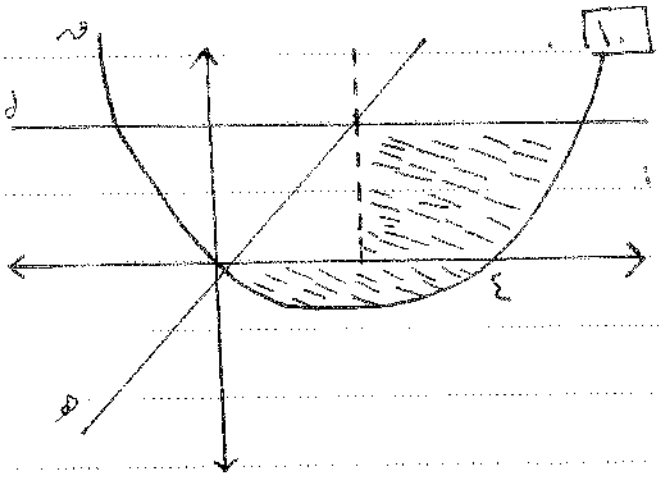
* نجد تقاطع هـ(س) مع المستقيم س = ٢

$\therefore م_{٣} = \int_{١}^{٢} (٣ - س) - (-٢) \cdot دس$

$\therefore م = م_{١} + م_{٢} + م_{٣}$

الجواب ٧ وحدات مربعة

١٠ .



ه(س) = س^{٢} - ٤س

ل(س) = ٥

هـ(س) = ٥ - س

الحل : تقاطعات

ه = هـ	ه = ل	هـ = ل
س^{٢} - ٤س = ٥ - س	س^{٢} - ٤س = ٥	٥ - س = ٥
س^{٢} - ٣س - ٥ = ٠	س^{٢} - ٤س - ٥ = ٠	س = ٠
س = $\frac{٣ \pm \sqrt{٢١}}{٢}$	(س + ١)(س - ٥) = ٠	
	س = -١ ، س = ٥	

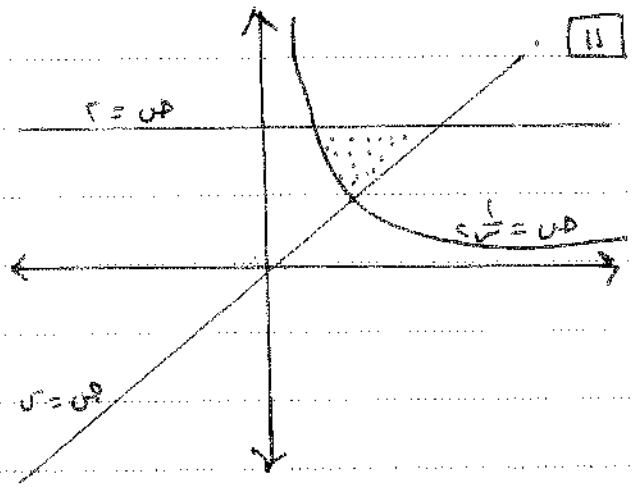
$م_{١} = \int_{\frac{٣-\sqrt{٢١}}{٢}}^{\frac{٣+\sqrt{٢١}}{٢}} (٥ - س) - (س^{٢} - ٤س) \cdot دس$

$م_{٢} = \int_{١}^{٥} (٥) - (س^{٢} - ٤س) \cdot دس$

$م = م_{١} + م_{٢}$

الجواب $\frac{٨٥}{٣}$ وحدة مربعة

١١ .



الحل : نجد تقاطع ص = ٢ مع ص = ١/س٢

← ٢ = ١/س٢ ← س٢ = ١/٢ ← س = ± ١/√٢

نجد تقاطع ص = ١/س٢ مع ص = س

← ١/س٢ = س ← س٣ = ١ ← س = ١

∴ م١ = ∫ ١/٢ ١ (٢) − (١/س٢) . دس

* نجد تقاطع ص = ٢ مع ص = س

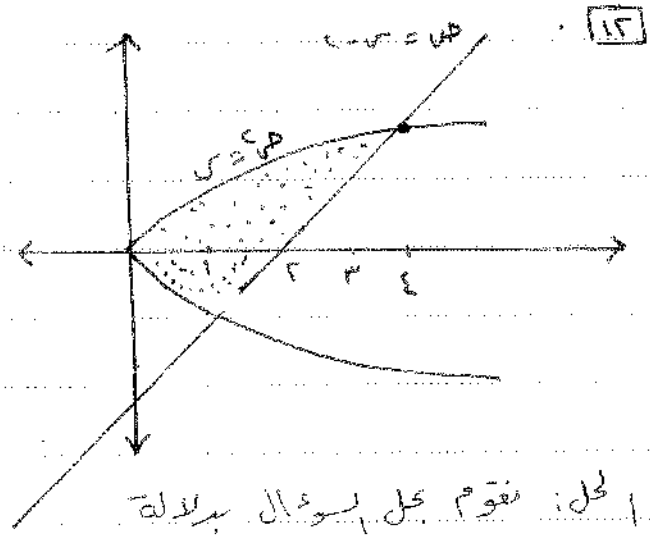
← س = ٢

∴ م٢ = ∫ ١ ٢ (٢) − (س) . دس

م = م١ + م٢

الجواب ٧/٢ − ٢√٢ وحدة مربعة

١٢ .



الحل : نقوم بحل السؤال بدلالة الصادات

س = ص + ٢ ، س = ص٢

← بالتقاطع ص٢ = ص + ٢

ص٢ − ص − ٢ = ٠

(ص − ٢)(ص + ١) = ٠

ص = ٢ ، ص = −١

∴ م = ∫ −١ ٢ (ص + ٢) − (ص٢) . دص

= [ص٢/٢ + ٢ص − ص٣/٣] −١ ٢

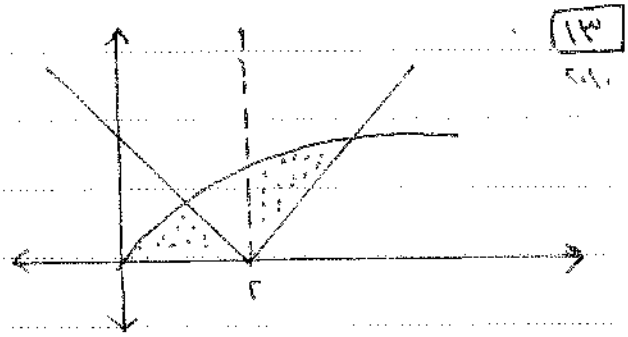
= (٢ + ٤ − ٨/٣) − (١/٢ − ٢ + ١/٣)

= (٦ − ٨/٣) − (١/٢ − ٢ + ١/٣)

= (١٠/٣) − (−٧/٦)

= ٢٧/٦ = ٩/٢ وحدة مربعة

١٣



$م_1(س) = |س-٢|$

$م_2(س) = \sqrt{س}$

الحل: نجد تقاطع المنحنيين

اقترانان وتقاطعان

$س-٢ = \sqrt{س}$ ، $س > ٢$

نربع

$س^2 - ٤س + ٤ = س \leftarrow س^2 - ٥س + ٤ = ٠$

$(س-٤)(س-١) = ٠$

$س = ٤$ ، $س = ١$ ✗

$٣ - س = \sqrt{س}$ ، $س < ٢$

نربع

$٤ - ٤س + س^2 = س \leftarrow س^2 - ٥س + ٤ = ٠$

$(س-٤)(س-١) = ٠$

$س = ٤$ ، $س = ١$ ✗

$\therefore م = \int_{١}^{٤} \sqrt{س}\, د س - \int_{٢}^{٤} (٢-س)\, د س$

$م_٢ = \int_{٢}^{٤} (س-٢)\, د س$

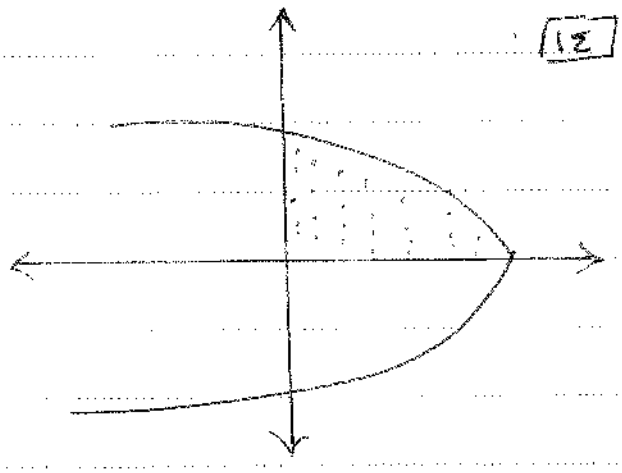
$م_٣ = \int_{٢}^{٤} \sqrt{س} - (س-٢)\, د س$

$م = م_1 + م_2 + م_3$

الجواب $\frac{٧}{٦}$ وحدة مربعة

$٤ - \frac{٨}{٣} = \frac{٤}{٣}$

١٤



$ص^2 = ٤٢ - ٨س$

الحل: الاقترانان

$س = \frac{٤٢ - ص^2}{٨}$ ، محور الصادات $س = ٠$

نقاطعان $\frac{٤٢ - ص^2}{٨} = ص$

$\therefore ص^2 = ٤٢ - ٤ص \leftarrow$

$ص = \sqrt{٤٢}$

$\therefore م = \int_{-\sqrt{٤٢}}^{\sqrt{٤٢}} \left(\frac{٤٢ - ص^2}{٨} - ص\right)$ د ص

$= \frac{١}{٨} \int_{-\sqrt{٤٢}}^{\sqrt{٤٢}} (٤٢ - ص^2 - ٨ص)$ د ص

$= \frac{١}{٨} \left[٤٢ص - \frac{ص^3}{٣} - ٤ص^2\right]_{-\sqrt{٤٢}}^{\sqrt{٤٢}}$ (∵)

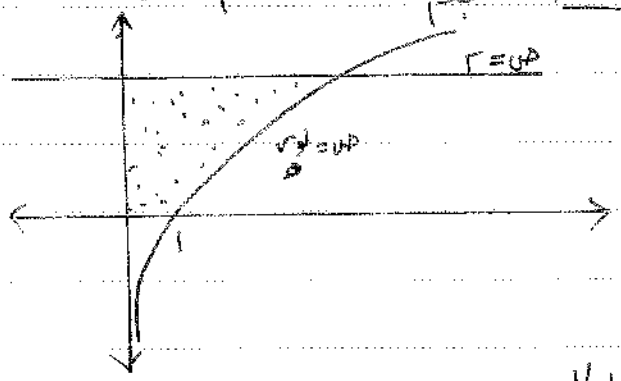
$= \frac{١}{٨} \left(٤٢\sqrt{٤٢} - \frac{٤٢\sqrt{٤٢}}{٣} - ٤(٤٢)\right) - ($)

$= ٢\sqrt{٤٢} - \frac{\sqrt{٤٢}}{٣}$

$= \frac{٥}{٣}\sqrt{٤٢}$

الجواب $\frac{٥}{٣}\sqrt{٤٢}$ وحدة مربعة

١٥ . جد مساحة المنطقة



الحل :

نجد تقاطع ص = ٣ مع ص = لو س

⇐ ٣ = لو س ← س = هـ^٣

م = ∫_١^{هـ^٣} (٣) - (لو س) . دس = ٣

م = ∫_١^{هـ^٣} (٣) - (لو س) . دس

= [٣س]_١^{هـ^٣} - ∫_١^{هـ^٣} لو س . دس ← اجزاء

= (٣هـ^٣ - ٣) - [س لو س]_١^{هـ^٣} + ∫_١^{هـ^٣} س . (١/س) دس

= (٣هـ^٣ - ٣) - (هـ^٣ - ١) + [س]_١^{هـ^٣}

= ٣هـ^٣ - ٣ - هـ^٣ + ١ + هـ^٣ - ١

= ٣هـ^٣ - ٣

∴ م = ١٣ + م٢

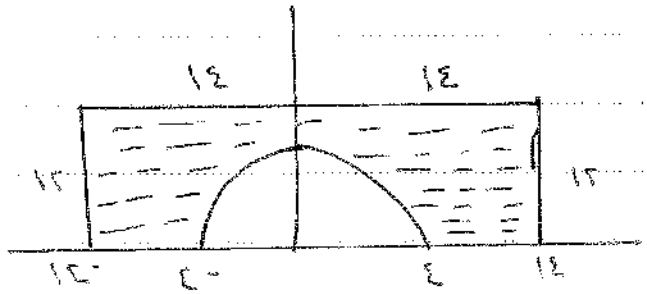
= ٣ + هـ^٣ - ٣

= (هـ^٣ - ١)

الجواب (هـ^٣ - ١) وحدة مربعة

١٦ ** . مثل بشكل المجاور واجهة مبنى ، وعدد غرف المبنى مثل فناني

ف(س) = ٨ - س^٢/٤ . ما تكلفة تكسية لوحات المنطقة المظللة ، إذا علمت أن سعر م^٢ هو ٤٠ ر.س = ؟



الحل : تكلفة تكسية = مساحة المظلل × سعر المتر المربع الواحد

نجد المساحة ٨ - س^٢/٤ = ٠ ← س = ±٤

∴ مساحة المستطيل = ٨ × ١٢ = ٣٣٦

المساحة تحت الاقتران (القطع المكافئ)

= ∫_{-٤}^{٤} ٨ - س^٢/٤ . دس = ٥٦ ق/٦

∴ المساحة المظللة = ٣٣٦ - ٥٦ ق/٦

= ١٧٦٠/٦ وحدة مربعة

∴ التكلفة = ٤٠ × ١٧٦٠/٦

= ٧٠٤٠٠/٦ ر.س

الجواب ٧٠٤٠٠/٦ ر.س

رقم الصفحة (٩٤)

١٧. إذا كان $هـ(س) = س^{٢}$،

$هـ(س) = جـ س^{٣}$ حيث $جـ > ٠$

وكانت المساحة المحصورة بين $هـ(س)$، $هـ(س)$ تساوي $\frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة، فما الثابت $جـ$ ؟

الحل: اقترن المنحنيين لإيجاد نقاط التقاطع

$س^{٢} = جـ س^{٣}$

$\leftarrow$ $س = ٠$ ، $س = \frac{١}{جـ}$

$\therefore م = \int_{٠}^{\frac{١}{جـ}} (س^{٢} - جـ س^{٣})\, د س = \frac{٤}{٣}$

$\leftarrow \left[\frac{س^{٣}}{٣} - جـ \frac{س^{٤}}{٤}\right]_{٠}^{\frac{١}{جـ}} = \frac{٤}{٣}$

$\frac{١}{٣}(\frac{١}{جـ})^{٣} - \frac{جـ}{٤}(\frac{١}{جـ})^{٤} = \frac{٤}{٣}$

$\leftarrow \frac{١}{٣جـ^{٣}} - \frac{١}{٤جـ^{٣}} = \frac{٤}{٣}$

$\frac{جـ^{٣}}{١٢جـ^{٣}} = \frac{٤}{٣}$

$\frac{١}{٣جـ^{٣}} = \frac{٤}{١٢}$

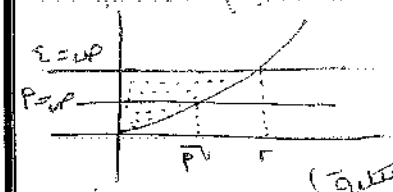
$٤جـ^{٣} = ٣ \leftarrow جـ^{٣} = \frac{١}{٨}$

$\leftarrow جـ = \frac{١}{٢}$

الجواب : $جـ = \frac{١}{٢}$

١٨. إذا كان المستقيم $ص = ٩$ ينصف المساحة المحصورة بين المنحنى $هـ(س) = س^{٢}$ والمستقيم $ص = ٤$ والواقعة بالربع الأول. فجد المساحة $م$

الحل: نرسم الشكل



نقاط التقاطع
$هـ = ص$
$س^{٢} = ٤$
$س = \sqrt{٤}$
$س = ٢$
ربع أول

نجد المساحة (الكلية)

$م = \int_{٠}^{٢} (٤ - س^{٢})\, د س$

$= \frac{١٦}{٣}$

نأخذ نصف المساحة $= \frac{٨}{٣}$

$\therefore$ نجد المساحة بين $هـ = س^{٢}$ والمستقيم $ص = ٩$

التقاطع $س^{٢} = ٩ \leftarrow س = \sqrt{٩} = ٣$

$\therefore م = \int_{٠}^{٣} (٩ - س^{٢})\, د س$

$= \left[٩س - \frac{س^{٣}}{٣}\right]_{٠}^{٣}$

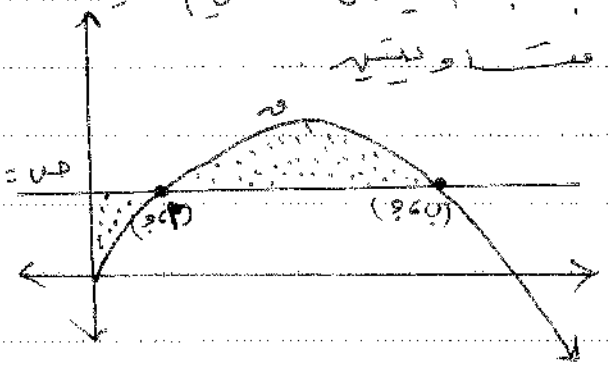
نفوض ونساوي بـ $\frac{٨}{٣}$

$\sqrt{٩}^{٢} = ٩$

الجواب $٩ = \sqrt{٩}^{٣}$

١٩ : رسم المستقيم $ص = ج$ يقطع منحنى $ق(س) = ٢س - ٣س^{٢}$ في النقطتين $(أ، ج)$ حيث $أ، ب، ج$ أعداد حقيقية موجبة مكونة المنطقتين $م_{١}، م_{٢}$ كما بالشكل.

جد $ج$ التي تجعل مساحة المنطقتين $م_{١}، م_{٢}$ متساويتين.



الحل: بما أن $م_{١}، م_{٢}$ متساويتين

$$\therefore \int_{أ}^{ب} (ج - ق(س)) \, د س = \int_{ب}^{ج} (ق(س) - ج) \, د س$$

$$\therefore \int_{أ}^{ب} ق(س) - ج \, د س = - \int_{ب}^{ج} ق(س) - ج \, د س$$

$$\therefore \int_{أ}^{ب} ق(س) - ج \, د س + \int_{ب}^{ج} ق(س) - ج \, د س = ٠$$

$$\therefore \int_{أ}^{ج} (ق(س) - ج) \, د س = ٠$$

$$\therefore \int_{أ}^{ج} ٢س - ٣س^{٢} - ج \, د س = ٠$$

$$\therefore [س^{٢} - \frac{٣س^{٤}}{٤} - ج س]_{أ}^{ج} = ٠$$

$$\therefore ج^{٢} - \frac{٣ج^{٤}}{٤} - ج^{٢} = ٠$$

بما أن $ق(ب) = ج \leftarrow ج = ٢ب^{٢} - ٣ب^{٣}$ *

$$\therefore ب^{٢} - \frac{٣ب^{٤}}{٤} - ب^{٢}(٢ب^{٢} - ٣ب^{٣}) = ٠$$

$$\leftarrow \frac{٩}{٤} ب^{٤} - ب^{٢} = ٠$$

$$\leftarrow ب^{٢}(\frac{٩}{٤} ب^{٢} - ١) = ٠$$

$$\therefore ب^{٢} = \frac{٤}{٩} \quad \therefore د^{٢} = \frac{٤}{٩}$$

$$ب = \frac{٢}{٣}$$

$$\therefore ج = ٢(\frac{٢}{٣})^{٢} - ٣(\frac{٢}{٣})^{٣} \quad \text{بالتعويض في *}$$

$$= \frac{٨}{٩} - \frac{٨}{٩} = \frac{٤}{٩}$$

الجواب: $ج = \frac{٤}{٩}$

٢٠ : احسب المساحة المحصورة بين $ق(س) = ١ + جتا س$ ،

$ك(س) = ١ + جا س$ على $[\frac{\pi}{٢}، \frac{٣\pi}{٢}]$

الحل: تقاطع $١ + جا س = ١ + جتا س$

$$\leftarrow \text{ظا } س = ١ \leftarrow س = \frac{\pi}{٤}، \frac{٥\pi}{٤}$$

$$\therefore م_{١} = \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}} (١ + جا س) - (١ + جتا س) \, د س$$

$$م_{٢} = \int_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}} (١ + جتا س) - (١ + جا س) \, د س$$

$$\leftarrow م_{١} \oplus م_{٢} = \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}} جا س - جتا س \, د س \oplus \int_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}} جتا س - جا س \, د س$$

$$= [-جتا س - جا س]_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}} \oplus [جا س + جتا س]_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}}$$

$$(\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}) - (-١) \oplus (-١ + ٠) - (\frac{-١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}})$$

$$(\frac{٤}{\sqrt{٢}} + ١) \oplus (-١ + \frac{٤}{\sqrt{٢}})$$

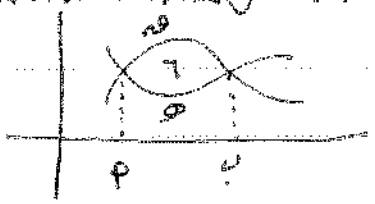
$$\sqrt{٢} + ١ + \sqrt{٢} - ١$$

$$٢\sqrt{٢}$$

$$\text{ط ط ط} = \frac{٤ \times ٢}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}} = \frac{٤}{٢}$$

الجواب: $٢\sqrt{٢}$ وحدة مربعة

* ورقة عمل هامة جداً جداً
* * *

١. 

إذا علمت أن $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س = ١٦$

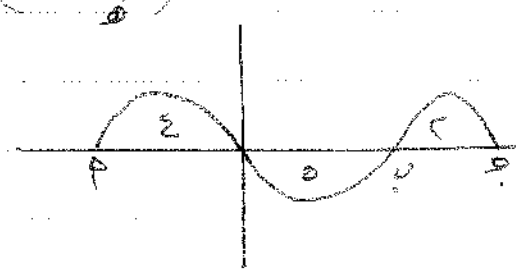
جـ ١. $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,د س$ ١٠

٢. $\int_{أ}^{ب} [هـ(س) - ق(س)]\,د س$ ٦-

٢. أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين
$ق(س) = جا س$ ، $هـ = ٢$
$س = \pi$ ومحور الصادات
(٢-٣٢)

٣. أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين
منحنى $ق(س) = ٣س^{٢} - ٦س$ ومحور
السينات والمستقيمين $س = ١$ ، $س = ٣$
(٦)

٤. جـ مساحة المنطقة المحصورة بين
$ق(س) = هـ^{س}$ والمستقيم $هـ = ٢$
ومحور الصادات
(لوغ ٢ - ١)

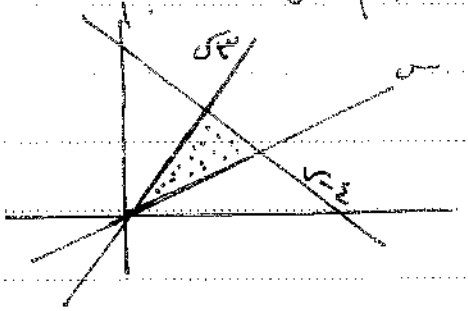
٥. 

١٠. أوجد $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س$

٩. $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س$ ١

١١. $\int_{أ}^{ب} |ق(س)|\,د س$ ١

١. $\int_{أ}^{ب} |ق(س)\,د س|$ ١

٦. $ق$ يمثل الضلع المنحني في الشكل المجاور


(٢)

٧. جـ مساحة المنطقة المحصورة بين
$ق(س) = جا س$ ، $هـ(س) = جتا س$
والمستقيم $هـ = ١$ في $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$.
$(\frac{\pi}{٤} - \sqrt{٢})$

٨. جـ قيمة $ك$ حيث المستقيم $س = ك$
ينصف المساحة المحصورة بين $س = \sqrt{٨}$
والمستقيم $س = ٢$ ومحور السينات الى
قسمين متساويين
$ك = \sqrt[٣]{٤}$

٩. جـ مساحة المنطقة المحصورة بين
$ق(س) = ٢\sqrt{س}$ ، $هـ(س) = \sqrt{٥ - س}$
ومحور السينات
$(\frac{٢٠}{٣})$