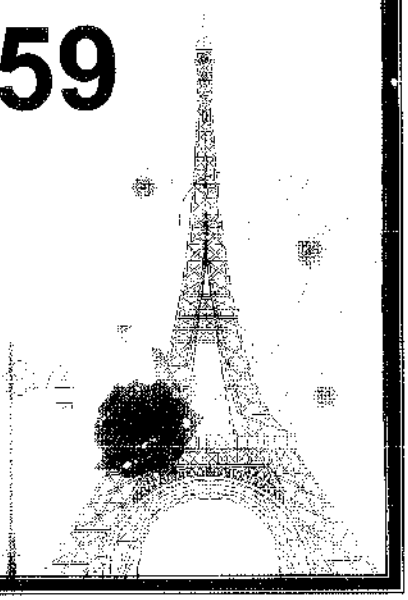
الرياضيات

أ. اياد جاد الله

القطوع المخروطية

0795475457
0788513659



2018

القطع المخروطي :-

هي منحنيات مستوية ناتجة من تقاطع مستوى معين مع مخروط دائري قائم من دورجي أوضاع مختلفة

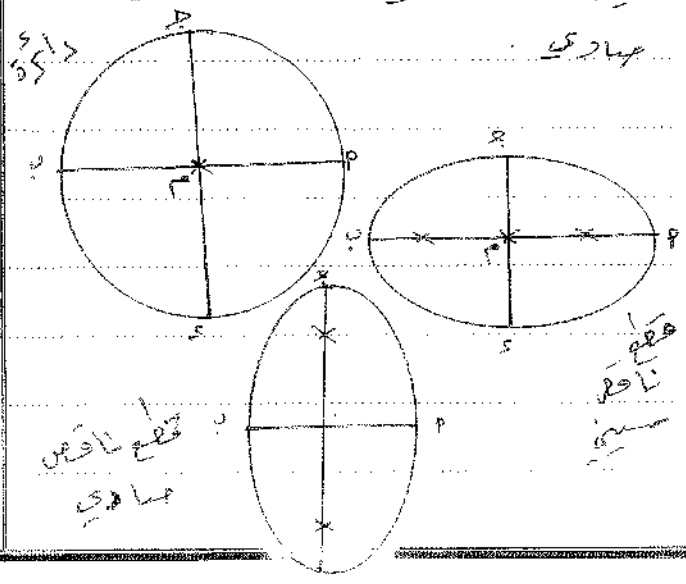
القطع الناقص ← القطع الزائد
القطع المكافئ ← الدائرة
المدخل الهندسي ←

الدرس الأول :-

القطع الناقص

شكل بسيط : يشكل المحور عمود دائرة فيها $\overline{أب}$ ، $\overline{جد}$ قطرين . اذا احتفظنا بالدائرة مع النقط ج ، د ستكون شكل بيضوي يسمى قطع ناقص سيني

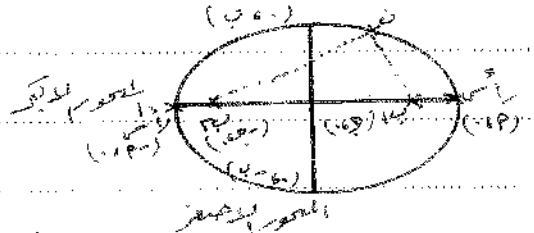
وعند حفظ الدائرة مع النقطتين أ ، ب ستكون شكل بيضوي يسمى قطع ناقص صادي



تعريف : هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط بحيث مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقداراً ثابتاً (٢أ)

المحور الأكبر

$ب_1 ب_2 + ب_1 ب_2 = 2أ$



عناصره :

١. طول المحور الأكبر = ٢أ
٢. طول المحور الأصغر = ٢ب
٣. البعد البؤري = ٢ج
٤. الاختلاف المركزي = $هـ = \frac{ج}{أ} < 1$
٥. مساحته = π أ ب

* اذا كان الأكبر ($س^2$) تحت س أولاً ← سيني.
اذا كان الأكبر ($ص^2$) تحت ص أولاً ← صادي.

أول عنصر بالدرس عالكراسة

نوعان

سيني مركزه (د ، هـ)

$$\frac{(س - د)^2}{أ^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = 1$$

صادي مركزه (د ، هـ)

$$\frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} + \frac{(س - د)^2}{ب^2} = 1$$

العلاقة بين أ ، ب ، ج (الشهيرة)

$ج^2 = أ^2 - ب^2$

إيجاد العناصر الأساسية للقطع الناقص :-

أمثلة جد عناصر كل قطع

١. $\frac{س^2}{9} + \frac{(ص-3)^2}{5} = 1$

الحل : قطع ناقص سيني مركزه (٠ ، ٣)

$أ^2 = 9$ ، $ب^2 = 5$ ، $جـ^2 = أ^2 - ب^2$

$أ = 3$ ، $ب = \sqrt{5}$ ، $جـ^2 = 9 - 5 = 4$

$جـ = 2$

طول المحور الأكبر $= 2أ = 6$

طول المحور الأصغر $= 2ب = 2\sqrt{5}$

البعد البؤري $= 2جـ = 4$

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{2}{3}$ ، $0 < هـ < 1$

مساحة $= \pi أ ب = \pi \times 3 \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}\pi$

رأسا $(3 ، 3)$ $(-3 ، 3)$

بؤرتا $(2 ، 3)$ $(-2 ، 3)$

طرفا المحور الأصغر $(0 ، 3+\sqrt{5})$ $(0 ، 3-\sqrt{5})$

معادلة المحور الأكبر $ص = 3$

معادلة المحور الأصغر $س = 0$

٢. $\frac{(ص+3)^2}{64} + \frac{(س-3)^2}{36} = 1$

الحل : قطع ناقص صادي مركزه $(3 ، -3)$

$أ^2 = 64$ ، $ب^2 = 36$ ، $جـ^2 = أ^2 - ب^2$

$أ = 8$ ، $ب = 6$ ، $جـ^2 = 64 - 36 = 28$

$جـ = \sqrt{28}$

طول المحور الأكبر $= 2أ = 16$

طول المحور الأصغر $= 2ب = 12$

البعد البؤري $= 2جـ = 2\sqrt{28}$

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{28}}{8}$ ، $0 < هـ < 1$

مساحة $= \pi أ ب = \pi \times 8 \times 6 = 48\pi$

رأسا $(3 ، 5)$ $(3 ، -11)$

بؤرتا $(3 ، -3+\sqrt{28})$ $(3 ، -3-\sqrt{28})$

طرفا المحور الأصغر $(3+\sqrt{28} ، -3)$ $(3-\sqrt{28} ، -3)$

معادلة المحور الأكبر $س = 3$ ، معادلة المحور الأصغر $ص = -3$

٣. $\frac{(س-3)^2}{100} + \frac{(ص-5)^2}{36} = 1$

الحل : قطع ناقص سيني مركزه $(3 ، 5)$

$أ^2 = 100$ ، $ب^2 = 36$ ، $جـ^2 = أ^2 - ب^2$

$أ = 10$ ، $ب = 6$ ، $جـ^2 = 100 - 36 = 64$

$جـ = 8$

طول المحور الأكبر $= 2أ = 20$

طول المحور الأصغر $= 2ب = 12$

البعد البؤري $= 2جـ = 16$

الاختلاف المركزي $هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{8}{10}$ ، $0 < هـ < 1$

مساحة $= \pi أ ب = \pi \times 10 \times 6 = 60\pi$

رأسا $(8 ، 5)$ $(-2 ، 5)$

بؤرتا $(6 ، 5)$ $(0 ، 5)$

طرفا المحور الأصغر $(3 ، 11)$ $(3 ، -1)$

معادلة المحور الأكبر $ص = 5$ ، معادلة المحور الأصغر $س = 3$

٤. $\frac{(2ص+4)^2}{64} + (س-3)^2 = 64$

حيث ١. المركز ٢. البؤرتان ٣. البعد البؤري

الحل : نجعل المعادلة

$\frac{(2(ص+2))^2}{64} + \frac{(-1(س-3))^2}{64} = 64$

$\frac{4(ص+2)^2}{64} + \frac{1(س-3)^2}{64} = 64$

$\frac{(ص+2)^2}{16} + \frac{(س-3)^2}{64} = 1$

قطع ناقص سيني مركزه (٣، -٢)

$p^2 = 64$ $ن^2 = 16$ $ح^2 = p^2 - ن^2$

$p = 8$ $ن = 4$ $= 64 - 16 = 48$

$ح = \sqrt{48}$

١. الطولان : المركز (٣، -٢)

$= (3, -2 - 5)(3, -2 + 5)$

٢. البؤرتان $(3, -2 + \sqrt{48})(3, -2 - \sqrt{48})$

---

٥. $4س^2 + ص^2 = 1$ الحمد لله

الحل : بقسمة $\frac{س^2}{\frac{1}{4}} + \frac{ص^2}{1} = 1$

ناقص سيني مركزه (٠، ٠)

$p^2 = 1$ $ن^2 = \frac{1}{4}$ $ح^2 = p^2 - ن^2$

$p = 1$ $ن = \frac{1}{2}$ $ح^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$ح = \frac{\sqrt{3}}{2}$

طول المحور الأكبر $= 2p = 2$

طول المحور الأصغر $= 2ن = 1$

البعد البؤري $= 2ح = \sqrt{3}$

$ه = \frac{ح}{p} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

رؤوس $(1, 0)(-1, 0)$

بؤرتان $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$

أطراف المحور الأصغر $(0, \frac{1}{2})(0, -\frac{1}{2})$

---

٦. $4(ص+1)^2 = 1 - 25س^2$

الحل : بقسمة المعادلة

$4(ص+1)^2 + 25س^2 = 1$

$\frac{(ص+1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(س-0)^2}{\frac{1}{25}} = 1$

ناقص رأسي مركزه $(0, -1)$

$p^2 = \frac{1}{4}$ $ن^2 = \frac{1}{25}$ $ح^2 = p^2 - ن^2$

$p = \frac{1}{2}$ $ن = \frac{1}{5}$ $ح^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{25}$

$ح = \frac{\sqrt{21}}{10}$

$= \frac{21}{100}$

.....

٧. قطرة إكمال مربع :-

$4س^2 + 9ص^2 - 24س + 18ص + 9 = 0$

الحل : $4س^2 - 24س + 9ص^2 + 18ص + 9 = 0$

$4(س^2 - 6س + (-3)^2) + 9(ص^2 + 2ص + 1^2) = -9$

$(\frac{1}{2} \times -6)^2$ $(\frac{1}{2} \times 2)^2$

$4(س-3)^2 + 9(ص+1)^2 = -9 + 36 + 9$

$4(س-3)^2 + 9(ص+1)^2 = 36$

$\frac{4(س-3)^2}{36} + \frac{9(ص+1)^2}{36} = 1$

$\frac{(س-3)^2}{9} + \frac{(ص+1)^2}{4} = 1$

ناقص سيني مركزه $(3, -1)$

$p^2 = 9$ $ن^2 = 4$ $ح^2 = 9 - 4 = 5$

$p = 3$ $ن = 2$ $ح = \sqrt{5}$

.....

---

٨. $4س^2 + 32س = 36 - 25ص^2$

الحل : $4س^2 + 32س + 25ص^2 = 36$

$4(س^2 + 8س + 16) + 25(ص^2 - 0ص + 0) = 36 + 64$

$4(س+4)^2 + 25(ص-0)^2 = 100$

$\frac{4(س+4)^2}{100} + \frac{25(ص-0)^2}{100} = \frac{100}{100}$

$\frac{(س+4)^2}{25} + \frac{(ص-0)^2}{4} = 1$

ناقص سيني مركزه $(-4, 0)$

$p^2 = 25$ $ن^2 = 4$ $ح^2 = p^2 - ن^2$

$p = 5$ $ن = 2$ $ح^2 = 25 - 4$

$ح = \sqrt{21}$

٩. أوجد عناصر القطوع المكافئة

أ. $16س^2 + 9ص^2 - 32س + 36ص - 92 = 0$

ب. $\frac{(س-2)^2}{16} + (ص+4)^2 = 1$

ج. $9س^2 + 4ص^2 + 18س = 8ص + 23$

د. $س^2 + 4ص^2 + 6س - 16ص = 23$

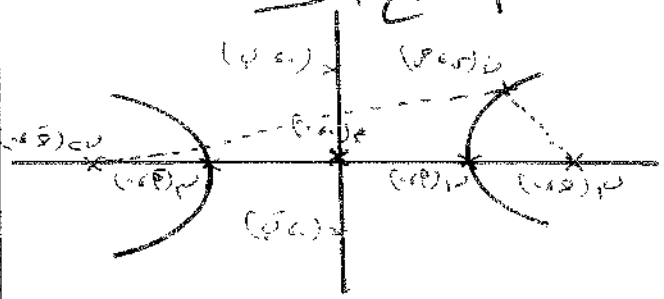
هـ . $(٣س - ٦)^٢ + (٥ص - ٥)^٢ = ٢٢٥$

و . $٤س^٢ + \frac{ص^٢}{٣} = ١$

ملاحظة : سنقوم بدراسة القطع الزائد كما فعلنا مع القطع الناقص ونجد أن هناك تشابه كبير بينهما وسنعتمد بالدراسة بناءً على معلوماتنا السابقة .

الدرس الثاني :-

القطع الزائد



تعريف : هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط ن (س ، ص) بحيث القيمة المطلقة للبعد بين نقطتين ثابتتين (بؤرتيه) يساوي مقداراً ثابتاً ٢أ .

بالرموز

$|ن ب_١ - ن ب_٢| = ٢أ$

عناصره :

١. طول المحور القاطع = ٢أ

٢. طول المحور المرافق = ٢ب

٣. البعد البؤري = ٢جـ

٤. الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ} > ١$

٥. لتحديد موقع القطع سيني أو صادي نعتمد العدد الموجب سيني أو صادي ...

نوعان :

سيني مركزه (ك ، هـ)

$\frac{(س - ك)^٢}{أ^٢} - \frac{(ص - هـ)^٢}{ب^٢} = ١$

صادي مركزه (ك ، هـ)

$\frac{(ص - هـ)^٢}{أ^٢} - \frac{(س - ك)^٢}{ب^٢} = ١$

العلاقة بين أ ، ب ، جـ (لحرية)

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$

إيجاد العناصر الأساسية للقطع الزائد :-

١. $\frac{(س-٢)^٢}{١٦} - \frac{(ص+٤)^٢}{٩} = ١$

الحل : القطع الزائد سيني مركزه (٢ ، -٤)

$أ^٢ = ١٦$ ، $ب^٢ = ٩$ ، $جـ^٢ = ١٦ + ٩$

$أ = ٤$ ، $ب = ٣$ ، $جـ^٢ = ٢٥$

$جـ = ٥$

طول المحور القاطع = ٢أ = ٨

طول المحور المرافق = ٢ب = ٦

البعد البؤري = ٢جـ = ١٠

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٤} > ١$

رأسا (٦ ، -٤) (-٢ ، -٤)

بؤرتاه (٧ ، -٤) (-٣ ، -٤)

أطراف المحور المرافق (٢ ، -١) (٢ ، -٧)

معادلة المحور القاطع ص = -٤

معادلة المحور المرافق س = ٢

سبحان الله وبحمده

سبحان الله العظيم

٢. $\frac{س^2}{٤٨} - \frac{ص^2}{٦٤} = ١$

الحل: قطع زائد مركزه (٠،٠)

$أ^2 = ٤٨$ $ب^2 = ٦٤$ $ج^2 = أ^2 + ب^2$

$أ = \sqrt{٤٨}$ $ب = ٨$ $ج = \sqrt{١١٢}$

طول المحور القاطع $= ٢أ = ٢\sqrt{٤٨}$

طول المحور المرافق $= ٢ب = ١٦$

البعد البؤري $= ٢ج = ٢\sqrt{١١٢}$

$هـ = \frac{ج}{أ} = \frac{\sqrt{١١٢}}{\sqrt{٤٨}}$

الرؤوس $(\sqrt{٤٨}، ٠)$ $(-\sqrt{٤٨}، ٠)$

البؤرتان $(\sqrt{١١٢}، ٠)$ $(-\sqrt{١١٢}، ٠)$

الأوتار المرافقة $(٠، ٨)$ $(٠، -٨)$

---

٣. $٧س^2 - ٩ص^2 - ١٤س - ٥٤ص - ١٣٧ = ٠$

الحل: اكمال المربع

$٧س^2 - ١٤س - ٩ص^2 - ٥٤ص = ١٣٧$

$٧(س^2 - ٢س) - ٩(ص^2 + ٦ص) = ١٣٧$

$٧(س^2 - ٢س + ١) - ٩(ص^2 + ٦ص + ٩) = ١٣٧ + ٧ - ٨١$

$٧(س - ١)^2 - ٩(ص + ٣)^2 = ٦٣$

$\frac{(س-١)^2}{٩} - \frac{(ص+٣)^2}{٧} = ١$

$أ^2 = ٩$ $ب^2 = ٧$ $ج^2 = ١٦$

$أ = ٣$ $ب = \sqrt{٧}$ $ج = ٤$

∴ القطع الزائد أفقي

---

٤. $٢ص^2 - ٣س^2 = ٥٠$

الحل: نقسم المعادلة ÷ ٣

$\frac{ص^2}{٢٥} - \frac{س^2}{٣٥} = ١$

قطع زائد صادي مركزه (٠،٠)

$أ^2 = ٢٥$ $ب^2 = ٣٥$ $ج^2 = ٥٠$

$أ = ٥$ $ب = \sqrt{٣٥}$ $ج = \sqrt{٥٠}$

∴ الشكل الحالي

٥. $٤س^2 - ص^2 = ٩$

الحل: $\frac{٤س^2}{٩} - \frac{ص^2}{٩} = ١$

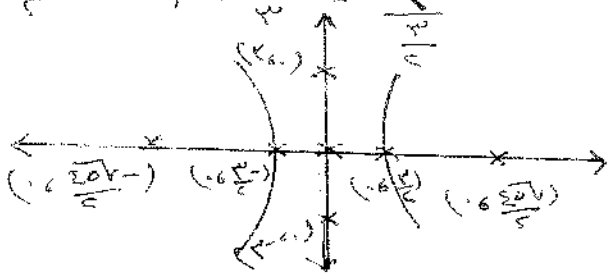
$\frac{س^2}{\frac{٩}{٤}} - \frac{ص^2}{٩} = ١$ ← قطع زائد أفقي

مركزه (٠،٠)

$أ^2 = \frac{٩}{٤}$ $ب^2 = ٩$ $ج^2 = أ^2 + ب^2$

$أ = \frac{٣}{٢}$ $ب = ٣$ $ج = \frac{\sqrt{٤٥}}{٢}$

$هـ = \frac{ج}{أ} = \frac{\frac{\sqrt{٤٥}}{٢}}{\frac{٣}{٢}} = \sqrt{٥} < ٢$



---

٦. $٩س^2 - ١٢٤ = ١٦ص^2 + ٣٦س + ٣٢ص$

الحل: $٩س^2 - ٣٦س - ١٦ص^2 - ٣٢ص = ١٢٤$

$٩(س^2 - ٤س) - ١٦(ص^2 + ٢ص) = ١٢٤$

$٩(س^2 - ٤س + ٤) - ١٦(ص^2 + ٢ص + ١) = ١٢٤ + ٣٦ - ١٦$

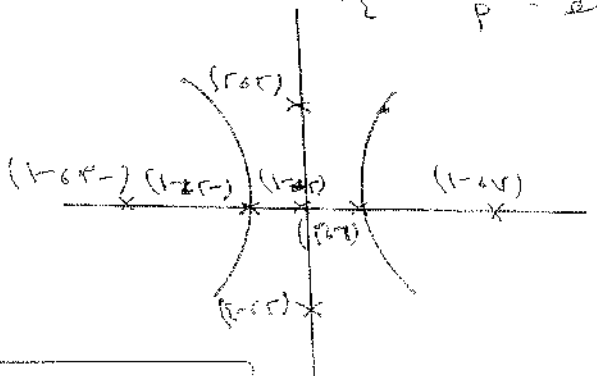
$٩(س-٢)^2 - ١٦(ص+١)^2 = ١٤٤$

$\frac{(س-٢)^2}{١٦} - \frac{(ص+١)^2}{٩} = ١$

$أ^2 = ١٦$ $ب^2 = ٩$ $ج^2 = أ^2 + ب^2$

$أ = ٤$ $ب = ٣$ $ج = ٥$

$هـ = \frac{ج}{أ} = \frac{٥}{٤} < ٢$



٧. واجب :- جد معادلة القطع :-

أ. $\frac{س^2}{٩} + \frac{(ص-٣)^2}{٤} = ١$

ب. $\frac{(س-٢)^2}{٩} - \frac{ص^2}{١٦} = ١$

ج. $٩س^2 + ٤ص^2 - ٣٦ = ٠$

د. $٤س^2 + ص^2 - ٨س + ٦ص + ٩ = ٠$

هـ. $(ص-٣)^2 = ٨(س-١)$

إيجاد معادلة القطع الناقص أو الزائد :-

الخطوات : ١. نحدد اسم القطع زائد أو ناقص و ذلك من خلال اختلاف المركزي

٢. نجد المركز وهو منتصف المسافة (نقطة المنتصف) بين رؤوسه

سواء بين رأسيه أو بؤريته أو أطراف محور اطول أو واقصر

٣. نحدد نوعه سيني أو صادي

أ. البؤرتان هما أعداد نعتمد على رقم المقام

ب. طول المحور أو اقصر نعتمد على رقم المقام

* عليه استخدام أكبر رقم إذا ما رتبت المحور.

أمثلة

١. جد معادلة قطع ناقص رأساه $(\pm ٦، ٠)$ وبؤرتاه $(\pm ٥، ٠)$

الحل : ناقص سيني مركزه $(٠، ٠)$

$ج = ٥$ ، $أ = ٦$ ، $ب^2 = أ^2 - ج^2$

$ب^2 = ٣٦ - ٢٥$

$ب^2 = ١١$

$\therefore$ المعادلة $\frac{س^2}{٣٦} + \frac{ص^2}{١١} = ١$

٢. جد معادلة قطع ناقص بؤرتاه $(٠، \pm ٥)$ وطول محوره الأكبر ٦ وحدات.

الحل : ناقص صادي مركزه $(٠، ٠)$

$ج = ٥$ ، $أ = ٣$ ، $ب^2 = أ^2 - ج^2$

$ب^2 = ٩ - ٢٥$

$ب^2 = ١٦$

$\therefore$ المعادلة $\frac{ص^2}{٩} + \frac{س^2}{١٦} = ١$

٣. ما معادلة قطع مخروطي اختلافه المركزي $\frac{٢}{٣}$ ، وبؤرتاه $(٢، ٧)$ $(٢، -٥)$.

الحل : نفهم من ابن آدم أن $هـ = \frac{٢}{٣}$ هاي نسبة مشي حقيقية ، يعني ما بعبر محكي $ج = ٢$ ، $أ = ٣$ ولكن بعبر أطول كالتالي $هـ = \frac{ج}{أ} = \frac{٢}{٣} \leftarrow \boxed{أ = ٣ج}$

ناقص لأن $هـ < ١$ ، صادي مركزه $(٢، ١)$

المسافة بين البؤرتين $٢ج = ١٢ \leftarrow ج = ٦$

$\therefore أ = ٣ج \leftarrow أ = ٦ \times ٢ = ١٢$

$\therefore ب^2 = أ^2 - ج^2$ ، $ب^2 = ١٤٤ - ٣٦$

$ب^2 = ١٠٨$

المعادلة $\frac{(ص-١)^2}{١٤٤} + \frac{(س-٢)^2}{١٠٨} = ١$

٤. ما معادلة قطع ناقص بؤرتاه $(٣، ٢)$ $(٣، ٦)$ وطول محوره الأكبر يساوي ٦ أمثال بعده البؤري.

الحل : ناقص صيني مركزه $(٣، ٤)$

$٢ج = ٢أ$ ، $ج = ٢$

$٦ج = ٢أ$

$\boxed{أ = ٦} \leftarrow ٢ \times ٢ \times ٣ = ٢أ$ ، $ب^2 = ٣٦ - ١٦ = ٢٠$

$\therefore$ المعادلة $\frac{(س-٣)^2}{٢٠} + \frac{(ص-٤)^2}{٣٦} = ١$

٥. ما معادلة قطع ناقص مركزه (٢،٣)، إحدى بؤرتيه (-١،٣) وطول محوره الأكبر ٢√١٠ .

الحل: ناقص سيني ، ح = ٣ = ٢ - ١

ح٢ = ب٢ + ح٢ ← ١٠ = ب٢ + ٩ ← ب٢ = ١

∴ المعادلة $\frac{(س-٢)^2}{١٠} + \frac{(ص-٣)^2}{١} = ١$

٦. ما معادلة قطع مخروطي اختلافه المركزي $\frac{٤}{٣}$ ورأساه (٠، ٦)، (٠، ٠) .

الحل: $\frac{ح}{ا} = \frac{٤}{٣}$ ← ١٢ ← زائد ← $\frac{ح}{ا} = \frac{٤}{٣}$ ← ٣ ا = ٤ ا ← ا = ٦

ا = ٢ ← ١٢ = ا ٢ ← ٢ ب٢ = ٤٤

ح٢ = ا٢ + ب٢ ← ٣٦ = ٣٦ + ب٢ ← ب٢ = ٢٨

المركز (٠، ٣) ← زائد رأسي

$\frac{(ص-٣)^2}{٣٦} - \frac{(س-٠)^2}{٢٨} = ١$

٧. ما معادلة زائد رأساه (٠، ٤±) ويمر بالنقطة (١، ٦)

الحل: زائد رأسي مركزه (٠، ٠)

$\frac{ص^2}{١٦} - \frac{س^2}{ب^2} = ١$ ، ا = ٤ ، ا٢ = ١٦

النقطة (١، ٦) تحقق المعادلة ← $\frac{٣٦}{١٦} - \frac{١}{ب^2} = ١$ ← $\frac{١}{ب^2} = \frac{٢٠}{١٦}$

← ب٢ = $\frac{١٦}{٥}$

∴ المعادلة $\frac{ص^2}{١٦} - \frac{س^2}{\frac{١٦}{٥}} = ١$

٨. ما معادلة قطع مخروطي مركزه (٢،٣) والبعد بين بؤرتيه ١٦، والبعد بين رأسيه ١٢ .

الحل: لاعلاقة قطبي سيني أو صادي

ح٢ = ا٢ + ب٢ ، ١٦ = ح٢ ، ١٢ = ا٢

٦٤ = ٣٦ + ب٢ ، ٦ = ا ، ٨ = ح

ب٢ = ٢٨ ← زائد ∵ ا٢ < ح٢

حيث السؤال فارغ من الأنواع المرتبة لهذا لاعلاقة تحديد نوعه ← هو انبي

سيني $\frac{(س-٢)^2}{٣٦} - \frac{(ص+١)^2}{٢٨} = ١$

صادي $\frac{(ص+١)^2}{٣٦} - \frac{(س-٢)^2}{٢٨} = ١$

٩. ما معادلة قطع مخروطي بعده ١٥ بؤرتيه أحدهما بعده بين رأسيه، ومركزه (٢،٤) إحدى بؤرتيه (٢،٦) ويمر بالنقطة (٦،٤).

الحل: ٢ ح > ١ ← ناقص معلومة

المركز (٢، ٤) ← ناقص سيني ← ح = ٥

المعادلة $\frac{(س-١)^2}{ا^2} + \frac{(ص-٢)^2}{ب^2} = ١$

النقطة (٦،٤) تحقق ← $\frac{٩}{ا^2} + \frac{١٦}{ب^2} = ١$ ... (١)

← ٩ ب٢ + ١٦ ا٢ = ا٢ ب٢

للكن العلاقة لسيني ح٢ = ا٢ - ب٢

← ٢٥ = ا٢ - ب٢ ... (٢)

بضوض معادلة (٢) ا٢ = ٢٥ + ب٢ في معادلة (١)

٩ ب٢ + ١٦ (٢٥ + ب٢) = (٢٥ + ب٢) × ب٢

← ب٤ = ٤٠٠ ← ب٢ = ٢٠

∴ ا٢ = ٢٠ + ٢٥ = ٤٥

∴ المعادلة $\frac{(س-١)^2}{٤٥} + \frac{(ص-٢)^2}{٢٠} = ١$

أستغفر الله وأتوب إليه

١٠. ما معادلة قطع مخروطي مركزه في وضعه القياسي و اختلافه المركزي $\frac{٤}{٣}$ ، و البعد بين بؤرتيه يزيد ٤ وحدات عن البعد بين رأسيه .

الحل : زائد لأنه $هـ > ١$ المركز (٠،٠) قياسي

نوعه : سيني و مهادي

$\frac{ج}{أ} = \frac{٤}{٣} \leftarrow ٣ج = ٤أ$

مطروح $٢ج = ٢أ + ٤ \leftarrow ج = أ + ٢$

$\therefore ٤ = ٢(أ + ٢) \Leftarrow أ = ٦$

$\therefore ج = ٨ \Leftarrow ب^{٢} = ج^{٢} - أ^{٢}$

$ب^{٢} + ٣٦ = ٦٤$

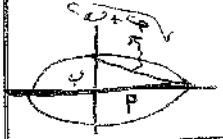
$ب^{٢} = ٢٨$

∴ المعادلة

سيني $\frac{س^{٢}}{٣٦} - \frac{هـ^{٢}}{٢٨} = ١$

مهادي $\frac{هـ^{٢}}{٣٦} - \frac{س^{٢}}{٢٨} = ١$

١١. ما معادلة قطع ناقص سيني بؤرتاه في القياسي مركزه (٠،٠) و اختلافه المركزي $\frac{١}{٢}$ و البعد بين رأسيه طرفي المحور الأصغر و يساوي ١٤



الحل : $\frac{ج}{أ} = \frac{١}{٢} \Leftarrow ٢ج = أ$

$١٤ = ٢ب \Leftarrow ٧ = ب$

$ج^{٢} + ب^{٢} = أ^{٢} \Leftarrow ١٤ = ج^{٢} + ٤٩$ ... ①

أيضاً $ج^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢}$

$\frac{ج^{٢}}{٤} = أ^{٢} - ب^{٢} \leftarrow ج^{٢} = \frac{٣أ^{٢}}{٤}$ ... ②

بحل المعادلة ① و ② $أ^{٢} = ٨$ ، $ب^{٢} = ٦$

∴ المعادلة $\frac{س^{٢}}{٨} + \frac{هـ^{٢}}{٦} = ١$

١٢. ما معادلة قطع مخروطي اختلافه المركزي $\frac{٥}{٣}$ ، و أحد رأسيه (١،٣) و البؤرة المقابلة (١،١) .

الحل : $هـ = \frac{٥}{٣} \leftarrow \frac{ج}{أ} = \frac{٥}{٣}$ بالقطع سيني

$٣ج = ٥أ$ *

المسافة بين رأسه و بؤرة قريبة $= أ - ج$

$٢ = أ - ج \leftarrow ج = أ - ٢$

$٣ج = ٥أ \leftarrow ٣أ + ٦ = ٥أ$

$٢أ = ٦ \leftarrow أ = ٣$

* $٣ج^{٢} = ٥أ^{٢} - ٣ب^{٢} = ٣(ج + ٢)^{٢} - ٣ب^{٢}$

$٣ج^{٢} = ٣ج^{٢} + ١٢ج + ١٢ - ٣ب^{٢}$

$٣ب^{٢} = ١٢ج + ١٢$

$ب^{٢} = ٤ج + ٤ \leftarrow ب^{٢} = ٤(٥) + ٤$

$ب^{٢} = ٢٤$

$\because$ المركز يقع على $س = ١$

$ج^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$ للقطع $\Leftarrow ٢٥ = ٩ + ب^{٢}$

$١٦ = ب^{٢}$

المركز (١،١) (١،٤) (١،-٢)

∴ المعادلة $\frac{(س - ١)^{٢}}{٩} + \frac{(هـ - ١)^{٢}}{١٦} = ١$

١٣. جد معادلة قطع مخروطي طول محوره المرافق ٨ وحدات . أحد رأسيه (٤،٣) و البؤرة المقابلة (٤،-٤) .

الحل : $٢ب = ٨ \leftarrow ب = ٤$

المسافة بين رأسه و بؤرة قريبة $= أ + ج$

$ج^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$ $\therefore ٨ = أ + ج$

$١٦ + ج^{٢} = (٨ - ج)^{٢} \Leftarrow$

$١٦ + ج^{٢} = ٦٤ - ١٦ج + ج^{٢} \Leftarrow ٣ = ج$

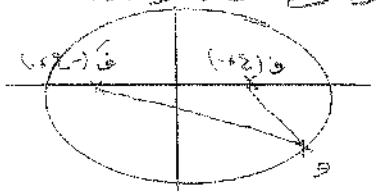
$٥ = أ$

المركز (٤،١) (٤،٦) (٤،-٤)

وائد سيني

$\frac{(س - ١)^{٢}}{٩} - \frac{(هـ - ٢)^{٢}}{١٦} = ١$

١٤. قطع ناقص بؤرتاه (٠، ٤)، (٠، -٤)
والنقطة (س، ص) واقعة عليه بحيث
محيط المثلث و ف ف' = ٢٤ وحدة.
جد معادلته؟



الحل:

و ف + و ف' + ف ف' = ٢٤

٢ أ + ٨ = ٢٤ (حسب التعريف)

٢ أ = ١٦ ← أ = ٨

ج = ٤ ← ٢ ج = ٨

لكن ٢ ب = ٢ أ - ٢ ج

١٦ = ٦٤ - ٢ ب ← ٢ ب = ٤٨

المركز (٠، ٠)

$\frac{س^2}{٤٨} + \frac{ص^2}{٦٤} = ١$

١٥. اكتب معادلة قطع ناقص اختلافه المركزي ٠,٦ وبعد البؤرة (٠، ٨-) ومركزه على المستقيم س = ٣ وبؤرتاه على المستقيم ص = ٣؟

الحل: البؤرة على المستقيم ص = ٣ ← سينى مركزه (٣، ٣)

$\frac{(س-٣)^2}{٢ أ} + \frac{(ص-٣)^2}{٢ ب} = ١$

* (٠، ٨-) تحقق المعادلة ← $\frac{٦٤}{٢ ب} + \frac{٩}{١٠٠} = ١$

٢ ب = ١٠٠ ←

ج = ٦ ← $\frac{ج}{أ} = \frac{٦}{١٠}$ ∴ ١٠ ج = ٦ أ ← ٢ أ = ١٠٠ ← أ = ١٠

* ٢ ب = ٢ أ - ٢ ج ← ٢ ب = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤ ← ب = ٨

∴ المعادلة $\frac{(س-٣)^2}{١٠٠} + \frac{(ص-٣)^2}{٦٤} = ١$

١٦. قطع ناقص معادلته $\frac{س^2}{١٦} + \frac{ص^2}{م^2} = ١$ وإحدى بؤرتيه (٠، ٣) صف النسبة م؟

الحل: بؤرة مركزه (٠، ٠) بؤرته (٠، ٣) ← صادي

∴ ٢ أ = م ، ٢ ب = ١٦ ، ٢ ج = ٩

∴ ٢ ج = ٢ م - ٢ ب

٩ = ٢ م - ١٦ ← ٢ م = ٢٥ ← م = ٥ ← ١ : ٥

* أسئلة تعتمد على تعريف القاطع والزائد *

١٧. ص = معادلة المحل لجميع النقاط المتحركة و(س، ص) بحيث مجموع بعديها عن النقطتين (١، ٢) (١، -٥) يساوي مقداراً ثابتاً = ١٠ وحدات

الحل: تعريف الناقص سيني مركزه (١، -١)

ج = ٤ ← ٢ ج = ٨ ، ٢ أ = ١٠ ← أ = ٥

لكن ٢ ج = ٢ أ - ٢ ب ← ٢ ب = ٢٥ - ١٦ = ٩ ← ب = ٩

∴ $\frac{(ص+١)^2}{٢٥} + \frac{(س-١)^2}{٩} = ١$

١٨. ص = معادلة المحل لجميع النقاط المتحركة ن(س، ص) بحيث الفرق المطلق لبعديها عن النقطتين (٣، ٨) (٣، -٤) يساوي ٦ وحدات.

الحل: تعريف الزائد ٢ ج = ١٢ ← ج = ٦

زائد صادي مركزه (٣، ٣) ⇐ ٢ أ = ٦ ← أ = ٣

لكن ٢ ج = ٢ أ + ٢ ب

٣٦ = ٩ + ٢ ب ← ٢ ب = ٢٧

∴ المعادلة $\frac{(ص-٣)^2}{٩} - \frac{(س-٣)^2}{٢٧} = ١$

ورقة عمل "١"

١. قطع ناقص مساحته ٣٣ ، رأساه (±٥ ، ٠) . جد معادلته ؟

٢. (٢س − ٥ص)(٢س + ٥ص) = −١ . جد طول المحور المقاطع ؟ [٥ ج]

٣. ٢ص² − ٢س² − ١٨س − ٣٣ = ٠ . جد طول المقاطع [٢٧ ج]

٤. جد بعد البؤرة عن الرأس المجاور للقطع (٤٧ ، ٣٠) عن بؤرتي القطع ٩س² − ١٦ص² = ١٤٤ [٨]

٥. إذا كان هـ١ ، هـ٢ الاختلاف المركزي للقطعين

$\frac{س^2}{ل^2} - \frac{ص^2}{ك^2} = ١$ ، $\frac{ص^2}{ك^2} - \frac{س^2}{ل^2} = ١$

أثبت أن $\frac{١}{هـ_١^2} + \frac{١}{هـ_٢^2} = ١$

الله أكبر على كل شيء

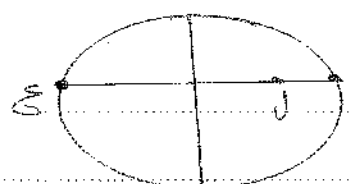
٦. إذا كان الاختلاف المركزي للقطع $\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ هو هـ١

وللقطع $\frac{س^2}{ب^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ هو هـ٢ ، بين أن

$(هـ_١)^2 + (هـ_٢)^2 = ٢$

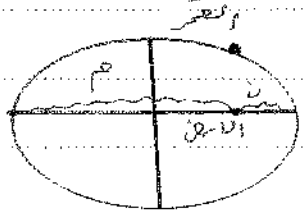
٧. إذا كان البعد بين بؤرتي قطع ناقص يساوي نصف البعد بين طرفي محوريه الأصغر والأكبر . جد هـ ؟ [٧ ج ١٧]

٨. في الشكل النسبة بين م ل : ع ل هي ١ : ٢ ، جد هـ



٩. إذا كان القمر يدور حول الأرض كما بالشكل

أثبت أن هـ = $\frac{م - ن}{م + ن}$



١٠. قطع ناقص بعده البؤري يساوي طول محوره الأصغر

رقم الصفحة (١٠)

جد هـ

١١. إذا كان $س^2 + 3 ص^2 = 19$ ، وإذا علمت أن هذه معادلة قطع ناقص حسيني. أثبت أن $ك = \frac{19}{س^2 + ص^2}$

** ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة :-

١٢. $9 س^2 - 16 ص^2 = 144$ ، $ن(س، ص)$ نقطة تقع عليه. جد بعزمه المطلوب بعدي النقطة (ن) ويؤثران بقطع

أ. 6 ب. 8 ج. 9 د. 16

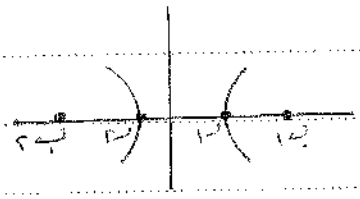
١٣. $5 س^2 + 4 ص^2 = 20$ ، فإن $ه =$

أ. $\frac{1}{2}$ ب. $\frac{1}{\sqrt{7}}$ ج. $\frac{3}{4}$ د. $\frac{3}{\sqrt{7}}$

١٤. $\frac{س^2}{9} + \frac{ص^2}{25} = 1$ ، مجموع طولي محوره الصغير والكبير

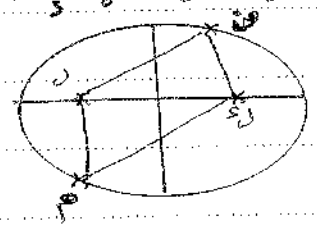
أ. 16 ب. 25 ج. 8 د. 34

١٥. $\frac{ب ب_1}{ب ب_2} = \frac{1}{5}$ ، حيث $ه$ هي



أ. $\frac{5}{3}$ ب. $\frac{3}{2}$ ج. $\frac{4}{3}$ د. $\frac{7}{3}$

١٦. ل ، ل بؤرتا قطع مخروطي معادلته $64 س^2 + 100 ص^2 = 6400$ ، فإن محيط المثلث ن ل م ل يساوي

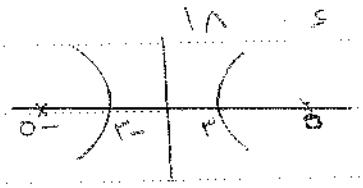


أ. 32 ب. 40 ج. 36 د. 24

١٧. النقطة $ن(س، ص)$ واقعة على محيط قطع ناقص والذي مساحته (32π) ، وطول محوره الصغير 8 وحدات. بؤرتاه ب ، ب ، فإن محيط المثلث ن ب ب

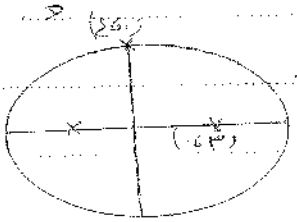
أ. 13 ب. 14 ج. 16 د. 18

١٨. البعد البؤري يساوي



أ. 10 ب. 4 ج. 5 د. 3

١٩. طول المحور الأكبر



أ. 5 ب. 10 ج. 12 د. 7

* القطع المكافئ *

تعريف : هو مجموعة جميع النقاط في المستوى والتي تكون بعدها عن نقطة ثابتة (البؤرة) مساوياً بعدها عن مستقيم معلوم (ل) ويسمى دليل القطع المكافئ

① دليل — رأس (أ، هـ) — بؤرة

② دليل — رأس (أ، هـ) — بؤرة

③ بؤرة — رأس (أ، هـ) — دليل

④ دليل — رأس (أ، هـ) — بؤرة

المعادلة حسب الترتيب :

① $(ص - هـ)^2 = 4 ب (س - د)$

② $(ص - هـ)^2 = -4 ب (س - د)$

③ $(س - د)^2 = 4 ب (ص - هـ)$

④ $(س - د)^2 = -4 ب (ص - هـ)$

ب = المسافة بين الرأس والبؤرة

أو المسافة بين الرأس والدليل

أمثلة

* عناصر القطع فيما يلي :-

١. احداثيات الرأس ٢. احداثيات البؤرة

٣. معادلة الدليل ٤. معادلة المحور المعامل

١. $(ص - ٢)^2 = -12 (س + ٦)$

الحل : الرأس $(-٦، ٢)$ $4ب = 12$

البؤرة $(-٩، ٢)$ $ب = 3$

الدليل $س = -3$

المحور $ص = 2$

٢. $(س + ٣)^2 = (ص - ١)$

الحل : الرأس $(-٣، ١)$

$4ب = 1 \Leftarrow ب = \frac{1}{4}$

البؤرة $(-٣، \frac{5}{4})$

معادلة الدليل $ص = \frac{3}{4}$

معادلة المحور المعامل $س = -3$

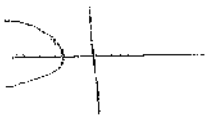
ياعيني عالرياضيات

٣ $ص^2 = -8س + 16$

الحل: $(ص-0)^2 = -8(س-2)$

الرأس $(2، 0)$ $\quad 4د = -8 \Leftarrow د = -2$

البؤرة $(0، 0)$



دليل $\quad س = 4$

تماثل $\quad ص = 0$ ∴

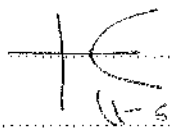
٤ $(ص+1)^2 + 8 - 4س = 0$ ∴

الحل: $(ص+1)^2 = 4س - 8$ نخرج

$(ص+1)^2 = 4(س-2)$

الرأس (القطع) $(2، -1)$ $\quad 4د = 4$

$د = 1$



البؤرة $(3، -1)$

الدليل $\quad س = 1$

التماثل $\quad ص = -1$

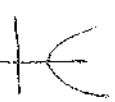
٥ $(2ص - 8)^2 = 24س + 48$

الحل: نخرج $(2(ص-4))^2 = 24(س+2)$

$4(ص-4)^2 = 24(س+2)$

$(ص-4)^2 = 6(س+2)$

الرأس (القطع) $(-2، 4)$



$4د = 6 \Leftarrow د = \frac{3}{2}$

بؤرة القطع $(-\frac{1}{2}، 4)$

دليل القطع $\quad س = -\frac{7}{2}$

محور التماثل $\quad ص = 4$

٦ $4ص^2 - 4س - 8ص = 3$

الحل: نتابع اكمال مربع لكن بحيث معامل $ص^2$ يصبح

$4ص^2 - 8ص = 4س + 3$

$4(ص^2 - 2ص) = 4س + 3$

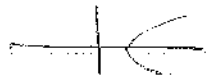
نخسف $(\frac{1}{4} \times -2)^2$

$4(ص^2 - 2ص + 1) = 4س + 3 + 4$

$4(ص-1)^2 = 4س + 7$

$(ص-1)^2 = (س + \frac{7}{4})$

الرأس (القطع) $(-\frac{7}{4}، 1)$



بؤرة القطع $(-\frac{6}{4}، 1)$ $\quad 4د = 1 \Leftarrow د = \frac{1}{4}$

الدليل $\quad س = -2$

التماثل $\quad ص = 1$

٧ $9ص^2 - 8س + 18ص + 33 = 0$ ∴

الحل: $9ص^2 + 18ص = 8س - 33$

$9(ص^2 + 2ص) = 8س - 33$

نخسف $(\frac{1}{2} \times 2)^2$

$9(ص^2 + 2ص + 1) = 8س - 33 + 9$

$9(ص+1)^2 = 8س - 24$

$(ص+1)^2 = \frac{8}{9}(س - \frac{24}{8})$

$(ص+1)^2 = \frac{8}{9}(س - 3)$

الرأس (القطع) $(3، -1)$

$4د = \frac{8}{9} \Leftarrow د = \frac{2}{9}$

بؤرة القطع $(\frac{-21}{4} + \frac{2}{9}، -1)$

$= (-\frac{181}{36}، -1)$

الدليل $\quad س = -\frac{21}{4} - \frac{2}{9} = -\frac{197}{36}$

التماثل $\quad ص = -1$

٨ حدد عناصر القطع المكافئ فيما يلي: واكتب

١. $2ص^2 + 4س - 8ص = 6$

٢. $ص^2 = 3س - 4$

٣. $س = ص^2 - 2ص + 5$ $\quad = 1$

٤. $ص = \frac{1}{4}س^2 + س + 3$

٥. $2ص^2 - 12ص - 16س = 14$

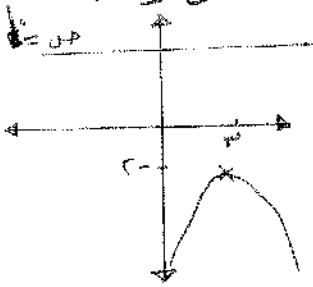
إيجاد معادلة القطع المكافئ

الرسم بشكل دقيق وبياعد كبيرا باطل ⇐
خطوات بسيطة : ١. ارسم بدقة
٢. حدد نوعه وتكتب المعادلة العامة
٣. جد الرأس وقيمة $أ$.
٤. عوض في المعادلة .

أمثلة

١. ما معادلة قطع مكافئ رأسه $(٣، -٢)$ ودليله $ص = ١٠$

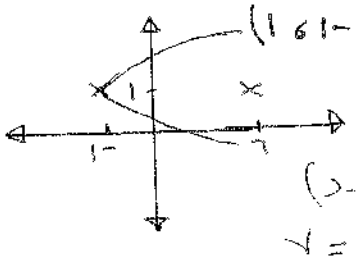
الحل :



$(س - ٣)^{٢} = -٤ أ (ص + ٢)$
$أ = ٣ - (-٢) = ٥$
$-٤ أ = -٤ \times ٥ = -٢٠$
$(س - ٣)^{٢} = -٢٠ (ص + ٢)$

٢. ما معادلة قطع مكافئ بؤرته $(٦، ١)$ ورأسه $(-١، ١)$

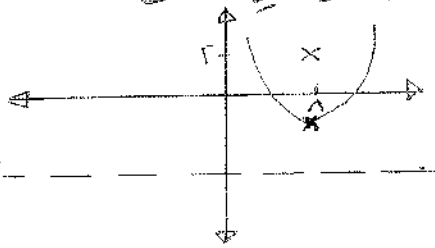
الحل :



$(ص - ١)^{٢} = ٤ أ (س + ١)$
$أ = ٦ - (-١) = ٧$
الرأس $(-١، ١)$
$(ص - ١)^{٢} = ٢٨ (س + ١)$

٣. ما معادلة قطع مكافئ بؤرته $(٨، ٢)$ ودليله $ص = -١٢$

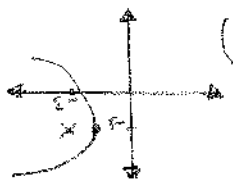
الحل :



$(س - ٨)^{٢} = ٤ أ (ص - ٥)$
$أ = ٢ - (-١٢) = ١٤ \Leftarrow ٢ أ = ٢٨$
الرأس $(٨، ٥)$
∴ المعادلة $(س - ٨)^{٢} = ٢٨ (ص - ٥)$

٤. ما معادلة قطع مكافئ بؤرته $(-٤، -٣)$ ودليله محور الصادات .

الحل :

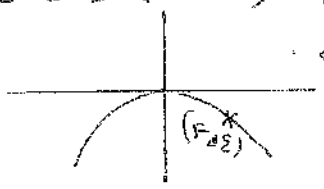


$(ص - هـ)^{٢} = -٤ أ (س - د)$
$٢ أ = ٠ - (-٤) \Leftarrow ٢ أ = ٤$
$أ = ٢$
الرأس $(-٤، -٣)$
∴ المعادلة $(ص + ٣)^{٢} = -٨ (س + ٤)$

ملاحظة : نجد $أ$ عند وجود رأسه مع بؤرة أو دليله .....
وعند عدم وجود معلومات مباشرة لإيجاد $أ$ نستفيد من النقطة التي تقع على المنحنى (القطع).

٥. ما معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل ومر بالنقطة $(٤، -٢)$ ومتماثل حول محور الصادات .

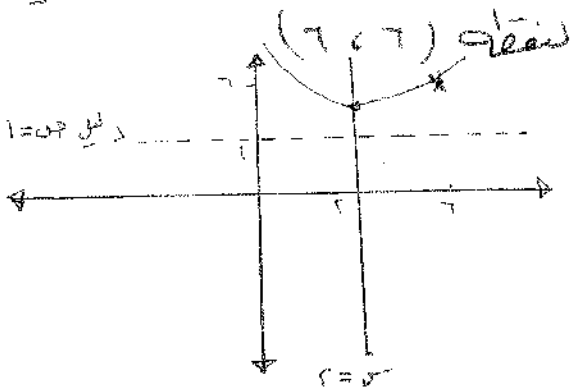
الحل :



$س^{٢} = -٤ أ ص$
$(٤، -٢)$ تحقق المعادلة
$١٦ = -٤ أ \times (-٢) \Leftarrow ١٦ = ٨ أ$
$أ = ٢$
$\therefore س^{٢} = -٨ ص$

حسبي الله في الذي في بالي

٦ . جد معادلة قطع مكافئ محوره
س = ٢ ، ودليله ص = ١ ، ويمر
بالنقطة (٦ ، ٦)



$(س - د)^2 = 4 ج (ص - هـ)$

البؤرة $(٢ ، ١ + ج)$

$(س - ٢)^2 = 4 ج (ص - (١ + ج))$

النقطة $(٦ ، ٦)$ تحقق

$(٤)^2 = 4 ج (٦ - ١ - ج)$

$١٦ = 4 ج (٥ - ج)$

$١٦ = ٢٠ ج - 4 ج^2$

$4 ج^2 - ٢٠ ج + ١٦ = ٠$

$ج^2 - ٥ ج + 4 = ٠$

$(ج - 4)(ج - ١) = ٠$

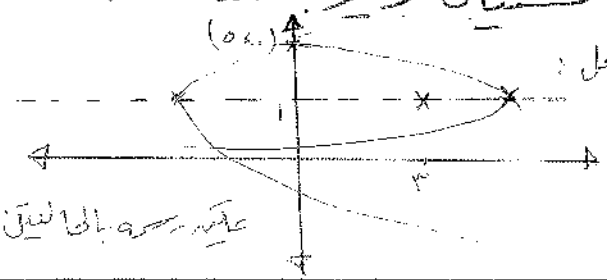
$ج = 4$ أو $ج = ١$ معادلة القطع

$ج = ١ \Leftarrow (س - ٢)^2 = 4 (ص - ٢)$

$ج = 4 \Leftarrow (س - ٢)^2 = ١٦ (ص - ٥)$

٧ . جد معادلة قطع مكافئ بؤرته
$(١ ، ٣)$ ومحور تماثله يوازي محور
السينات ويمر بالنقطة $(٥ ، ٠)$

الحل :



بما أن القطع على اليسار

المعادلة على الصورة $(ص - هـ)^2 = -4 ج (س - د)$

البؤرة $(٣ + ج ، ١)$ تحقق $(د ، هـ)$

$(ص - ١)^2 = -4 ج (س - (٣ + ج))$

النقطة $(٠ ، ٥)$ تحقق

$١٦ = -4 ج (٠ - ٢ - ج)$

$١٦ = ١٢ ج + 4 ج^2$

$ج^2 + ٣ ج - 4 = ٠$

$(ج + 4)(ج - ١) = ٠$

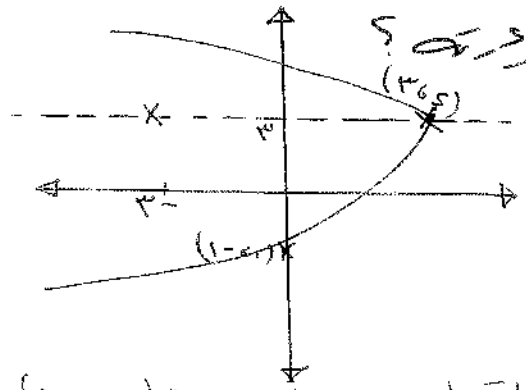
$ج = -4$ ، $ج = ١$

$ج = ١ \Leftarrow (ص - ١)^2 = -4 (س - 4)$

$ج = -4 \Leftarrow (ص - ١)^2 = ١٦ (س + ١)$

٨ . جد معادلة قطع مكافئ بؤرته $(-٣ ، ٣)$
ويمر بالنقطة $(٠ ، -١)$ ورأسه على
محور السينات

الحل :



المعادلة $(ص - هـ)^2 = -4 ج (س - د)$

البؤرة $(د - ج ، ٣)$

$\therefore (ص - ٣)^2 = -4 ج (س - (د - ج))$

$د = ٥ - ٢$
$د + ج = ٢$
$ج = ٢ - ٥$

$(ص - ٣)^2 = -4 ج (س - ج - ٢)$

$(٠ ، -١)$ تحقق

$١٦ = -4 ج (٠ - ج + ٢)$

$١٦ = 4 ج^2 - ١٢ ج$

$ج^2 - ٣ ج - 4 = ٠$

$ج = 4$ ، $ج = -١$ مرفوض

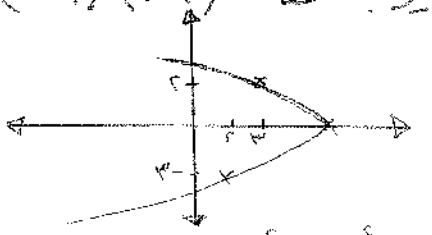
المعادلة

$(ص - ٣)^2 = -١٦ (س - ١)$

ملاحظة A :-
إذا علم محور تماثل وبؤرة القطع المكافئ
ونقطتين ← (نوع A خاص)

٩. جد معادلة قطع مكافئ محوره
ص = ٠ ويمر بالنقط (٢،٣) (٣،٢) (-٢،٤)

الحل:



واضح أن الرأس أقرب إلى النقطة
الأقل عن محور التماثل ∴ النقطة يسار
الرأس (٠،٤) لأنه على محور السينات

ص^٢ = -٤ د (س - د)

(٣،٢) تحقق ٤ = -٤ د (٣ - د) نقسم
(-٢،٢) تحقق ٩ = -٤ د (-٢ - د) المعادلتين

$\frac{4}{9} = \frac{-2-د}{3-د}$ ← $5 = \frac{19}{5}$

نعوض في المعادلة ①

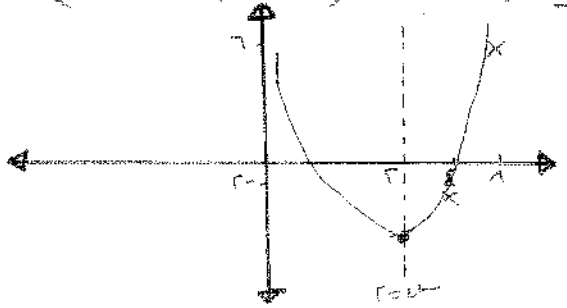
$4 = -4 د \left(3 - \frac{19}{5}\right)$ ← $د = \frac{5}{4}$

∴ المعادلة

$ص^2 = -5 \left(س - \frac{19}{5}\right)$

١٠. جد معادلة قطع مكافئ محوره س = ٣
ويمر بالنقط (٦،٨) (٤،-٢)

الحل:



الرأس (٣،هـ)

$(س - 3)^2 = 4 د (ص - هـ)$

$(6،8) \leftarrow 36 = 4 د (6 - هـ)$ نقسم
$(4،-2) \leftarrow 4 = 4 د (-2 - هـ)$ المعادلتين

$9 = \frac{6 - هـ}{2 + هـ}$ ← $هـ = -3$

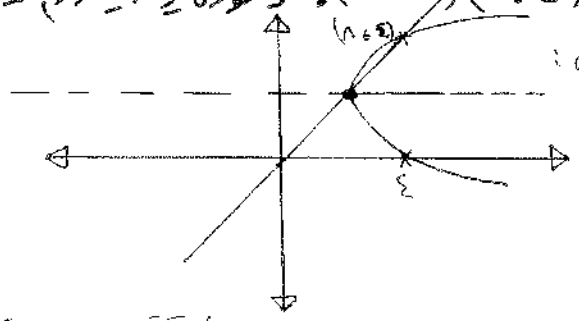
نعوض في الأولى ← $36 = 24 د$ ← $د = 1$

∴ المعادلة $(س - 3)^2 = 4 (ص + 3)$

ملاحظة B :-
إذا مرت بؤرة قطع مكافئ بنقطتين
ورأسه يقع على خط مستقيم

١١. جد معادلة قطع مكافئ رأسه على
المستقيم ص = ٢س ويمر بالنقط
(٠،٤) (٨،٤) ومحوره يوازي محور السينات.

الحل:



الرأس (ك، هـ) يقع على المستقيم ص = ٢س
∴ هـ = ٢ك ← الرأس (ك، ٢ك)

المعادلة $(ص - 2ك)^2 = 4 د (س - ك)$

(٠،٤) تحقق $(-2ك)^2 = 4 د (4 - ك)$ نقسم ①
(٨،٤) تحقق $(2ك)^2 = 4 د (4 - ك)$ ②

$1 = \frac{4 د^2}{(2ك - 8)^2}$

$4ك^2 = 16 - 16ك + 4د^2$

$ك = 2$ ← نعوض في ① ($د = 2$)

∴ المعادلة $(ص - 4)^2 = 8 (س - 1)$

حالة خاصة جدا "جدا" :-
إيجاد معادلة قطع مكافئ إذا علم نوع المحور أو دليله للقطع ويقع عليه ٣ نقاط :

أ. إذا محوره يوازي الصادات أو دليله يوازي السينات

$ص = أس^2 + بس + جـ$

ب. إذا محوره يوازي السينات أو دليله يوازي الصادات

$س = أص^2 + بص + جـ$

١٢: جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات ويمر بالنقط (٠،٥) (٠،٤) (٢،٣) ؟ (٢٠١١)

الحل: المعادلة هي $ص = أس^2 + بس + جـ$

(٠،٥) $\Rightarrow$ $٥ = أ(٠)^2 + ب(٠) + جـ$ $\Rightarrow$ $جـ = ٥$

(٠،٤) $\Rightarrow$ $٤ = أ(٠)^2 + ب(٠) + ٥$ $\Rightarrow$ $٤ = ١٦أ + ٤ب + ٥$ ①

(٢،٣) $\Rightarrow$ $٣ = أ(٢)^2 + ب(٢) + ٥$ $\Rightarrow$ $٣ = ٤أ + ٢ب + ٥$ ②

بالحذف أو التعويض

$أ = -١$ ، $ب = ٤$

$\therefore ص = -١س^2 + ٤س + ٥$

١٣: جد معادلة قطع مكافئ محوره يوازي محور السينات ويمر بالنقاط (١،٣) (-٣،٣) (٦،٣) ؟ (٢٠٠٣)

الحل: المعادلة $س = أص^2 + بص + جـ$

(١،٣) $\Rightarrow$ $١ = أ(٣)^2 + ب(٣) + جـ$ $\Rightarrow$ $١ = ٩أ + ٣ب + جـ$ ①

(-٣،٣) $\Rightarrow$ $-٣ = أ(٣)^2 + ب(٣) + جـ$ $\Rightarrow$ $-٣ = ٩أ + ٣ب + جـ$ ②

(٦،٣) $\Rightarrow$ $٦ = أ(٣)^2 + ب(٣) + جـ$ $\Rightarrow$ $٦ = ٩أ + ٣ب + جـ$ ③

معادلة ① - ② $\Rightarrow$ $٤ = ٦ب$ $\Rightarrow$ $ب = \frac{٢}{٣}$ ④

معادلة ① - ③ $\Rightarrow$ $-٥ = -٦ب$ $\Rightarrow$ $ب = \frac{٥}{٦}$ ⑤

⑤ - ④ $\Rightarrow$ $\frac{٥}{٦} - \frac{٢}{٣} = ٩أ$ $\Rightarrow$ $\frac{١}{٦} = ٩أ$ $\Rightarrow$ $أ = \frac{١}{٥٤}$

نعوض في ④ $\Rightarrow$ $ب = \frac{٢}{٣}$

نعوض في ① $\Rightarrow$ $جـ = \frac{٣٥}{٦}$

$\therefore$ المعادلة $س = \frac{١}{٥٤}ص^2 + \frac{٢}{٣}ص + \frac{٣٥}{٦}$

١٤: أ. هل معادلة قطع مكافئ دليله واجب يوازي السينات ويمر بالنقط (٠،١) (-١،٦) (٢،٣) ؟

الجواب: $ص = ٢س^2 - ٣س + ١$

ب. هل معادلة مكافئ يوازي محور الصادات ويمر بالنقط (٠،٤) (٣،٠) (-١،٨) ؟

الجواب: $ص = س^2 + ٤س + ٤$

ج. هل معادلة مكافئ محوره يوازي السينات ويمر بالنقط (١،٢) (-٢،٦) (١،٦) ؟

الجواب: $س = ص^2 + ٢ص + ٣$

د. هل معادلة مكافئ محوره $س = ٢$ ويمر بالنقط (٠،٥) (١،٣) ؟

الجواب: $(ص+٢)^2 = \frac{٤}{٣}(س + \frac{١٢}{٥})$

هـ. هل معادلة مكافئ رأسه على المستقيم $ص = س$ ومحوره يوازي الصادات ويمر بالنقط (٣،٥) (٤،٣) ؟

الجواب: $(س-٣)^2 = ٤(ص-٣)$

رقم الصفحة (١٧)

أسئلة مميزة ومنوعة على القطع المكافئ :-

* نفتقد على تعريف القطع المكافئ .

أو

* نفتقد على الصورة العامة لمعادلة القطع (أسئلة عكسية "مركبة").

---

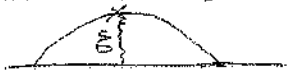
① . نفرض شكل قطع مكافئ .

معادلة $ص = ٤س - س^٢$ ،

باستخدام مفهوم القطع المكافئ ،

جد أقصى ارتفاع للنفوق ؟

الحل: المعادلة مكافئ تربيعي أحادي المتغير



الرأس

* نحتاج المربع الكامل $ص = -(س^٢ - ٤س)$

$-ص = س^٢ - ٤س$

نضيف $(\frac{١}{٢} \times -٤)^٢$ للطرفين

$-ص + ٤ = س^٢ - ٤س + ٤$

$(س - ٢)^٢ = -١(ص - ٤)$

∴ إلى أسفل (٢ ، ٤)

∴ هو أقصى ارتفاع

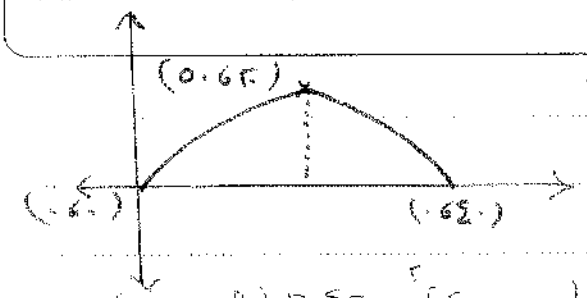
---

② . أطلقت قذيفة من مستوى سطح ٢٠٠ م لأعلى وعادت لنفس المستوى، وكان مسارها على شكل قطع مكافئ ، إذا كان أعلى ارتفاع وصلت القذيفة ٥٠ متر ، وأقصى مدى أفقي ٤٠ متر معتبراً نقطة الانطلاق (٠ ، ٠) جد

أ . معادلة المكافئ .

ب . ارتفاع القذيفة عن سطح الأرض عندما يكون الارتفاع مساوياً لثلاثة أمثال المسافة بين نقطتي الانطلاق والسقوط على الأرض .

الحل :



أ . $(س - ى)^٢ = -٤ أ (ص - هـ)$

$(س - ٢٠)^٢ = -٤ أ (ص - ٥٠)$

لإيجاد أ جـ النقطة (٠ ، ٠) تحقق

$٤٠٠ = -٢٠٠ أ \Leftarrow$ جـ $= ٢$

∴ المعادلة $(س - ٢٠)^٢ = -٨ (ص - ٥٠)$

ب . نفرض الارتفاع بطول ع وهو يساوي بالمسافة الأفقية بطوله ع

∴ (ع ، ع) تقع على معادلة المكافئ

نعوض بالمعادلة $(ع - ٢٠)^٢ = -٨ (ع - ٥٠)$

$ع^٢ - ٤٠ع + ٤٠٠ = -٨ع + ٤٠٠$

$ع^٢ - ٣٢ع = ٠ \Leftarrow ع = ٠ ، ع = ٣٢$

∴ الارتفاع المقذيفة = ٣٢ متر .

---

③ . أ ب هو قوس على شكل قطع مكافئ ، معتبراً أسفل طول قاعدة القوس ١٢ متر ، ورأس القوس يرتفع ٩ متر عن قاعدته . جد معادلة القوس علماً أن محاور الإحداثيات وقاعدته تنطبق على محور السينات .

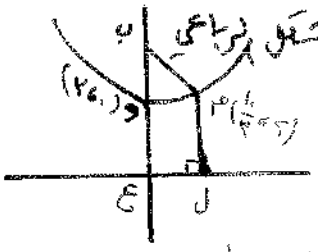
الجواب : $س^٢ = -٤ (ص - ٩)$

ب . قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة $ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^٢$ أحسب أقصى ارتفاع للجسم مستخدماً مفهوم القطع المكافئ .

الجواب : ٤٠ م

ملاحظة: حسب تعريف القطع المكافئ:
المسافة بين النقطة المتحركة على القطع وبؤرته
تساوي المسافة بين النقطة المتحركة ودليله.
* وتسمى هذه المسافة = بعد النقطة المتحركة عن الرأس.

٤ في الشكل المجاور رأس (٣،٠) وبؤرته (ب) ودليله محور الصادات ونقطة م (٢، $\frac{1}{3}$) تقع عليه، مطلوب: جد محيط الشكل الرباعي ل م ب ع.



الحل: ل م = ٢

ل م = $\frac{1}{3}$ = م ب = $\frac{1}{3}$

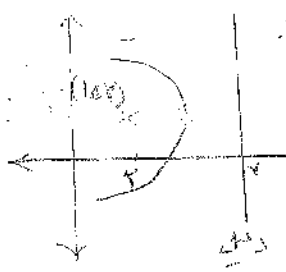
ع و = ٣ = و ب = ٣

∴ المحيط = ل ع + ل م + م ب + ب ع

= ٢ + $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{3}$ + ٦ = $\frac{٤٤}{٣}$

٥ ما معادلة الشكل الهندسي للنقطة المتحركة ن (س، ص) بحيث بعدها عن النقطة (٣، ١٠) يساوي بعدها عن المستقيم س = ٧.

الحل: هذا تعريف القطع المكافئ
بؤرته (٣، ١٠) ودليله س = ٧



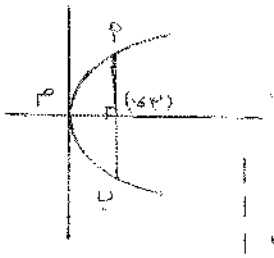
∴ ٢ د = ٤ ← د = ٢

(ص − هـ)^{٢} = ٤ د (س − د)

الرأس (٥، ١٠)

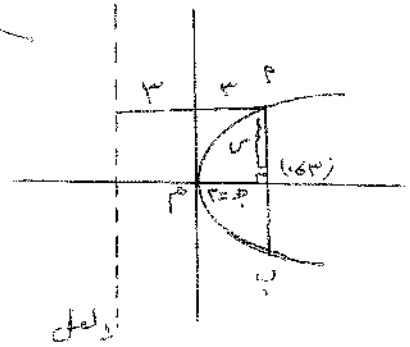
(ص − ١٠)^{٢} = −٨ (س − ٥)

٦ الشكل المجاور يمثل قطع مكافئ بؤرته (٣،٠) ورأسه نقطة الأصل (م)



جد: ١. طول القطع ب ب'.
٢. طول القطع ب م.

الحل:

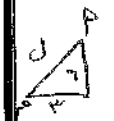


١. حسب تعريف المكافئ:
بعد النقطة المتحركة م عن البؤرة (٣،٠) يساوي بعدها عن الدليل

∴ س = ٦

∴ ب ب' = ٢ س = ٢ × ٦ = ١٢

٢. ∵ ب ب' عمودية على المحور
∴ المحور ينصف ب ب'.



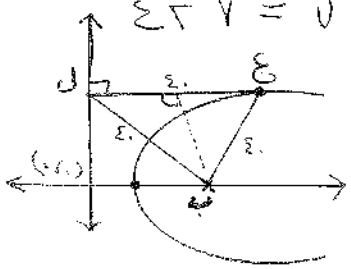
في ل م ل حسب فيثاغورس

ل م^{٢} = ٦^{٢} + ٢^{٢}

ل م^{٢} = ٣٦ + ٦ = ٤٢

ل م = $\sqrt{٤٢}$

٧ قطع مكافئ بؤرته (ب)، ل ب ع ل مثلث متساوي الأضلاع وطول ضلعه ٤٠ وحدة. جد معادلته.



الحل: الرأس (٥، ٠) حسب تعريف المكافئ ع ب = ع ل
← دليل القطع هو محور الصادات ← نزل عمود من ع على ل
← ب م = ٣ = ٢ م ← ٢ م = ١٠ ← البؤرة (٧،٠)

المعادلة:
ص^{٢} = ٤٠ (س − ٥)

* الدائرة *

تعريف الدائرة :

هي مجموعة النقط التي بعدها عن نقطة ثابتة (تسمى المركز) يساوي عددًا ثابتًا (طول نصف القطر).

① الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = ر^2$

حيث المركز $(د ، هـ)$ ، نصف القطر $= ر$

② الصورة العامة لمعادلة الدائرة

$س^2 + ص^2 + 2ل س + 2م ص + ن = 0$

حيث المركز $(\frac{1}{2} \times \text{معامل } س \times -1 ، \frac{1}{2} \times \text{معامل } ص \times -1)$

$= (-ل ، -م)$

أي أن $ر = \sqrt{ل^2 + م^2 - ن}$

بشرط معادلة الدائرة هي أن

معامل $س^2$ = معامل $ص^2$

* وشرط التطبيق أن يكون

معامل $س^2$ = معامل $ص^2 = 1$

* أسئلة *

* جد مركز ونصف قطر الدائرة:

١. $(س - 7)^2 + (ص - 5)^2 = 100$

المركز $(7 ، 5)$ $\quad$ $ر^2 = 100$

$ر = 10$

٢. $(ص + 9)^2 + (س - \frac{1}{2})^2 = 7$

المركز $(\frac{1}{2} ، -9)$

$ر^2 = 7 \longleftarrow ر = \sqrt{7}$

٣. $س^2 + (ص + 2)^2 = 25$

الحل: المركز $(0 ، -2)$

$ر^2 = 25 \longleftarrow ر = 5$

٤. $(2س - 6)^2 + (8 - 2ص)^2 = 36$

بقسمة $(2(س - 3))^2 + (-2(ص - 4))^2 = 36$

$4(س - 3)^2 + 4(ص - 4)^2 = 36$

$(س - 3)^2 + (ص - 4)^2 = 9$

المركز $(3 ، 4)$ $\quad$ $ر^2 = 9 \longleftarrow ر = 3$

٥. $2س^2 + 2ص^2 - 12س = 14$

بقسمة الدائرة على الصورة العامة

$س^2 + ص^2 - 6س - 7 = 0$

المركز $(\frac{1}{2} \times -6 ، 0) = (3 ، 0)$

$ر = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 - (-7)} = \sqrt{16} = 4$

٦. $س^2 + ص^2 - 6ص - 4س = 10$

بجعل $س^2 + ص^2 - 4س - 6ص - 10 = 0$

المركز $(\frac{1}{2} \times -4 ، \frac{1}{2} \times -6) = (2 ، -3)$

نصف $ر = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 - (-10)} = \sqrt{23}$

٧. $2س^2 + 2ص^2 - 8س = \frac{9}{2}$

بقسمة $س^2 + ص^2 - 4س = \frac{9}{4}$

$\frac{1}{2} \times \to 0$

$س^2 + ص^2 - 4س - \frac{9}{4} = 0$

المركز $(\frac{1}{2} \times -4 ، 0) = (2 ، 0)$

$ر = \sqrt{(2)^2 + (0)^2 - (-\frac{9}{4})} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

٨. دائرة معادلتها

$س^2 + ص^2 + م ص - \sqrt{3} = 0$ ومركزها $(1 ، -3)$ ، جد الثابت م.

الحل: المركز $(\frac{1}{2} \times -م ، \frac{1}{2} \times -\sqrt{3}) = (1 ، -3)$

$(\frac{م}{2} ، \frac{\sqrt{3}}{2}) = (1 ، -3)$

$\frac{م}{2} = -3 \longleftarrow م = -6$

٩. دائرة نصف قطرها (٢) ومعادلتها
$٥س^{٢} + ٥ص^{٢} - ١٢س + ٢٠ص + ك = ٠$
جد ثابت $ك$:

الحل : نقسم $س^{٢} + ص^{٢} - \frac{١٢}{٥}س + ٤ص + \frac{ك}{٥} = ٠$
المركز $(-\frac{-١٢}{٥} \times \frac{١}{٢} ، -٤ \times \frac{١}{٢}) = (\frac{٦}{٥} ، -٢)$
نق $= \sqrt{\frac{٣٦}{٢٥} + ٤ - \frac{ك}{٥}}$
$٢ = \sqrt{\frac{٣٦}{٢٥} + ٤ - \frac{ك}{٥}}$ نربع
$٤ = \frac{٣٦}{٢٥} + ٤ - \frac{ك}{٥}$
$\frac{ك}{٥} = \frac{٣٦}{٢٥} + ٤ - ٤ = \frac{٣٦}{٢٥}$
$ك = ٣٦$

١٠. $س^{٢} + ص^{٢} - ٢أس + ٢بص + ٢ = ٠$
دائرة مركزها $(٤ ، -٥)$ ، جد
أ. الثوابت $أ ، ب$ ب. مساحة الدائرة

الحل : المعادلة جاهزة
أ. $(-\frac{-٢أ}{٢} ، -\frac{٢ب}{٢}) = (٤ ، -٥)$
$\frac{أ}{١} = ٤ \leftarrow أ = ٨$
$-\frac{ب}{١} = -٥ \leftarrow ب = ١٠$

ب. نجد نق $= \sqrt{٤^{٢} + (-٥)^{٢} - ٢} = \sqrt{٤٣}$
$\therefore$ المساحة $= \pi$ نق$^{٢} = \pi \times (\sqrt{٤٣})^{٢} = ٤٣\pi$

١١. $(أ - ١)س^{٢} + ٢ص^{٢} - ٦س + ١٢ص + ٨ = ٠$
عرس
دائرة ، جد أ. ثابت $أ$
ب. المركز
د. نصف القطر

أ. $أ = ٣$

ب. المركز $(\frac{٣}{٢} ، -٣)$

ج. نق $= \frac{\sqrt{٦٧}}{٣}$

جد معادلة الدائرة في الحالات التالية :-

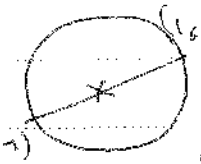
١. المركز $(١ ، -٧)$ ونصف قطرها ٨ وحدات
$(س - ١)^{٢} + (ص + ٧)^{٢} = ٦٤$

٢. المركز $(٢ ، -٤)$ وقطرها ١٠ وحدات
نصف القطر $= ٥$
$\therefore$ المعادلة $(س - ٢)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٢٥$

٣. المركز $(٢ ، -٣)$ ومر بالنقطة $(٥ ، ٠)$
$\therefore$ المعادلة $(س - ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = نق^{٢}$
النقطة $(٥ ، ٠)$ تحقق $\leftarrow$ نعوض
$نق^{٢} = ٩ + ٤ \leftarrow نق^{٢} = ١٣ \leftarrow نق = \sqrt{١٣}$
$\therefore$ المعادلة $(س - ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ١٣$

٤. نهايتا قطر الدائرة
$م_{١} (٦ ، -٣) ، (٤ ، ١)$

الحل : المركز $=$ نقطة المنتصف
قانون : احداثيا منتصف قطعة مستقيمة
تواصله بين النقطة $(س_{١} ، ص_{١}) ، (س_{٢} ، ص_{٢})$
هو $(\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢} ، \frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢})$
$= (\frac{٦ + ٤}{٢} ، \frac{-٣ + ١}{٢}) = (٥ ، -١)$
$\therefore$ المعادلة
$(س - ٥)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = نق^{٢}$



النقطة $(٤ ، ١)$ تحقق
$(٤ - ٥)^{٢} + (١ + ١)^{٢} = نق^{٢}$
$٥ = نق^{٢} \leftarrow نق = \sqrt{٥}$
$\therefore$ المعادلة
$(س - ٥)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٥$

رقم الصفحة (١٧)

✱ ✱ قانون مهم : بعد نقطة عن مستقيم ✱ ✱

بعد النقطة $(س_1 ، ص_1)$ عن المستقيم الذي معادلته $أ س + ب ص + جـ = ٠$ هو

$$\frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$$

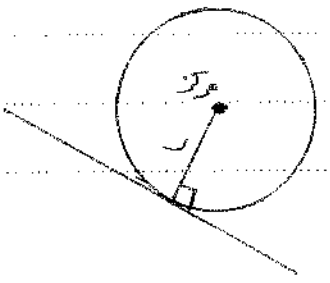
لاحظ المستقيم على الصورة المعادلة $أ س + ب ص + جـ = ٠$

مثال بسيط: جد بعد النقطة $(٣ ، ٥)$ عن المستقيم $٢ س = ٦ ص - ١$

الحل: $٢ س - ٦ ص + ١ = ٠$

$$ف = \frac{|٢ \times ٣ - ٦ \times ٥ + ١|}{\sqrt{(٢)^2 + (-٦)^2}} = \frac{٢٣}{\sqrt{٤٠}}$$

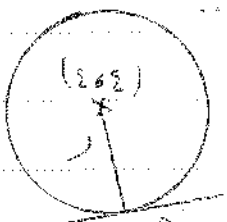
✱ ✱ تذكر أن نصف قطر الدائرة عمودي على المماس في نقطة التماس ، يعني بعد المركز عن المماس هو نصف القطر $(ر)$.



٥. جد معادلة دائرة مركزها $(٤ ، ٤)$ ومماسها المستقيم $ص + ٣ = ٢ س$

الحل: $ر$ = نصف القطر = هو المسافة بين المركز $(٤ ، ٤)$ والمستقيم

$ص - ٢ س + ٣ = ٠$

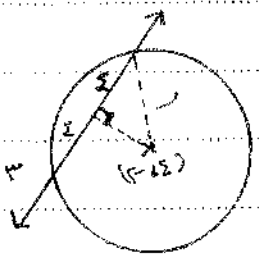


$$ر = \frac{|٤ - ٢ \times ٤ + ٣|}{\sqrt{(-٢)^2 + (١)^2}}$$

$$ر = \frac{١}{\sqrt{٥}}$$

∴ المعادلة $(س - ٤)^2 + (ص - ٤)^2 = \frac{١}{٥}$

٦. جد معادلة دائرة مركزها $(٤ ، -٢)$ وتقطع من المستقيم $٢ س - ٥ = ٤ ص$ وتر طوله ٨ وحدات ؟



$٣ س - ٤ ص - ٥ = ٠$

العمود النازل من المركز للوتر $= \frac{|٣ \times ٤ - ٤ \times -٢ - ٥|}{\sqrt{(٣)^2 + (-٤)^2}}$

$= \frac{١٥}{٥} = ٣$

حسب فيثاغورس $(٣)^2 + (٤)^2 = ر^2$

$ر^2 = ٢٥ \leftarrow ر = ٥$

∴ المعادلة

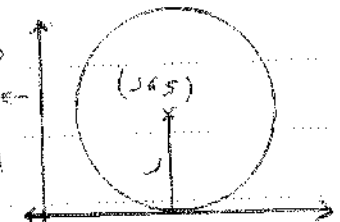
$(س - ٤)^2 + (ص + ٢)^2 = ٢٥$

٧. ما معادلة دائرة مركزها $(٨ ، ١٤)$ وتمس الدائرة $س^2 + ص^2 + ٢ س - ٤ ص - ١١ = ٠$ من الخارج ؟ (تمرين حلو)

الجواب: $(ص - ١٤)^2 + (س - ٨)^2 = ١٢١$

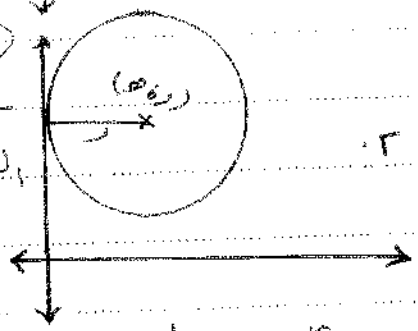
دوائر تمس المحاور

١. تمس محور السينات



← نصف القطر الأفقي = القيمة المطلقة للإحداثي الصادي للمركز (ى)

٢. تمس محور الصادات



← نصف القطر الأفقي = القيمة المطلقة للإحداثي السيني للمركز (س)

٣. تمس المحورين ← المركز

(ر، ر) ، (-ر، ر) ، (-ر، -ر) ، (ر، -ر)

ربع أول — ربع ثاني — ربع ثالث — ربع رابع

أمثلة :-

١. جد معادلة دائرة مركزها (-٣، -٦) وتمس محور السينات.

الحل: ر = |-٦| = ٦

المعادلة $(س+٣)^٢ + (ص+٦)^٢ = ٣٦$

٢. جد معادلة دائرة مركزها (٢، -٩) وتمس محور الصادات.

الحل: ر = |٢| = ٢

المعادلة $(س-٢)^٢ + (ص+٩)^٢ = ٤$

٣. جد معادلة دائرة تمس المحورين بالربع الثالث ونصف قطرها ١٢ سم

الحل: ر = ٦ تمس المحورين بالربع الثالث

المركز (-٦، -٦)

∴ المعادلة

$(س+٦)^٢ + (ص+٦)^٢ = ٣٦$

٤. جد معادلة دائرة نصف قطرها ٢ وتمس المحورين.

الحل: ٤ إجابات

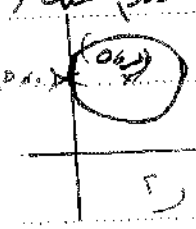
ربع أول مركز (٢، ٢) ← $(س-٢)^٢ + (ص-٢)^٢ = ٤$

ربع ٢ مركز (-٢، ٢) ← $(س+٢)^٢ + (ص-٢)^٢ = ٤$

ربع ٣ مركز (-٢، -٢) ← $(س+٢)^٢ + (ص+٢)^٢ = ٤$

ربع ٤ مركز (٢، -٢) ← $(س-٢)^٢ + (ص+٢)^٢ = ٤$

٥. جد معادلة دائرة مركزها على المستقيم س = ٣ وتمس محوري الإحداثيات علماً بأن النقطة (٥، ٥) تقع عليها.



الحل:

المركز (ر، ٥)

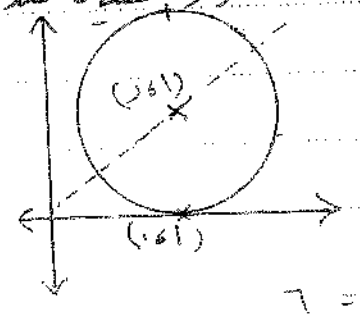
$(س-ر)^٢ + (ص-٥)^٢ = ر^٢$

المركز على المستقيم س = ٣ ← المركز (٥، ٥)

← نصف القطر = ٣

∴ المعادلة $(س-٣)^٢ + (ص-٥)^٢ = ٤$

٦. جد معادلة دائرة مركزها على المستقيم ص = ٢س + ٤ ، وتمس محور السينات عند (٠، ١)



الحل: المركز (١، ٦)

تقع على المستقيم

ص = ٢س + ٤

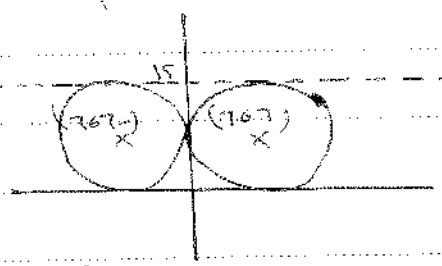
ر = ٢×١ + ٤ = ٦

∴ المعادلة

$(س-١)^٢ + (ص-٦)^٢ = ٣٦$

بس لو أعرف مين اللي اخترع الأسوانيون هاي !!

٧. جد معادلة دائرة تمس محوري الإحداثيات وتمس المستقيم $ص = ١٢$

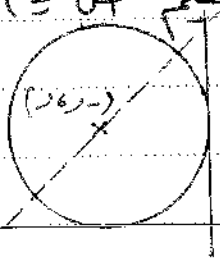


نق = ٦

المركز $(٦، ٦)$ $(س - ٦)^٢ + (ص - ٦)^٢ = ٣٦$

المركز $(٦-، ٦)$ $(س + ٦)^٢ + (ص - ٦)^٢ = ٣٦$

٨. جد معادلة دائرة تمس محوري الإحداثيات بالربع الثاني ومركزها على المستقيم $ص = ٢س + ٦$



الحل : المركز $(-ر، ر)$

يقع على المستقيم ← يحقق

$ر = ٢(-ر) + ٦ \leftarrow ر = -٢ر + ٦ \leftarrow ٣ر = ٦ \leftarrow ر = ٢$

∴ المركز $(-٢، ٢)$ نق = ٢

$(س + ٢)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$

٩. (أ) جد جميع الحلول لمعادلة دائرة تمس المستقيم $س = ٣$ ، $ص = -١$ ونصف قطرها ٥ وحدات.

(ب) ما معادلة دائرة مركزها على المستقيم $ص = ٤$ ، وتمس محور السينات وتمس المستقيم $س = ١٢$.

(ج) ما معادلة دائرة تمس محور الصادات والمستقيم $ص = ٦$ ومركزها على المستقيم $س = ١١$

١٠. ما معادلة دائرة تمس المحورين وتمر بالنقطة $(٢، ١)$.

الحل : المركز $(ر، ر)$ حيث النقطة $(٢، ١)$ تحقق معادلة الدائرة.

$(س - ر)^٢ + (ص - ر)^٢ = ر^٢$

$(٢، ١)$ تحقق المعادلة

$(١ - ر)^٢ + (٢ - ر)^٢ = ر^٢$

$١ - ٢ر + ر^٢ + ٤ - ٤ر + ر^٢ = ر^٢$

$ر^٢ - ٦ر + ٥ = ٠$

$(ر - ٥)(ر - ١) = ٠$

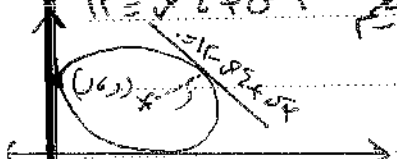
$ر = ٥ ، ر = ١$

$ر = ١ \leftarrow (س - ١)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١$

$ر = ٥ \leftarrow (س - ٥)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$

١١. ما معادلة دائرة تقع بالربع الأول وتمس المحور السيني والمستقيم $٣س + ٤ص = ١٢$

الحل : المركز $(ر، ر)$



$ر = \frac{|٣ر + ٤ر - ١٢|}{\sqrt{٩ + ١٦}} \leftarrow ٥ر = |٧ر - ١٢|$

$٥ر = ٧ر - ١٢$ ← $ر = ٦$

$-٥ر = ٧ر - ١٢$ ← $ر = ١$

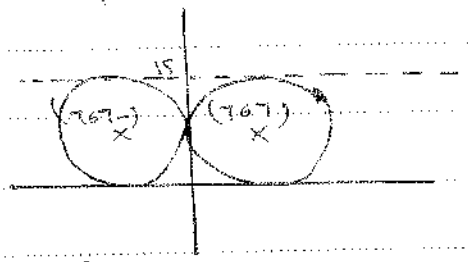
المركز $(٦، ٦)$ $ر = ٦$

$(س - ٦)^٢ + (ص - ٦)^٢ = ٣٦$

المركز $(١، ١)$ $ر = ١$

$(س - ١)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١$

٧. جد معادلة دائرة تمس محوري الإحداثيات والمستقيم $س = ١٢$



$نق = ٦$

المركز $(٦، ٦)$ $(س - ٦)^٢ + (ص - ٦)^٢ = ٣٦$

المركز $(-٦، ٦)$ $(س + ٦)^٢ + (ص - ٦)^٢ = ٣٦$

٨. جد معادلة دائرة تمس محوري الإحداثيات وتقع في الربع الثاني ومركزها على المستقيم $ص = ٢س + ٦$

الحل: المركز $(-ر، ر)$

يقع على المستقيم $\Leftarrow$ يحقق

$ر = ٢(-ر) + ٦ \Leftarrow ر = -٢ر + ٦ \Leftarrow ٣ر = ٦ \Leftarrow ر = ٢$

∴ المركز $(-٢، ٢)$ $نق = ٢$

$(س + ٢)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$

٩. (أ) جد جميع الحلول لمعادلة دائرة تمس المستقيمات $س = ٣$ ، $ص = -١$ وطول قطرها ٥ وحدات.

(ب) ما معادلة دائرة مركزها على المستقيم $ص = ٤$ وتمس محور الإحداثيات ومماس المستقيم $س = ١٢$

(ج) ما معادلة دائرة تمس محور الإحداثيات والمستقيم $ص = ٦$ ومركزها على المستقيم $س = ١١$

١٠. ما معادلة دائرة تمس المحورين وتمر بالنقطة $(٢، ١)$.

الحل: المركز $(ر، ر)$ حيث $|ر| = |ر|$

حيث $ر$ هو نصف القطر

$(س - ر)^٢ + (ص - ر)^٢ = ر^٢$

$(١، ٢)$ تحقق المعادلة

$(١ - ر)^٢ + (٢ - ر)^٢ = ر^٢$

$١ - ٢ر + ر^٢ + ٤ - ٤ر + ر^٢ = ر^٢$

$ر^٢ - ٦ر + ٥ = ٠$

$(ر - ٥)(ر - ١) = ٠$

$ر = ٥$ ، $ر = ١$

$ر = ١ \Leftarrow (س - ١)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١$

$ر = ٥ \Leftarrow (س - ٥)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$

١١. ما معادلة دائرة تقع في الربع الأول وتمس المحورين ومماس المستقيم $٣س + ٤ص = ١٢$

الحل: المركز $(ر، ر)$

$ر = \frac{|٣ر + ٤ر - ١٢|}{\sqrt{٩ + ١٦}} \Leftarrow ٥ر = |٧ر - ١٢|$

$٥ر = ٧ر - ١٢$ ، $-٥ر = ٧ر - ١٢$

$ر = ٦$ ، $ر = ١$

المركز $(٦، ٦)$ $ر = ٦$

$(س - ٦)^٢ + (ص - ٦)^٢ = ٣٦$

المركز $(١، ١)$ $ر = ١$

$(س - ١)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١$

الصورة العامة يمثل استخدامها عند وجود دائرة مر بثلاث نقاط أو دائرة مر بنقطتين ومركزها على مستقيم

$س^2 + ص^2 + أ س + ب ص + ج = ٠$

١. جد معادلة دائرة مر بالنقاط $(٠،٠)(٠،٢)(-٦،٣)$

الكل: $س^2 + ص^2 + أ س + ب ص + ج = ٠$

$(٠،٠) \leftarrow ٠ + ٠ + ٠ + ٠ + ج = ٠ \leftarrow ج = ٠$

$(٠،٢) \leftarrow ٤ + ٠ + ٠ + ٢ب + ٠ = ٠$

$ب = -١$

$(-٦،٣) \leftarrow ٩ + ١ + ٣ب - ٦أ + ٠ = ٠$

$١٠ - ٦أ - ٣ = ٠$

$أ = ٢$

∴ المعادلة $س^2 + ص^2 - ٢س - ٢ص = ٠$

٢. جد معادلة دائرة مر بالنقاط $(١،٠)(٧،٠)(٥،-٣)$

الجواب: $س^2 + ص^2 - ٨س + \frac{١}{٣}ب + ٧ = ٠$

٣. جد معادلة دائرة مر بالنقاط $(٣،٢)(-١،١)$ ومركزها على المستقيم $س - ٣ص = ١١$

الكل: $س^2 + ص^2 + أ س + ب ص + ج = ٠$

$(٣،٢) \leftarrow ٩ + ٤ + ٣أ + ٢ب + ج = ٠$

$(-١،١) \leftarrow ١ + ١ - أ + ب + ج = ٠$

$-أ + ب + ج = -٢$ ... ①

$-أ + ٢ب + ج = -١٣$ ... ②

$-أ + ٠ب + ج = ١١$ ... ③

② - ① $\leftarrow ب = -١١$

③ - ① $\leftarrow ٣ب = ١١ - ج$

$-٣٣ = ١١ - ج \leftarrow ج = ٤٤$

$-أ - ١١ + ٤٤ = ٠ \leftarrow أ = ٣٣$

∴ المعادلة $س^2 + ص^2 - ٣٣س - ١١ص + ٤٤ = ٠$

٤. جد معادلة دائرة مر بالنقطة $(٣،-١)$ $(٥،١)$ ويقع مركزها على محور السينات.

الكل: $س^2 + ص^2 + أ س + ب ص + ج = ٠$

∴ المركز $(-\frac{أ}{٢}، -\frac{ب}{٢})$ يقع على محور السينات $ص = ٠$

∴ المعادلة $س^2 + ص^2 + أ س + ج = ٠$

$(٣،-١) \leftarrow ٩ + ١ + ٣أ + ج = ٠$

$(٥،١) \leftarrow ٢٥ + ١ + ٥أ + ج = ٠$

$٣أ + ج = -١٠$ ①

$٥أ + ج = -٢٦$ ②

② - ① $\leftarrow ٢أ = -١٦ \leftarrow أ = -٨$

$-٢٤ + ج = -١٠ \leftarrow ج = ١٤$

∴ المعادلة $س^2 + ص^2 - ٨س + ١٤ = ٠$

٥. سؤال ختامي :-

ما معادلة دائرة مر بنقطة الأصل وتقطع من محوري السينات والصادات ٨ وحدات، ٦ وحدات على الترتيب

الجواب: $(س - ٤)^2 + (ص + ٣)^2 = ٢٥$

كيف نميز القطوع المخروطية

المعادلة العامة للقطوع هي:

$أ س^٢ + ب ص^٢ + ج س + د ص + هـ = ٠$

كيف نميز القطوع المخروطية:-

١. الدائرة: $س^٢$ ، $ص^٢$ معاملهم متساويين في الإشارة بينهم (+) وتخلو من الحد (س ص)

$أ = ب$

٢. المكافئ: لا يجتمع $س^٢$ مع $ص^٢$

$أ \times ب = صفر$

٣. الناقص: $س^٢$ ، $ص^٢$ الإشارة بينهم (+) والمعاملان مختلفة

$أ \times ب > صفر$

٤. الزائد: $س^٢$ مع $ص^٢$ الإشارة بينهم (-) ولا يهم المعاملات أي أن $أ \times ب$ ← صفر

ملاحظات حول هـ:-

* في الدائرة $هـ = ٠$
* في المكافئ $هـ = ١$
* في الناقص $هـ < ١$
* في الزائد $هـ > ١$

بين المعادلات التالية:-

١. $٢س^٢ - ٥ص^٢ = ٧$ زائد
٢. $٣س^٢ + ٣ص^٢ = ١١$ دائرة
٣. $٣س^٢ + ٣ص^٢ = ١٣$ دائرة
٤. $٥س^٢ + ٤ص^٢ = ٤$ ناقص
٥. $\frac{س^٢}{٧} - \frac{ص^٢}{٧} = ١$ زائد
٦. $٣س^٢ = ٥ص + ١$ مكافئ

سؤال: جد $م$ التي تجعل المعادلة $\frac{س^٢}{م-٧} + \frac{ص^٢}{م-٤} = ١$ قطع زائد.

الحل: $(م-٧)(م-٤) < ٠$

	٤		٧	
	+	−	+	

$م = ٤$ $م = ٧$

$\therefore م \in (٤، ٧)$

$س^٢$: $\frac{س^٢}{ل} + \frac{ص^٢}{ل-١٦}$ ، $ل > ١٦$

هذا هو الحل بطريقة سهلة

$أ$. ناقص $ب$ زائد $ج$ دائرة $د$ مكافئ

الحل: بما أنه $ل > ١٦$ ⇐

معامل $س^٢ > ٠$ ، معامل $ص^٢ < ٠$

⇐ قطع زائد.

$س^٣$: جد $ل$ التي تجعل المعادلة $٢س^٢ + ل ص^٢ = ١٨$ قطعاً ناقصاً

الحل: $٢ \times ل > ٠$

$\therefore ل > ٠$ ما عدا $\{٢\}$

$س^٤$: جد $م$ التي تجعل المعادلة $(م-٣)س^٢ + (٨-م)ص^٢ = ١٠$ دائرة.

الحل: معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$

$م - ٣ = ٨ - م$

$٢م = ١١$

$م = ٥.٥$

$س^٥$: جد $م$ التي تجعل المعادلة $(م-٢)س^٢ + (م+٤)ص^٢ + ٢س - ص - م = ٦$ تمثل مكافئ

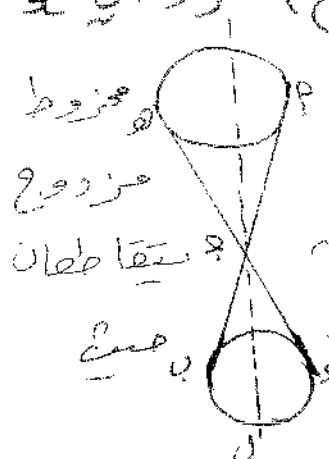
الحل: $م = ٢$ ، $م = -٤$

* القطع المخروطي *

هذا الشكل يسمى مخروط دائري قائم مزدوج ويتكون من فرعيه ق ، ق المتقاطعان في الرأس ج

ل : محور المخروط

$\overline{AB}$ أو $\overline{DH}$ مستقيم على سطح المخروط

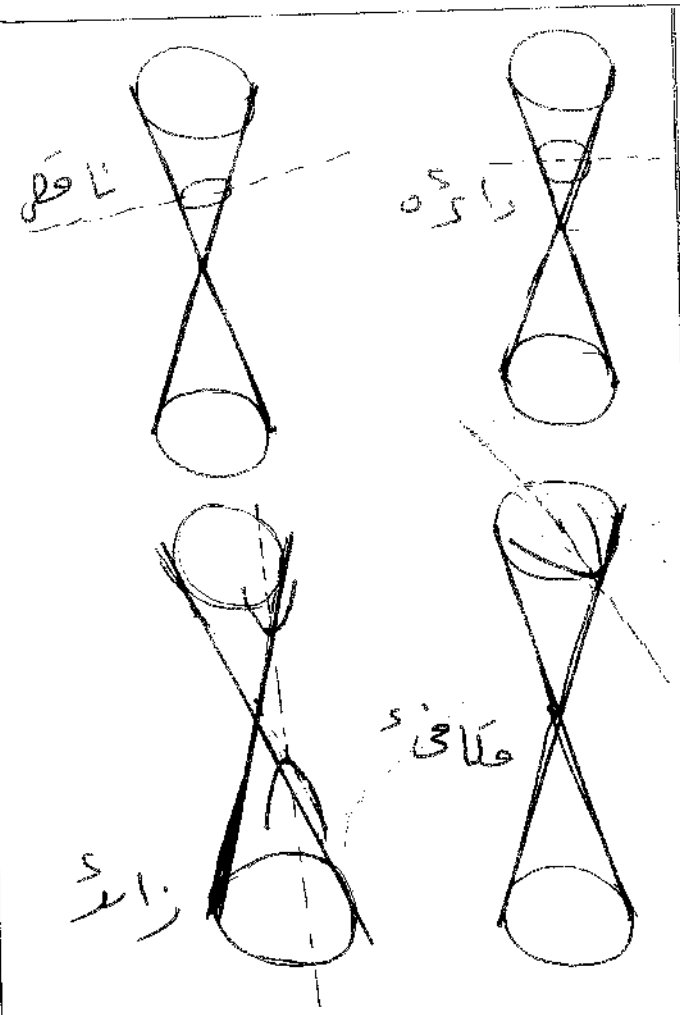


١. اذا قطع مستوى المخروط المزدوج وكان المستوى (المقطع) عمودي على محور المخروط ولا يمر بالرأس ، فإن الشكل الناتج (دائرة)

٢. اذا كان المستوى القاطع (المقطع) مائلا قليلا على المحور القاطع ويقطع فرعا واحدا فإن الشكل الناتج هو (قطع ناقص)

٣. اذا كان المستوى القاطع (المقطع) مائلا بحيث يوازي المستقيم على سطح المخروط ويقطع فرعا واحدا ، فإن الشكل الناتج (قطع مكافئ)

٤. اذا كان المستوى القاطع (المقطع) موازيا للمحور ، ويقطع فرعي المخروط ولا يمر بالرأس فإن الشكل قطع زائد



وزارة منع دائرة :-

(١) . اذا قطع مخروط دائري قائم مزدوج بمستوى عمودي على محور المخروط على مار بالرأس فإن المقطع الناتج P . زائد ، ب . ناقص ، ج . دائرة ، د . مكافئ

(٢) . اذا قطع احد فرعي مخروط دائري قائم مزدوج بمستوى مائل موازيا للمستقيم على سطح المخروط فإن المقطع الناتج هو

P . دائرة
ب . ناقص
ج . زائد
د . مكافئ

المحل الهندسي

هو مسار نقطة ن (س ، ص) تتحرك في المستوى الديكارتي تحت شروط معينة

نوعين :

١. ينطبق نص السؤال على أحد التعريفين للقطوع .

٢. لا ينطبق : وهنا المحل يكون

م : مسافة بين نقطتين

ب : مسافة بين نقطة وخط مستقيم

نتذكر :

ف = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

(س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢)

ف = $\frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$

(س١ ، ص١) ، أ س + ب ص + جـ = ٠

أولاً : أسئلة لا تنطبق على التعريفان

س١ : ما معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقاط و(س ، ص) المتحركة بالمستوى بحيث بعدها عن النقطة (٤ ، ٠) يساوي $\frac{٤}{٣}$ بعدها عن المستقيم ٤ ص = ٩ .

الحل : لا ينطبق على نص

ف١ = $\frac{٤}{٣}$ × ف٢

$\sqrt{(س - ٤)^2 + (ص - ٠)^2} = \frac{٤}{٣} \times \frac{|٤ ص - ٩|}{\sqrt{(٠)^2 + (٤)^2}}$

$س^2 - ٨ س + ١٦ + ص^2 = \frac{١}{٩} (١٦ ص^2 - ٧٢ ص + ٨١)$

$٩ س^2 + ٩ ص^2 - ٧٢ ص + ١٤٤ = ١٦ ص^2 - ٧٢ ص + ٨١$

$٩ س^2 - ٧ ص^2 = -٦٣$

$\frac{ص^2}{٩} - \frac{س^2}{٧} = ١$ زائد

س٢ : جد المحل الهندسي و معادلته للنقطة المتحركة م (س ، ص) في المستوى بحيث يبقى بعدها ثابتاً قدره وحدة واحدة عن المستقيم ٤ ص - ٣ س = ٥ وعند أثناء حركتها ينقطة الأصل ؟

م (س ، ص) ، ٤ ص - ٣ س = ٥

الحل :

ف = $\frac{|٤ ص - ٣ س - ٥|}{\sqrt{(-٣)^2 + (٤)^2}}$

$١ = \frac{|٤ ص - ٣ س - ٥|}{٥}$

$٥ = |٤ ص - ٣ س - ٥|$

٤ ص - ٣ س - ٥ = ٥ ، ٤ ص - ٣ س - ٥ = -٥

٤ ص - ٣ س = ١٠ ، ٤ ص - ٣ س = ٠

(٠ ، ٠) تحقق ✗

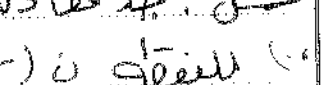
∴ ٤ ص - ٣ س = ٠ ⟹ ص = $\frac{٣}{٤}$ س مستقيم

س٣ : جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة بالمستوى بحيث يبقى بعدها ثابتاً = ٣ وحدات عن المستقيم ٣ س + ٤ ص = ٥ وعند أثناء حركتها مركز الدائرة $(س - ٤)^2 + (ص - ٥)^2 = ٩$

الجواب : ٣ س + ٤ ص = ٢٠

س٤ : جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن(س، ص) التي تتحرك على بعد بعد متساويين من النقطتين (٢، ٠٦) ، (-٢، ٠٦) ؟

الحل :



ف١ = ف٢

$$\sqrt{(س-٢)^2+ص^2} = \sqrt{(س+٢)^2+ص^2}$$

بتربيع

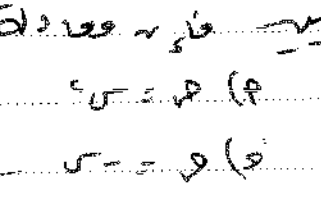
$$س^2-٤س+٤+ص^2 = س^2+٤س+٤+ص^2$$

$$٨س = ٠ \Leftarrow -٤س = ٤س$$ محور الصادات

س٥ : ٣س + ٤ص - ١ = ٠ ، ٤س - ٣ص + ٢ = ٠ مستقيمان

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة م(س، ص) والتي تتحرك على بعد متساوي من المستقيمين ؟

الحل :



ف١ = ف٢

$$\frac{|٣س+٤ص-١|}{\sqrt{(٣)^2+(٤)^2}} = \frac{|٤س-٣ص+٢|}{\sqrt{(٤)^2+(-٣)^2}}$$

$$|٣س+٤ص-١| = |٤س-٣ص+٢|$$

الحذف : اما = او اما = -

$$س = -ص$$

$$\therefore ٣س+٤ص-١ = ٤س-٣ص+٢$$

$$س+٧ص = ٣$$

أو

$$٣س+٤ص-١ = -(٤س-٣ص+٢)$$

$$٣س+٤ص-١ = -٤س+٣ص-٢$$

$$٧س+ص = ١$$

س٦ : جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن(س، ص) التي تتحرك بالمستوى بحيث بعدها عن المستقيم س = ٩ يساوي ثلاثة أمثال بعدها عن النقطة (٠، ١) ؟

الجواب : $\frac{س^2}{٩} + \frac{ص^2}{٨} = ١$ ناقص

ب) تتحرك نقطة ن(س، ص) بالربع الأول والثالث من المستوى الديكارتي بحيث تبقى على بعد متساوي من المحورين فأوجد معادلة المحل الهندسي :

أ) ص = س^٢ ب) ص = -س ج) ص = س

ج) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة م(س، ص) بحيث تتحرك على بعدين متساويين من النقطتين ب(٢، ٥) ، جـ(٤، ١)

الجواب : ٤س - ٨ص + ١٣ = ٠

د) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن(س، ص) المتحركة بالمستوى بحيث بعدها عن (٣، ٨) يساوي مثلي بعدها عن (-١، ٢)

الجواب : ٣س^٢ + ٣ص^٢ + ١٤س - ٥٣ = ٠ دائرة

ثانياً : أسئلة تنطبق على التعريفات

س٧ : جد معادلة المحل الهندسي للنقطة د (س ، ص) بحيث مجموع بعدها عن النقطتين (١ ، ٨) ، (٦ ، ١) يساوي ١٠ .

الحل : ينطبق على تعريف القطع الناقص

$أ = ٥$ ، $ب = ٣$ ، $ج = ٤$

المركز (٣ ، ٤)

$\frac{(س-٣)^٢}{٩} + \frac{(ص-٤)^٢}{٢٥} = ١$

س٨ : ما معادلة المحل الهندسي للنقطة و (س ، ص) بحيث العزم بطلوب لبعدها عن النقطتين (٢ ، ٤) ، (٢ ، -٨) يساوي ١٠ وحدات .

الحل : ينطبق على تعريف القطع الزائد

$أ = ٥$ ، $ج = ٦$ ، $ب = \sqrt{١١}$

المركز (٢ ، -٢)

$\frac{(ص+٢)^٢}{٢٥} - \frac{(س-٢)^٢}{١١} = ١$

س٩ : ما معادلة المحل الهندسي للنقطة و (س ، ص) بحيث بعدها عن النقطة (٤ ، ١) يساوي بعدها عن المستقيم س = -٧

الحل : ينطبق على تعريف القطع المكافئ

البؤرة (٤ ، ١) الدليل س = -٧

$ج = ٤$ ← $٢ج = ٨$ ← $٢ج = ١٠ - ٢$

$(ص - ه)^٢ = ٤ ج (س - د)$

الرأس (-٣ ، ٤)

$(ص - ٤)^٢ = ١٦ (س + ٣)$

س١٠ : جد معادلة المحل الهندسي للنقطة و (س ، ص) بحيث بعد بعدها عن النقطة (٢ ، -٣) مقداره ٧ وحدات عن النقطة (٢ ، -٣) .

الحل : ينطبق على تعريف الدائرة

المركز (٢ ، -٣) نق = ر = ٧

$(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٤٩$

ثالثاً : أسئلة مميزة على المحل الهندسي تعتمد على متطابقات مثلثية

١. $حا^٢ هـ + جتا^٢ هـ = ١$

٢. $١ + ظا^٢ هـ = قا^٢ هـ$

٣. $١ + ظتا^٢ هـ = قتا^٢ هـ$

٤. $حا ٢هـ = ٢ حا هـ جتا هـ$

٥. $جتا ٢هـ = جتا^٢ هـ - حا^٢ هـ$

$= ١ - ٢ حا^٢ هـ$

$= ٢ جتا^٢ هـ - ١$

ملاحظة : عند وجود رمز ثالث عند س ، ص نحاول التخلص منه بطريقة فنية ...

الحكمي عش رئي السموف

س١١ : تتحرك النقطة و(س، ص) بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين

س = ٧ + ٤ جا هـ ، ص = ٢ + ٥ جتا هـ

حيث هـ : زاوية متغيرة . جد معادلة المحل هندسي وبين نوعه ؟

الحل: $\frac{س-٧}{٤}$ = جا هـ ، $\frac{ص-٢}{٥}$ = جتا هـ

بتربيع

$\frac{(س-٧)^2}{١٦}$ = جا^2 هـ ، $\frac{(ص-٢)^2}{٢٥}$ = جتا^2 هـ

بجمع

$\frac{(س-٧)^2}{١٦} + \frac{(ص-٢)^2}{٢٥}$ = ١ لأن جا^2 هـ + جتا^2 هـ = ١

س١٢ : تتحرك نقطة و(س، ص) على المستوى بحيث س = ١ + ٤ ظا هـ ، ص = ٢ - ٥ قا هـ ، جد معادلة المسار ونوعه

الحل: $\frac{س-١}{٤}$ = ظا هـ ، $\frac{ص-٢}{-٥}$ = قا هـ

بتربيع

$\frac{(س-١)^2}{١٦}$ = ظا^2 هـ ، $\frac{(ص-٢)^2}{٢٥}$ = قا^2 هـ

* قا^2 هـ - ظا^2 هـ = ١ نطرح

قا^2 هـ - ظا^2 هـ = $\frac{(ص-٢)^2}{٢٥} - \frac{(س-١)^2}{١٦}$

$\frac{(ص-٢)^2}{٢٥} - \frac{(س-١)^2}{١٦}$ = ١

س١٣ : تتحرك نقطة و(س، ص) بحيث س = جا هـ + جتا هـ ، ص = ٣ $\sqrt{٢}$ جا هـ جتا هـ . اثبت أن النقطة تتحرك على محيط قطع زائد

الحل: س = جا هـ + جتا هـ بتربيع

س^2 = جا^2 هـ + ٢ جا هـ جتا هـ + جتا^2 هـ

س^2 = ١ + ٢ جا ٢هـ ..... ①

* ص = ٣ $\sqrt{٢}$ جا هـ جتا هـ بتربيع

ص^2 = ١٨ جا^2 هـ جتا^2 هـ

$\frac{ص^2}{٢}$ = ٩ جا ٢هـ .. ②

نعوض ② في ①

س^2 = ١ + $\frac{ص^2}{٩}$

س^2 - $\frac{ص^2}{٩}$ = ١ وهذا قطع زائد

س١٤ : تتحرك النقطة و(س، ص) في المستوى بحيث س = جا هـ ، ص = جتا ٢هـ ، جد معادلة المحل هندسي وبين نوعه .

الحل: ص = جتا ٢هـ

ص = ١ - ٢ جا^2 هـ

ص = ١ - ٢ س^2 حيث س ∈ ح

س١٥ : م(س) = جتا ن - جا ن

ص = جا ٢ن ، جد معادلة المسار للنقطة و(س، ص) حيث ن ∈ ح

الجواب : س^2 = ١ - ص حيث

ب . س = ن + $\frac{١}{ن}$ ، ص = ن - $\frac{١}{ن}$

الجواب: س^2 - ص^2 = ٤ وهذا

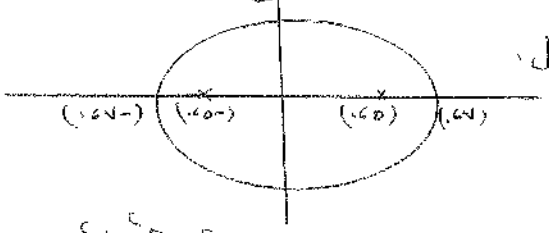
د . س = ٧ - ٨ جتا ن ، ن = ٣ لو هـ

الجواب س^2 + ص^2 = ١ دائرة .

تمارين منوعة على القطوع

١. ما معادلة قطع ناقص بؤرتاه (± ٠,٥٠) ويقطع محور السينات عند ± ٠,٧٥

الحل:



$ب^2 = أ^2 - ج^2$ ← $ج^2 = أ^2 - ب^2$

$ج = ٠,٥٠$ ← $ب = ٠,٧٥$ ← $ب^2 = ٠,٥٦٢٥$ ← $ج^2 = ٠,٢٥$

المركز $(٠,٠)$ ⇐ المعادلة $\frac{(س-٠)^2}{٠,٥٦٢٥} + \frac{(ص-٠)^2}{٠,٢٥} = ١$

٢. ما معادلة قطع ناقص بؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(٣, ٠)$ ، $(٢, \frac{٣}{٢})$

$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

$\frac{٩}{أ^2} + \frac{٠}{ب^2} = ١$ ← $أ^2 = ٩$

$\frac{٤}{٩} + \frac{\frac{٩}{٤}}{ب^2} = ١$ ← $\frac{٥}{٩} = \frac{١}{ب^2}$ ← $ب^2 = \frac{٩}{٥}$

المعادلة: $\frac{س^2}{٩} + \frac{ص^2}{\frac{٩}{٥}} = ١$

٣. ما معادلة قطع ناقص يمر بالنقطتين $(٠, ٣)$ ، $(٢, ٠)$ ومركزه نقطة الأصل

$\frac{س^2}{٤} + \frac{ص^2}{٩} = ١$

٤. ما معادلة قطع زائد غير متساوي الضلعين ومتماثل حول المحورين الإحداثيين ويمر بالنقطتين $(٣, ٠)$ ، $(٤, ٢)$

$\frac{س^2}{٩} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

$\frac{١٦}{٩} - \frac{٤}{ب^2} = ١$ ← $\frac{٤}{ب^2} = \frac{٧}{٩}$ ← $ب^2 = \frac{٣٦}{٧}$

المعادلة: $\frac{س^2}{٩} - \frac{ص^2}{\frac{٣٦}{٧}} = ١$

٥. ما معادلة قطع ناقص محوره الأكبر على المحور الصادي ويمر بالنقطتين $(٣, ٠)$ ، $(٢, ٢)$

$\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{أ^2} = ١$

$\frac{٩}{ب^2} + \frac{٠}{أ^2} = ١$ ← $ب^2 = ٩$

$\frac{٤}{٩} + \frac{٤}{أ^2} = ١$ ← $\frac{٥}{٩} = \frac{٤}{أ^2}$ ← $أ^2 = \frac{٣٦}{٥}$

المعادلة: $\frac{س^2}{٩} + \frac{ص^2}{\frac{٣٦}{٥}} = ١$

٦. ما معادلة قطع زائد متساوي الضلعين ومتماثل حول المحورين الإحداثيين ويمر بالنقطتين $(٣, ٠)$ ، $(٤, ٢)$

$\frac{س^2}{٩} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

$\frac{١٦}{٩} - \frac{٤}{ب^2} = ١$ ← $\frac{٤}{ب^2} = \frac{٧}{٩}$ ← $ب^2 = \frac{٣٦}{٧}$

المعادلة: $\frac{س^2}{٩} - \frac{ص^2}{\frac{٣٦}{٧}} = ١$

٧. ما معادلة قطع ناقص محوره الأكبر على المحور السيني ويمر بالنقطتين $(٣, ٠)$ ، $(٢, ٢)$

$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

$\frac{٩}{أ^2} + \frac{٠}{ب^2} = ١$ ← $أ^2 = ٩$

$\frac{٤}{٩} + \frac{٤}{ب^2} = ١$ ← $\frac{٥}{٩} = \frac{٤}{ب^2}$ ← $ب^2 = \frac{٣٦}{٥}$

المعادلة: $\frac{س^2}{٩} + \frac{ص^2}{\frac{٣٦}{٥}} = ١$

٨. ما معادلة قطع ناقص بؤرتاه $(٠, \pm ٣)$ ويمر بالنقطة $(٢, ٠)$

$\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{أ^2} = ١$

$\frac{٤}{ب^2} + \frac{٠}{أ^2} = ١$ ← $ب^2 = ٤$

$ج = ٣$ ← $ج^2 = ٩$ ← $أ^2 = ب^2 + ج^2$ ← $أ^2 = ١٣$

المعادلة: $\frac{س^2}{٤} + \frac{ص^2}{١٣} = ١$

٩. ما معادلة قطع زائد متساوي الضلعين ومتماثل حول المحورين الإحداثيين ويمر بالنقطة $(٣, ٢)$

$\frac{ص^2}{أ^2} - \frac{س^2}{ب^2} = ١$

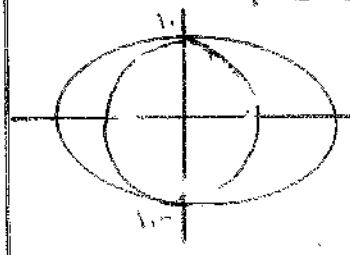
$\frac{٤}{أ^2} - \frac{٩}{ب^2} = ١$ ← $\frac{٤}{أ^2} = \frac{٥}{ب^2}$ ← $أ^2 = \frac{٤}{٥}ب^2$

$\frac{٤}{\frac{٤}{٥}ب^2} - \frac{٩}{ب^2} = ١$ ← $\frac{٥}{ب^2} - \frac{٩}{ب^2} = ١$ ← $ب^2 = ٤$

$أ^2 = \frac{٤}{٥} \times ٤ = \frac{١٦}{٥}$

المعادلة: $\frac{ص^2}{\frac{١٦}{٥}} - \frac{س^2}{٤} = ١$

١٠. شكل على شكل دائرة وقطع ناقص مشتركين بالمركز $(٠, ٠)$. مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والقطع الناقص تساوي مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والقطع الناقص



المطلوب:

١. الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

٢. معادلة الدائرة.

٣. معادلة القطع الناقص.

الحل: لاحظ من الشكل $ب = ١٠$ للقطع الناقص

أيضاً نصف قطر الدائرة $= ١٠$

∴ مساحة المنطقة = ٣ × مساحة الدائرة

$\pi ب أ = ٣ \times \pi ١٠^2$

$١٠ \times أ = ٣ \times ١٠٠$

$أ = ٣٠$ ← $أ^2 = ٩٠٠$

$ج^2 = أ^2 - ب^2$ ← $ج^2 = ٩٠٠ - ١٠٠ = ٨٠٠$ ← $ج = ٢٠\sqrt{٢}$

١. الاختلاف المركزي $= \frac{ج}{أ} = \frac{٢٠\sqrt{٢}}{٣٠} = \frac{\sqrt{٢}}{٣}$

٢. معادلة الدائرة $س^2 + ص^2 = ١٠٠$

٣. $\frac{س^2}{٩٠٠} + \frac{ص^2}{١٠٠} = ١$

الدنيا رايحة .. لا عذر لمذنب

٥. جد معادلة قطع زائد احدى بؤرتيه مركز الدائرة $(س-٦)^٢ + (ص-٤)^٢ = ٣٦$ ، وطول محوره المرافق يساوي قطر هذه الدائرة ومعادلة محوره المرافق $س = -١$.

الحل: نجد الدائرة $(س-٣)^٢ + (ص-١)^٢ = ٩$

المركز $(٣، ١)$ نصف $= ٣$ ← القطر $= ٦$

المطلوب: زائد بؤرتيه $(٣، ٢)$ ← $ب = ٦$

المرافق معادلته $س = -١$ ← $ب = ٣$

∴ زائد سيني مركزه $(-١، ٢)$

$\frac{(س+١)^٢}{٩} - \frac{(ص-٢)^٢}{ب^٢} = ١$ نحفظ $ب = ٤$

$ج^٢ = ب^٢ + ب^٢$

$١٦ = ب^٢ + ٩$

$ب^٢ = ٧$

$\frac{(س+١)^٢}{٧} - \frac{(ص-٢)^٢}{٩} = ١$

٦. في القطع الناقص $\frac{(س-٥)^٢}{ب^٢} + \frac{(ص-٤)^٢}{ب^٢} = ١$

اثبت أن $ب^٢ = ب^٢(١ - هـ^٢)$ ، هـ لا تختلف المركزي

الحل: $هـ = \frac{ج}{ب}$ ← $هـ^٢ = \frac{ج^٢}{ب^٢}$

لكن $ج^٢ = ب^٢ - ب^٢$ ← $هـ^٢ = \frac{ب^٢ - ب^٢}{ب^٢}$

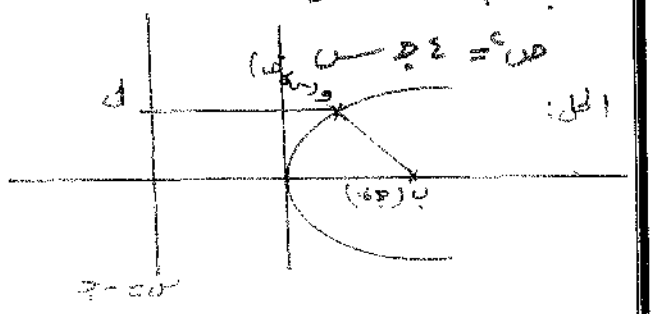
← $هـ^٢ ب^٢ = ب^٢ - ب^٢$ ← $ب^٢ = ب^٢ - هـ^٢ ب^٢$

← $ب^٢ = ب^٢(١ - هـ^٢)$

٧. قطع مكافئ رأسه $(ج، ٠)$ ، ليلة $س = ج$

اثبت باستخدام تعريف المكافئ أن معادلته $ص^٢ = ٤ ج س$

الحل:



حسب تعريف القطع المكافئ

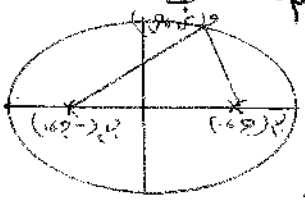
$\frac{\text{ب ف}}{\text{ب ل}} = \frac{\text{البعد}}{\text{البعد}}$ ← $\frac{\sqrt{(س-ج)^٢ + (ص-٠)^٢}}{|س+ج|} = \frac{\text{بعد}}{\text{بعد}}$

$\sqrt{(س-ج)^٢ + ص^٢} = |س+ج|$ تربيع

$س^٢ - ٢ج س + ج^٢ + ص^٢ = س^٢ + ٢ج س + ج^٢$

$ص^٢ = ٤ ج س$

٨. قطع ناقص بؤرتاه $(\pm ج، ٠)$ ، اثبت باستخدام التعريف أن معادلته $\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$



الحل: حسب تعريف القطع الناقص

$ف ب_١ + ف ب_٢ = ٢ب$

$\sqrt{(س-ج)^٢ + ص^٢} + \sqrt{(س+ج)^٢ + ص^٢} = ٢ب$

$\sqrt{(س-ج)^٢ + ص^٢} = ٢ب - \sqrt{(س+ج)^٢ + ص^٢}$ تربيع الطرفين

$س^٢ - ٢ج س + ج^٢ + ص^٢ = ٤ب^٢ - ٤ب\sqrt{(س+ج)^٢ + ص^٢} + س^٢ + ٢ج س + ج^٢ + ص^٢$

$٤ب\sqrt{(س+ج)^٢ + ص^٢} = ٤ب^٢ + ٤ج س$ تربيع

$١٦ب^٢(س^٢ + ٢ج س + ج^٢ + ص^٢) = ١٦ب^٤ + ١٦ج^٢ س^٢ + ٣٢ب^٢ ج س$

نقوم بالتجميع لطرف

$١٦ب^٢ س^٢ + ٣٢ب^٢ ج س + ١٦ب^٢ ج^٢ + ١٦ب^٢ ص^٢ = ١٦ب^٤ + ١٦ج^٢ س^٢ + ٣٢ب^٢ ج س$

$١٦ب^٢ ص^٢ = ١٦ب^٤ + ١٦ج^٢ س^٢ - ١٦ب^٢ ج^٢ - ١٦ب^٢ س^٢$

$١٦ب^٢ ص^٢ = ١٦ب^٤ + ١٦س^٢(ج^٢ - ب^٢) - ١٦ب^٢ ج^٢$

$١٦ب^٢ ص^٢ = ١٦ب^٢ ب^٢ + ١٦ب^٢ س^٢ - ١٦ب^٢ ج^٢$

$\div ١٦ب^٢$

$\frac{ص^٢}{ب^٢} + \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$ بدل

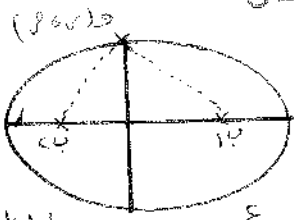
وهو المطلوب

عاش يا فيزياء !!!!!

٩. إثبات لقاعدة إسحريه للناقص

في القطع الناقص $\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{أ^2} = 1$

إثبت أن $ج^2 = أ^2 - ب^2$



الحل: نفرض أن (ف) نقطة تتحرك على محيط القطع و أصبح موقعها في نهاية عند طرف المحور المرافق، وحسب تعريف الناقص

ف ب + ف ب = ٢ أ

لكن Δ ف ب ب متساوي الساقين

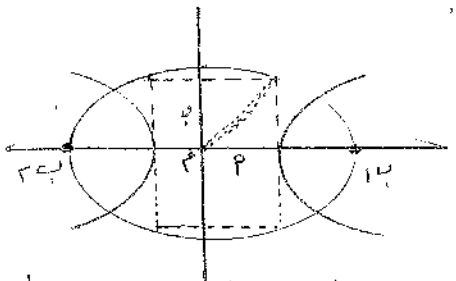
∴ ف ب = ف ب = أ

∴ $أ^2 = ب^2 + ج^2$ ← $ج^2 = أ^2 - ب^2$

١٠. إثبات لقاعدة إسحريه للزائد

في القطع الزائد $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$

إثبت أن $ج^2 = أ^2 + ب^2$



نرسم مستطيل يمر بطرفي المحور المقاطع وطرفي المرافق ثم نرسم دائرة مركزها (م) وطول نصف قطرها جـ.

← طبعاً: ستقع رؤوس المستطيل على محيط الدائرة وبالتالي سيتكون مثلث قائم

$ج^2 = أ^2 + ب^2$

١١. ما معادلة قطع ناقص مركزه (٠،٠) ويمر بالنقط (٦، ٢)، (٤، ٣).

الحل: $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$

(٤، ٣) تحقق ← $\frac{16}{أ^2} + \frac{9}{ب^2} = 1$ ..... (١) × ٤

(٦، ٢) تحقق ← $\frac{36}{أ^2} + \frac{4}{ب^2} = 1$ ..... (٢) × ٩

$\frac{64}{أ^2} - \frac{36}{ب^2} = 4$ ←

$\frac{324}{أ^2} + \frac{36}{ب^2} = 9$ ←

$\frac{360}{أ^2} = 5$ ← $أ^2 = 72$ نعوض في (١)

$ب^2 = 18$

∴ المعادلة $\frac{س^2}{72} + \frac{ص^2}{18} = 1$

١٢. أوجد معادلة دائرة مركزها في بؤرة القطع المكافئ: $ص = \frac{1}{4}س^2 + س + 3$ ومماس له.

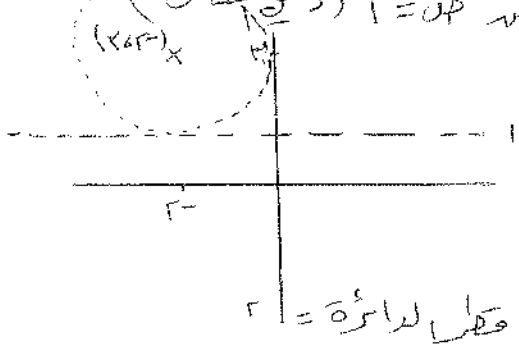
الحل: $\frac{1}{4}س^2 + س = ص - 3$

$س^2 + 4س = 4ص - 12$ (اكمال المربع)

$(س+2)^2 = 4(ص-3)$

الرأس (-2، 3) ، البؤرة (-2، 4)

ومماس $ص = 1$ (دليل المكافئ)



∴ نصف قطر الدائرة = 3

∴ معادلة الدائرة

$(س+2)^2 + (ص-4)^2 = 9$

١٣. اثبت ان مجموع مربعي المسافتين من المركزين للقطع الناقص والزائد يساوي (٢)، حيث هما نقطة ما ب .

الحل : للناقص $د_1^2 = ا^2 - ب^2$

للزائد $د_2^2 = ا^2 + ب^2$

$$\frac{د_1^2}{ا^2} + \frac{د_2^2}{ا^2} = هـ^2 + هـ^2$$

$$= \frac{ا^2 - ب^2}{ا^2} + \frac{ا^2 + ب^2}{ا^2}$$

$$= \frac{ا^2 - ب^2 + ا^2 + ب^2}{ا^2} = \frac{2ا^2}{ا^2} = 2$$

١٤. $ل س^2 = 11 - 3 ص^2$ ناقص محوره الاكبر يوازي محور السينات . اثبت أن $ل = \frac{11}{ب^2 + د^2}$

الحل : $ل س^2 + 3 ص^2 = 11$

$$\frac{ل س^2}{11} + \frac{3 ص^2}{11} = 1$$

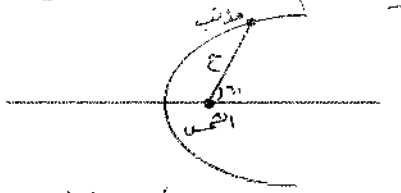
$$\frac{س^2}{\frac{11}{ل}} + \frac{ص^2}{\frac{11}{3}} = 1$$

$\leftarrow$ سيني $\leftarrow ا^2 = \frac{11}{ل}$

$\leftarrow ل = \frac{11}{ا^2}$ لكن $د^2 = ا^2 - ب^2$

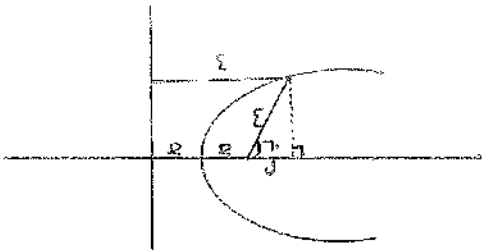
$\leftarrow ل = \frac{11}{ب^2 + د^2}$

١٥. الشكل المجاور يمثل مسار هدف هوك الشمسي الذي يقع في بؤرة القطع . علما أقل مسافة بين الهدف والشمس (حيث الزاوية بين المذنب والشمس ٦٠°، وبعد بينهما في تلك اللحظة ٤ وحدات طلقية)



الحل : عندما تكون المذنب عند رأس القطع

$\therefore$ المسافة بينه وبين الشمس = د

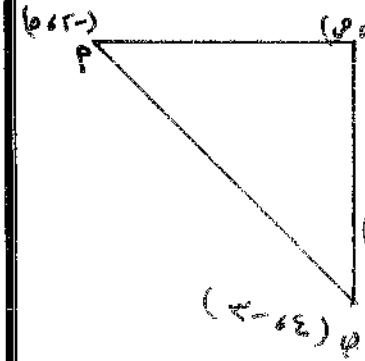


نجد $ل \neq$ حتا ٦٠ $= \frac{ل}{٤} \leftarrow ٢ل = ٤ \leftarrow ل = ٢$

لكن $ل + ٢د = ٤ \leftarrow ٢ + ٢د = ٤ \leftarrow د = ١$

وهي اقرب مسافة بين الرأس والبؤرة.

١٦. جد معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقط المتحركة و(س، ص) بحيث قياس الزاوية م و ب قائمة دائما" حيث م (-٢، ٥)، ب (٤، -٣)



الحل: فيثاغورس

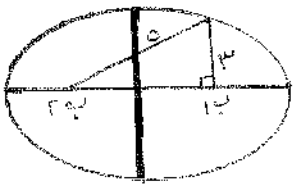
$(م ب)^2 = (م و)^2 \oplus (و ب)^2$

$١٠٠ = (س + ٢)^2 + (ص - ٥)^2 \oplus (س - ٤)^2 + (ص + ٣)^2$

$١٠٠ = س^2 + ٤س + ٤ + ص^2 - ١٠ص + ٢٥ + س^2 - ٨س + ١٦ + ص^2 + ٦ص + ٩$

$٢س^2 + ٢ص^2 - ٤ص - ٤س - ٤٦ = ٠$ أو $\div ٢$

١٧. صمم يحتوي جد ص.



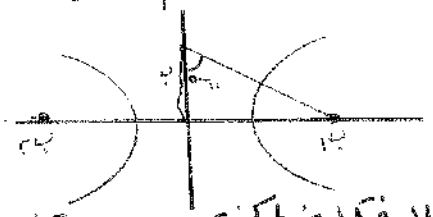
الحل: فيثاغورس (أ ب ج) ٤ = ج

٢ ب = ٤ ← ب = ٢

أيضاً ٣ + ٥ = ٢ ب ← ب = ٤

∴ ص = $\frac{٨}{ب}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

١٨.



جد الاختلاف المركزي ص ؟!

الحل: ظا ٦٠ = $\frac{ب}{أ}$ ← $\sqrt{٣}$ = $\frac{ب}{أ}$ ← ب = $\sqrt{٣}$ أ

← ٣ ب^{٢} = ح^{٢} لكن العلاقة البؤرية

ج^{٢} = ب^{٢} + ح^{٢}

ح^{٢} = ب^{٢} + $\frac{ح^{٢}}{٣}$

ج^{٢} − $\frac{ح^{٢}}{٣}$ = ب^{٢}

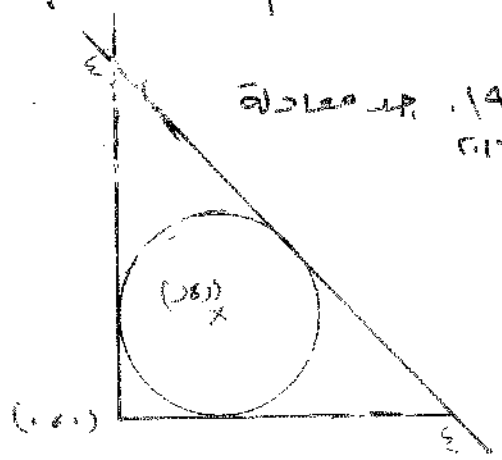
$\frac{٢ ح^{٢}}{٣}$ = ب^{٢} ← $\frac{٢ ح^{٢}}{٣}$ = $\frac{ب^{٢}}{ج^{٢}}$

$\frac{٢}{٣}$ = ص^{٢}

$\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ = ص

١٩. جد معادلة

٢٠١٦



الحل: الدائرة تمس المحورين مركزها (ر ، ر)

تماس الدائرة (٤ ، ٠) (٠ ، ٤)

نجد معادلة ص + س − ٤ = ٠

نجد المركز تماس = ر

$\frac{|ر + ر - ٤|}{\sqrt{١ + ١}}$ = ر

$\sqrt{٢}$ ر = ٤ − ٢ر ← $\sqrt{٢}$ ر = ٤ − ٢ر

ر ($\sqrt{٢}$ + ٢) = ٤ ← ر ($\sqrt{٢}$ − ٢) = ٤ − ٢ر

ر = ٤ − ٢$\sqrt{٢}$ ← ر = ٤ + ٢$\sqrt{٢}$

مرفوض ← مقبول

∴ المعادلة

(س − (٤ − $\sqrt{٢}$ ٤))^{٢} + (ص − (٤ − $\sqrt{٢}$ ٤))^{٢} = (٤ − ٢$\sqrt{٢}$)^{٢}

٢٠. زائد معادلته ٣ك^{٢} − ٣ص^{٢} + ١٨ص = ل

٢٠١١ جد النسبة ل التي تجعل محوره القاطع موازياً لـ ص

الحل: ٣(س − ٠)^{٢} − ٣(ص^{٢} − ٦ص + ٩) = ل − ٢٧

٣(س − ٠)^{٢} − ٣(ص − ٣)^{٢} = ل − ٢٧

$\frac{٣(س - ٠)^{٢}}{ل - ٢٧}$ − $\frac{٣(ص - ٣)^{٢}}{ل - ٢٧}$ = ١

زائد مما دل على معامل ص^{٢} موجب

∴ ل − ٢٧ > صفر (لماذا بسطاً ؟)

∴ ل > ٢٧

ل ∈ (٢٧ ، ∞)