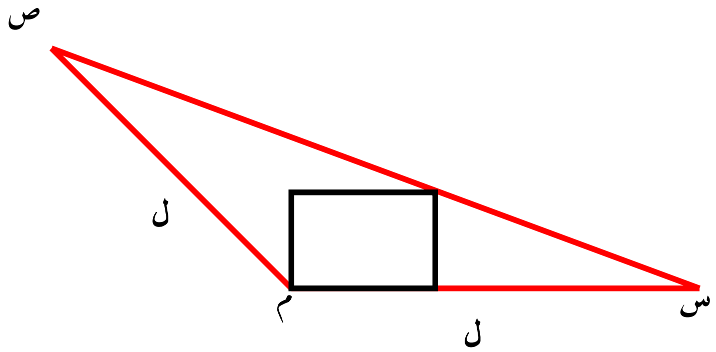
نموذج امتحان (٣) المستوى الثالث

*السؤال الاول : س م ص مثلث متطابق الساقين طول ساقه ل زاويته س م ص قياسها ١٢٠° اوجد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل هذا المثلث رأسه م واحد أضلاعه على م س واحد رؤوسه على الضلع س ص



**السؤال الثاني :

ليكن الاقتران $ق(س) = س + ٢\sqrt{س} - ١$ المعرف على [٠،٩] اثبت ان الاقتران غير قابل للاشتقاق عند س = ٠

واوجد معادلة المماس عند تلك النقطة اثبت انه لا يمتلك أي قيمة محلية

اثبت انه يقطع محور السينات في نقطة وحيدة عينها جبريا

***السؤال الثالث :

ليكن الاقتران $ق(س) = أس^٣ + بس^٢ + جـس + د$ $أ \neq ٠$ أ،ب،جـ،د $\in ح$

عين كل من الثوابت أ،ب ، جـ،د إذا علمت أن للاقتران نقطة حرجة وحيدة وهي ذاتها نقطة انعطاف هي (١،٠)

****السؤال الرابع : اوجد النهاية لكل من الاقترانات التالية

(١-) $\lim\limits_{س \to -١} \frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ١}$

(٢-) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جاس - جتاس}{س - \frac{\pi}{٤}}$

(٣-) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{٨س\sqrt{س} - ٣س - ٥}{س - ١}$

(٤-) $\lim\limits_{س \to \pi} \frac{١ + جتاس}{جاس}$

(٥-) اذا كان $\sqrt{س} = ق(س^٢ - ٣س + ٤)$ فجد $ق'(٢)$

*****السؤال الخامس :

ليكن الاقتران $ق(س) = \begin{cases} س[س + ١] & س \geq ١ \\ أس^٢ + ب & س < ١ \end{cases}$

عين الثابتين أ ، ب إذا علمت أن الاقتران قابل للاشتقاق عند س = ١

******$\boxed{\text{السؤال السادس}}$:

تتحرك نقطة على مستقيم وفق المعادلة الزمنية ف(ن) = ٢ن−جان في الفترة الزمنية [٠،٢π]

١ -اثبت أن الاقتران قابل للاشتقاق عند ن = ٠ من اليمين واوجد السرعة الابتدائية

٢ -اوجد كل من السرعة والتسارع ولحظات انعدام كل منهما ان وجدت وحدد مسار المتحرك

٣- اوجد النقط التي يمر فيها المتحرك أكثر من مرة

*******$\boxed{\text{السؤال السابع}}$: قبة كروية(هي نصف كرة) نصف قطرها نو اوجد حجم اكبر اسطوانه يمكن وضعها داخل القبة في الحالتين التاليتين

١- محور الاسطوانة هو محور قاعدة القبة-

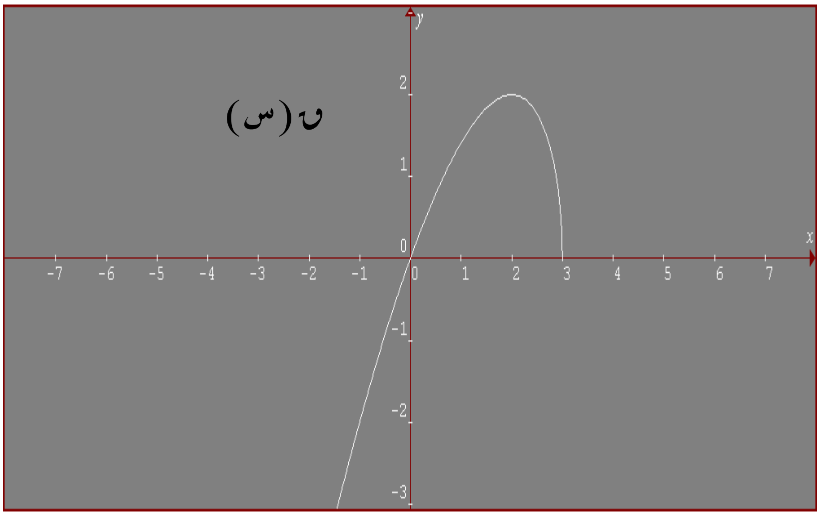
٢- والحالة الثانية محور الاسطوانة يوازي قاعدة القبة

السؤال الثامن :

اوجد القيم المحلية والنقط الحرجة والقيم القصوى المطلقة للاقتران وحدد فترات التزايد والتناقص

ق(س) = { س−جا $\frac{\pi[\text{س}]}{٢}$ ، ٠ ≤ س < ٢
−س^٢ + س ، −٢ ≤ س < ٠ }

********$\boxed{\text{السؤال الثامن}}$:ليكن الخط البياني للاقتران ق(س) حيث ان الاقتران ق معرف على (−∞،٣]



والمطلوب :

اوجد فترات التزايد والتناقص وقيم س التي تقابل النقط الحرجة والقيم المحلية ان وجدت ومعادلة المماس في نقطة سينها س = ٣

*********$\boxed{\text{السؤال التاسع}}$

ليكن الاقتران ق(س) = $\frac{\text{ب س + جـ}}{|\text{س}|}$

١- عين الثابتين ب،جـ اذا علمت ان منحنى الاقتران يمر من النقطتين (٢،٠) ، (−٢،−٤)

٢- من اجل ب = ٢،جـ = −٤ بين ان الاقتران لا يمتلك قيما محلية ثم بين ان المماسين المرسومين من النقطتين السابقتين متعامدين

*********السؤال العاشر :

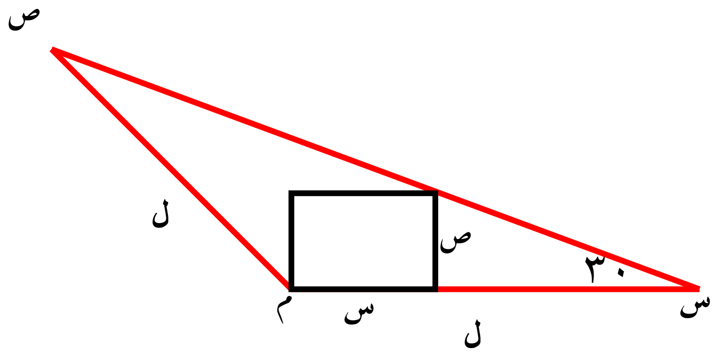
تتحرك النقطة ن على المستقيم ص = س مبتعدة عن نقطة الاصل و بمعدل تغير فاصلتها ٢سم /ث

ولتكن النقطتان أ(٢،٠) ب(١،٠)

١- جد معدل تغير مجموع مربعي بعدي النقطة ن عن النقطتين أ،ب عندما س = ٦

٢- ثم جد معدل تغير مساحة المثلث ن أ و عندما س = ٦

*السؤال الاول : س م ص مثلث متطابق الساقين طول ساقه ل زاويته س م ص قياسها ١٢٠° اوجد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل هذا المثلث رأسه م واحد أضلاعه على م س واحد رؤوسه على الضلع س ص



الحل :

بفرض ابعاد

المستطيل س،ص نلاحظ ان $\text{ظا}30 = \frac{\text{ص}}{\text{ل} - \text{س}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{ص}}{\text{ل} - \text{س}} \Leftrightarrow \text{ص} = \frac{\text{ل} - \text{س}}{\sqrt{3}}$

مساحة المستطيل تساوي حيث $0 < \text{س} < \text{ل}$

$$\text{م} = \text{س ص} = \text{س}\,\frac{\text{ل} - \text{س}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{م} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\text{ل س} - \text{س}^2\right)$$

نشتق العلاقة $\frac{\text{د م}}{\text{د س}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\text{ل} - 2\text{س}\right)$

ينعدم المشتق عندما $\text{ل} - 2\text{س} = 0 \Leftrightarrow \text{س} = \frac{\text{ل}}{2}$ ، $\text{ص} = \frac{\text{ل}}{2\sqrt{3}}$ ، $\text{م} = \frac{\text{ل}}{2}\cdot\frac{\text{ل}}{2\sqrt{3}} = \frac{\text{ل}^2}{4\sqrt{3}}$ نشتق مرة اخرى نجد

$\frac{\text{د}^2\text{م}}{\text{د س}^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2) < 0$ وبالتالي للاقتران قيمة كبرى مطلقة عند $\text{س} = \frac{\text{ل}}{2}$ هي $\text{م} = \frac{\text{ل}^2}{4\sqrt{3}}$

اذا المساحة اكبر ما يمكن عندما $\text{س} = \frac{\text{ل}}{2}$

**السؤال الثاني :

ليكن الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + 2\sqrt{\text{س}} - 1$ المعرف على [٠،٩] اثبت ان الاقتران غير قابل للاشتقاق عند س = ٠

واوجد معادلة المماس عند تلك النقطة اثبت انه لا يمتلك أي قيمة محلية
اثبت انه يقطع محور السينات في نقطة وحيدة عينها جبريا

الحل : $\lim_{س\to ٠^+} \frac{ق(س)-ق(٠)}{س-٠} = \lim_{س\to ٠^+} \frac{س+٢\sqrt{س}-١}{س} = \lim_{س\to ٠^+} ١ + \frac{٢\sqrt{س}-١}{س} = -\infty$

الاقتران غير قابل للاشتقاق عند الصفر من اليمين وهذه النتيجة تعني ان لمنحنى الاقتران مماسا عند النقطة (٠،–١) مواز لمحور الصادات (هنا منطبق عليه) معادلته س = ٠
وهو حتما غير معرف على يسار الصفر فهو غير قابل للاشتقاق من اليسار
لنشتق الاقتران على الفترة (٠،٩)
$ق'(س) = ١ + \frac{٢}{٢\sqrt{س}} > ٠$ لاحظ ان قيمة الجذر التربيعي هي قيمة دوما موجبة
بما ان المشتق موجب تماما فهذا يعني انه لا يوجد للاقتران أي قيمة محلية في الفترة (٠،٩)

لانه لو امتلك قيمة محلية سوف ينعدم المشتق كذلك لا يمتلك أي نقطة حرجة (قابل للاشتقاق ولا ينعدم المشتق عند أي قيمة من الفترة (٠،٩))

طبعا له نقطة حرجة عند الصف لانه غير قابل للاشتقاق عندها
وله قيمة صغرى مطلقة عند الصفر هي ق(٠) = –١ وقيمة كبرى مطلقة عند ال٩ هي ق(٩) = ١٥ وتذكر ان هاتين القيمتين لا تصلح ايا منهما كقيمة محلية
التقاطع مع محور السينات بما انه متزايد تماما على الفترة [٠،٩] (مشتق موجب تماما ومتصل على هذه الفترة) فان مدى الاقتران هو ق([٠،٩]) = [–١، ١٥] ولكي تكون المعادلة ق(س) = ٠ يجب انينتمي الصفر لمدى الاقتران ونلاحظ ان الصفر فعلا ينتمي للمدى [–١، ١٥] فالمعادلة قابله للحل
وبما ان الاقتران متزايد تماما فهذا الجذر وحيد لنجده جبريا
$س + ٢\sqrt{س} - ١ = ٠ \Leftrightarrow \sqrt{س} = \frac{-س+١}{٢}$ لاحظ عزلنا الجذر التربيعي سنضع الشرط ثم نربع
الشرط $\frac{-س+١}{٢} \geq ٠ \Leftrightarrow -س+١ \geq ٠ \Leftrightarrow ١ \geq س$ اذا $س \in [٠،١]$
نربع الطرفين نجد $س = \frac{س^٢ - ٢س + ١}{٤} \Leftrightarrow س^٢ - ٢س + ١ = ٤س \Leftrightarrow س^٢ - ٦س + ١ = ٠$
$\Delta = ٣٦ - ٤(١)(١) = ٣٢$
$س_١ = \frac{٦ - ٤\sqrt{٢}}{٢} = ٣ - ٢\sqrt{٢} \in [٠،١]$
الاول مقبول والثاني مرفوض
$س_٢ = \frac{٦ + ٤\sqrt{٢}}{٢} = ٣ + ٢\sqrt{٢} \notin [٠،١]$
***$\boxed{\text{السؤال الثالث}}$:
ليكن الاقتران $ق(س) = أس^٣ + بس^٢ + جس + د \quad أ \neq ٠$

عين كل من الثوابت أ،ب ، جـ،د إذا علمت أن للاقتران نقطة حرجة وحيدة و هي ذاتها نقطة انعطاف هي (١،٠)

الحل الاقتران كثير حدود قابل للاشتقاق على ح وبما انه له نقطة حرجة فان المشتق ينعدم عندها وبما انها نقطة انعطاف فان المشتق الثاني ينعدم عندها ايضا (اذا كان الاقتران قابل للاشتقاق مرتين فان المشتق الثاني ينعدم عند نقطة الانعطاف)

الاقتران قابل للاشتقاق مرتين على ح كثير حدود

$ق(س) = أس^٣ + بس^٢ + جـس + د$

$ق'(س) = ٣أس^٢ + ٢بس + جـ$

$ق''(س) = ٦أس + ٢ب$

$ق''(١) = ٦أ + ٢ب = ٠$

$ق'(١) = ٣أ + ٢ب + جـ = ٠$

$ق(١) = أ + ب + جـ + د = ٠$

$٦أ + ٢ب = ٠ \Leftrightarrow ٣أ + ب = ٠ \Leftrightarrow ب = -٣أ$ نعوض في $٣أ + ٢(-٣أ) + جـ = ٠ \Leftrightarrow جـ = ٣أ$ نجد

$ق(١) = أ - ٣أ + ٣أ + د = ٠ \Leftrightarrow د = -أ$ نعوض في معادلة الاقتران

$ق(س) = أس^٣ - ٣أس^٢ + ٣أس - أ$

$ق(س) = أ\left(س^٣ - ٣س^٢ + ٣س - ١\right)$

$ق(س) = أ(س - ١)^٣$

****$\boxed{\text{السؤال الرابع}}$: اوجد النهاية لكل من الاقترانات التالية

$$(١-) \quad \lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ١} = \frac{١ - ١}{٢} = ٠$$

$$(٢-) \quad \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جاس - جتاس}{س - \frac{\pi}{٤}} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sqrt{٢}}{س - \frac{\pi}{٤}} \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} جاس - \frac{١}{\sqrt{٢}} جتاس\right)$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sqrt{٢}}{س - \frac{\pi}{٤}} \left(جتا\frac{\pi}{٤} جاس - جا\frac{\pi}{٤} جتاس\right) = \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sqrt{٢}}{س - \frac{\pi}{٤}} جا\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \sqrt{٢} \frac{جا\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}{س - \frac{\pi}{٤}} = \lim_{ص \to ٠} \sqrt{٢} \frac{جاص}{ص} = \sqrt{٢} \times ١ = \sqrt{٢}$$

$$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـ}}\ \frac{8\text{س}\sqrt{\text{س}}-3\text{س}-5}{\text{س}-1}=\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـ}}\ \frac{8\text{س}\sqrt{\text{س}}-8\text{س}+8\text{س}-3\text{س}-5}{\text{س}-1}$$

$$=\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـ}}\ \frac{8\text{س}\left(\sqrt{\text{س}}-1\right)+5(\text{س}-1)}{\text{س}-1}=\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـ}}\ \frac{8\text{س}}{\sqrt{\text{س}}+1}+5=9$$

$$(4-)\ \underset{\text{س}\to \pi}{\text{نهـ}}\ \frac{1+\text{جتاس}}{\text{جاس}}=\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نهـ}}\ \frac{2\text{جتا}^2\frac{\text{س}}{2}}{2\text{جا}\frac{\text{س}}{2}\text{جتا}\frac{\text{س}}{2}}=\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نهـ}}\ \frac{\text{جتا}\frac{\text{س}}{2}}{\text{جا}\frac{\text{س}}{2}}=0$$

(5-) اذا كان $\sqrt{\text{س}}=\text{ق}\left(\text{س}^2-3\text{س}+4\right)$ فجد $\text{ق}'(2)$

نشتق الطرفين $\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}=(2\text{س}-3)\,\text{ق}'\left(\text{س}^2-3\text{س}+4\right)$

نضع $\text{س}^2-3\text{س}+4=2 \Leftrightarrow \text{س}^2-3\text{س}+2=0 \Leftrightarrow (\text{س}-2)(\text{س}-1)=0\ \text{س}=1 \vee \text{س}=2$

$\text{س}=1 \Leftarrow \frac{1}{2}=(-1)\,\text{ق}'(2) \Leftrightarrow \text{ق}'(2)=\frac{-1}{2}$

$\text{س}=2 \Leftarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}=(1)\,\text{ق}'(2) \Leftrightarrow \text{ق}'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

لنفسر سبب وجود قيمتين للمشتق وانت عزيزي الطالب لست معني بهذا التفسير فقط للمطالعة

> مدى الاقتران $\text{هـ}(\text{س})=\text{س}^2-3\text{س}+4=\text{س}^2-3\text{س}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+4=\left(\text{س}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$
>
> المدى $\left[\frac{7}{4},\infty\right)$ وهذا المدى هو صورة لكل من الفترتين $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$، $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$ لهذا وجدنا قيمتين للمشتق لانه ليس اقتران بل اقتران ضمني واذا اخذنا الفترة $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$ كمجال ل $\text{هـ}(\text{س})=\text{س}^2-3\text{س}+4$ سيصبح تركيب الاقترانيين اقتران وبالتالي القيمة الموافقة للواحد مرفوضة والاخرى $\text{س}=2 \Leftarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}=(1)\,\text{ق}'(2) \Leftrightarrow \text{ق}'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ مقبولة

*****السؤال الخامس :

ليكن الاقتران $\text{ق}(\text{س})=\begin{cases}\text{س}[\text{س}+1] & \text{س}\geq 1\\ \text{أس}^2+\text{ب} & \text{س}<1\end{cases}$

الاقتران قابل للاشتقاق عند الواحد عين الثوابت أ،ب

الحل نعيد التعريف

$$\text{ق}(\text{س})=\begin{cases}2\text{س} & 1\leq \text{س}<2\\ \text{أس}^2+\text{ب} & \text{س}<1\end{cases}$$

متصل عند الواحد

$$\lim_{س \to 1^+} س[س+1] = \lim_{س \to 1^-} أس^2 + ب = ق(1) = 2$$

$$2 = أ + ب \Leftrightarrow 2 - أ = ب$$

$$\lim_{س \to 1^+} \frac{2س - 2}{س - 1} = \lim_{س \to 1^-} \frac{أس^2 + ب - 0}{س - 1} =$$

$$2 = \lim_{س \to 1^-} \frac{أس^2 + 2 - أ - 2}{س - 1} = \lim_{س \to 1^-} \frac{أ(س-1)(س+1)}{س - 1} = 2أ$$

$$أ = 1$$

$$ب = 1$$

$$ق(س) = \begin{cases} س[س+1] & س \geq 1 \\ س^2 + 1 & س < 1 \end{cases}$$

****** السؤال السادس :

تتحرك نقطة على مستقيم وفق المعادلة الزمنية $ف(ن) = 2ن - جان$ في الفترة الزمنية $[0، 2\pi]$

١ ـ اثبت أن الاقتران قابل للاشتقاق عند $ن = 0$ من اليمين واوجد السرعة الابتدائية

٢ ـ اوجد كل من السرعة والتسارع ولحظات انعدام كل منهما ان وجدت وحدد مسار المتحرك

٣ ـ اوجد النقط التي يمر فيها المتحرك أكثر من مرة

١ ـ $\lim_{س \to 0^+} \frac{2ن - جان - 0}{ن} = 2 - 1 = 1$

السرعة الابتدائية $ع_0 = 1$ وحدة/ث

٢ ـ $ف(ن) = 2ن - جان$ اقتران قابل للاشتقاق مرتين على $(0، 2\pi)$ ومشتقه

$ف'(ن) = 2 - جتان > 0$ لا ينعدم المشتق الاول

$ف'(ن) = 2 - جتان > 0$

$ف''(ن) = جتان$

ينعدم التسارع عندما جتان $= 0 \Leftrightarrow ن = \frac{\pi}{2} \vee ن = \frac{3\pi}{2}$

المسار لاحظ أن $ف'(ن) = 2 - جتان > 0$ اقتران متزيد تماما

وبالتالي

$ف(0) = 2(0) - جا0 = 0$

$ف(2\pi) = 2(2\pi) - جا2\pi = 4\pi$

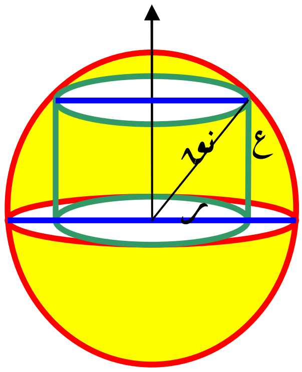
المسار قطعة من المستقيم من ٠ حتى π٤

٣- لا يوجد نقط يمر فيها المتحرك اكثر من مرة لان هذا الاقتران واحد لواحد (مشتق اول موجب تماما فلا تغير السرعة اشارتها لتعود وتمر بنفس النقطة)

*******$\boxed{\text{السؤال السابع}}$: قبة كروية(هي نصف كرة) نصف قطرها نو اوجد حجم اكبر اسطوانه يمكن وضعها داخل القبة في الحالتين التاليتين

١محور الاسطوانة هو محور قاعدة القبة-

٢والحالة الثانية محور الاسطوانة يوازي قاعدة القبة



١-

$$\text{نو}^٢ = ر^٢ + ع^٢$$

حجم الاسطوانة

$$ح = \pi ر^٢ ع$$

$$ح = \pi \left(\text{نو}^٢ - ع^٢\right) ع$$

$$ح = \pi \text{نو}^٢ ع - \pi ع^٣$$

$$ح' = \pi \text{نو}^٢ - ٣\pi ع^٢$$

ينعدم المشتق عندما

$$\pi \text{نو}^٢ - ٣\pi ع^٢ = ٠ \Leftrightarrow ع^٢ = \frac{\text{نو}^٢}{٣}$$

$$ع = \frac{\text{نو}}{\sqrt{٣}}$$

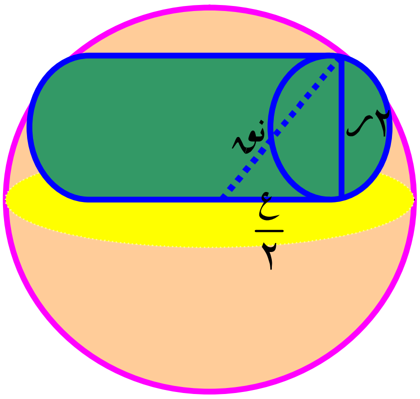
$$ع = \frac{-\text{نو}}{\sqrt{٣}}$$ مرفوض

المشتق الثاني

$$ح'' = -٦\pi ع \prec ٠ \quad \text{لان } ع \succ ٠$$

وبالتالي للاقتران قيمة كبرى محلية عند $ع = \frac{\text{نو}}{\sqrt{٣}}$

اكبر ما يمكن $\text{ع} = \pi\left(\text{نق}^2 - \frac{\text{نق}^2}{3}\right)\frac{\text{نق}}{\sqrt{3}} = \pi\left(\frac{2\text{نق}^2}{3}\right)\frac{\text{نق}}{\sqrt{3}} = \pi\frac{2\text{نق}^3}{3\sqrt{3}}$



الحالة الثانية

$$\text{نق}^2 = \frac{\text{ع}^2}{4} + 4\text{ر}^2 \Leftrightarrow \text{ر}^2 = \frac{4\text{نق}^2 - \text{ع}^2}{16}$$

$$\text{ع} = \pi\,\text{ر}^2\,\text{ع}$$

$$\text{ع} = \pi\left(\frac{4\text{نق}^2 - \text{ع}^2}{16}\right)\text{ع}$$

$$\text{ع} = \frac{\pi}{16}\left(4\text{نق}^2 - \text{ع}^2\right)\text{ع}$$

$$\text{ع} = \frac{\pi}{16}\left(4\text{نق}^2\,\text{ع} - \text{ع}^3\right)$$

الاقتران قابل للاشتقاق

$$\text{ع}' = \frac{\pi}{16}\left(4\text{نق}^2 - 3\text{ع}^2\right)$$

ينعدم المشتق عندما $4\text{نق}^2 - 3\text{ع}^2 = 0 \Leftrightarrow \text{ع} = \frac{2\text{نق}}{\sqrt{3}}$

$$\text{ع} = \frac{\pi}{16}\left(4\text{نق}^2\,\frac{2\text{نق}}{\sqrt{3}} - \frac{8\text{نق}^3}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{16}\left(\frac{16\text{نق}^3}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi\,\text{نق}^3}{3\sqrt{3}}$$

$\text{ع}'' = \frac{\pi}{16}(-6\text{ع}) < 0$ للاقتران قيمة كبرى محلية و هي قيمة مطلقة كبرى

الاسطوانة في الحالة الاولى اكبر من الحالة الثانية

السؤال الثامن :

اوجد القيم المحلية والنقط الحرجة والقيم القصوى المطلقة للاقتران وحدد فترات التزايد والتناقص

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - \text{جا}\frac{\pi[\text{س}]}{2} & 0 \le \text{س} < 2 \\ -\text{س}^2 + \text{س} & -2 \le \text{س} < 0 \end{cases}$$

لنعد تعريف الاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} س & ٠ \le س < ١ \\ س - ١ & ١ \le س < ٢ \\ -س^{٢} + س & -٢ \le س < ٠ \end{cases}$$

لندرس اتصاله على مجاله

كل فرع هو مقصور اقتران كثير حدود على فترة مفتوحة فهو متصل عليها

لندس الاتصال عند نقط التفرع

عند الصفر $\lim_{س \to ٠^{-}} (-س^{٢} + س) = ٠ ، \lim_{س \to ٠^{+}} س = ٠ ، ق(٠) = ٠$ متصل عند الصفر

عند الواحد $\lim_{س \to ١^{-}} (س) = ١ ، \lim_{س \to ١^{+}} س - ١ = ٠ ، ق(١) = ٠$ غير متصل عند الواحد

عند ال -٢ من اليمين ، $\lim_{س \to -٢^{+}} -س^{٢} + س = -٦ ، ق(-٢) = -٦$ متصل عند ها من اليمين

عند ال ٢ من اليسار غير متصل (غير معرف عندها)(فترة مفتوحة)

دراسة الاشتقاق

كل فرع هو مقصور اقتران كثير حدود على فترة مفتوحة فهو قابل للاشتقاق عليها لذلك

نشتق مع فتح الفترات

$$ق'(س) = \begin{cases} ١ & ٠ < س < ١ \\ ١ & ١ < س < ٢ \\ -٢س + ١ & -٢ < س < ٠ \end{cases}$$

طبعا غير قابل للاشتقاق عند -٢ طرف فترة

وغير قابل للاشتقاق عند الواحد (غير متصل)

عند الصفر

$$\lim_{س \to ٠^{-}} \frac{-س^{٢} + س - ٠}{س - ٠} = \lim_{س \to ٠^{-}} -س + ١ = ١$$

$$\lim_{س \to ٠^{+}} \frac{س - ٠}{س - ٠} = \lim_{س \to ٠^{-}} ١ = ١$$

اذا قابل للاشتقاق عند الصفر

ملاحظة لا تستخدمها في الامتحان لانها غير موجودة في الكتاب وهي لاحظ بعد ان اشتقينا على الفترات وجدنا

$$ق'(س) = \begin{cases} ١ & ٠ < س < ١ \\ ١ & ١ < س < ٢ \\ -٢س + ١ & -٢ < س < ٠ \end{cases}$$

اذا كانت نهاية المشتق من اليمين تساوي نهايته من اليسار وكان الاقتران متصل فالاقتران قابل للاشتقاق

بمعنى $\underset{س\to ٠^{+}}{\text{نهـــا}}$ ١ = ١، $\underset{س\to ٠^{-}}{\text{نهـــا}}$ − ٢س + ١ = ١ اذا الاقتران قابل للاشتقاق عند الصفر لاحظ عند

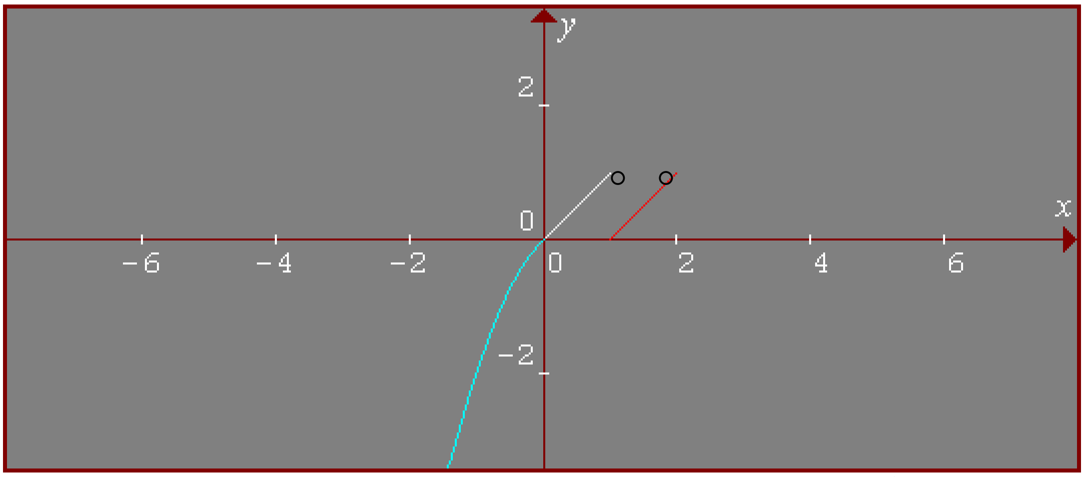
الواحد $\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـــا}}$ ١ = ١، $\underset{س\to ١^{-}}{\text{نهـــا}}$ − ٢س + ١ = ١ لكن غير متصل فهو غير قابل للاشتقاق

اما اذا لم تتساوى النهايتان فليس من الضروري ان يكون الاقتران غير قابل للاشتقاق

سنشكل جدول من اجل البقية

ينعدم المشتق عندما − ٢س + ١ = ٠ ⟸ س = $\frac{١}{٢}$ ∌ (−٢،٠)

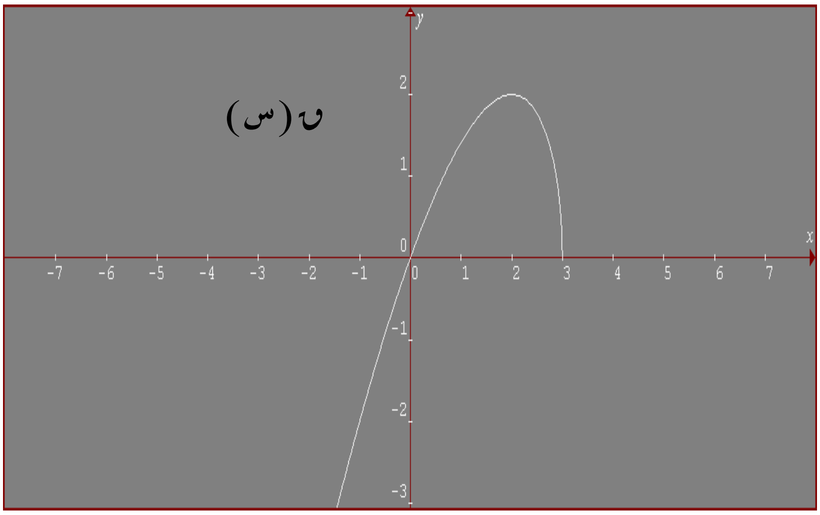
س	٢		١		٠		−٢
ق′(س)	||	++++	||	+++	١	++++	||
ق(س)	١ ||	↗	١ || ٠	↗	٠	↗	−٦



الرسم غير مطلوب

الاقتران متزايد على كل من الفترات (−٢،٠) (٠،١) (١،٢) المشتق على كل منها موجب تماما
وبما انه متصل عند الصفر فهو متزايد على الفترة (−٢،١) وعلى (١،٢)
النقط الحرجة للاقتران نقط حرجة عند القيم -٢ وهي (−٢،−٦) طرف فترة غير قابل للاشتقاق
وعند (١،٠) غير قابل للاشتقاق نقطة حرجة
ملاحظة عند ال٢ غير معرف لا يمتلك نقطة حرجة وعند الصفر لا ينعدم المشتق ليس له نقط حرجة
القيم المحلية ق(١) = ٠ قيمة صغرى محليا للاقتران حسب التعريف ومن الجدول لنأخذ الفترة التي تظم ١ ولتكن $\left(\frac{١}{٢}،\frac{٣}{٢}\right)$ لاجل كل عنصر س من هذه الفترة فان ق(س) ≥ ق(١) = ٠
الاقتران محدود من الأعلى والأدنى الا انه لا يبلغ حده الاعلى ويبلغ حده الادنى -٦وهي قيمة صغرى مطلقة

********السؤال الثامن:ليكن الخط البياني للاقتران ق(س) حيث ان الاقتران ق معرف على (−∞،٣]



والمطلوب :

اوجد فترات التزايد والتناقص وقيم س التي تقابل النقط الحرجة والقيم المحلية ان وجدت ومعادلة المماس في نقطة سينها س = ٣

الحل :

الاقتران متزايد على الفترة (−∞،٢]خطه نحو الأعلى كلما زادت قيم س ومتناقص على الفترة[٢،١] خطه نحو الاسفل كلما زادت قيم س

له نقطة حرجة هي (٢،٢) ينعدم عندها المشتق (المماس مواز لمحور السينات)

وعند (٣،٠) غير قابل للاشتقاق عندها طرف فترة وله قيمة كبرى محلية عند ق(٢) = ٢ وهي قيمة كبرى مطلقة انعدم عندها المشتق الاول مغيرا اشارته

المماس في الاقتران غير قابل للاشتقاق وان $\lim_{س \to ٣^-} \frac{ق(س) - ٠}{س - ٣} = \infty$ وبالتالي المماس مواز لمحور الصادات معادلته س = ٣

ليكن الاقتران ق(س) = $\frac{ب س + جـ}{|س|}$

١ -عين الثابتين ب،جـ اذا علمت ان منحنى الاقتران يمر من النقطتين (٢،٠) ، (−٢،−٤)

٢ - من اجل ب = ٢،جـ =−٤ بين ان الاقتران لا يمتلك قيما محلية ثم بين ان المماسين المرسومين من النقطتين السابقتين متعامدين

الحل

$ق(٢) = ٠ \Leftarrow ٠ = \frac{٢ب + جـ}{٢} \Leftrightarrow جـ = -٢ب$

$ق(-٢) = -٤ \Leftarrow -٤ = \frac{-٢ب + جـ}{٢} \Leftrightarrow جـ - ٢ب = -٨ \Leftrightarrow جـ = ٢ب - ٨$

حل جملة المعادلتين نجد $-٢ب = ٢ب - ٨ \Leftrightarrow ب = ٢، جـ = -٤$

الاقتران المطلوب $ق(س) = \frac{٢س - ٤}{|س|}$

٢ - $ق(س) = \frac{٢س - ٤}{|س|} = \begin{cases} ٢ - \frac{٤}{س} & س \succ ٠ \\ -٢ + \frac{٤}{س} & س \prec ٠ \end{cases}$

لنشتق الاقتران على كل من الفترتين المقابلتين

$ق'(س) = \begin{cases} \frac{١٦}{س^{٢}} & س \succ ٠ \\ \frac{-١٦}{س^{٢}} & س \prec ٠ \end{cases}$ لاحظ الاقتران متزايد تماما على الفترة المفتوحة $(٠،\infty)$

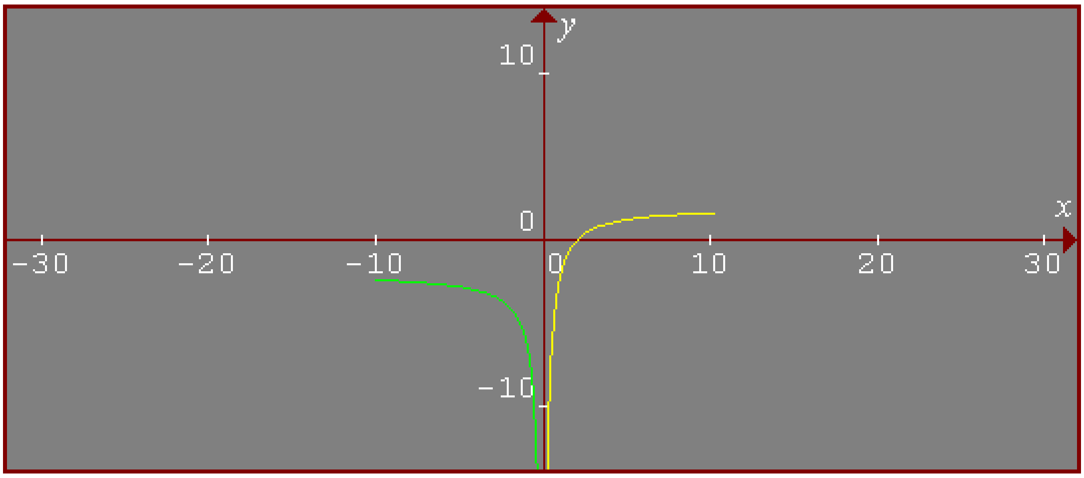
فهو لا يمتلك أي قيمة محلية فيها ومتناقص تماما على الفترة المفتوحة $(-\infty،٠)$ فهو لا يمتلك أي قيمة محلية فيها

لنجد ميل كل من المماسين

في $(٢،٠)$ ميل المماس $م = \frac{١٦}{٤} = ٤$

،$(-٢،-٤)$ميل المماس $م_{١} = \frac{-١٦}{٤} = -٤$

حاصل الضرب $م_{١} \times م = ٤ \times -٤ = -١٦ \neq -١$ اذا المماسين غير متعامدين (مع كل الاعتذار)



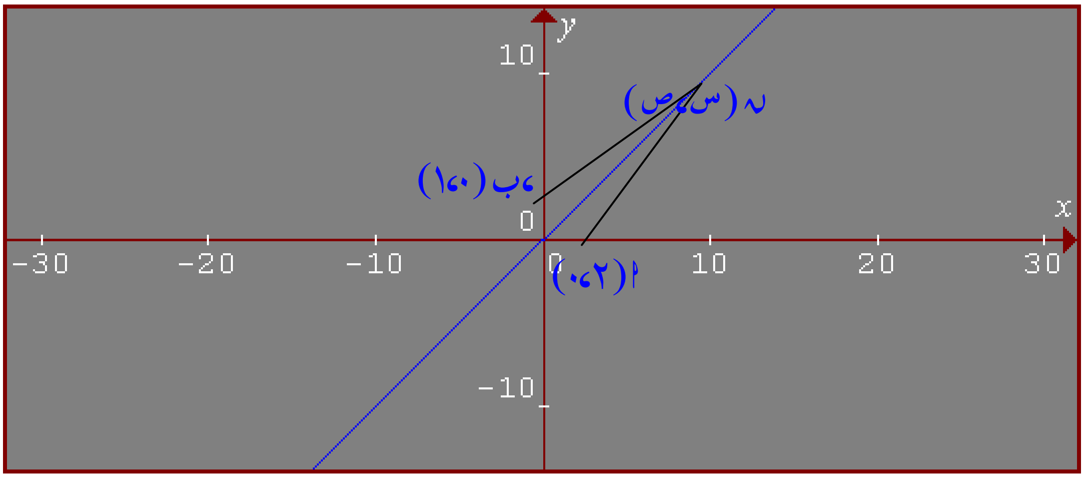
**********السؤال العاشر :

تتحرك النقطة ن على المستقيم ص = س مبتعدة عن نقطة الاصل و بمعدل تغير فاصلتها ٢سم /ث

ولتكن النقطتان أ(٢،٠) ب(٠،١)

جد معدل تغير مجموع مربعي بعدي النقطة ن عن النقطتين أ،ب عندما س = ٦

ثم جد معدل تغير مساحة المثلث ن أ و عندما س = ٦



بفرض ل مجموع بعدي النقطة ن عن النقطتين ا ،ب هو

ل $=$ (س $-$ ٢)^{٢} $+$ (ص)^{٢} $+$ (س)^{٢} $+$ (ص $-$ ١)^{٢}

لكن ص $=$ س

ل $=$ (س $-$ ٢)^{٢} $+$ (س)^{٢} $+$ (س)^{٢} $+$ (س $-$ ١)^{٢}

ل $=$ ٤س^{٢} $-$ ٦س $+$ ٥

نشتق بالنسبة للزمن

$$\frac{\text{dل}}{\text{dن}} = \text{٨س}\,\frac{\text{dس}}{\text{dن}} - \text{٦}\,\frac{\text{dس}}{\text{dن}}$$

$$\frac{\text{dل}}{\text{dن}} = (\text{٨س} - \text{٦})\,\frac{\text{dس}}{\text{dن}}$$

$$\frac{\text{dل}}{\text{dن}} = (\text{٨} \times \text{٦} - \text{٦}) \times \text{٢} = \text{٨٤}$$

وحدة /ث

مساحة المثلث ن ا و طبعا(و) هي نقطة الاصل

المستقيم الذي تتحرك عليه النقطة هو منصف الربع الاول يصنع زاوية ٤٥ مع محور السينات

مساحة المثلث م $= \frac{١}{٢} \times$ ا و $\times$ ن و او قاعدته و ا $=$ ٢ وارتفاعه ص وبالتالي مساحته

م $= \frac{١}{٢} \times ٢ \times$ ص

س $=$ ص

م $= \frac{١}{٢} \times ٢ \times$ س $=$ س وحدة /ث

انتهى النموذج الثالث و هنالك نماذج اخرى ان شاءالله

عبدالرؤوف شطناوي

٠٧٨٥٤٢٧٤٦٠