٢٠١٨/
٢٠١٩

المنقذ

في

الرياضيات

(الأدبي والفندقي)

الثانية
والثالثة

التفاضل

تطبيقات التفاضل

محمود المحارمة

صفحة الاستاذ (Face book) محمود محارمة المنقذ

في هذه الوحدة سيتم اعطاؤنا اقتران

مثلاً ق(س) = ويُطلب منا القيام

أو ص = بعمليه تسمى

(إشتقاقه)

بداية وقبل البدء بالتعرّف على قواعد الاشتقاقة

كيف نعرف من السؤال أن المطلوب

هو إشتقاقه ؟

* صيغ السؤال عن الاشتقاقه :

١ جـ المشتقة الأولى ← المطلوب هو (المشتقه)

٢ جـ ق(س) ← المعادلة

٣ جـ ص

٤ جـ ص/س

٥* جـ نهـ ق(س+هـ) - ق(س) / هـ ، هـ → ٠

٦ جـ ميل المماس

كل ماسبقه هي صيغ سؤال لنفس

المطلوب وهو (الاشتقاقه)

* مامعنى جـ ق(س) ← يعني اشتقة المعادله

ثم روّح عالبيت

* مامعنى جـ ق(٣) ؟ هنا المطلوب

أولاً: إشتقة المعادله

ثانياً : عوض محل كل س بـ ٣

* مامعنى جـ ص/س |س=١ ؟

معناها أولاً : اشتقه المعادله

ثانياً : عوض محل كل س بـ ١

* قواعد الاشتقاقه *

١ ق(س) = جـ ← جـ عدد ثابت لحاله بدون س (أو) أي

ق(س) = صفر

٢ ق(س) = س^ن ← جاكي شاهد (إيدتيبه)

ق(س) = ن س^(ن-١)

٣ ق(س) = أ س^ن ← جاكي شاهد (إيدتيبه)

ق(س) = ن × أ س^(ن-١)

٤ ق(س) = أ س ← إيدواحده تضرب البيه

ق(س) = أ ← معامل س مع اشارته

٥ ق(س) = √س ← الجذر التربيعي

ق(س) = مشتقة ماداخل الجذر / ٢ × √نفسه

٦ حبايبنا (الاقترانات المثلثيه)

أ) ق(س) = جا س ← ق(س) = جتا س

ب) ق(س) = جتا س ← ق(س) = - جا س

ج) ق(س) = ظا س ← ق(س) = قا^٢ س

٧ الاقترانات المثلثيه داخلها (معادله) مثل (س)

(شيلة المور)

أ) ق(س) = جا (معادلة) ← ق(س) = جتا (المعادلة) × مشتقة

ب) ق(س) = جتا (معادلة) ← ق(س) = - جا (المعادلة) × مشتقة

ج) ق(س) = ظا (معادلة) ← ق(س) = قا^٢ (المعادلة) × مشتقة

٨ مشتقة القوس ← ٣ حركات

ق(س) = (معادلة)^ن

ق(س) = ن (معادلة زي ماهي)^(ن-١) × مشتقة ماداخل القوس

١) نزل ن

٢) اطرح من الأس ١

٣) اضرب بمشتقة ماداخل

٩ قاعدة الضرب عند وجود ضرب بين اقترانين فيهم حسبات

قـ(س) = (اقتران أول) × (اقتران ثاني)

قـ(س) = (الأول) × (مشتقة الثاني) + (الثاني) × (مشتقة الأول)

قـ(س) = ١ × جـ + ٢ × أ

١٠ قواعد القسمة

أ معادلة / رقم ← مقام

ب رقم / معادلة ← بسط غير مقام

ج معادلة / معادلة ← ماما وبابا

٢ قـ(س) = معادلة / مقام ← قـ(س) = نشتق للمعادلة / الرقم زي ماهو

٣ قـ(س) = رقم / معادلة ← بسط غير مقام ← قـ(س) = - الرقم × مشتقة المقام / (المقام)²

٤ قـ(س) = معادلة / معادلة ← بسط / مقام

(المقام) × (مشتقة البسط) − (البسط) × (مشتقة المقام) / (المقام)²

بطريقة ماما وبابا

أ × ب − ب × أ / أ²

ملاحظات هامة !!

١ اذا أعطانا السؤال مقدار وطلب اشتقه هنا نسأل دائماً شو بينهم

- جمع وطرح ← نشتق كل مقدار على حدة ونزل اشاراتنا الجمع والطرح
- ضرب ← نستخدم قاعدة الضرب
- قسمة ← نسأل: رقم / معادلة ← قاعدتها ؛ ولا معادلة / معادلة ← ماما وبابا

٢ انتبه اذا طلب اشتقاقه مع تعويض بالصيغ التاليه

* جد قـ(٣)
* جد ص/س | س = ٢
* جد المشتقه الاولى عند س = ٢
* جد ص عند س = ٢
* جد ص/س عند س = ٢

هنا:
أولاً: نقوم بالاشتقاقه
ثانياً: نقوم بالتعويض بقيمة س
لايجاد ناتج

والمهم دائماً وأبداً
هو الاشتقاق بشكل صحيح

قاعدة ١ مشتقة العدد الثابت = صفر
ق(س) = جـ ← ق'(س) = صفر
لمنتفي العدد

أمثلة:
١ ق(س) = ٦ ← جـ ق'(س) = صفر
٢ ق(س) = −٨ ← جـ ق'(س) = صفر
٣ ق(س) = $\frac{1}{5}$ ← جـ ق'(س) = صفر
٤ ق(س) = ٢٤٠ ← جـ ق'(س) = صفر
٥ ق(س) = ٢٢ حيث ٢٢ = $\frac{44}{2}$
ق'(س) = صفر
٦ ق(س) = ل حيث ل عدد ثابت
جـ ق'(س) = صفر

∴ أي رقم لحاله بدون (س) بيالي لف عليه جالي ستاه وبيصير صفر

قاعدة ٢ هام
مشتقة $س^{ن}$ ← ن $س^{ن-١}$
بنزل ن جنب س وبنطرح من الأس ١

أمثلة:
١ ق(س) = $س^{٥}$ جـ ق'(س)
ق'(س) = ٥ $س^{٥-١}$ ← ٥ $س^{٤}$
٢ ق(س) = $س^{٧}$ ← ق'(س) = ٧ $س^{٦}$
٣ ق(س) = $س^{٢}$ ← ق'(س) = ٢س
٤ ق(س) = $س^{٣}$ ← ق'(س) = ٣ $س^{٢}$
٥* ق(س) = $س^{-٤}$ ← ق'(س) = −٤ $س^{-٤-١}$
ق'(س) = −٤ $س^{-٥}$

انتبه هام جداً عند اشتقاق $س^{ن}$
ن ← موجب ← ننقص درجة
ن ← سالب ← نزيده درجة
ن ← كسر $\frac{ب}{ج}$ ← $\frac{ب-ج}{ج}$ ← تثبت

٦ ق(س) = $س^{-٢}$ ← ق'(س) = −٢ $س^{-٣}$
٧ ق(س) = $\frac{٧}{٣}س^{٣}$ ← ق'(س) = $\frac{٧}{٣}$ × ٣ $س^{٣-١}$
ق'(س) = $\frac{٧}{٣}$ $س^{٢}$

لطرح أي كسر من ١ عالسريع
$\frac{ب-ج}{ب} = ١ - \frac{ج}{ب}$ ← اطرح البسط من المقام / ثبت المقام

٨ ق(س) = $\frac{١}{٣}س^{٣}$ ← ق'(س) = $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$
٩ ق(س) = $س^{-٦}$ ← ق'(س) = −٦ $س^{-٧}$
١٠ ق(س) = $\frac{١}{٦}س^{٦}$ ← ق'(س) = $\frac{١}{٦}$ $س^{٥}$

تدريب مسائل قاعدة ١ و ٢
١ ق(س) = $س^{٣} + س^{-٣} + \frac{١}{٣}س^{٣} + ٣$
جد ق'(س)
٢ ق(س) = $س^{٢} + س^{٥} + ٨ + س^{-٧}$
٣ ق(س) = $\frac{١}{٤}س^{٤} + س^{-٤} + س^{٨} + ١$

قاعدة ٣ تقريباً نفس قاعدة ٢

ق(س) = أ $س^{ن}$

ق'(س) = أ × ن $س^{ن-١}$

أمثلة :

١ ق(س) = ٢ $س^{٣}$ جد ق'(س)

ق'(س) = ٦ $س^{٢}$ ← صنا ٣×٢ $س^{٣-١}$

٢ ق(س) = ٣ $س^{٥}$ ← ق'(س) = ١٥ $س^{٤}$

٣ ق(س) = ٦ $س^{-٢}$ ← ق'(س) = -١٢ $س^{-٣}$

٤ ق(س) = ٦ $س^{\frac{١}{٣}}$ ← ق'(س) = ٦×$\frac{١}{٣}$ $س^{\frac{١}{٣}-١}$

ق'(س) = $\frac{٦}{٣}$ $س^{-\frac{٢}{٣}}$

٥ ق(س) = ٣ $س^{٤}$ ← ق'(س) = ٦س

قاعدة ٤ مشتقة أ $س^{ن}$ ← لاحظ السين لايوجد موقعها رقم

ق(س) = أ $س^{١}$ ← هنا بنزوح لبسيه

ق'(س) = أ ← يطبق ٣ معامل س مع امشالته

أمثلة :

١ ق(س) = ٦س ← جد ق'(س) = ٦

٢ ق(س) = -٣س ← جد ق'(س) = -٣

٣ ق(س) = $\frac{١}{٥}$ س ← ق'(س) = $\frac{١}{٥}$

٤ ق(س) = ١ ← ق'(س) = ٠

٥ ق(س) = -س ← ق'(س) = -١

٦ ق(س) = $\frac{س}{٥}$ ← ق'(س) = $\frac{١}{٥}$

قاعدة ٥ مشتقة الجذر التربيعي $\sqrt{\ }$

فقط وحصرياً الجذر التربيعي

ق(س) = $\sqrt{\ }$

ق'(س) = $\frac{\text{نشتقه ماداخل الجذر}}{٢\sqrt{\text{نفسه}}}$ نسخ

١ ق(س) = $\sqrt{س^{٢}+٧س}$ جد ق'(س)

ق'(س) = $\frac{٢س+٧}{٢\sqrt{س^{٢}+٧س}}$ ← نشتقه ماداخل

٢ ق(س) = $\sqrt{س}$ جد ق'(س)

ق'(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

٣ ق(س) = $\sqrt{٢س^{٣}+٨}$ جد ق'(س)

ق'(س) = $\frac{٦س^{٢}}{٢\sqrt{٢س^{٣}+٨}}$ ← نشتقه

٤ ص = $\sqrt{٤س^{٢}+٢س-٣}$ جد $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٨س+٢}{٢\sqrt{٤س^{٢}+٢س-٣}}$

ملاحظة اذاكان الجذر المعطى في السؤال مش تربيعي $\sqrt[٣]{\ }$ $\sqrt[٥]{\ }$ وهكذا

هنا أولاً نخصر المقدار

$\sqrt{س}$ ← تجهيز $س^{\frac{١}{٢}}$ ← داخل ٢ خارج ثم نشتقه

مثال ق(س) = $\sqrt[٣]{س^{٥}}$

تجهيز ق(س) = $س^{\frac{٥}{٣}}$ ثم نشتقه

ق'(س) = $\frac{٥}{٣}$ $س^{\frac{٢}{٣}}$

* تدريب شامل قواعد الاشتقاقة *
المجموعة الأساسية

السؤال الاول ← جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يلي

١) $ص = ٣س^{٣} - ٤س + ٥$

٢) $ص = س^{٤} + س^{-٤} + \frac{١}{٤}$

٣) $ص = ٣س - س^{\frac{١}{٣}} + س^{٣}$

٤) $ص = ٦ - س$

٥) $ص = ٥س^{٣} + \sqrt{٧س} - ٩$

٦) $ص = ٦س - ٥\sqrt{٧س} + س^{٥}$

٧) $ص = ٣^{P} س + ١٢$

٨) $ص = \sqrt{٦ - ٢س} - \frac{١}{٥}س$

٩) $ص = \sqrt[٣]{س} + \sqrt{٣س}$ (نشبه)

١٠) $ص = \frac{س}{٦} - ٣س^{٣}$

١١) $ق(س) = س^{٤} - ٦س^{٢} + ٨س$ فجد $ق'(١)$

١٢) $ق(س) = \sqrt{٣س + ٤}$ فجد $ق'(٦)$

١٣) $ق(س) = ٢س^{٣} - ٤س + ١٨$ فجد $ق'(٢)$

١٤) $ق(س) = ٨س^{-٣}$ فجد $ق'(٢)$ (الكبار فقط)

الاجابات

١) $\frac{د ص}{د س} = ٦س^{٢} - ٤ + ٥س^{٤}$

٢) $\frac{د ص}{د س} = ٤س^{٣} - ٤س^{-٥} + \frac{١}{٤}س^{-٤}$

٣) $\frac{د ص}{د س} = ٣ - \frac{١}{٣}س^{-\frac{٤}{٣}} + ٣س^{٢}$

٤) $\frac{د ص}{د س} = -١$

٥) $\frac{د ص}{د س} = ١٠س + \frac{١}{٢\sqrt{٧س}}$

٦) $\frac{د ص}{د س} = ٦ - ٥ \times \frac{١}{٢\sqrt{٧س}} + ٥س^{٦}$

٧) $\frac{د ص}{د س} = ٣^{P}$

٨) $\frac{د ص}{د س} = \frac{-٢}{٢\sqrt{٦-٣س}} - \frac{١}{٥}$

٩) $\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٣}س^{-\frac{٢}{٣}} + \frac{٣س^{٢}}{٢\sqrt{٧س^{٣}}}$ ، $ص' = -\frac{١}{٣}س^{-\frac{٤}{٣}} + \sqrt{٣س}$

١٠) $\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٦} - ٩س^{٢}$

١١) $ق'(س) = ٤س^{٣} - ١٢س + ٨$
$ق'(١) = ٤(١)^{٣} - ١٢(١) + ٨$
$= ٤ - ١٢ + ٨ =$ صفر

١٢) $ق'(س) = \frac{٣}{٢\sqrt{٣س+٤}}$
$ق'(٦) = \frac{٣}{٢\sqrt{٣\times٦+٤}} = \frac{٣}{٢\times٥} = \frac{٣}{١٠}$

١٣) $ق'(س) = ٦س^{٢} - ٤$
$ق'(٢) = ٦ \times (٢)^{٢} - ٤ =$ ٢٠

١٤) $ق'(س) = -١٦س^{-٣}$
$ق'(٢) = -١٦ \times (٢)^{-٣}$
$ق'(٢) = -١٦ \times \frac{١}{٨} = \frac{-١٦}{٨} =$ -٢

قاعدة ⑤ مشتقة الاقترانات المثلثية

حبايبنا

[١] ق(س) = جاس ← ق'(س) = جتاس

[٢] ق(س) = جتاس ← ق'(س) = − جاس

[٣] ق(س) = ظاس ← ق'(س) = قا²س

جاس ← جتاس

بعكس بالسالب

* لاحظ عند وجود عدد ثابت (رقم)

قبل الاقتران (مضروباً فيه) ↓ يبقى العدد كما هو ونشتق الاقتران المثلثي

مثلاً ق(س) = ٣ جاس ← ق'(س) = ٣ جتاس

أو تحت الاقتران المثلثي (مقسوماً عليه) ↓ يبقى العدد كما هو ونشتق الاقتران المثلثي

ق(س) = جاس/٣ ← ق'(س) = جتاس/٣

* علشان ما تخربط في الاشارة لخصوص جا و جتا بس تشوف حرف ت ← تغيير اشارة ماقبله

مثلاً

* ق(س) = ٣ جتاس + ٣ جاس

تغيير ق'(س) = −٣ جاس + ٣ جتاس

* معلومات جليلة خ بالك

ظاس = جاس/جتاس

جتاس = ١/قاس

يعني لو وجد قاس في المقام ورفعناه للبسط يصبح جتا والعكس صحيح (النسيو)

جـ دص/دس لكل مما يلي: تفكير

[١] ص = ٢ جاس + ٤ ظاس + ٥ جتاس

دص/دس = ٢ جتاس + ٤ قا²س − ٥ جاس

---

[٢] ص = ظاس/٥ − ٢ جتاس + ٧ جاس

دص/دس = قا²س/٥ + ٢ جاس + ٧ جتاس

---

[٣] ص = ٦ − جتاس − ٤ جاس

دص/دس = جاس − ٤ جتاس

---

[٤] ص = ٣/قاس خطير

هنا أولاً نقوم بالتجهيز برفع قاس للبسط ويصبح (جتا) وبعدها نقوم بالاشتقاق

تجهيز ص = ٣ جتاس

دص/دس = −٣ جاس

---

* تدرب جـ دص/دس لكل مما يلي واجب

[١] ص = ٦ جاس − جتاس + ½ ظاس

[٢] ص = ٢جاس/٥ − ٤ جتاس + ظاس

[٣] ص = ١ − ٢ جتاس

[٤] ص = ٦/قاس + جتاس/٣ − ٣

[٥] ص = ٦/(ظاس)⁻¹ فلسفة ← نجهز ص = ٦ ظاس

دص/دس = ٦ قا²س

[٦] ص = جاس/جتاس فلسفة آلز جانبه دص/دس = ؟

[٦] نجهز ص = ظاس ← دص/دس = قا²س

قاعدة ٧ تتعلق بالـ (جا و جتا و ظا) فقط
اذا كان أمامهم (اقتران) معادلة وليس (س)

أمثلة
* قـ(س) = جا (٥س + ٧)
هنا نشتقه على مرحلتين
١ جتا (٥س + ٧) × ٥ ← ٢ نضرب في مشتقة المعادلة
١ نشتقه الي معه كما هي ٢ نضرب في مشتقة المعادلة

قاعدة ٧ عشرة الموز
١ قـ(س) = جا(معادلة) ← جتا(المعادلة) × مشتقة
٢ قـ(س) = جتا(معادلة) ← −جا(المعادلة) × مشتقة
٣ قـ(س) = ظا(معادلة) ← قا²(المعادلة) × مشتقة
* وبرب بالك تزحلقي وتنسى تضرب × مشتقة المعادلة

* القاعدة بالرموز * حيث هـ(س) ← اقتران
١ قـ(س) = جا(هـ(س)) ← قـ(س) = جتا هـ(س) × هـ'(س)
٢ قـ(س) = جتا(هـ(س)) ← قـ(س) = −جا(هـ(س)) × هـ'(س)
٣ ص = ظا(هـ(س)) ← ص' = قا²(هـ(س)) × هـ'(س)

* أمثلة معادلة * جد المشتقة الأولى:
١ قـ(س) = جتا(٥س + ١)
قـ'(س) = − جا(٥س + ١) × ٥

٢ ص = ظا(س³ − س + ٨) ← نشتقه
ص' / س = قا²(س³ − س + ٨) × (٣س² − ١)

٣ قـ(س) = جا(كرش)
قـ'(س) = جتا(كرش) × مشتقة الكرش

٤ ص = ٣ جا ٥س
ص' = ٣ جتا ٥س × ٥

٥ قـ(س) = ظا(٦ − س) + جتا ٣س − جا ٣س
قـ'(س) = قا²(٦ − س) × (−١) − جا ٣س × ٣ − جتا ٣س × ٣

واجب شامل
جد ص' / س لكل مما يلي :
١ ص = ٦ ظا س + جتا ٦س
٢ ص = جتا(٧ − ٥س) − ٣ جا س
٣ ص = ظا(٥ − ٢س) + ٢ جا س / ٧
٤ ص = ٢ جتا ٤س + جا(٥س + ١)
٥ ص = ٣ جا(٦س − ٣)
٦ ص = ظا(٣س) + جتا ٢س
٧ ص = جا(س/٣) + جا س / ٣ ← لاحظ القوقة
٨ ص = ٣ − جتا(−س)
٩ ص = ٦ / قا(٥س − ٣س) ← عرفي

قاعدة ١٨ (مشتقة القوس)

قَ(س) = (معادلة)^{ن}

قَ(س) = ن (معادلة ذو ما) $^{ن-١}$ × مشتقة ما داخل

* قاعدة القوس ٣ حركات
١ نرّل (ن) مع المعادلة لرا بع
٢ نقص من ن ـ ١
٣ أضرب × مشتقة ما داخل القوس

التاعدة بالرموز:

هـ(س) = (هـ(س))^{ن}

$\frac{د هـ}{د س}$ = ن (هـ(س))$^{ن-١}$ × هَ (س)

* جد $\frac{د هـ}{د س}$ لكل مما يلي:

١ هـ = (٢س ـ ٥)^{٤}

$\frac{د هـ}{د س}$ = ٤ (٢س ـ ٥)^{٣} × (٢) مشتقه

---

٢ هـ = (٤ ـ ٣ك)^{٣}

$\frac{د هـ}{د س}$ = ٣ (٤ ـ ٣ك)^{٢} × ـ٦س

---

٣ هـ = (ظا س)^{٥}

$\frac{د هـ}{د س}$ = ٥ (ظا س)^{٤} × قا^{٢} س

---

٤ هـ = $(\sqrt{٧س^{٣}+٣س})^{٦}$

$\frac{د هـ}{د س}$ = ٦ $(\sqrt{٧س^{٣}+٣س})^{٥}$ × $\frac{٣س^{٢}+٣}{٢\sqrt{٧س^{٣}+٣س}}$

---

٥ هـ = (جا٦ك)^{٣}

$\frac{د هـ}{د س}$ = ٣ (جا٦ك)^{٢} × جتا٦ك × ١٢س

---

٦ قَ(س) = (٤ + ٣س^{٢})$^{-٣}$

قَ(س) = ـ٣ (٤ + ٣س^{٢})$^{-٤}$ × ٤س

---

٧ هـ = $\frac{١}{٣}$ (٦س ـ ١)$^{-٢}$

$\frac{د هـ}{د س}$ = $\frac{١}{٣}$ (٦س ـ ١)$^{-٣}$ × (٦)

انتبه ← لا تنسى قاعدة القوس!

← هي أشكال للمعادله (مش مبيّنه) إنها قوس ولكنها بعد تجهيزها تصبح قوس ويتم إشتقاقها على قاعدة القوس.

خدعتان

١ جا^{٣} / جتا^{٢} ( ) / ظا^{٢} ( ) ← مشتقة جذر هش تربيعي داخله معادله

هام جداً

خدعة ١ ← جا^{٢}(معادله) ← تجهيزه (جا معادله)^{٣} ← ثم إشتقاقه

جتا^{٢}(معادله) ← تجهيزه (جتا المعادله)^{٢} ← على قاعدة القوس

ظا^{٢} (معادله) ← تجهيزه (ظا (معادله))^{٢}

---

١١ قَ(س) = ظا^{٦}س حيث قَ(س)

تجهيز قَ(س) = (ظا س)^{٦} جعلنا أحجبت قوس

مشتقه قَ(س) = ٦ (ظا س)^{٥} × قا^{٢} س

مهم ١٢ قَ(س) = جتا^{٣}٦س

تجهيز قَ(س) = (جتا٦س)^{٣}

قَ(س) = ٣ (جتا٦س)^{٢} × ـ جا٦س × ١٢س

---

١٣ هـ = جتا^{٥}س + جا^{٤}(٣س)

تجهيز هـ = (جتا س)^{٥} + (جا(٤-٣س))^{٢}

اشتقاقه هَ = ٥(جتا س)^{٤} × ـ جا س + ٢ (جا(٤-٣س)) × ـ جتا(٤-٣س) × ـ٣

صعب ١٤ هـ = جا^{٦}(٣س^{٣} ـ ٣س)

تجهيز هـ = (جا(٣س^{٣} ـ ٣س))^{٦}

$\frac{د هـ}{د س}$ = ٦ (جا٣س^{٣} ـ ٣س)^{٥} × جتا(٣س^{٣} ـ ٣س) × ٩س^{٢} ـ ٣

صعب ١٥ هـ = ٢ ظا^{٣}س

تجهيز هـ = ٢ (ظا س)^{٣}

$\frac{د هـ}{د س}$ = ٣×٢ (ظا س)^{٢} × قا^{٢} س × ٢

خدعة ② مشتقة جذر مش تربيع بداخله معادلة

ص = $\sqrt[3]{\text{(معادلة)}^2}$ حنا بنحنو

ص = (معادلة)$^{\frac{2}{3}}$ اصبحت قوس

ثم $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س}$ = مشتقة باستخدام قاعدة القوس

[11] ص = $\sqrt[3]{٤س^2 - س}$ حيد ص

نجعل ص = $(٤س^2 - س)^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{\text{تربيع}}$ $س^2$

نشتقه $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = \frac{1}{3}(٤س^2 - س)^{\frac{-2}{3}} \times (٨س - ١)$

[12] ص = $\sqrt[5]{٨س + ٧}$ حيد $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س}$

نجهز ص = $(٨س + ٧)^{\frac{1}{5}}$

$\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = \frac{1}{5}(٨س + ٧)^{\frac{-4}{5}} \times (٨)$

[13] ص = $\sqrt[3]{س^2} + \sqrt[3]{س^2 - ٨}$ (ممكن الترتيب)

هنا ص = تجهيز تجهيز

ص = $س^{\frac{2}{3}} + (س^2 - ٨)^{\frac{1}{3}}$

ص' = $\frac{2}{3}س^{\frac{-1}{3}} + \frac{1}{3}(س^2 - ٨)^{\frac{-2}{3}} \times ٢س$

استثنينا على قاعدة جلي . استثنينا على قاعدة القوس

الاشتقاق مع تعويض بقيمة س

[1] ق(س) = $(٣س + ١)^3$ حيد ق'(١)

ق'(س) = $٣(٣س + ١)^2 \times ٣$

ق'(١) = $٣(٣ \times ١ + ١)^2 \times ٣$

= $٣(٩) \times ٣$ = ٨١

[2] ص = $(س^3 - ١٠)^3$ حيد $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س}$ | س = ٢

$\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = ٣(س^3 - ١٠)^2 \times ٣س^2$

$\frac{\text{د}ص}{\text{د}س}$ | س = ٢ = $٣(٢^3 - ١٠)^2 \times ٣ \times (٢)^2$

$٣(-٢)^2 \times ٣ \times ٤$

$٤ \times ٣ \times ٤ \times ٣$

[9] ١٤٤

(تدريب شامل قاعدة القوس)

حيد $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س}$ لكل مما يلي :

[1] ص = $(٥ - س^3)^3$

[2] ص = $(٤س + ١)^3$

[3] ص = $(جتاس)^6$

[4] ص = $(٣ + س^2)^{-2}$

[5] ص = $ظا^3(٥س - ٦)$

[6] ص = $جا^9(٢س^2 - ٦س)$

[7] ص = $جتا^7(٥ - س)$

[8] ص = $\sqrt[3]{س^2 + ٣}$

[9] ق(س) = $(٣س - ٢)^5$ حيد ق'(١)

[10] هاجابه

٩ قاعدة الضرب ← لا يجوز الاشتقاقة مباشرة عند وجود اقتران فيهم (س) بينهم ضرب

طيب (شو الحل)

إما بنقدر نضربهم بأد بما بنقدر نضربهم

بسهولة هنا أو مش حابين نضرب

١ نضربهم أولاً هنا نستخدم قاعدة الضرب

٢ ثم نشتقه الناتج

القاعدة ص = ق(س) × هـ(س) (الأول) (الثاني)

$\frac{ص}{س}$ = (الأول) × (مشتقة الثاني) + (الثاني) × (مشتقة الأول)

بالرموز $\frac{ص}{س}$ = (ق(س)) × (هـ(س)) + (هـ(س)) × (ق(س))

١ × ٢ + ٢ × ١

١١ ق(س) = س جاس ← لاحظ اقترانين بينهم ضرب

انسخ ، انسخ

ق(س) = (س) (جتاس) + (جاس) (٣س)

نشتقه ← نشتقه

من الآخر

ق(س) = (الأول) × (الثاني) (٤) أقواس

ق(س) = (انسخه) (اشتقه) + (انسخه) (اشتقه)

عزيزي الطالب :

قاعدة الضرب سهلة وبسيطة و (بتحب ناس)

بس لازم لحالك تنتبه لوجود ضرب بين اقترانين

لأن الوزارة لتخبرك في السؤال أو هلأ ضرب

ولا بالك ماتنتبه لوجود ضرب .

* جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يلي :

١١ ص = س² (٣س − ٤)

هنا بنقدر نضرب لذا ممكن الحل بطريقتين

طريقة ١ نجهز (نضرب) بحيث نشتقه

ص = ٣س³ − ٤س² وزعنا الضرب على القوس

تشتق ص = ٩س² − ٨س

طريقة ٢ ← نشتقه باستخدام قاعدة الضرب

$\frac{ص}{س}$ = (س²) × (٣) + (٣س − ٤) × (٢س)

١٢ ص = ٣س³ ظاس

هنا لانستطيع الضرب لذا نستخدم قاعدة الضرب

$\frac{ص}{س}$ = (٣س³) (قاس) + (ظاس) × (٦س²)

١٣ ق(س) = س (س − ٣)³

ق(س) = (س) × (٣ (س − ٣)² × ١) + (س − ٣)³ × (١)

١٤ ص = ٦س³ √(٣س)

$\frac{ص}{س}$ = (٦س³) × $\left(\frac{٣}{٢\sqrt{٣س}}\right)$ + (√(٣س)) × (١٨س²)

١٥ ق(س) = (٣س − ٤) (س − ١) نجد ق(−١)

ق(س) = (٣س − ٤) × (٣٢) + (س − ١) × (٦س)

ق(−١) = (٣(−١) − ٤) × (٣×٢) + ((−١) − ١) × (٦×−١)

ق(−١) = (−١) × (−٢) + (صفر) × (−٦)

١٦ ص = جاس (١ − جتاس)

$\frac{ص}{س}$ = (جاس) (جاس) + (١ − جتاس) × (٢ (جاس) × جتاس)

واجب * تدريب شامل على قواعد الاشتقاق *

جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يلي :

١) $ص = ٨س^{٢} - س + \sqrt{٧ - س}$

٢) $ص = جا٣س - جا^{٣}٤س$

٣) $ص = س \, جتا س - ٣\sqrt{٥ س}$

٤) $ص = ٣س^{٣} (٦ - س)^{٥}$

٥) $ص = \frac{ظا س}{٧} - س^{\frac{١}{٥}} + ١٨$

٦) $ص = جتا^{٥}٦س - ٧\sqrt{٧ - س}$

٧) $ص = س^{٥} ظا ٣س$

٨) $ص = \sqrt{٤ + ٣ جتا س}$

٩) $ص = (س^{٢} + ٢)(٣ - ٤س)$

١٠) $ص = س^{٢} \sqrt{٧ - س + ٦}$

١١) $ص = (س جا س)^{٣} ظا س$ super

١٢) $ق(س) = س (٤س - ٣)^{٣}$ جد ق(٢)

(٣٥)

١٣) $ص = ٤س \sqrt{٧ - س}$ جد $\frac{ص}{س}$ عندما س = ٤

(١٤)

١٤) $ص = -٣س^{٢} جتا ٥س$

قاعدة ١٠ قواعد القسمة متسمة إيش ؟ ٣ حالات

١ معادلة / رقم ← محترم
رقم / معادلة ← غير محترم
معادلة / معادلة ← ماما وبابا ♡

٢ معادلة / رقم محترم ← هنا نشتقة المعادلة والرقم زي ماهو

٣ رقم / معادلة ← مش محترم ← (سالب الرقم × مشتقة المقام) / (المقام)^٢

٤ معادلة / معادلة ← (المقام)×(مشتقة البسط) − (البسط)×(مشتقة المقام) / (المقام)^٢
عالسريع م×ب − ب×م / م^٢
أو ماما وبابا في الحصة بشمعها !!!

٤ ق(س) = ٢ − / جاس ← رقم / معادلة
ق'(س) = ٢ × جتاس / (جاس)^٢

٥ ص = ١٢ / س جـ ص/س | س=٣ ← وعوض / اشتقة
ص/س = ١ × ١٢− / س^٢
ص/س | س=٣ = ١٢− / ٣^٢ = ١٢− / ٤ = ٣−

٦ ق(س) = ٨ / (٣س − ١)^٢ جـ ق'(١)
ق'(س) = ٨− × ٣ (٣س − ١)^٢ × ٣ / ((٣س − ١)^٣)^٢
ق'(١) = ٨− × ٣ (٣ − ١)^٢ × ٣ / ((٣ − ١)^٣)^٢ = ٤٨− / ١ = ٤٨−

٧ ص = ٣س^٢ − ٤ / ٦ − س + ١ صنا معادلة / معادلة
ص/س = (٦ − س + ١) × (٦ − ٣س^٢) − (٣س^٢ − ٤) × (٦) / (٦ − س + ١)^٢

٨ ص = س / ٤ − س^٢
ص/س = (٤ − س^٢) × (١) − (س) × (−٢س) / (٤ − س^٢)^٢

٩ ص = جاس / ١ + ظاس
ص' = (١ + ظاس) × (جتاس) − (جاس) × (قتا^٢ س) / (١ + ظاس)^٢

١٠ ص = س^٣ جاس / ٣ − جتاس
ص/س = (٣ − جتاس) × (٣س^٢ جاس + س^٣ × جتاس) − (س^٣ جاس) × (جتاس) / (٣ − جتاس)^٢

تدريبات شاملة .... تم باعادة الحل
* جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :

١١ ص = ٣س^٣ − ٢س + ٨ ← ٧ ← محترم حاله
ص' = ٦ − س − ٢ / ٧

١٢ ص = جا٣س / ٥
ص' = جتا٣س × ٣ / ٥

١٣ ص = ٣ / ٤س^٣ − ٥س ← مش محترم لازم يترفع
ص' = ٣− × (٨ − ٣س − ٥) / (٤س^٣ − ٥س)^٣

* جد المشتقة الأولى لكل مما يلي * (قواعد مضمنة)

١) $ص = \frac{١ - ٣س}{٢}$

٣) $ص = \frac{٣}{س^٣ + ٦}$

٣) $ص = \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$

٤) $ص = \frac{-٣}{٢ - س}$ عندما $س = -٢$ (٢ ج)

٥) $ق(س) = \frac{٣س^٢}{٥ - ٤س}$ جد $ق'(١)$ (١٠)

٦) $ص = \frac{٢ جتاس}{٥ + جا٣س}$

٧) $ق(س) = \frac{٣}{س}$ جد $ق'(٣)$

٨) $ص = \frac{٥}{جا^٤ ٢س}$

* اختبار شامل جميع قواعد الاشتقاقه *

(تم بالحل في الصفحة المقابلة) ⇐

* جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يلي :

١) $ص = \sqrt[٣]{س^٣ + ٥س} - ٣ جتاس$

٢) $ص = س^٣ ظاس$

٣) $ص = س جتاس + (س + ١)^٢$

٤) $ص = ٥س^٤ جاس - \frac{٧}{س}$

٥) $ص = جتا^٥ ٣س + \frac{س^٣}{٧}$

٦) $ص = \frac{٨}{٣س - ٣} + ٧٥\sqrt{س}$

٧) $ص = (س + ٧س^٣)(٩ - ٥س)$

٨) $ص = س^٤ \sqrt{٣س - ١}$

٩) $ص = \frac{س^٢ + ١}{٢س - ٤}$ $س \neq ٢$

١٠) $ص = \frac{-٣}{جا٥س} + ٣س^{-٥}$

١١) $ص = جا^٦ ٣س^٤ + \sqrt[٣]{٥س}$

١٢) $ص = \frac{٢ جتا٣س}{٤ - س}$

١٣) $ص = جا٢س جتاس$

١٤) $ص = \frac{٣}{ظاس} + \frac{٣}{س} + \frac{٣}{س}$ (قوى)

متى تستخدم هذه الطريقة (قاعدة السلسلة) ؟
تُستخدم اذا أعطانا في السؤال اقترانين

* ص = ... وطلب جـ $\frac{د ص}{د س}$ ← اشتقاقه
* ع = ...

خطوات الحل باستخدام قاعدة السلسلة

ص = ⬭ ، ⬭ = ع

١ نكتب القانون $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

٢ احلي توسين بنيصم × $\frac{د ص}{د س}$ = (نشتقه المعادلة الأولى ص) × (نشتقه المعادلة الثانية ع)

٣ لو تبقى لدينا الحرف ع بعد الاشتقاقة نضع مكانه معادلته فقط ع

٤ اذا طلب تعويض مثلاً جـ $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ٣
نعوض محل(س) بـ ٣ ولو ماطلب ؟ ← روّح عالبيت

ملاحظة ← ممكن في الامتحان يستخدم حرف غير (ع) مثلاً (م) ← عادي لاتخافوا نفس الخطوات

١ اذا كان ص = ع^{٢} + ١ ، ع = ٣س − ٢
جد $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ١

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$ ← اشتقه ، اشتقه

$\frac{د ص}{د س} = (٢ع) \times (٣)$ بضربهم لأنو مضل

$\frac{د ص}{د س} = ٦ع$ ← عوض محل ع = ٣س − ٢

$\frac{د ص}{د س} = ٦(٣س − ٢)$ ← عوض محل س بـ ١

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١} = ٦(٣ \times ١ - ٢)$

$= ٦ \times ١ = ٦$

٢ ص = $\sqrt{ع - ١}$ ، ع = ٦ ظاس جـ $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = \left(\frac{١}{٢\sqrt{ع-١}}\right) \times (٦ \text{ قا}^{٢} س)$

$\frac{د ص}{د س} = \left(\frac{٦ \text{ قا}^{٢} س}{٢\sqrt{(٦ \text{ ظا} س) - ١}}\right)$

٣ ص = م^{٣} + ٣م^{٢} − ٥ ، م = ٤ − ٢س
جد $\frac{د ص}{د س}$ ؟

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د م^{٣}} \times \frac{د م^{٣}}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = (٣م^{٢} + ٦م) \times (-٢)$ نضرب

$\frac{د ص}{د س} = (-٦ م^{٢} - ١٢م)$ نعوض محل م = ٤ − ٢س

$\frac{د ص}{د س} = (-٦(٤-٢س)^{٢} - ١٢(٤ - ٢س))$

٤ ص = $\frac{-٢}{ع}$ ، ع = (٣ − س − ١)^{٢} جـ $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = \left(\frac{١ \times ٢}{ع^{٢}}\right) \times (٢(٣ - س - ١)^{١} \times ٣)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٢}{((٣ - س - ١)^{٢})^{٢}} \times (٦(٣ - س - ١))$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١٢(٣ - س - ١)}{(٣ - س - ١)^{٤}}$ تزبيط الشكل الرغبي

٥ ص = ع^{٥} + ٣ع ، ع = ٣س$^{\frac{٣}{٥}}$ − ١ جـ $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = (٥ع^{٤} + ٣) \times \left(\frac{٦}{٥} س^{\frac{٣}{٥}}\right)$

$\frac{د ص}{د س} = (٥(٣س^{\frac{٣}{٥}} - ١)^{٤} + ٣) \times \left(\frac{٦}{٥} س^{\frac{٣}{٥}}\right)$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١} = (٥(٣ \times ١^{\frac{٣}{٥}} - ١)^{٤} + ٣) \times \left(\frac{٦}{٥} \times ١^{\frac{٣}{٥}}\right)$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١} = (٥ \times (٣-١)^{٤} + ٣) \times \left(\frac{٦}{٥} \times ١\right)$

$= \frac{٦}{٥} \times ٨٣ = \frac{٤٩٨}{٥}$

٦) $ص = ع^3 + ع$ ، $ع = س^2 + ١$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = ١$

٢٦

٧) $ص = ٥ - ٣ل^2$ ، $ل = ٢س - ٣$

جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = ٢$

-١٣

٨) $ص = ع^3 + ١$ ، $ع = (٢س - ١)^5$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = ١$

٣٠

٩) $ص = ٧\sqrt{٢ع + ١}$ ، $ع = ٦س + ٥$

١٠) $ص = ع^2 + ٣ع$ ، $ع = ٣ - ٢س^2$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = ١$

-٢٠

١١) $ص = م^2 + ٢م - ٢$ ، $م = ٤س$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = ٢$

٧٦

١٢) جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يلي

أ) $ص = جتا ٥ع$ ، $ع = ٦ - س$

ب) $ص = \frac{٧}{ع + ١٢}$ ، $ع = ٢س - ٥$

ج) $ص = ع$ جا $ع$ ، $ع = ٣س^2$

حل في الصفحة المقابلة

س٥ 2 of 8

١ جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يلي

أ) $ص = (٩ - س^{٣})^{٤} + \sqrt{س^{٢} + ٣}$

ب) $ص = \frac{٣س + ١}{س - ٣}$ $س \neq ٣$

ج) $ص = ع^{٢} - ع$ ، $ع = ٣س + ١$

إجابتك (إذا سمحت)

↓

٢ جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يلي :

أ) $ص = س^{٢} ظا س - \frac{ع}{س}$

ب) $ص = \frac{١}{س^{٣}} + س^{٢} جا س$

ج) $ص = ٤ع^{٢} - ع$ ، $ع = ٨ - ٣س$

د) $ص = ظا^{١٠} س + \frac{٨}{٣ - ٣س}$

هـ) $ص = ع^{٢} - ٦ع$ ، $ع = \sqrt{٣ - ٣س + ١}$

اجابتك أغلبك ↓

* ← تالياً صيغ السؤال فقط معناها (اشتقه)

١ جد نهـا $\frac{قـ(س+هـ)-قـ(س)}{هـ}$ هـ← ٠ ← ترجمه انسخ + / معناها جد قَ(س)

٢ جد نهـا $\frac{قـ(س+٣هـ)-قـ(س)}{٥هـ}$ هـ← ٠ ← معناها جد قَ(س)

٣ جد نهـا $\frac{قـ(ع)-قـ(س)}{ع-س}$ ع← س ← معناها جد قَ(س) ← انسخ + /

٤ جد نهـا $\frac{قـ(س+هـ)-قـ(هـ)}{هـ}$ هـ← ٠ ← معناها جد قَ(٠) ← اشتقه ثم عوض بـ ١

٥ اذا كان قـ(س) = $(٥-س-٢)^{٣}$ جد نهـا $\frac{قـ(١+هـ)-قـ(١)}{هـ}$ هـ← ٠ ← ١٣٥

كل الصيغ السابقة فقط معناها اشتقه القوسان المعطى في السؤال سواء مرة أو اشتقه ثم عوض

أشباه ← جد نهـا $\frac{قـ(٣+هـ)-قـ(٣)}{هـ}$ هـ← ٠

معناها جد قَ(٣) ← اشتقه ثم عوض بـ ١٣

* أمثلة للتوضيح *

١ قـ(س) = ٣جاس جد نهـا $\frac{قـ(س+هـ)-قـ(س)}{هـ}$ هـ← ٠

الحل قَ(س) = ٣ جتاس ☺ آه بس هيك

٢ قـ(س) = $٣س^{٣}-س$ جد نهـا $\frac{قـ(٢+هـ)-قـ(٢)}{هـ}$ هـ← ٠

هنا ← اشتقه قَ(س) = $٦س^{٢}-١$

← عوض بـ ٢ قَ(٢) = $٦(٢)^{٢}-١$ = ٢٣

٣ قـ(س) = $س^{٥}-٣س^{٣}+٨$ جد نهـا $\frac{قـ(١+هـ)-قـ(١)}{٥هـ}$ هـ← ٠

معناها اشتقه قَ(س) = $٥س^{٤}-٦س$

قَ(١) = $٥(١)^{٤}-٦(١)$ = -١

٤ قـ(س) = $ظ٤س$ جد نهـا $\frac{قـ(س+٥هـ)-قـ(س)}{٥هـ}$ هـ← ٠

قَ(س) = $ق٤س \times ٤$

١٠ ١ اذا كان قـ(س) = $٣س^{٣}-٣س+٥$ جد نهـا $\frac{قـ(٢+هـ)-قـ(٢)}{هـ}$ هـ← ٠

١ ٢ قـ(س) = $٦\sqrt{س}$ جد نهـا $\frac{قـ(٩+هـ)-قـ(٩)}{هـ}$ هـ← ٠

١٣ اذا كان قـ(س) = $(٥-س-٢)^{٣}$ جد نهـا $\frac{قـ(١+هـ)-قـ(١)}{هـ}$ هـ← ٠ ← ١٣٥

١٤ اذا كان قـ(س) = جا٣س جد نهـا $\frac{قـ(س+هـ)-قـ(س)}{هـ}$ هـ← ٠ ← ٣جتا٣س

١٥ اذا كان قـ(س) = $س^{٣}+٣س^{٥}$ جد نهـا $\frac{قـ(١+هـ)-قـ(١)}{هـ}$ هـ← ٠ ← ٨

١٦ قـ(س) = $س^{٥}+٣س^{٣}$ جد نهـا $\frac{قـ(-١+هـ)-قـ(-١)}{٥هـ}$ هـ← ٠ ← -٣

١٧ قـ(س) = $\sqrt[٦]{س}$ جد نهـا $\frac{قـ(١+هـ)-قـ(١)}{هـ}$ هـ← ٠ ← $\frac{١}{٦}$

من الممكن أن يأتي سؤال في الامتحان لاختبار حفظك القانون الخاص بقوانين الاشتقاق سواء كان السؤال يتطلب ← تطبيق القانون بالرموز ← أو باستخدام التعويض بأرقام

وتالياً صيغ متنوعة للأسئلة :

بالرموز

[١] إذا كان ص = ق(س) × هـ(س) فجد $\frac{د ص}{د س}$

هنا لاحظ وجود ضرب بين الاقترانين ∴ اختبار قاعدة الضرب

$\frac{د ص}{د س}$ = (ق(س)) × (هـ(س)) + (هـ(س)) × (ق(س))

رموز

[٢] إذا كان ص = $\frac{ج}{هـ(س)}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$ حيث ج عدد ثابت

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{-ج \times هـ(س)}{(هـ(س))^{٢}}$ اختبار لقاعدة رقم اقترانه

رموز

[٣] إذا كان ص = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ هـ(س) ≠ ٠ وكان كل من ق، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق فجد $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{هـ(س) \times ق'(س) - ق(س) \times هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$

اختبار لقاعدة القسمة ماما و بابا

رموز

[٤] إذا كان ص = $(هـ(س))^{ن}$ ، ن عدد حقيقي

هـ اقتران قابل للاشتقاق فجد $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س}$ = ن $(هـ(س))^{ن-١}$ × هـ'(س) قاعدة القوس

رموز

[٥] ص = جا (هـ(س)) هـ قابل للاشتقاق فجد $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س}$ = جتا(هـ(س)) × هـ'(س) قاعدة جيب الزاوية

رموز

[٦] ق(س) = $\sqrt{هـ(س)}$ هـ(س) > ٠ فجد ق'(س)

ق'(س) = $\frac{هـ'(س)}{٢ \times \sqrt{هـ(س)}}$ قاعدة الجذر التربيعي

تعويض

[٧] إذا كان ق(١) = ٢ ، هـ(١) = ٣

ق'(١) = −٣ ، هـ'(١) = ١ فجد

[أ] (ق × هـ)'(١) [ب] (ق × هـ)(١)'

[ج] $(\frac{ق}{هـ})'$(١) [د] (ق + هـ)'(١)

[هـ] $(\frac{٦}{ق})'$(١) [و] $(\sqrt{١ + هـ(١)٥})'$(١)

[أ] قاعدة الضرب ١ × ٢' + ٢ × ١'

ق(١) × هـ'(١) + هـ(١) × ق'(١)

٢ × ١ + ٣ × −٢

٢ − ٦ = −٤

[ب] $(\frac{ق}{هـ})'$(١) قاعدة القسمة ماما و بابا

$\frac{هـ(١) \times ق'(١) - ق(١) \times هـ'(١)}{(هـ(١))^{٢}}$

$= \frac{(٣) \times (-٢) - (١) \times (٢)}{(٣)^{٢}} = \frac{-٦-٢}{٩} = \frac{-٨}{٩}$

[ج] $(\frac{٦}{ق})'$(١) ← قاعدة رقم مقلوبه

$\frac{-٦ \times ق'(١)}{(ق(١))^{٢}} = \frac{-٦ \times -٢}{(٢)^{٢}} = \frac{١٢}{٤} = ٣$

[د] $(\frac{ق}{هـ})'$(١) ← لاحظ الفرق بينه وبين سؤال ٢

$(\frac{ق(١) \times هـ(١)}{هـ(١)})' \Leftarrow (٣ \times ٢)' = (٦)' = صفر$

[هـ] (ق + هـ)'(١)

ق'(١) + هـ'(١)

−٣ + ١ = −٢

[و] $(\sqrt{١ + هـ(١)٥})'$(١) قاعدة الجذر التربيعي

$\frac{٥ هـ'(١)}{٢ \times \sqrt{١ + ٥ هـ(١)}} = \frac{٥ \times ١}{٢ \times \sqrt{١+٣٠}}$

$= \frac{٥}{٢ \times ٤} = \frac{٥}{٨}$

للتعويض فقط

الرياضيات الأدبي (منهاج جديد) اختبارات توانيه تفوقه الأستاذ محمود المحارمة

٨) اذا كان قه(١) = ٤ ، قَ(١) = -٢
هـ(١) = -٣ ، هَ(١) = ١

أ) أوجد (قه × هـ)َ (١) ← الاجابه ٢٨
ب) (قه / هـ)َ (١) ← الاجابه ٢٥
ج) (قه / هـ)َ (١) ← الاجابه ٥/٩
د) (٣ / هـ)َ (١) ← الاجابه ٣/٤
هـ) (قه + هـ)َ (١) ← الاجابه -١
و) (٧ قه)َ (١) ← الاجابه ٧/٤

٩) اذا كان قه ، ل قترانان قابلان للاشتقاق
ص = قه(س) × ل(س) أوجد dص/dس

١٠) اذا كان قه(س) = جـ / م(س) حيث م(س) ≠ ٠ ∀ س ∈ ح
أوجد قَ(س)

١١) اذا كان ص = ظا هـ(س) أوجد dص/dس

١٢) اذا كان قه(س) = ٦ م(س) - ٣س٢
وكان م(٢) = ٣ أوجد قَ(٢)
الاجابه ٦

توجيه
١٣) اذا كان هـ اقترانا قابلا للاشتقاق عند س = -٣
هـ(-٣) = ١ ، هَ(-٣) = ٢ أوجد قَ(-٣)

١٤) قه(س) = √(٦س + ٧) × هـ(س) الاجابه ١٧/٤

١٥) قه(س) = هـ(س) - ٤هـ(س) / س الاجابه ٧

إيجاد المجاهيل

من الممكن أن يطلب منك إيجاد مجاهيل مثل ٢
من خلال الاشتقاقه
هُنا سيكون لدينا في السؤال معلومة ← نقوم بترجمتها الى خطوات عمل
مثلاً ق(٣) = ٩ ← الترجمه
١ نشتقه ٢ نعوض حل س بـ ٣ ← ٣ الناتج = ٩

تدريبات محلولة يجب لعادة حلها

Must

١ اذا كان ق(س) = س³ + ٢س² + ٤ وكان ق(١) = ١١ فجد قيمة الثابت ٢

أولاً ← نشتقه ق(س) = ٣س² + ٢٢س
ثانياً ← نعوض بـ ١ ق(١) = ٣(١)² + ٢٢(١)
ثالثاً ← الناتج = ١١ ٣ + ٢٢ = ١١
٢٢ = ١١ ٢ ← ٢ = ٤

٢ اذا كان ق(س) = س³ − ٢٧س + ١٠
فجد قيم (س) التي تجعل ق(س) = صفر

ق(س) = ٣س² − ٢٧ أولاً: نشتقه
٣س² − ٢٧ = صفر ← ثانياً: المساواه بالصفر
٣س² = ٢٧
س² = ٩
س = ± ٣

٣ اذا كان ق(س) = ٢٢س³ − س² + ٢ وكان ق(−١) = ٣٠ فجد قيمة الثابت ٢

ق(س) = ٦٢س² − ٢س + صفر ← نشتقه
ق(−١) = ٦(٢)(−١)² − ٢(−١) + ٢ ← ٢
٦٢ + ٢ = ٣٠
٦٢ / ٦ = ١٨ / ٦ ← ٢ = ٣

---

٤ ق(س) = (٢ − س)⁴ وكان ق(٢) = ٤ فجد قيم ٢ ؟

ق(س) = ٤(٢ − س)³ × −١ نفرض ٤ × −١
ق(س) = −٤(٢ − س)³
ق(٢) = −٤(٢ − ٢)³ = ٤ / −٤ نقسم بسبع
(٢ − ٢)³ = ١ / −١
٢ − ٢ = −١ / ١
−٢ = −١ / −٢
−٢ = −٢ ← ٢ = ٣

أقوى

٥ ق(س) = س³ + ٦س² − ١٥س + ٧
وكان ق(جـ) = صفر فجد قيمة (قيم) جـ

ق(س) = ٣س² + ١٢س − ١٥
ق(جـ) = ٣جـ² + ١٢جـ − ١٥
٣جـ²/٣ + ١٢جـ/٣ − ١٥/٣ = صفر نقسم على ٣
جـ² + ٤جـ − ٥ = ٠
(جـ + ٥)(جـ − ١) = ٠
جـ = −٥ / جـ = ١

أقوى نوعاً

٦ اذا كان ق(س) = ٢س³ − ب س + ٣ وكان ق(١) = ٩ ، ق(٢) = ٢٧ فجد قيمة ٢ ، ب
ق(س) = ٣٢س² − ب + ٣ نشتقه

معلومة ١ ق(١) = ٩
٣٢(١)² − ب + ٣ = ٩
٣٢ − ب + ٣ = ٩
٣٢ − ب = ٦ ← ١

معلومة ٢ ق(٢) = ٢٧
٣٢(٢)² − ب + ٣ = ٢٧
١٢٢ − ب + ٣ = ٢٧
١٢٢ − ب = ٢٤ ← ٢

الحذف ١٢٢ − ب = ٢٤
نضرب × −١ ٣٢ − ب = ٦
١٨ = ٩٢
٢ = ٢

والتعويض ٣٢ − ب = ٦
٦ − ب = ٦ − ٦
ب = صفر

* تدريبات هامة *

١ اذا كان قَ(س) = $س^{٣}$ + ٢ $أ س^{٢}$ − ٥س + ٨
وكان قَ(١) = ١٤ فجد قيمة الثابت أ

أ = ٢

٢ اذا كان ق(س) = $س^{٣}$ + ٣ $س^{٢}$ − ٩س + ٧
وكان قَ (أ) = صفر فجد قيمة (قيم) أ

أ = −١ ، ٣

٣ اذا كان ق(س) = $\frac{١}{٣}س^{٣}$ + $\frac{١}{٢}س^{٢}$ − ٣س + ٧ وكان
قَ(أ) = صفر فجد قيمة (قيم) (أ)

أ = −٣ ، ٢

٤ اذا كان ق(س) = $أ س^{٣}$ − $س^{٣}$ + ٨
ما قيمة (قيم) الثابت أ التي تجعل
قَ (٣) = $-٣^{٣}$

أ = ± ٣

٥ ضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة

٦ اذا كان ق(س) = $أ^{٢}$ س وكان أ عدد ثابت فإن قَ(س) =
أ) ٢أ س ب) ٢أ ج) $أ^{٢}$ د) ٢ أ

٧ اذا كان ق(س) = أ س + $س^{٣}$ وكان قَ(٢) = ٢٠
فإن قيمة أ تساوي
أ) ٤ ب) ٨ ج) ٢ د) ١٢

٨ اذا كان هـ(س) = ش × قَ(س) ، ق(٣) = ٦
قَ(٣) = ٥ فإن هـَ (٣) تساوي :
أ) ٨١ ب) ١١ ج) ٤٥ د) ٥٤

٩ اذا كان ق(س) = $أ س^{٢}$ + ٢ هـ(س) + ٨
وكان هـَ (٢) = ٣ ، قَ(٣) = ١٨ فجد أ

أ = ٢

١ اذا كان ق(س) = $\frac{\text{ط}}{\text{هـ}}$ س − ٦س فإن نهـا قه(١+هـ) − قه(١) =
أ) −٥ ب) صفر ج) ١ د) ٧

٢ اذا كان الاقتران ق(س) = ٣ + ٢√س فإن قه(١) =
أ) صفر ب) ١ ج) $\frac{1}{2}$ د) ٥

٣ اذا كان ق(١) = ٣ ، هـ(١) = ٢ ، قه(١) = −٣
هَ(١) = ١ فإن (قه × هـ)َ(١) يساوي
أ) ٨ ب) −٤ ج) ٤ د) ٨

٤ اذا علمت أن ق(س) اقتران كثير حدود فإن
نهـا $\frac{\text{قه}(1+\text{هـ}) - \text{قه}(1)}{\text{هـ}}$ تساوي :
أ) ق(١) ب) قه(٠) ج) قه(١) د) قَه(١)

٥ اذا كان ق(س) = جا٣س فإن نهـا $\frac{\text{قه}(\pi+\text{هـ}) - \text{قه}(\pi)}{\text{هـ}}$ =
أ) ٣جتا٣س ب) −جتا٣س ج) ٣جا٣س د) −٣جتا٣س

٦ اذا كان ق(س) = ٢جتا٣س فإن قه(س) تساوي
أ) −٣جتا٣س ب) −٦جا٣س ج) ٦جا٣س د) −٣جا٣س

٧ اذا كان ق(س) = كَ٢س وكان كَ عدداً ثابتاً
فإن قه(س) تساوي
أ) ٢كَس ب) ٢كَ ج) كَ٢ د) ٢س

٨ اذا كان ق(س) = ظا٣س فإن قَ(س) =
أ) ٣ قا٢س ب) −٣قا٢٣س ج) ٣قا٢٣س د) قا٢٣س

٩ اذا كان ق(س) = $\frac{\text{ط}}{\text{هـ}}$ فإن نهـا $\frac{\text{قه}(1+\text{هـ}) - \text{قه}(1)}{\text{هـ}}$ =
أ) ١ ب) ٦ ج) ٦ط د) ٣٠

١٠ اذا كان ق(س) = جاس − جتاس فإن قه(س) =
أ) جتاس + جاس ب) −جتاس + جاس
ج) جتاس − جاس د) −جتاس − جاس

١١ اذا علمت أن ق(س) = ٦√س فإن
نهـا $\frac{\text{قه}(9+\text{هـ}) - \text{قه}(9)}{\text{هـ}}$ =
أ) ١ ب) ٣ ج) ٦ د) ٩

١٢ اذا كان قه(س) = $\frac{3}{\text{س}}$ فإن قه(٣) =
أ) −١ ب) $-\frac{1}{3}$ ج) $\frac{1}{9}$ د) −٣

١٣ اذا كان قه(س) = س٣ + ٨
فإن نهـا $\frac{\text{قه}(2+\text{هـ}) - \text{قه}(2)}{\text{هـ}}$ تساوي
أ) ١٢ ب) ٨ ج) ١٦ د) ٢٠

١٤ (ش وزاري) اذا كان ق(س) = $\sqrt[3]{\text{س}}$ فإن قَ(س) =
أ) $\sqrt[3]{\text{س}}$ ب) $\frac{1}{3\sqrt[3]{\text{س}}}$ ج) $\frac{1}{\text{س}\sqrt[3]{\text{س}}}$ د) $\sqrt[3]{\text{س}^2}$

١٥ اذا كان ص = ٢ع + ٨ ، ع = ٣س + ١
فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ تساوي
أ) ٢ع ب) ١٢ ج) ١٤ د) ١٣

في هذا الدرس سوف يكون هناك اقتران في السؤال
ق(س) = ... ويطلب أحد مطلوبين

أ إما جد ميل المماس عند س = م

هنا الاجابه (بأدب واحترام) ميله تميلك قصدك
م ١) اشتقه ق'(س) = ...
م ٢) عوّض ق'(م) = ... والاجابه هي ميل المماس

أو

ب جد معادلة المماس عند س = م

١ هنا أولاً نكتب معادلة المماس (قانونك)

ص - ص١ = م (س - س١)
ص - ☐ = ☐ (س - ☐)

و يكون مطلوب منك ايجاد (٣) قيم ← ص١ ← س١ ← م ← الميل

س١ ← دائماً معطاه وهي قيمة س في السؤال هنا م

ص١ ← ممكن تكون معطاة ← اذا وجبت نقطه (م، ب) ص١ س١

← أو نعوض مباشرة في الاقتران بقيمة س لايجاد قيمة ص١ = ق(م)

م ← وهو الميل لايجادة
ميله م = ق'(س) = نشتقه
تميلك م = ق'(م) = نعوض بقيمة س

ونضع قيمة كل حرف في مكانه في معادلة المماس

ملاحظات

١ اذا وجد في السؤال نقطة التماس (٢، ٥) ← س١ ← ص١ لا

٢ ممكن استخدام السؤال لايجاد مجاهيل فاذا ذكر في السؤال وكان ميل المماس عند س = ٢ يساوي ٢٠ معناها ١ اشتقه ٢ عوض محل س بـ ٢ ٣ الناتج = ٢٠ ثم أوجد المجهول

١ اذا كان ق(س) = س٣ - ٦س + ٥ فجد
ميل المماس لمنحنى الاقتران عند س = -٢

فوراً ← م = ق'(س) = ٣س٢ - ٦
نعكي ميله تميلك ← م = ق'(-٢) = ٣(-٢)٢ - ٦
الميل م = ١٢ - ٦ = ٦

٢ اذا كان ق(س) = ٣ + √(٣س + ١) فجد
ميل المماس عند النقطه (١، ٥)

ميله ← م = ق'(س) = ٣ / (٢√(٣س + ١))
تميلك ← م = ق'(١) = ٣ / (٢√(٣×١ + ١)) = ٣/٤
لاحظ النقطه (١، ٥) س ص

٣ اذا كان ق(س) = س٥ + ٤س٢ فجد
معادلة المماس عندما س = ١

ص - ص١ = م (س - س١)
ص - ٥ = ١٣ (س - ١)

س١ = ١
ص١ = نعوض ب ١ ← ق(١) = (١)٥ + ٤(١)٢ = ١ + ٤ = ٥
م ← الميل م = ق'(س) = ٥س٤ + ٨س
م = ق'(١) = ٥(١)٤ + ٨(١) = ١٣

الاجابه ← ص - ٥ = ١٣ (س - ١)

لاحظ من الممكن اكمال حل السؤال بجعل ص الطالع وهذا تحسين للشكل ولكن بدون علامات

ص - ٥ = ١٣ (س - ١)
ص = ١٣س - ١٣ + ٥
ص = ١٣س - ٨

٤ اذا كان ق(س) = (٣س+١)^{٣} فجد ميل المماس لمنحنى الاقتران عندما س = ٣

١٥٠

٥ اذا كان ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} + ٣ فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند س = ٣

ص - ١١ = ٦ (س - ٢)

٦ اذا كان ق(س) = (س^{٢} + ١)^{٢} فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١

ص - ٤ = ٨ (س - ١)

٦ جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
ق(س) = س + $\sqrt{س}$ عندما س = ١

ص - ٢ = ١,٥ (س - ١)

٧ اذا كان ق(س) = $\frac{س^{٣}}{٣س^{٢}}$ فجد ميل المماس عند س = ٣

$\frac{٦}{٣٦}$

ملاحظة ← اذا ذُكر في السؤال أن المستقيم يوازي محور السينات أو أفقي فهذا يكون الميل يساوي صفر ولا يخلص إنساني

٨ اذا كان ق(س) = (٣س^{٢}+١)(٣س-٤) فجد معادلة المماس عندما س = ٣

ص - ١٠ = ١٩(س - ٣)

٩ اذا كان ق(س) = ٣$\sqrt{س}$ + ٦ فجد معادلة المماس عند النقطة (١، ٣)

ص - ٣ = ١(س - ١)

١١ اذا كان ق(س) = $\frac{س^{٣}}{س+١}$ فجد معادلة المماس عندما س = ٣

ص - ٢ = $\frac{٣}{٤}$ (س - ٣)

أو $\frac{٣}{٤}$

١٢ اذا كان ق(س) = $\frac{٢}{٣س-١}$ فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (٠ ، ق(٠))

ص + ٢ = -٦ (س - ٠)

١٣ اذا كان ق(س) = س^{٣} - ٨س + ٧ وكان ميل المماس يساوي (٤) فجد قيمة س$_{١}$

س$_{١}$ = ٦

١٤ اذا كان ق(س) = ٣س^{٢} + ٤س - ٣ وكان ميل المنحنى عند س = ٣ يساوي (٣٨) فجد أ

أ = ٤

١٤ اذا كان ميل المماس للاقتران ص = (٣ - س)^{٤} عند النقطة (س$_{١}$ ، ١٥٢) يساوي (٤) فجد قيمة س$_{١}$

س$_{١}$ = ٣

١٥ جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

ق(س) = ٤س$^{\frac{١}{٢}}$ + ٩س عند س = ٢

ص - ٢ = ٨ (س - ٢)

تحاضيل

١ اذا كان ق(س) = ٣س^{٢} + ٢س + ٥ وكان ميل المماس عند س = ٣ يساوي (٢٢) فجد قيمة أ

نشتق ميل = ق$'$(س) = ٢أس + ٢

نعوض ميل = ق$'$(٣) = ٢أ × ٣ + ٢

٢٢ = ٦أ + ٢

٢٠ = ٦أ

$\frac{٢٠}{٤}$ = $\frac{٦أ}{٤}$

أ = ٥

* الاشتقاق باستخدام التعريف العام للمشتقة *

هذه الطريقة نستخدمها في الاشتقاق إذا طلبت صراحة في السؤال ....
مع العلم أن الناتج الذي نعرفه ← اشتقاق عادي

* ماهو القانون المستخدم (التعريف العام) ؟
يوجد عدة صيغ للتعريف العام

١) قَ(س) = نهـا_{ص→٠} [قَ(س+ص) − قَ(س)] / ص = نهـا_{ص→٠} [ص ص] / ص س

٢) قَ(س) = نهـا_{ص→٠} [قَ(س+ص) − قَ(س)] / ص

٣) قَ(س) = نهـا_{ع→س} [قَ(ع) − قَ(س)] / (ع − س)

وسيتم الاعتماد على الصيغة رقم (٣)
لحل المسائل علماً بأنه يمكن الحل بأكثر من طريقة وكلما معقده ↗

ماذا نفعل لو طلب جد قَ(٣) مستخدماً تعريف المشتقة عند نقطه ؟
هنا نستخدم أحد طريقتين

أ) التعويض في نهاية الحل ← بحيث تقوم بالسير بنفس خطوات الحل وبعد ايجاد قَ(س) = نقوم بالتعويض محل س بـ ٣

ب) التعويض من البدايه في القانون محل س بـ ٣
ويصبح قَ(٣) = نهـا_{ع→٣} [قَ(ع) − قَ(٣)] / (ع − ٣)

وتكمل الخطوات ↓

والطريقتان معقدتان

* خطوات الحل *

١) نكتب القانون قَ(س) = نهـا_{ع→س} [قَ(ع) − قَ(س)] / (ع − س)

٢) على قوسين بينهم (−) نهـا_{ع→س} (نسخ المعادلة مع ع) − (نسخ المعادلة مع س) / (ع − س)

٣) نقوم بادخال السالب للقوس الثاني ونحذف الرقم الموجود في القوس الأول مع إلغاء

٤) نأخذ رقم عامل مشترك اذا لزم

٥) * نميز نوع الحالة ← المشتق
مربعين ← ع² − س² ← (ع − س)(ع + س)
مكعبين ← ع³ − س³ ← (ع − س)(ع² + ع س + س²)
مشترك ← ٢ع − ٢س ← ٢(ع − س)
توحيد مقامات ← ١/ع − ١/س ← (س − ع)/(ع س) ← (٢س − ٢ع)/(ع)(س)(ع − س)
المرافق ← (√(٧ع) − √(٧س))/(ع − س) × (√(٧ع) + √(٧س))/(√(٧ع) + √(٧س))

الناتج (ع − س) / (ع − س)(√(٧ع) + √(٧س)) نجر الجذور لزقة قت

٦) وأخيراً نختصر (ع − س)/(س − ع)

٧) قَ(س) = الاجابه (نعوض من الأول)
اشتقاق عادي

[١] ق(س) = ٥س − ٢ جد قَ(س) باستخدام التعريف العام للمشتقة

[٢] عانون قَ(س) = نهـا (ق(ع) − ق(س)) / (ع − س)، ع→س

[٣] أحلى توسين نهـا ((٥ع − ٢) − (٥س − ٢)) / (ع − س)، ع→س

[٣] إدخال السالب نهـا (٥ع − ٥س) / (ع − س)، ع→س

[٤] العامل المشترك نهـا ٥(ع − س) / (ع − س)، ع→س

[٥] قَ(س) = [٥] ← أصلاً إحنا عارفينه ☺

[١] ق(س) = س³ جد قَ(س) باستخدام التعريف العام للمشتقة

قَ(س) = نهـا (ق(ع) − ق(س)) / (ع − س)، ع→س

= نهـا (ع³ − س³) / (ع − س)، ع→س ← فرق بين مكعبين

= نهـا (ع − س)(ع² + عس + س²) / (ع − س)، ع→س

= نهـا ع² + عس + س²، ع→س بتعويض مباشر

= س² + س² + س² = [٣س²]

[٥] ق(س) = ٦س² − ٢ جد قَ(س) مستخدماً التعريف العام للمشتقة

قَ(س) = نهـا (ق(ع) − ق(س)) / (ع − س)، ع→س

= نهـا ((٦ع² − ٢) − (٦س² − ٢)) / (ع − س)، ع→س

= نهـا (٦ع² − ٦س²) / (ع − س)، ع→س عامل مشترك

= نهـا ٦(ع² − س²) / (ع − س)، ع→س

= نهـا ٦(ع − س)(ع + س) / (ع − س)، ع→س

قَ(س) = ٦(س + س) ⇐ ١٢س = [١٢س]

[١] قَ(س) = ٩ جد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة

قَ(س) = نهـا (ق(ع) − ق(س)) / (ع − س)، ع→س

نهـا (٩ − ٩) / (ع − س)، ع→س = [صفر]

[٢] قَ(س) = س³ − ٣س² جد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة

عانون قَ(س) = نهـا (ق(ع) − ق(س)) / (ع − س)، ع→س

أحلى توسين نهـا ((ع³ − ٣ع²) − (س³ − ٣س²)) / (ع − س)، ع→س

إدخال السالب نهـا (ع³ − س³ − ٣ع² + ٣س²) / (ع − س)، ع→س

العامل المشترك نهـا ((ع − س)(ع² + عس + س²) − ٣(ع − س)(ع + س)) / (ع − س)، ع→س

نهـا (ع − س)(ع² + عس + س² − ٣ع − ٣س) / (ع − س)، ع→س

نهـا ع² + عس + س² − ٣ع − ٣س، ع→س

بتعويض مباشر س² + س² + س² − ٣س − ٣س = [٣س² − ٦س]

[٦] قَ(س) = ٣ − ٢س جد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة

الحل بطريقة أخرى

قَ(س) = نهـا (ق(س + هـ) − ق(س)) / هـ، هـ→٠

نهـا ((٣ − ٢(س + هـ)) − (٣ − ٢س)) / هـ، هـ→٠

نهـا (٣ − ٢س − ٢هـ − ٣ + ٢س) / هـ، هـ→٠

نهـا −٢هـ / هـ، هـ→٠

قَ(س) = −٢

٧ ق(س) = ٣ − س² أجد ق′(٤) باستخدام تعريف المشتقة

هنا سأقوم بالحل بطريقتين ← ١ التعويض في النهاية ← ٢ التعويض من البداية

١ التعويض في النهاية ← نفس الخطوات السابقة

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(٣ - ع^٢) - (٣ - س^٢)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٣ - ع^٢ - ٣ + س^٢}{ع - س}$$ المعامل عامل مشترك

$$= \lim_{ع \to س} \frac{-(ع^٢ - س^٢)}{ع - س}$$ مزدوج بين موجبين

$$= \lim_{ع \to س} \frac{-(ع + س)(ع - س)}{ع - س}$$

$$ق'(س) = -٢س$$ الآن عوض في نهاية الحل

$$ق'(٤) = -٢ \times ٤ = \boxed{-٨}$$

٢ التعويض من البداية ← نضع مكان س ← ع من بداية القانون

$$ق'(٤) = \lim_{ع \to ٤} \frac{ق(ع) - ق(٤)}{ع - ٤}$$

$$= \lim_{ع \to ٤} \frac{(٣ - ع^٢) - (٣ - ٤^٢)}{ع - ٤}$$

$$= \lim_{ع \to ٤} \frac{٣ - ع^٢ \subset ١٣}{ع - ٤}$$

$$= \lim_{ع \to ٤} \frac{١٦ - ع^٢}{ع - ٤}$$ نحلل

$$= \lim_{ع \to ٤} \frac{(٤ - ع)(٤ + ع)}{٤ - ع}$$

$$= \lim_{ع \to ٤} -١ \times (٤ + ع)$$

$$= -١ \times (٤ + ٤) = \boxed{-٨}$$

الطريقتان معقدتان للحل اسهل اختار الطريقة التي حبيتها أكثر (ديمقراطية الرياضيات)

٩ ق(س) = ٣س + ٧ جد ق′(س) باستخدام تعريف المشتقة

١٠ ق(س) = س² + ١ جد ق′(س) مستخدماً تعريف المشتقة

١١ ق(س) = ٨ + س³ جد ق′(س) مستخدماً تعريف المشتقة

تذكر طريقة توحيد المقامات من درس سابق

عند وجود كسور في البسط ← المخطط

نهـا ← $\frac{\frac{\text{ص}}{\text{س}} \leftarrow \frac{\text{ص}}{\text{ع}}}{\text{ع} - \text{س}}$

نهـا ع ← $\frac{٢ \times \text{س} - ٢ \times \text{ع}}{(\text{ع}) \times (\text{س}) \times (\text{ع} - \text{س})}$ ← ضرب تبادلي

← كل مقامات السؤال نضعهم تحت بعضهم

والهدف دائماً اختصار $(\text{ع} - \text{س})$

---

[١] $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٦}{\text{س}}$ جد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة

$\text{ق}'(\text{س}) =$ نهـا ع ← س $\frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

نهـا ع ← س $\frac{\frac{٦}{\text{ع}} - \frac{٦}{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$

نهـا ع ← س $\frac{٦\text{س} - ٦\text{ع}}{(\text{ع}) \times (\text{س}) \times (\text{ع} - \text{س})}$ ← عامل مشترك ٦

نهـا ع ← س $\frac{٦(\text{س} - \text{ع})}{(\text{ع}) \times (\text{س}) \times (\text{ع} - \text{س})}$ ① عكس بجنس

$\frac{\text{ص} - \text{ب}}{\text{ع} - \text{ب}} = -١$

$\text{ق}'(\text{س}) =$ نهـا ع ← س $\frac{-٦}{(\text{ع}) \times \text{س}} = \boxed{\frac{-٦}{\text{س}^٢}}$

---

[٢] $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{٥ - ٣\text{س}}$ جد $\text{ق}'(٢)$ مستخدماً تعريف المشتقة عند نقطه

$\text{ق}'(\text{س}) =$ نهـا ع ← س $\frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$=$ نهـا ع ← س $\frac{\left(\frac{٢}{٥ - ٣\text{ع}}\right) - \left(\frac{٢}{٥ - ٣\text{س}}\right)}{\text{ع} - \text{س}}$

$=$ نهـا ع ← س $\frac{١٠ - ٦\text{س} - ١٠ + ٦\text{ع}}{(٥ - ٣\text{ع})(٥ - ٣\text{س})(\text{ع} - \text{س})}$ ← ضرب تبادلي

نهـا ع ← س $\frac{-٦\text{س} + ٦\text{ع}}{(٥ - ٣\text{ع})(٥ - ٣\text{س})(\text{ع} - \text{س})}$ ← عامل مشترك ٦

نهـا ع ← س $\frac{٦(-\text{س} + \text{ع})}{(٥ - ٣\text{ع})(٥ - ٣\text{س})(\text{ع} - \text{س})}$

نهـا ع ← س $\frac{٦}{(٥ - ٣\text{س})(٥ - ٣\text{س})} = \frac{٦}{(٥ - ٣\text{س})^٢}$

$\text{ق}'(٢) = \frac{٦}{(٥ - ٣ \times ٢)^٢} = \frac{٦}{١} = \boxed{٦}$

---

[٣] باستخدام التعريف العام للمشتقة جد المشتقة الأولى للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٣}{\text{س}}$ حيث $\text{س} \neq ٠$

$\frac{-٣}{\text{س}^٢}$

---

[٤] باستخدام تعريف المشتقة الأولى عند نقطه جد $\text{ق}'(٤)$ للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٣}{\text{س} - ٣}$ حيث $\text{س} \neq ٣$

-٣

---

[٥] $\text{ق}(\text{س}) = \frac{-١}{٣\text{س}}$ جد $\text{ق}'(\text{س})$ مستخدماً تعريف المشتقة

$\frac{١}{٣\text{س}^٢}$ أو $\frac{١}{(٣\text{س})^٢}$

التعويض العام للمشتقة (الضرب بالمرافقة)

الضرب بالمرافقة ← تستخدم عند وجود $\sqrt{\ }$ تربيعي

تذكر نهـا $\frac{\sqrt{ع}-\sqrt{س}}{ع-س} \times \frac{\sqrt{ع}+\sqrt{س}}{\sqrt{ع}+\sqrt{س}}$ (نضرب بالمرافقة)

نهـا $\frac{\text{مشتقة } (ع)-\text{مشتقة } (س)}{\text{مشتقة } ع \times (\sqrt{ع}+\sqrt{س})}$

ع ← س

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{1}{\sqrt{ع}+\sqrt{س}} = \frac{1}{\sqrt{س}+\sqrt{س}} = \frac{1}{2\sqrt{س}}$

[١] ق(س) = $\sqrt{س}+٣$ جد قَ(س) مستخدماً تعريف المشتقة

قَ(س) = نهـا $\frac{ق(ع)-ق(س)}{ع-س}$ (المرافقة)

ع ← س

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{(\sqrt{ع+٣}-\sqrt{س+٣}) \times (\sqrt{ع+٣}+\sqrt{س+٣})}{(ع-س)(\sqrt{ع+٣}+\sqrt{س+٣})}$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{(ع+٣)-(س+٣)}{(ع-س)(\sqrt{ع+٣}+\sqrt{س+٣})}$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ع-س}{(ع-س)(\sqrt{ع+٣}+\sqrt{س+٣})}$

$ق'(س) = \frac{1}{2\sqrt{س+٣}}$ ضع اجابتك مباشرة بعد الاختصار

[٢] اذا كان ق(س) = $\sqrt{٣-٢س}$ جد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة

قَ(س) = نهـا $\frac{ق(ع)-ق(س)}{ع-س}$

ع ← س

نهـا $\frac{(\sqrt{٣-٢ع})-(\sqrt{٣-٢س})}{ع-س} \times \frac{\sqrt{٣-٢ع}+\sqrt{٣-٢س}}{\sqrt{٣-٢ع}+\sqrt{٣-٢س}}$

ع ← س

نهـا $\frac{(٣-٢ع)-(٣-٢س)}{(ع-س)(\sqrt{٣-٢ع}+\sqrt{٣-٢س})}$

ع ← س

نهـا $\frac{-٢ع+٢س}{(ع-س)(\sqrt{٣-٢ع}+\sqrt{٣-٢س})}$ ← عامل مشترك

ع ← س

نهـا $\frac{-٢(ع-س)}{(ع-س)(\sqrt{٣-٢ع}+\sqrt{٣-٢س})}$

ع ← س

$ق'(س) = \frac{-٢}{2\sqrt{٣-٢س}}$ ← الاجابة النهائية

انتبه عا وقوع من

[٣] ق(س) = $\sqrt{٢س}$ جد قَ(٨) مستخدماً تعريف المشتقة

$\frac{١}{٨}$

[٤] ق(س) = $\sqrt{٢س+٧}$ جد قَ(س) مستخدماً تعريف المشتقة

$\frac{٢}{٨}$

[٥] ق(س) = $\sqrt{١-٣س}$ جد قَ(-٥) مستخدماً تعريف المشتقة عند نقطة

حذف الصفة المتقابلة

$\frac{-٣}{٨}$

واجب

إصبارح

سؤال تواصي هام

لازم تعرف أن التعريف العام أحد صيغه

$\text{نهـا}_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ وبوضع Δ بدل مكان $\Delta س$

يصبح $ق'(س) = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{\Delta ص}{هـ}$ ← وهذه الصيغة نعتمد عليها في السؤال التالي

[١] اذا كان ص = ق(س) وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير (س) من س الى س + Δ س هو $\Delta ص = ٣س \Delta س + ٣\Delta س^٢$ فجد قيمة ق'(س)

$ق'(س) = \text{نهـا}_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$ق'(س) = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{٣س هـ + ٣هـ^٢}{هـ}$ دائماً [÷] عامل مشترك

$ق'(س) = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{هـ(٣س + ٣هـ)}{هـ}$ نعوض كل هـ = ٠

$ق'(س) = ٣س + ٠ = [٣س]$

[٢] اذا كان ص = ق(س) وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير (س) من س الى س + هـ هو $\Delta ص = ٢س هـ + ٦هـ^٢$ فجد ق'(٢)

٨

تدريبات متنوعة

[٣] اذا كان ق(س) = $٣ - س$ فجد ق'(س) مستخدماً تعريف المشتقة

١-

مهم جداً

[٤] اذا كان ق(س) = $٥س + س^٢$ فجد ق'(٢) مستخدماً تعريف المشتقة عند نقطه

$ق'(س) = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{(٥ع + ع^٢) - (٥س + س^٢)}{ع - س}$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٥ع + ع^٢ - ٥س - س^٢}{ع - س}$ هنا نجعل الترتيج مع الترتيج والدرجة الأولى مع بعض ونفصل

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٥ع - ٥س}{ع - س} + \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ع^٢ - س^٢}{ع - س}$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٥(ع - س)}{ع - س} + \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{(ع + س)(ع - س)}{ع - س}$

$ق'(س) = ٥ + ٢س$

$ق'(٢) = ٥ + ٢ \times ٢ = [٩]$

ق(س) = $٥س + ٢س^٢$
ق'(٢) = ٩

[٥] ق(س) = $\sqrt{٤س + ٥}$ فجد ق'(١) مستخدماً تعريف المشتقة عند نقطه

$\frac{٤}{٦}$

بداية يجب الانتباه للفرق بين

[١] مقدار التغير ← Δ دلتا واحدة

أو [٢] معدل أو متوسط التغير ← $\frac{\Delta}{\Delta}$ دلتا بالنسبة

[٣] مقدار التغير ← Δ دلتا

← هو الفرق بين قيمتين

قيمة جديدة − قيمة قديمة

[أ] مقدار التغير في س ← هو Δ س

Δ س = س٢ − س١

ومنه س٢ = Δ س + س١

[ب] مقدار التغير في ص أو ق(س) ← Δ ص

Δ ص = ص٢ − ص١

Δ ق(س) = ق(س٢) − ق(س١)

نعوض في الاقتران لبقية س٢ ، نعوض في الاقتران لبقية س١

[ب] معدل التغير ← $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

معدل/متوسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١}$

* ملاحظات هامة جداً

[١] الفرق بين ← قيمة (س) ← تكون رقم معطى في السؤال

← قيمة (Δ س) ← الناتج بحسبه من خلال التعويض بقيمة س في الاقتران

[٢] اذا ذكر في السؤال تغيرت س من [٣] الى [٤]

س١ ، س٢

[٣] الفترة [أ ، ب] تكتب س بين

أ ≤ س ≤ ب

[٤] النقطة (أ ، ب)

س ، ص

مثال

[١] اذا كان ص = ق(س) = س٢ + ٦ فجد

[أ] مقدار التغير في س

[ب] مقدار التغير في ص

[ج] معدل التغير في قيمة الاقتران ق

اذا تغيرت س من (١) الى (٣)

[أ] مقدار التغير في س ← Δ س

Δ س = س٢ − س١

Δ س = ٣ − ١ = [٢]

[ب] مقدار التغير في ص ← Δ ص

Δ ص = ص٢ − ص١

Δ ص = ق(٣) − ق(١)

Δ ص = (٣٢ + ٦) − (١٢ + ٦)

Δ ص = ١٥ − ٧ = [٨]

[ج] معدل التغير ← هو $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

معدل التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١}$

$= \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$

$= \frac{(١٥) - (٧)}{٢} = \frac{٨}{٢} = [٤]$

[٢] اذا كان ق(س) = ٣س + ٥ وتغيرت س من (صفر) الى (٣) فجد مقدار التغير في س

Δ س = س٢ − س١

Δ س = ٣ − ٠ = [٣]

[٣] اذا كان ق(س) = س٢ ، س١ = ٢ ، Δ س = ٣ فجد قيمة س٢

Δ س = س٢ − س١

س٢ = Δ س + س١

س٢ = ٣ + ٢ = [٥]

٤) اذا كان ص = ق(س) = ٧ − س وتغيرت س من (٤) الى (٢٥) فجد ① مقدار التغير في س ② معدل التغير في قيمة الاقتران ق

① مقدار التغير في س ← Δس
Δس = س٢ − س١
Δس = ٢٥ − ٤ = ٢١

② معدل التغير = Δص/Δس = (ص٢ − ص١)/(س٢ − س١)
= (ق(٢٥) − ق(٤))/(٢٥ − ٤)
= ((٧ − ٢٥) − (٧ − ٤))/٢١
= (−٥ − (−٤))/٢١ = −١/٢١

٥) اذا كان ص = ق(س) = س٢ + ٤
س١ = ٢ ، Δس = ١ فجد قيمة التغير في الاقتران

هذا المطلوب قيمة تغير الاقتران ← مقدار التغير Δص

Δص = ص٢ − ص١
Δص = ق(٣) − ق(٢)
Δص = (٣٢ + ٤) − (٢٢ + ٤)
Δص = ١٣ − ٨ = ٥ ✓

Δس = س٢ − س١
١ = ٣ − س٢
س٢ = ٣ أوجد

٦) جد معدل التغير لاقتران ق(س) = ٣س٢ + ١ للفترة [−١ ، ٣]

لاحظ الفترة [س١ ، س٢]
معدل التغير = Δص/Δس = (ص٢ − ص١)/(س٢ − س١)
= (ق(٣) − ق(−١))/(٣ − (−١))
= ((٣×٣٢ + ١) − (٣×(−١)٢ + ١))/٤
= (٢٨ − ٤)/٤ = ١٦/٤ = ٤

٧) اذا كان ص = ق(س) = س٢ فجد متوسط التغير للاقتران ق المار بالنقطتين (٣، ٩) ، (٤، ١٦)

متوسط التغير = Δص/Δس = (ص٢ − ص١)/(س٢ − س١)
= (١٦ − ٩)/(٤ − ٣) = ٧/١ = ٧

٨) اذا كان ق(١) = ٣ ، ق(٣) = ١١ فجد معدل التغير للاقتران ق للفترة [١، ٣]

معدل التغير = Δص/Δس = (ص٢ − ص١)/(س٢ − س١)
= (ق(٣) − ق(١))/(٣ − ١) = (١١ − ٣)/٢ = ٨/٢ = ٤

٩) اذا كان
ق(س) = { ٣س ، س < ٠ ؛ ٤ ، س ≥ ٠ }
فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من (−١) الى (٥)

Δص/Δس = (ص٢ − ص١)/(س٢ − س١) = (ق(٥) − ق(−١))/(٥ − (−١))
Δص/Δس = (٤ − (−٣))/٦ = ٦/٦ = ١

١٠) اذا كان
ق(س) = { س٢ − ٣ ، ١ ≤ س < ٤ ؛ ٦س + ٢ ، ٤ ≤ س ≤ ٨ }
فجد متوسط التغير في الاقتران ق اذا كانت س١ = ٣

Δس = س٢ − س١
٢ = س٢ − ٣
س٢ = ٥ نوجد ص٢

Δص/Δس = (ص٢ − ص١)/(س٢ − س١)
= (ق(٥) − ق(٣))/(٥ − ٣)
= ((٦×٥ + ٢) − (٣٢ − ٣))/٢
= (٣٢ − ٦)/٢ = ٢٦/٢ = ١٣

[١١] اذا كان ص = ق(س) = $س^{٣}$ - ٣ وتغيرت (س) من (٣) الى (٣) فجد معدل التغير في الاقتران ق

٥

[١٢] اذا كان ق(س) = ٧ - س وتغيرت س من (١) الى (٣٦) فجد

[أ] مقدار التغير في ق [ب] معدل التغير في قيمة الاقتران ق

أ = ٥

ب = $\frac{٥}{٣٥}$

[١٣] اذا كان

ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢ & ، \ ١ \leq س \leq ٣ \\ ٣س + ١ & ، \ ٣ < س \leq ٥ \end{cases}$

فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من (٢) الى (٥)

٣

[١٤] جد قيمة تغير الاقتران ص = ٣ $س^{٣}$ عندما تتغير (س) من س١ = ٢ بمقدار Δس = -١

-٢١

[١٥] اذا كان

ق(س) = $\begin{cases} ٥س^{٢} - س & ، \ س \geq ١ \\ ٣ - س + ١ & ، \ س < ١ \end{cases}$

فجد معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [-٢، ١]

$\frac{٤٠}{٣}$

[١٦] اذا كان ص = ق(س) = ٤س + ٣ وكانت Δس = ٢ ، س١ = ٣ فجد معدل التغير في قيمة الاقتران ق

٤

[١٧] اذا علمت أن مقدار التغير في قيمة الاقتران ق(س) يساوي (٨) للفترة [٤، ٤] وكان ق(٢) = ١ فجد ق(٤)

٨

إيجاد تفاضل

[١] اذا كان قـ(س) = ٢س^٣ + ٥ وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران قـ عندما تتغير س من (-١) الى (٢) يساوي (١٢) فجد قيمة الثابت ٢

$\Delta ص = ص_2 - ص_1$

$١٢ = قـ(٢) - قـ(-١)$

$١٢ = (٥ + ٢٤) - (٥ + ٢)$

$١٢ = ٢٤ + ٥ - ٢ - ٥$

$\frac{١٢}{٣} = \frac{٣ ٢}{٣}$ ⟸ $٤ = ٢$

[٣] اذا كان قـ(س) = { س ، ١ ≤ س < ٣ ؛ ٢س ، ٣ < س ≤ ٥ }

وكان معدل تغير الاقتران قـ عندما تتغير س من (٣) الى (٥) يساوي (٤) فجد قيمة الثابت ٢

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{قـ(٥) - قـ(٣)}{٥ - ٣}$

$٤ = \frac{(٢٥) - (٤)}{٣}$ ضرب تبادلي

$١٢ = ٢٥ - ٤$

$١٦ = ٢٥$ ⟸ $\frac{١٦}{٥} = ٢$

[٤] بلغ دخل شخص عام ٢٠١١ (٣٠٠٠) دينار وفي عام ٢٠١٦ اصبح دخله (٤٠٠٠) دينار جد متوسط التغير السنوي في دخله خلال هذه الفترة ؟

$م.ت = \frac{\Delta \text{الدخل}}{\Delta \text{الزمن}} = \frac{٤٠٠٠ - ٣٠٠٠}{٢٠١٦ - ٢٠١١} = \frac{١٠٠٠}{٥}$

$= ٢٠٠$ دينار

[٥] اذا كان قـ(س) = { ٢س^٣ + ٣ ، ٠ ≤ س < ٣ ؛ ٢س + ١٢ ، ٣ ≤ س ≤ ٧ }

وكان معدل التغير للاقتران قـ عندما تتغير س من (١) الى (٥) يساوي (٩) فجد قيمة ٢

$٢ = ١$

[٦] في عام ٢٠١٠ بلغت أرباح شركة أجهزة كهربائية (٢٠٠٠٠) دينار وفي عام (٢٠١٧) حققت الشركة أرباحاً قدرها (٤٠٠٠٠) دينار فجد

[أ] قيمة التغير في ربح الشركة أثناء هذه المدة

[ب] متوسط التغير السنوي في أرباحها

$٢ = ١٤٠٠٠$

$٢ = ٢٠٠٠$

[٧] مكعب معدني تعرض للحرارة بحيث تغير طول ضلعه من (٢) سم الى (٤) سم جد مقدار التغير في حجم المكعب ؟ (علماً بأن حجم المكعب = (الضلع)^٣)

حجم المكعب = س^٣

مقدار التغير = الحجم الجديد − الحجم القديم = $ح_2 - ح_1$

مقدار التغير = $(٤)^٣ - (٢)^٣$

$= ٦٤ - ٨ = ٥٦$

[٧] مكعب معدني تعرض للحرارة بحيث تغير طول ضلعه من (١) سم الى (٣) سم جد مقدار التغير في حجم هذا المكعب

٢٦

تنويع: حل في الصفحة المقابلة

[٨] صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة اذا ازداد طول ضلعها من (١) سم الى (٤) سم فجد معدل تغير مساحة الصفيحة بالنسبة لطول ضلعها

٥

مراجعة

[٩] اذا كان قـ(س) = $\frac{٢}{س + ٢}$ وكان معدل التغير للاقتران قـ يساوي (-١) عندما تتغير س من (صفر) الى (٢) فجد قيمة ٢

متوسط (معدل) التغير ← ميل القاطع ← السرعة المتوسطه ← السرعة للتوسطه ← نفس حل معدل التغير

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\Delta ل}{\Delta ن} = \frac{\Delta ف(ن)}{\Delta ن}$$

$$ع = \frac{\Delta ل}{\Delta ن} = \frac{\text{المسافه}}{\text{الزمن}} = \frac{\Delta ف(ن)}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{ن_2 - ن_1}$$

الثلاثه مطلوبات السابقه تمثل المعنى $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

[١] اذا كان ق(س) = ٣ − س² فجد ميل القاطع المار بالنقطتين (١، ٢) ، (−٣، −٦)

ميل القاطع = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

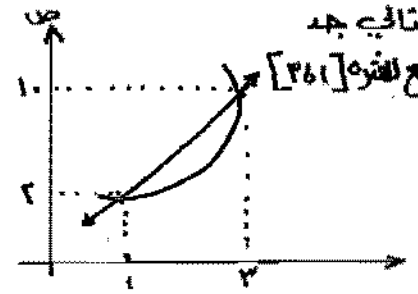
$= \frac{-٦ - ٢}{-٣ - ١} = \frac{-٨}{-٤} = ٢$ [٣]

[٢] اذا كان ق(س) = ٨س² فجد ميل القاطع المار بالنقطتين (٠، ق(٠)) ، (٣، ق(٣)) .

ميل القاطع = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ق(٣) - ق(٠)}{٣ - ٠}$

$= \frac{(٨ \times ٣^2) - (٨ \times ٠^2)}{٣ - ٠} = \frac{٧٢ - ٠}{٣} = ٢٤$ [٢٤]

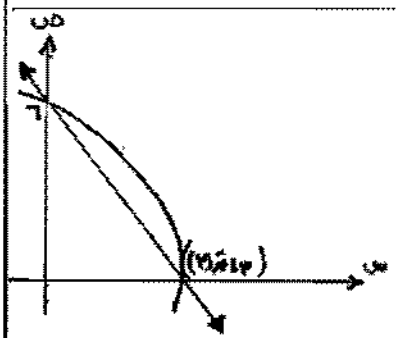
[٣] اعتماداً على الشكل التالي جد معدل التغير أو ميل القاطع للفترة [١، ٣] الاجابه [٤]



تمرين ٣٦

[١] اذا كان ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق في الشكل المجاور يساوي (−٣) فجد قيمة ق(٣)

الاجابه (٥)



[٥] يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقه ف(ن) = ٣ن² ، ان الزمن بالثواني ف(ن) المسافه بالامتار اوجد السرعة المتوسطه للجسيم في الفتره الزمنيه [١، ٤] ثانية

السرعة المتوسطه $ع = \frac{\Delta ف(ن)}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{ن_2 - ن_1}$

$ع = \frac{ف(٤) - ف(١)}{٤ - ١} = \frac{(٤ \times ٣^2) - (١ \times ٣^2)}{٣}$

$= \frac{٤٨ - ٣}{٣} = \frac{٤٥}{٣} = ١٥$ م/ث

[٦] يتحرك جسيم حسب العلاقه ف(ن) = ن³ + ٣ حيث ف المسافه (م) الزمن (ث) اوجد السرعة المتوسطه في الفترة الزمنيه [١، ٣] ثانيه

٣

[٧] اذا كانت المسافه التي يقطعها جسيم في أثناء سقوطه رأسياً الى أسفل تعطى بالعلاقه ف(ن) = ١٠ن − ٥ن² اوجد السرعة المتوسطه للجسيم في الفترة الزمنيه [١، ٣]

−١٠

[٨] اذا كان ق(س) = ٣س² فجد ميل القاطع المار بالنقطتين (−١، ق(−١)) ، (٢، ق(٢))

٣

في هذا السؤال يكون لدينا اقترانين مثلاً قـ ، هـ

اقتران معطى قـ فيه متوسط تغيره ← نبدأ به لنصل لمعلومه

اقتران مطلوب فيه متوسط تغيره . نمشي بالخطوات الى أن نصل في إنزعيه الى المعلومه

$$\text{متوسط تغير قـ} = \frac{\text{قـ}(1) - \text{قـ}(-2)}{3}$$

[١] اذا كان متوسط التغير للاقتران قـ في الفترة [-٢، ١] يساوي (-٣) وكان هـ(س) = قـ(س) - س٢ فجد متوسط التغير للاقتران هـ في الفترة [-٢، ١]

معطى قـ(س)	مطلوب م.ت هـ(س)
$\frac{\Delta \text{قـ}(س)}{\Delta س} = \frac{\text{قـ}(ب) - \text{قـ}(أ)}{ب - أ}$	$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(1) - هـ(-2)}{1 - (-2)}$
$-3 = \frac{\text{قـ}(1) - \text{قـ}(-2)}{1 - (-2)}$	$= \frac{(\text{قـ}(1) - 1) - (\text{قـ}(-2) - 4)}{3}$ ادخال السالب
$-3 = \frac{\text{قـ}(1) - \text{قـ}(-2)}{3}$	$= \frac{\text{قـ}(1) - 1 - \text{قـ}(-2) + 4}{3}$ تجميع الارقام
STOP	$\frac{\text{قـ}(1) - \text{قـ}(-2) + 3}{3}$ القلب ♡
	$\frac{\text{قـ}(1) - \text{قـ}(-2)}{3} + \frac{3}{3}$
	$= -3 + 1 = [-2]$

دائماً لاتنسى الـ [٣] جل

أولاً : ادخال السالب عالرقم الثاني

ثانياً : تجميع الارقام

ثالثاً : القلب الطيب ♡

[٢] اذا كان متوسط التغير للاقتران قـ في الفترة [٣، ١] يساوي (٤) وكان هـ(س) = قـ(س) - ٣س فجد متوسط التغير للاقتران هـ في الفترة [٣، ١]

٣

واجب حله في الصفحات المقابله

[٣] اذا كان معدل التغير في الاقتران قـ في الفترة [-١، ٣] يساوي (-٣) وكان هـ(س) = ٣ قـ(س) + ٥س فجد معدل التغير في الاقتران هـ في الفترة [-١، ٣]

-١

هل تعلم ← يا أخي لازم تعلم أن

$ق'(س) = نهـا_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ← مقدار التغير

وبوضع Δ بدلاً من $\Delta س$ يكون

$ق'(س) = نهـا_{\Delta \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta}$ ← مقدار التغير

∴ من الآخر ← التعريف العام للمشتقة

$ق'(س) = نهـا_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$ ← البسط هو $\Delta ص$

---

[١] اذا كان $ص = ق(س)$ وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير س من س، الى $س_1 + هـ$ هو $\Delta ص = ٤س هـ + ٢هـ^٢$ فجد قيمة $ق'(س)$

$ق'(س) = نهـا_{هـ \to 0} \frac{\Delta ص}{هـ}$

$ق'(س) = نهـا_{هـ \to 0} \frac{٤س هـ + ٢هـ^٢}{هـ}$ نأخذ $هـ$ عامل مشترك

$ق'(س) = نهـا_{هـ \to 0} \frac{هـ(٤س + ٢هـ)}{هـ}$ نعوض $هـ \to 0$

$ق'(س) = نهـا_{هـ \to 0} ٤س + ٢ \times ٠ = [٤س]$

---

[٢] اذا كان $ص = ق(س)$ وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران $ق(س)$ عندما تتغير س من س الى $س + هـ$ هو $\Delta ص = س^٣ هـ - ٥س هـ^٢$ فجد $ق'(س)$

$[س^٢]$

---

[٣] اذا كان $ص = ق(س)$ وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير س من (س) الى $(س+\Delta)$ هو $\Delta ص = ٥س^٢ \Delta + ٨س \Delta^٢$ فجد $ق'(٢)$

٢٠

---

[٤] اذا كان $ص = ق(س)$ وكان معدل تغير الاقتران ق(س) هو $س^٣ \Delta س - ٣س(\Delta س)^٢$ فجد $ق'(س)$

$[س^٣]$

مسألة الحلول

[٥] اذا كان مقدار التغير في مسافة الجسم $\Delta ل$ يساوي (١٢) فجد السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية $[١، ٥]$

السرعة المتوسطة $ع = \frac{\Delta ل}{\Delta ن}$ ← المسافة / ← الزمن

$ع = \frac{١٢}{٥-١} \Leftarrow \frac{١٢}{٤} = [٣]$

هنا إنسى كلمة فيزيائي واستبدلها بكلمة

فعت ← ف ← ع ← ت

المسافه ← السرعة ← التسارع

الطريقه ← من حرف لآخر هو اشتقاقه يعني

اذا أعطانا في السؤال

← المسافه ف(ن) وطلب السرعة ع(ن) ← نشتقه مرة

← السرعة ع(ن) وطلب التسارع ت(ن) ← نشتقه مرة

← المسافة ف(ن) وطلب التسارع (ت(ن) ← نشتقه مرتين

ف (ن) =

ع(ن) = ف' (ن)

ت (ن) = ع' (ن)

ملاحظات

١ الحرف الذي نقوم باشتقاقه هو (ن) عدد الثواني
لذلك سمه الحرف (س)

٣ وحدات القياس المستخدمة

المسافه ← ف(ن) ← م

السرعة ← ع(ن) ← م/ث

التسارع ← ت(ن) ← م/ث²

٣ عندما ينعدم التسارع معناها ت(ن) = صفر

عندما تنعدم السرعة معناها ع (ن) = صفر

٤ الزمن ← هو (ن) عدد الثواني وهو دائماً ⊕

٥ يجب أن تنتبه للفرق بين

السرعة المتوسطه ع̄ ← السرعة اللحظيه (السرعة) ع(ن) = ف'(ن) هي اشتقاقه للمسافه

ع̄ = Δف(ن) / Δن ويوجد فترة [ن١، ن٢]

ويمر بزمن واحد

ن١ ← دلتا صفر

ن٢ ← تتوقف

* فكرة السؤال سمه الآخر *

هو اشتقه سواء مرة أو مرتين

ثم عوض في الاقتران المطلوب بعدد الثواني (ن)

وهنا لدينا حالتين

(ن) عدد الثواني معطاه جاهزه في السؤال ← صيغة بعد مرور ثانيه

هنا نكتب كلمة فعت وحدد الاشتقاقه مرة أو مرتين

ثم نعوض بعدد الثواني الموجود بعد كلمة بعد مرور

ثانيتين ← نعوض في (ن)

ثانيه واحده ← نعوض في (ن)

ثانيه (ن) ← لايوجد تعويض

(ن) عدد الثواني غير معطى احنا لازم نوجدها ثم نعوض ← صيغة عندما يكون

هنا نعمل جدول بكلمة فعت عامودي

	المعادلة تزيد كما هي
ف(ن) =	
ع(ن) =	ف'(ن) نشتقه مرة
ت(ن) =	ع'(ن) = نشتقه مرة ثانيه

ثم نذهب لكلمة عندما

تكون سرعته ٩ م/ث ← مساوي معادلة السرعة ع(ن)=٩ ونوجد قيمة ن ثم نعوض

يكون تسارعه ١٠ ← ت(ن) = ١٠ ونوجد قيمة ن ونعوض

ينعدم تسارعه ← ت(ن)=٠ ونوجد قيمة (ن) ثم نعوض

[١] يتحرك جسيم وفقه العلاقه ف(ن) = ٢ن² + ٣ حيث (ف) المسافه بالامتار (ن) الزمن بالثواني جد سرعة الجسيم بعد مرور (٣) ثواني من بدء الحركه

صيغة بعد مرور ← الزمن (ن) معطى

أ / ب / ت

ع(ن) = ف'(ن) = ٤ن

ع(٣) = ٤ × ٣ = ١٢ م/ث

[٢] يتحرك جسيم وفقاً للعلاقه ف(ن) = ن³ + ٢ن² - ١ جد تسارع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركه

ف(ن) = ن³ + ٢ن² - ١

ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن² + ٤ن

ت(ن) = ع'(ن) = ٦ن + ٤

ت(٢) = ٦ × ٢ + ٤ = ١٦ م/ث²

[٣] يتحرك جسيم وفقه العلاقه ف(ن) = (٢ن² + ١)² جد تسارع الجسيم بعد مرور ثانيه واحدة من بدء الحركه

ف(ن) = (٢ن² + ١)²

ع(ن) = ف'(ن) = ٢ (٢ن² + ١)¹ × ٤ن تربيع العلاقة

ع(ن) = ٨ن (٢ن² + ١) تابعة ضرب

ت(ن) = ع'(ن) = (٨ن)(٤ن) + (٢ن² + ١)(٨)

ت(١) = (١×٨)(١×٤) + (٢×١² + ١)(٨)

٨ × ٤ + ٣ × ٨

٣٢ + ٢٤ = ٥٦ م/ث²

[٤] يتحرك جسيم بحيث أن سرعته معطاه وفقاً للعلاقه ع(ن) = ٣ن² + ٨ جد تسارع الجسيم بعد مرور (ن) ثانيه

ف / ت

ع(ن) = ٣ن² + ٨

ت(ن) = ٦ن

لايوجد تعويض فقط اشتقاق

[٥] يتحرك جسيم وفقه العلاقه ف(ن) = ن³ - ٣ن² + ٧ حيث ف المسافه بالامتار ، (ن) الزمن بالثواني جد سرعة الجسيم عندما يصبح تسارعه ١٢ م/ث²

ف(ن) = ن³ - ٣ن² + ٧

ع(ن) = ٣ن² - ٦ن ← اشتقينا مرة ونرمز دائماً (ع) أسطر

ت(ن) = ٦ن - ٦ ← اشتقينا مرة

ت(٣) = ٦ن - ٦ = ١٢

٦ن = ١٢ + ٦

ن = ٣ ← نعوض في السرعة

ع(٣) = ٣ × ٣² - ٦ × ٣ = ١٠ م/ث

عندما يصبح تسارعه ١٢ م/ث²

[٦] يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للعلاقة ف حيث ف المسافه بالامتار (ن) الزمن بالثواني جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ٤٨ م/ث

ف(ن) = ٢ن³ - ٦ن² + ٥ن + ٣

ع(ن) = ف'(ن) = ٦ن² - ١٢ن + ٥ ← اشتقينا مرة

عندما تكون سرعته ٤٨

٦ن² - ١٢ن = ٤٨ - ٥

٦ن² - ١٢ن = ٤٣

ن² - ٢ن = ٧

ن² - ٢ن + ١ = ٧ + ١

(ن - ١)² = ٨

ن - ١ = ±√٨

ن = ١ ± ٢√٢

ن = ٣ ، ن = -١ نهمل ✗

نعوض في التسارع

ت(ن) = ع'(ن) = ١٢ن - ٦

ت(٣) = ١٢ × ٣ - ٦ = ٣٠ م/ث²

[٧] يتحرك جسيم وفقاً للعلاقه ف(ن) = ٢ن³ - ٣ن² + ٢ احسب سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه

ف(ن) = ٢ن³ - ٣ن² + ٢

ع(ن) = ف'(ن) = ٦ن² - ٦ن

ع(½) = ٦ × (½)² - ٦ × ½

= ٦ × ¼ - ٣/٢

= ٣/٢ - ٣/٢ = ٠ م/ث

ت(ن) = ١٢ن - ٦ ← ينعدم تسارعه ت = ٠

١٢ن - ٦ = ٠

١٢ن = ٦

ن = ٦/١٢ = ½

٨ يتحرك جسيم وفقاً للاقتران ف(ن) = ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٧
حيث (ف) المسافه (ن) الزمن بالثواني جد سرعة الجسيم
عندما يكون تسارعه ١٢ م/ث^{٢}

ن = ٥ ، ٣
ع(١) = ٩٠

٩ يتحرك جسيم حسب العلاقه ف(ن) = ٣ن^{٣} - ١٨ن + ٩
احسب تسارع الجسيم عندما تكون سرعته (٣٠) م/ث

ن = ٣
ت(٣) = ٣٦

١٠ يتحرك جسيم وفقه العلاقه ف(ن) = ٢ن^{٣} + ٤ن^{٢} + ٦
حيث ف المسافه، ن الزمن بالثواني جد تسارع الجسيم
بعد مرور ثانيتين من بدء الحركه

ت(٢) = ٣٢

١١ يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتران
ف(ن) = ن^{٣} - ٣ن + ١ حيث (ف) المسافه (ن) الزمن بالثواني
جد المسافه التي يقطعها الجسيم عندما تكون سرعته ٢٥ م/ث

ديرهالد
ن = ٣
ف(٣) = ٢٢

١٢ يتحرك جسيم حسب العلاقه ف(ن) = ٢ن^{٣} - ٦ن^{٢} + ١٠ن - ١
جد سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه

ن = ١
ع(١) = ٤

١٣ يتحرك جسيم وفقاً للعلاقه ف(ن) = ٣(ن+١)^{٣} + ٥ احسب
سرعة الجسيم عندما يكون تسارعه ٣٦ م/ث^{٢}

ن = ٣
ع(٣) = ٤٨

مهم
١٤ اذا كان ف(ن) = ن^{٣} − ٩ن^{٢} + ١٥ن هي المسافة التي يقطعها جسيم فاحسب تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم سرعته

ف(ن) = ن^{٣} − ٩ن^{٢} + ١٥ن

ع(ن) = ف′(ن) = ٣ن^{٢} − ١٨ن + ١٥ ← السرعة = ٠

٣ن^{٢} − ١٨ن + ١٥ = ٠ بالقسمة ÷ ٣

ن^{٢} − ٦ن + ٥ = ٠

(ن − ٥)(ن − ١) = ٠

∴ ن = ٥ / ن = ١

ت(ن) = ع′(ن) = ٦ن − ١٨

عند ن = ٥ ← ت(٥) = ٦×٥ − ١٨ = ١٢

عند ن = ١ ← ت(١) = ٦×١ − ١٨ = −١٢

تكامل
١٥ يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = $\frac{١}{٣}$ن^{٣} − ٣ن^{٢} + ٦ن

اذا كان تسارع الجسيم بعد (٥) ثواني يساوي ٣٢ م/ث^{٢}

عند قيمة الثابت م

ف(ن) = $\frac{١}{٣}$ن^{٣} − ٣ن^{٢} + ٦

ع(ن) = ن^{٢} − ٣م ن

ت(ن) = ٢ن − ٣م

ت(٥) = ٢×٥ − ٣م = ٣٢

١٠ − ٣م = ٣٢

−٣م = ٢٢

$\frac{-٣م}{-٣} = \frac{٢٢}{-٣}$ ⇐ م = ٤

تكامل
١٦ يتحرك جسيم وفقاً للعلاقة ف(ن) = م(ن − ١) حيث ف المسافة (ن) الزمن اذا كانت سرعة الجسيم المقطوعة بعد مرور (٤) ثواني تساوي (١٢) م/ث فجد قيمة الثابت م

م = ٣

لاحظ الفرق بين موجه

السرعة المتوسطة ع = $\frac{\Delta ف(ن)}{\Delta ن}$ ← يوجد فترة

السرعة أو السرعة اللحظية ع(ن) = ف′(ن) ← مشتقة المسافة

تكامل
١٧ تحرك جسيم بحيث بعده عن نقطة الأصل معطى بالعلاقة ف(ن) = ٢ن^{٢} اذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة [٠، م] تساوي سرعته اللحظية بعد مرور (٣) ثواني فجد قيمة م

السرعة اللحظية ع(ن) = السرعة المتوسطة ع = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$

ع(ن) = ف′(ن) = ٤ن

ع(٣) = ٤×٣ = ١٢ م/ث ← السرعة اللحظية

السرعة المتوسطة = $\frac{ف(م) - ف(٠)}{ن_{٢} - ن_{١}}$

١٢ = $\frac{ف(م) - ف(٠)}{م - ٠}$

١٢ = $\frac{٢م^{٢} - ٠}{م}$ ⇐ ١٢م = ٢م^{٢}

٠ = ٢م^{٢} − ١٢م ← عامل مشترك

٠ = ٢م (م − ٦)

م = ٠ تهمل / م = ٦

تكامل
١٨ تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل معطى بالعلاقة ف(ن) = ن^{٢} + ٤ متى تساوي سرعته المتوسطة سرعته في اللحظة التي يكون فيها الزمن (٤) ثواني

ن = ٨

٢٠١٨/
٢٠١٩

المنـــقـذ

في

الريـــــــاضيات

(الأدبي والفندقي)

الوحدة
الثالثة

تطبيقات التفاضل

محمودالمحارمة

صفحة الاستاذ (Face book) محمود محارمة المنقذ

الأعداد الحرجه (قيم س الحرجة)

هي قيم س التي تجعل المشتقة = صفر

يعني تجعل ق(س) = صفر

طيب أستاذ كيف نحسبها ؟

أولاً : اشتق ق(س) =

ثانياً : المشتقه = صفر

ثالثاً : يصبح الموضوع (حل معادلة)

إيجاد قيمة (قيم) س

والنتائج الممكنه (قيم س)

قيمه واحدة | أو قيمتين | أو ٣ قيم | أو ولاقيمه

* النقط الحرجه

النقطه (س ، ق(س))

بعد ايجاد قيمة س الحرجه مثلاً س = ٢

نقوم بالتعويض في الاقتران ق(س) عندما س = ٢

يعني ق(٢) والنقطه الحرجه تكون

(٢ ، ق(٢))

٢ ← قيمة س

ق(٢) ← ناتج التعويض بقيمة س في الاقتران ق(س)

جد الأعداد الحرجه (قيم س الحرجه) لكل مما يلي : والنقط الحرجه

١ ق(س) = س³ − ٨س + ٥

١) نشتقه ق'(س) = ٣س² − ٨

٢) المشتقة = ٠ ← ٣س² − ٨ = ٠

٣س² = ٨

س² = ٨/٣

س = ٤ ← قيمة س الحرجه

النقط الحرجه (٤ ، ق(٤)) ← (٤ ، −١١)

ق(٤) = (٤)³ − ٨×٤ + ٥

نعوض ١٦ − ٣٢ + ٥ = −١١

٢ ق(س) = ١٦ − س³

ق'(س) = −٣س²

−٣س² = ٠

س² = ٠/−٣

س = ٠ ← الأعداد الحرجه

النقط الحرجه (٠ ، ق(٠)) ← (٠ ، ١٦)

ق(٠) = ١٦ − ٠ = ١٦

٣ ق(س) = س³ − ٢٧س + ٥

ق'(س) = ٣س² − ٢٧

٣س² − ٢٧ = ٠

٣س²/٣ = ٢٧/٣

س² = ٩

س = ٣ ، −٣ ← الأعداد الحرجه

النقط الحرجه (٣ ، ق(٣)) (−٣ ، ق(−٣))

ق(٣) = ٢٧ − ٨١ + ٥ = −٤٩

ق(−٣) = −٢٧ + ٨١ + ٥ = ٥٩

النقط (٣ ، −٤٩) ، (−٣ ، ٥٩)

٤ $ق(س) = س^3 - ٦س^2 + ١$

$ق'(س) = ٣س^2 - ١٢س$

$٣س^2 - ١٢س = ٠$ نحلل (عامل مشترك)

$٣س(س - ٤) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٤$ (داخلها أي عدد، داخلها ممكن الإشارة الموجودة داخل القوس)

النقط الحرجة $(٠، ق(٠))$ ، $(٤، ق(٤))$

٥ حلو

$ق(س) = س^4 - ٢س^2 + ٥$

$ق'(س) = ٤س^3 - ٤س$

$٤س^3 - ٤س = ٠$ عامل مشترك

$٤س(س^2 - ١) = ٠$ مرتبين مربعين

$٤س(س - ١)(س + ١) = ٠$

العدد س = $\{٠، ١، -١\}$ القيم الحرجة

النقط الحرجة $(٠، ق(٠))$ ، $(١، ق(١))$ ، $(-١، ق(-١))$

٦ دير بالك

$ق(س) = س^3 + ٣س - ٤$

$ق'(س) = ٣س^2 + ٣$

$٣س^2 + ٣ = ٠$

$٣س^2 = -٣$

$س^2 = \frac{-٣}{٣}$

$س^2 = -١$

لايجوز أخذ جذر تربيعي للعدد السالب (حرام)

لاتوجد اعداد حرجة (تهم حرجة)

لاتوجد نقط حرجة

٧ $ق(س) = ٤س + ٣$

$ق'(س) = ٤$

$٤ = ٠$

لاتوجد قيم حرجة لـ س

لاتوجد نقط حرجة

٨ $ق(س) = ٢س^3 - ٣س^2 - ١٢س + ٥$

$ق'(س) = ٦س^2 - ٦س - ١٢$

$\frac{٦س^2}{٦} - \frac{٦س}{٦} + \frac{١٢}{٦} = \frac{٠}{٦}$ نقسم على ٦

$س^2 - س + ٢ = ٠$ عبارة تربيعية

$(س - ٢)(س + ١) = ٠$

$س = ٢$ / $س = -١$ قيم س الحرجة

النقط الحرجة $(٢، ق(٢))$ ، $(-١، ق(-١))$

٩ $ق(س) = (س - ١)^4$

$ق'(س) = ٤(س - ١)^3 \times ١$

$٤(س - ١)^3 = ٠$ جذر تكعيبي

$(س - ١)^3 = \sqrt[3]{٠}$

$س - ١ = ٠$

$س = ١$ ← قيمة س الحرجة

النقط الحرجة $(١، ق(١))$

١٠ SUPER

$ق(س) = س^3 - ٣س^2 - ٤س + ٨$

$ق'(س) = ٣س^2 - ٦س - ٤$

الأخ $٣س^2 - ٦س - ٤ = ٠$ قريبين + بعيدين

$(س - ٢)(٣س + ٢) = ٠$

$س - ٢ = ٠$ ، $٣س + ٢ = ٠$

$س = ٢$ ، $س = -\frac{٢}{٣}$ قيم س الحرجة

النقط الحرجة $(٢، ق(٢))$ ، $(-\frac{٢}{٣}، ق(-\frac{٢}{٣}))$

صيغة سؤال محاصيل

* اذا كان $ق(س) = ٢س^3 - ١٢س + ٣$ وكان للاقتران قيمة حرجة عند $س = ٢$ فجد قيمة الثابت ٢

هنا ← نشتقة ← نساويها بالصفر ← نعوض مكان س بـ (٢)

$ق'(س) = ٦٢س - ١٢$

$ق'(٢) = ٦٢ \times ٢ - ١٢ = ٠$

$٢٤ - ١٢ = ٠$

$٢٤ = ١٢$

$\frac{٢٤}{٤} = \frac{١٢}{٤}$ ← $٢ = ٣$

السؤال الأول

٢ جد القيم الحرجة لـ س لكل مما يلي :

١ ق(س) = س^{٣} + ٣س + ٥

٢ ق(س) = س^{٣} − ٣س + ٣

٣ ق(س) = ٣س − س^{٣} + ٧

٤ ق(س) = س^{٣} + ٦س^{٢} − ١٥س

٥ ق(س) = س^{٣} + ١٢س − ٧

٦ ق(س) = س^{٥} + ٢س

٧ ق(س) = س^{٣} + ٤

٨ ق(س) = ٤٨س − س^{٣} + ١

٩ اذا كان ق(س) = ٢س^{٣} − ١٢س + ١ وكان للاقتران قيمة حرجة عندما س = ٢ فجد قيمة ٢ ؟

١٠ اذا كان للاقتران ق(س) = ٢ س^{٣} − ١٢س + ٥ نقطة حرجة (١ ، ٦) فجد قيم ٢ تساوي ؟

*** الاجابات للتأكد ***

السؤال الأول:

١ س = −١

٢ س = ١، −١

٣ س = ٠، ٢

٤ س = −٥، ١

٥ س = ∅ لا توجد

٦ س = ∅ لا توجد قيم حرجة

٧ س = ٠

٨ س = ٤، −٤

٩ ٢ = ٢

١٠ ٢ = ٢، −٢

* خطوات إيجاد *
* فترات التزايد والتناقص
* القيم القصوى (العظمى والصغرى *)

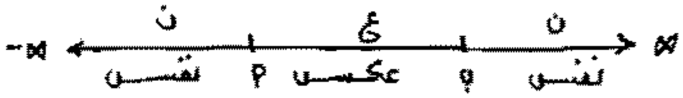
أولاً: نشتقه قَ(س) =

ثانياً: مساواة المشتقه بالصفر قَ(س) = صفر

ثالثاً: إيجاد قيم (س) الحرجه

مثلاً قيمتين س = أ
س = ب

رابعاً: نعمل خط أعداد (منشر غسيل)
نضع عليه قيم (س) الحرجه



خامساً: نقوم بدراسة الاشارة للمشتقة الأولى
من خلال كلمة نعنع

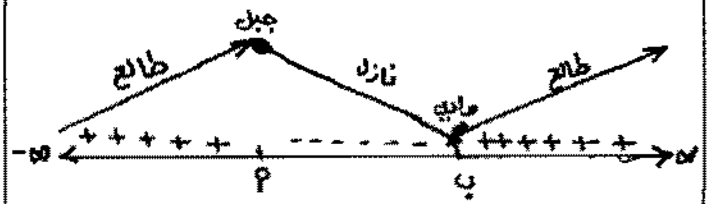
ن → نضع نفس اشارة معامل أكبر درجه لـ س في المشتقه
ع → عكس الاشارة
ن → نفس الاشارة
ع ... وهكذا

وللتأكد: ← نعوض برقم ضمن الفترة المطلوب تحديد إشارتها ونلاحظ اشارة الناتج
هل هو + موجب أم − سالب

* والاجابه على شكل فترات للتزايد والتناقص
مفتوحه ←(−∞ ، أ] ← مغلقه دائماً

* والاجابة تكون بالصيغه التاليه للقيم القصوى
قيمة عظمى عند س = [جبل] وقيمتها ق( )
قيمه صغرى عند س = [وادي] وقيمتها ق( )

* مثال بالرموز لتوضيح كيفية الاجابه
من خلال خط الاعداد (اختبار المشتقه الأولى)
مثلاً..... كان خط الاعداد كالتالي



* إجابة فترات التزايد +++ والتناقص ---

* فترات التزايد (−∞ ، أ]   [ب ، ∞)
* فترات التناقص [أ ، ب]

إجابة القيم القصوى العظمى والصغرى

* قيمة عظمى محليه عند س = [أ] (جبل) وقيمتها ق(أ) (صورة) ← نعوض في الاقتران الأصلي
* قيمة صغرى محليه عند س = [ب] (وادي) وقيمتها ق(ب) (صورة) ← نعوض في الاقتران الأصلي

* { مُلخص الخطوات الخمسه } *

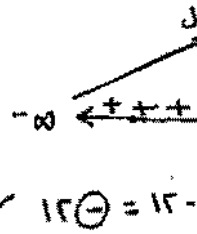
① نشتقه قَ(س) =
② المشتقه = صفر
③ إيجاد قيم س الحرجه
④ خط الاعداد −∞ ←——→ ∞
⑤ نعنع

* ملاحظه هامة: كل الاقترانات بتعنع باستثناء
* العبارة التربيعيه التي لا تُحلل أو لها قيمة واحده لـ س
بعدين بحكيلك عنها

١ إذا كان ق(س) = س³ − ١٢س فجد
٢ فترات التزايد والتناقص
٣ القيم العظمى والصغرى إن وجدت

بطريقة الخطوات

نشتق ١) ق′(س) = ٣س² − ١٢
= صفر ٢) ٣س² − ١٢ = ٠
٣س² = ١٢
بوجد قيم س ٣) س² = ٤
س = ±٢



تتأكد ق′(٠) = ٣×٠² − ١٢ = −١٢ ✓

٤ فترات التزايد (−∞، −٢] ∪ [٢، ∞)
* فترات التناقص [−٢، ٢]

٥ قيمة عظمى محلية عند س = −٢ وقيمتها ق(−٢) = ١٦
ق(−٢) = نعوض (−٢)³ − ١٢×−٢ − ٢ = ١٦
قيمة صغرى محلية عند س = ٢ وقيمتها ق(٢) = −١٦
ق(٢) ← نعوضها في الاقتران الأصلي (٢)³ − ١٢×٢ = −١٦

* ملاحظات لحل الفروع

١ الفترات دائماً: مفتوحة عند ±∞، مغلقة عند الأرقام

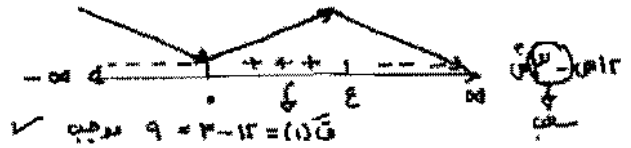
٣ لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى المحلية
* ق(P) نعوض في الاقتران الأصلي ق(س) مع العلم أننا نكتبه بدونه علامة في الرقمان

٣ لمعرفة واختبار إشارة الفترة نعوض برقم ضمن الفترة في المشتقة فقط ق′(س)

١ ق(س) = ٢ س³ − ٣س² − ١٢س + ١ فجد
٢ فترات التزايد والتناقص
٣ القيم العظمى والصغرى إن وجدت

ق′(س) = ٦س² − ٦س − ١٢

خلل عامل مشترك: ٦(س² − س − ٢) = ٠
٦(س − ٢)(س + ١) = ٠
س = ٢ ، س = −١

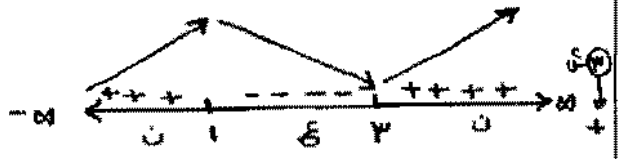


٢ فترات التزايد [−١، ٢]
فترات التناقص (−∞، −١] ∪ [٢، ∞)

٣ قيمة عظمى محلية عند س = −١ وقيمتها ق(−١) = ٨
قيمة صغرى محلية عند س = ٢ وقيمتها ق(٢) = −١٩

١٣ ق(س) = س³ − ٦س² + ٩س − ٦
فجد فترات التزايد والتناقص

ق′(س) = ٣س² − ١٢س + ٩
نقسم ÷ ٣ ← ٣س² − ١٣س + ٩ = ٠
خلل عبارة تربيعية ← س² − ٤س + ٣ = ٠
(س − ٣)(س − ١) = ٠
س = ٣ ، س = ١



فترات التزايد (−∞، ١] ∪ [٣، ∞)
فترات التناقص [١، ٣]

فقط الإجابة على قدر المطلوب

٤) ق(س) = س (س² − ٤٨)

٣) حدد فترات التناقص

٢) القيم القصوى المحلية (إن وجدت)

نصيحة لاتنشتقه باستخدام قاعدة الضرب ← وزّع الضرب

جهز ق(س) = س³ − ٤٨س

ق′(س) = ٣س² − ٤٨

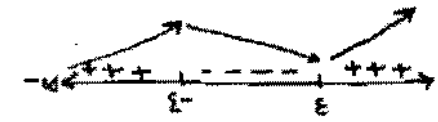
٣س² − ٤٨ = ٠ ←

٣س² = ٤٨

س² = ٤٨/٣

س² = ١٦

س = ± ٤



٣) فترات التناقص [−٤ ، ٤]

٢) القيم القصوى المحلية ← معناها العظمى والصغرى

* قيمة عظمى محلية عند س = −٤ وقيمتها ق(−٤)

* قيمة صغرى محلية عند س = ٤ وقيمتها ق(٤)

٥) ق(س) = س³ − ٤س² + ٣ أجد

٣) فترات التزايد والتناقص

٢) القيم الصغرى والعظمى المحلية (إن وجدت)

ق′(س) = ٣س² − ٤

٣س² − ٤ = ٠ ⇐ ٣س² = ٤ ⇐ س² = ٤/٣ ⇐ س = ±٢/√٣

٣) فترة التزايد [٢/√٣ ، ∞)

فترة التناقص (−∞ ، ٢/√٣]

٢) قيمة صغرى محلية عند س = ٢/√٣ وقيمتها ق(٢/√٣) = −١

ركّز معي جون ← لدراسة اشارة أي مشتقه كل المعادلات بتصنع بالاستناد

* العبارة التربيعية *

التي ← تحلل ولو فيها جذور

لاتحلل مثل س² + ٤ = ٠

تحلل ولو فيها جذور

س² + ٤س + ٤

(س + ٢)(س + ٢)

س = −٢

هذه المعادلات تكون كلها

نفس إن ← اشارة معامل س²

٦) إذا كان ق(س) = س³ + ٣س + ٤ فبيّن أن الاقتران ق(س) متزايد على مجموعة الاعداد الحقيقية

ق′(س) = ٣س² + ٣

٣س² + ٣ = ٠ ←

٣س² = −٣

س² = −٣/٣

س² = −١ لا توجد قيم حرجه

٧ ← لا يجوز

٣س² + ٣ ← + + + + + + + + + ∞ ← −∞

متزايد (−∞ ، ∞) متزايد على مجموعة الاعداد الحقيقية

٧) ق(س) = س³ − ٣س² + ٣س − ٤ نويجدر super

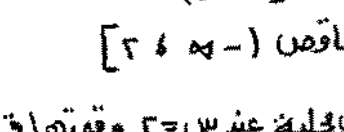
أجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ق′(س) = ٣س² − ٦س + ٣ نقسم ÷ ٣

س² − ٢س + ١ = ٠

(س − ١)(س − ١) = ٠

هنا س = ١ ← لاحظ قيمة واحدة سم العبارة التربيعية



متزايد (−∞ ، ∞) أو إجابة أشمل

متزايد (−∞ ، ١] ∪ [١ ، ∞)

[1] اذا كان ق(س) = س³ − ٣س + ١ فجد
أ) فترات التزايد والتناقص
ب) القيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت

الجواب
أ) تزايد (−∞، −١] ∪ [١، ∞)
تناقص [−١، ١]
ب) عظمى عندس = −١ ⇐ ق(−١)
صغرى عندس = ١ ⇐ ق(١)

[2] اذا كان ق(س) = س³ − ٣س فجد فترات التزايد والتناقص

[3] ق(س) = س (٦ − س) فجد
أ) فترات التزايد والتناقص
ب) القيم العظمى المحلية إن وجدت

أ) تزايد [٠، ٤]
تناقص (−∞، ٠] ∪ [٤، ∞)
ب) عظمى عندس = ٤ ⇐ ق(٤)
صغرى عندس = ٠ ⇐ ق(٠)

[4] اذا كان ق(س) = س⁴ + ٢س + ١ فجد
أ) فترات التزايد والتناقص
ب) القيم العظمى المحلية إن وجدت

تزايد [−١، ∞)
تناقص (−∞، −١]
صغرى عندس = −١ ⇐ ق(−١)

٥ بيّن أن الاقتران
ق(س) = س³ + ٣س متزايداً على مجموعة الأعداد الحقيقية

٦ ق(س) = ¼ س⁴ − ⅓ س³ − ٣س + ٧ جد كلاً من
أ) فترات التزايد والتناقص
ب) القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت)

تزايد (−∞، −١] ، [٣، ∞)
تناقص [−١، ٣]
عظمى عند س = −١ ← ق(−١)
صغرى عند س = ٣ ← ق(٣)

٧ جد فترات التزايد والتناقص للاقتران
ق(س) = (س + ٢)(س + ٣)

هنا ← يفضل خصّ (توزع الضرب)
ق(س) = س² + ٣س + ٢س + ٦ الآن اشتقّ
ق′(س) = ٢س + ٣ + ٢
٢س + ٥ = ٠
٢س = −٥
س = −٥/٢

	−∞		−٥/٢		∞
٢س + ٥		− − − −	٠	+ + + +	

تزايد [−٥/٢ ، ∞)
تناقص (−∞ ، −٥/٢]

٨ اذا كان ق(س) = ٣س(١٢ − س²) جد القيم العظمى والصغرى (إن وجدت) للاقتران ق(س)

حل في الصفحة المقابلة
عظمى عند س = ٢ ← ق(٢) = ٣٢
صغرى عند س = −٢ ← ق(−٢) = −٣٢

٩ ق(س) = ٤س³ − ٦س² + ٢ جد
أ) فترات التزايد للاقتران ق
ب) قيم س التي يكون عندها مماس صغرى

الاجابة
حل في الصفحة المقابلة ←
تزايد (−∞، ٠] ، [١، ∞)
صغرى عند س = ١

١٠ حلو
ق(س) = س³ + ٤ جد القيم القصوى العظمى والصغرى المحلية إن وجدت

ق′(س) = ٣س²
٣س² = ٠
س = ٠
لا توجد قيم عظمى أو صغرى محلية

	−∞		٠		∞
٣س²		+ + + +	٠	+ + + +	

كله نفس

لا توجد قيم عظمى أو صغرى محلية

أولاً : اثبات موجود في الكتاب

مهم

1) اذا كان ق(س) = هـ(س) مأثبت أن

ق(س) = هـ(س) + جـ حيث 5 عدد ثابت

ق(س) = هـ(س)

اولاً ← نفتهم لجهه ق(س) - هـ(س) = صفر

ثانياً ← الغاء (ق(س) - هـ(س))' = (صفر)'

اشتقاق الجهتين ق'(س) - هـ'(س) = جـ

ثالثاً ← نقل هـ(س) [ق'(س) = هـ(س) + جـ]

وهو المطلوب

ثانياً : جدول الاشارات

1) بالاعتماد على جدول الاشارات التالي أجب عن

س		١		٤	
ق'(س)	- - - -		+ + + +		- - - - - -
ق(س)	↘		↗		↘

أ) بيان للاقتران قيمة عظمى عند س = ...

ب) مبانه للاقتران قيمة صغرى عند س = ...

ج) الاقتران متزايد في الفترة .....

د) فترات التناقص هي .....

هـ) القيم الحرجه لـ س هي .....

معلومات بين أسطر الكتاب (حفظ)

قد يتم استخدامها في سؤال ضع دائرة .

1) اذا كان الاقتران متزايداً فإن

* مشتقته تكون موجبه + ++ ق'(س) > ٠

* ميل المماس = ظل الزاويه (الحادة) الميل صفر

2) اذا كان الاقتران متناقصاً فإنه

* مشتقته تكون سالبه - - - - ق'(س) < ٠

* ميل المماس = ظل الزاوية (المنفرجة) أقل من صفر

3) اذا كان المماس موازياً لمحور السينات

* الاقتران ثابت

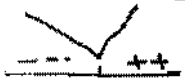
* ميل المماس = صفر ق'(س) = ٠

4) اذا تغيرت اشارة المشتقة الأولى من موجبه الى سالبه حول نقطه معينه فإنه هذه النقطه تمثل

(قيمة عظمى محليه للاقتران)

5) اذا تغيرت اشارة المشتقه الاولى من سالبه الى موجبه حول نقطه معينه فإنه هذه النقطه تمثل

(قيمه صغرى محليه للاقتران)



مثال كيف يمكن يسأل (ضع دائرة)

1) اذا كان ق اقتراناً متزايد فإنه الزاويه التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

أ) حاده ب) منفرجه ج) قائمه د) مستقيمه

2) اذا كان المماس موازياً لمحور السينات فإن ميل المماس يكون

أ) اكبر من صفر ب) صفر ج) اصغر من صفر د) ١

كيفية إيجاد ← قيم س الحرجه ونوعها
← فترات التزايد والتناقص
← القيم القصوى (العظمى والصغرى)
من خلال الرسمة
يوجد لدينا نوعين من الرسومات
١ رسمة ق(س) (الاقتران)
٢ رسمة ق'(س) (المشتقه)

٢ رسمة ق(س) الاقتران

خطوات الحل

١ نقوم بعمل خط أعداد واننتب
ق(س) ← قم بنسخ نفس الشكل المعطى على خط الأعداد

٢ قيم (س) الحرجه التي نضعها على خط الاعداد هي
قيمة س عند قمة الجبل
قيمة س عند قاع الوادي

٣ لتحديد التزايد ++ والتناقص
نمشي مع الرسمة الموجودة على خط الاعداد من اليسار لليمين
طالع ++++ ثابت قـ'(س)=٠ نازل ----

* ملاحظة هامة

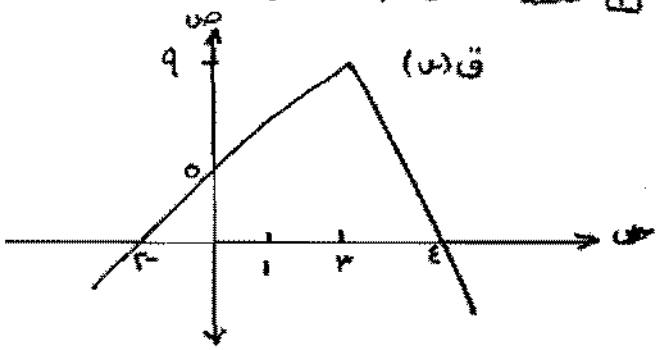
١ إذا طلب القيم القصوى (الصورة)
القيمة العظمى ← تعود للرسمة الأصلية وتكون قيمة ص المقابلة لقمة الجبل
أو
القيمة الصغرى ← تعود للرسمة الأصلية وتكون قيمة ص المقابلة لقاع الوادي

٢ اذا طلب قيم س الحرجه ونوعها
هنا يريد س ← تحت الجبل / عند الوادي
ونوعها ← عظمى ← جبل / صغرى ← وادي

٣ انتبه للصيغ التاليه للسؤال
← جد الفترة التي يكون فيها ق'(س) > ٠ ← يعني تزايد ++
← جد الفترة التي يكون فيها ق'(س) < صفر ← يعني تناقص --
← جد الفترة التي يكون فيها ق'(س) = صفر ← يعني فترة الثبات

٤ اذا طلب ق'(عدد) من رسمة ق(س)
الاجابه دائماً = صفر لأن ق'(العدد) : رقم ومشتقة العدد دائماً صفر

[١] معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س)



[أ] جد قيم س الحرجة و حدد نوعها

[ب] جد فترات التزايد وفترات التناقص

[ج] جد القيم القصوى للاقتران وبين نوعها ؟

الحل

نعمل خط اعداد ننسخ عليه الشكل (ق) ← ثم نبسخ

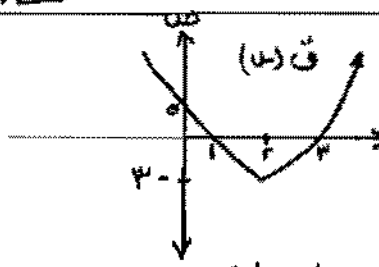
الاجابات

[أ] قيم س = ٣ ← نوعها عظمى

[ب] تزايد (-∞ ، ٣] ، تناقص [٣ ، ∞)

[ج] قيمة عظمى ق(٣) = ٩ ذهبنا للرسم لأنه أوجدنا ص أولاً

[٢] معتمداً الشكل المجاور أجب



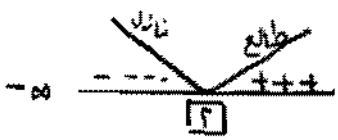
[أ] جد قيم س الحرجة وصدد نوعها ؟

[ب] جد فترات التناقص ؟

[ج] القيم القصوى للاقتران ؟

الحل

قم بنسخ

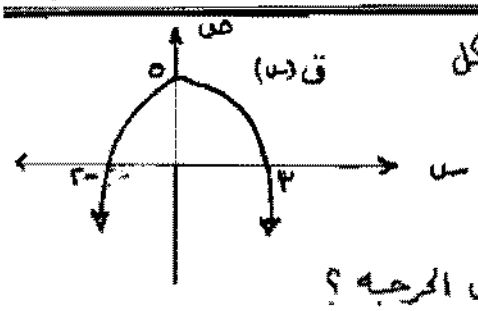


[أ] س = ٢ ← صغرى

[ب] تناقص (-∞ ، ٢]

[ج] قيمة صغرى ق(٢) = -٣

[٣] معتمداً الشكل

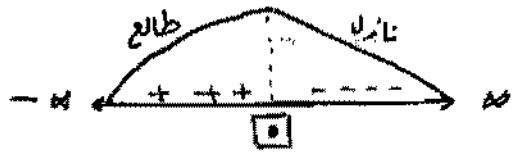


[أ] جد قيم س الحرجة ؟

[ب] جد النقط الحرجة ؟

[ج] جد الفترة التي يكون فيها ق(س) > صفر

الحل قم بنسخ الشكل

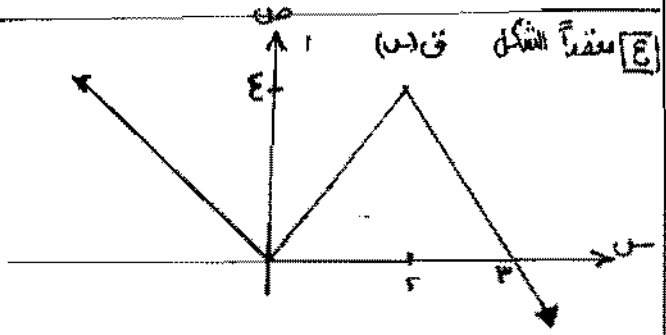


[أ] س = صفر

[ب] النقطة الحرجة (٥ ، ٠)

[ج] هنا المقصود (تزايد) ← (-∞ ، ٥]

[٤] معتمداً الشكل ق(س)



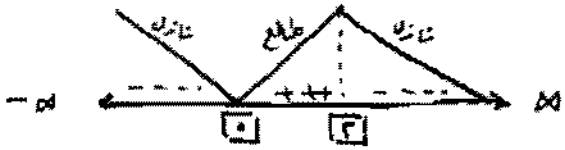
[أ] جد قيم س الحرجة وبين نوعها ؟

[ب] جد فترات التزايد والتناقص

[ج] جد القيم القصوى للاقتران وبين نوعها ؟

[د] جد ق(٢) ؟

الحل



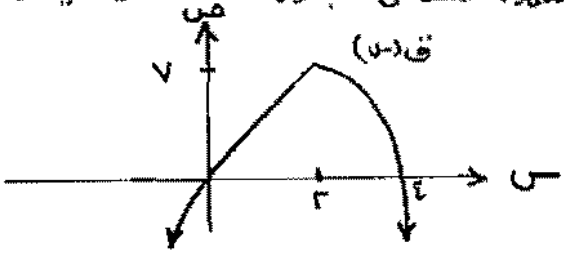
[أ] قيم س = ٠ ← صغرى س = ٢ عظمى

[ب] تزايد [٠ ، ٢] ، تناقص (-∞ ، ٠] ، [٢ ، ∞)

[ج] عظمى ق(٢) = ٤ صغرى ق(٠) = ٠

[د] ق(٢) = صفر دائماً المشتقة في النقطة = صفر

١ معتمداً الشكل المجاور أجب عما يأتي :



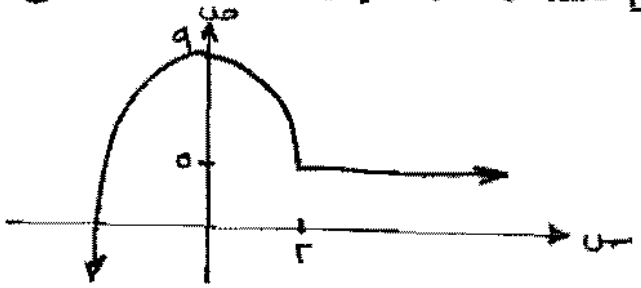
٢ جد قيم س الحرجة وصد نوعها ؟

ب جد فترات التزايد ؟

ج جد القيم العظمى للاقترانات مبيناً نوعها ؟

---

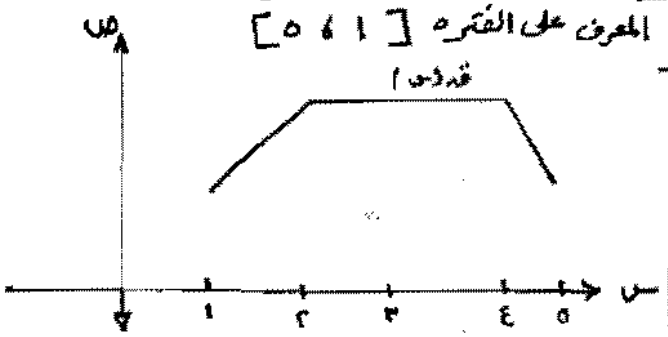
٣ معتمداً على الشكل الذي يمثل منحنى ق(س) المعرف على ح



أ جد فترات التزايد ←
ب جد فترات التناقص ←
ج جد فترات الثبات ←
د جد القيم العظمى وصد نوعها ←
هـ جد ق (٣) ←

---

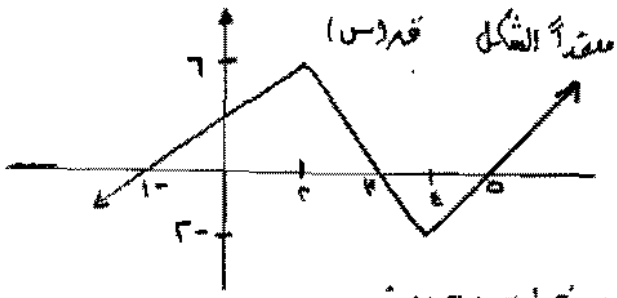
٤ معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) المعرف على الفترة [١ ، ٥]



أ أي الفترات يكون ق (س) = صفر
ب جد فترة التناقص
ج الفترة التي يكون فيها ق (س) > صفر

---

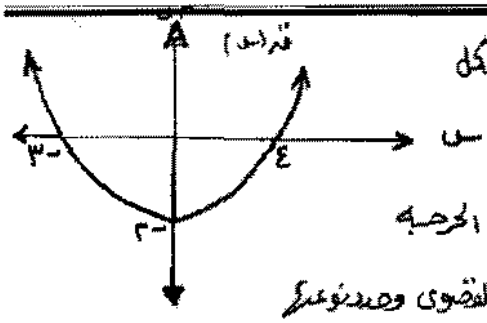
٥ معتمداً الشكل ق(س)



أ جد فترات التناقص
ب القيم الحرجة لـ س ونوعها
ج القيم العظمى مبيناً نوعها ؟

---

٣ معتمداً الشكل



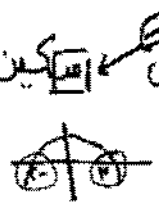
أ جد قيم س الحرجة
ب جد القيم العظمى وصد نوعها
ج جد فترات التناقص ؟

ب رسمة قَ (س)

١ نقوم بعمل خط أعداد

٢ نضع عليه قيم (س) الحرجة ق ← س كين

وهي نقط قطع محور س



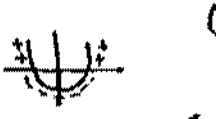
٣ يتم البدء بوضع الاشارات على خط الاعداد

نبدأ برسم الرسمة من اليسار

(تحت) محور السينات (سالب) ---

(فوق) محور السينات (موجب)

٤ نرسم أسهم خط الاعداد



٥ كل الاجابات تكون من خط الاعداد

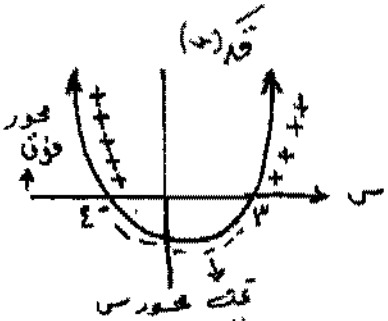
* باستثناء اذا طلب

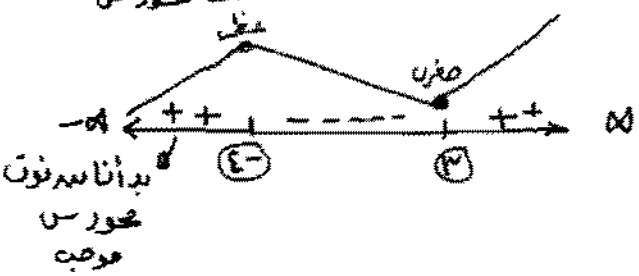
أو ← قَ (عدد) ← قَ (٢)

← ميل المماس ← عند س = ٢

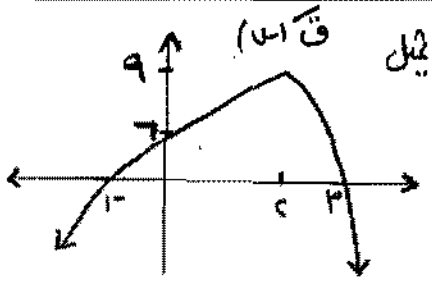
← بضاقة $\frac{\text{قَ}(٢+هـ) - \text{قَ}(٢)}{هـ}$ ← من الرسمة الاصلية نوجد قيمة هـ

مثال للتوضيح





١ معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى المشتقة الاولى



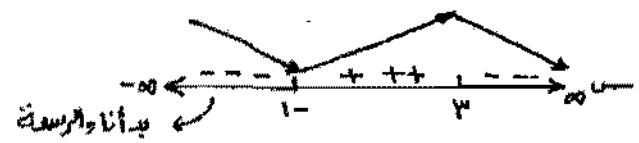
٢ جد قيم س الحرجة وحدد نوعها

٣ جد فترات التزايد والتناقص

٤ جد قَ (٢)

٥ جد ميل المماس عند س = ٠

الحل



٢ قيم س ← س = ١- صغرى

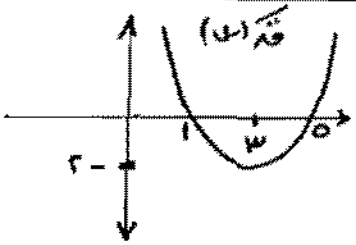
س = ٣ عظمى

٣ تزايد [-١، ٣] ، تناقص ← (-∞، -١) ∪ [٣، ∞)

٤ قَ (٢) ← من الرسمة ← ٩

٥ ميل المماس ← من الرسمة ← قَ (٠) = ٦

١ معتمداً الشكل أجب



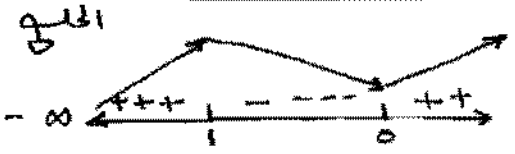
٢ جد قيم س الحرجة

٣ جد فترات التناقص

٤ لماذا ان قيمة "صغرى عند س = ---- ؟

٥ جد بضاقة $\frac{\text{قَ}(٣+هـ) - \text{قَ}(٣)}{هـ}$ ← هـ → ٠

الحل



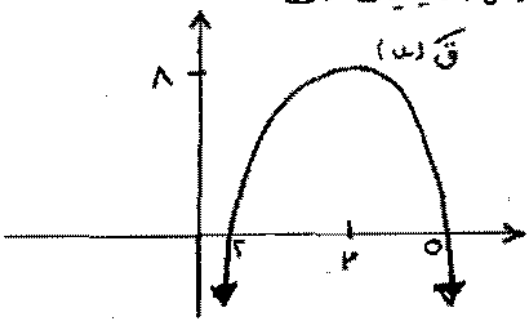
٢ قيم س الحرجة س = ١ ، س = ٥

٣ متناقص [١، ٥]

٤ صغرى عند س = ٥

٥ قَ (٣) = ٢-

[١] معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى



[٢] حدد قيم س الحرجة للاقتران ← س = ٣ ، س = ٥

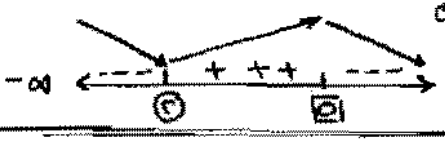
[٣] فترات التزايد ← [٣، ٥]

فترات التناقص ← (-∞، ٣] ∪ [٥، ∞)

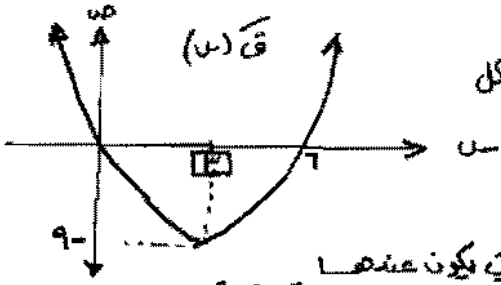
[٤] إذا كان ق(٣) = ٨ ، ق(٥) = ٠ فأوجد $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٣+هـ) - ق(٣)}{هـ}$

[٥] نقط القيم القصوى وحدد نوعها (٣، ق(٣)) صغرى محلية ، (٥، ق(٥)) عظمى محلية

الحل: اعتمدنا على خط الأعداد



[٦] معتمداً الشكل



[٧] قيمة س التي يكون عندها قيمة عظمى محلية للاقتران ق

أ) صفر ب) ٣ ج) ٦ د) -٩

[٨] الاقتران ق متزايداً للفترة

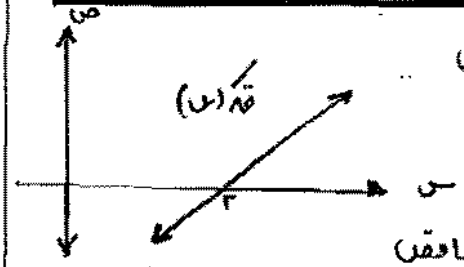
أ) [٦، ٠] ب) (-∞، ٠] ∪ [٦، ∞)

ج) [٣، ٠] د) (-∞، -٩] ∪ [٩، ∞)

[٩] $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٣+هـ) - ق(٣)}{هـ}$

أ) صفر ب) ٦ ج) ٣ د) -٩

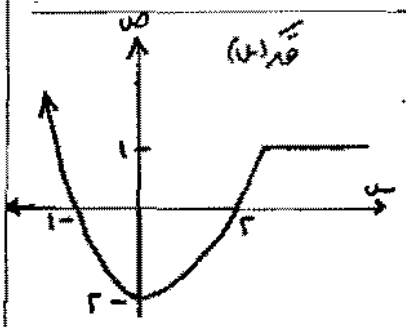
[١٠] اعتماداً الشكل



[١١] حدد فترات التناقص

[١٢] قيم س الحرجة وحدد نوعها

[١٣] اعتماداً الشكل

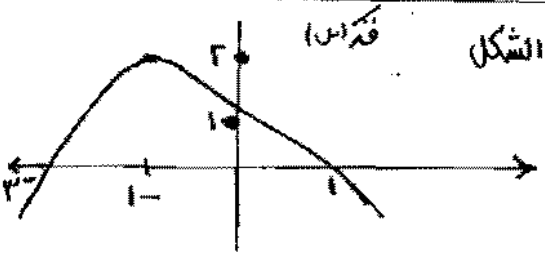


[١٤] حدد قيم س الحرجة

[١٥] قيم س التي يكون عندها قيم قصوى

[١٦] ميل المماس المرسوم عند س = ٠

[١٧] معتمداً الشكل



[١٨] عدد قيم س الحرجة تساوي

أ) ١ ب) ٣ ج) ٢ د) ٤

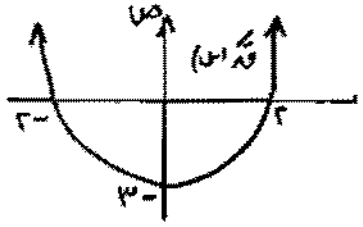
[١٩] قيمة س التي يكون عندها قيمة صغرى محلية للاقتران هي

أ) ١ ب) -١ ج) -٣ د) ٣

[٢٠] $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(-١+هـ) - ق(-١)}{هـ}$ =

أ) ١ ب) ٢ ج) -١ د) -٣

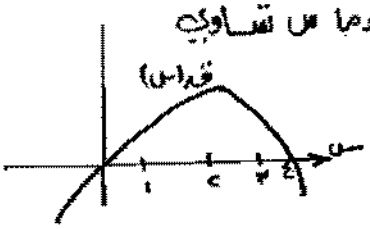
١) اعتماداً الشكل المجاور مابه للاقتران قيمة صغرى عندما س تساوي



أ) ٢ ب) -٣ جـ) -٢ د) صفر

---

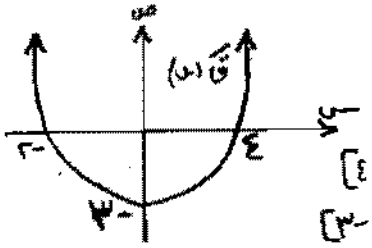
٢) معتمداً الشكل التالي الذي يمثل منحنى ق(س) فإن للاقتران نقطه حرجه عندما س تساوي



أ) ٤ ب) ٢
جـ) ١ د) صفر

---

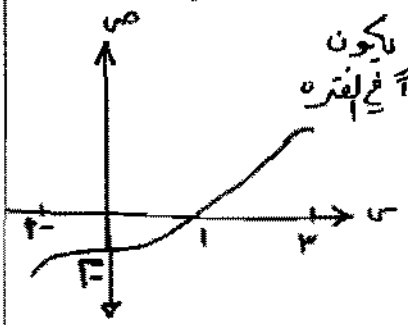
٣) معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى المشتقه الاولى مابه الاقتران متناقصاً للفتره



أ) [-٨، -٣] ب) [-٣، ٤]
جـ) [٤، ٥] د) [-٨، -٣]

---

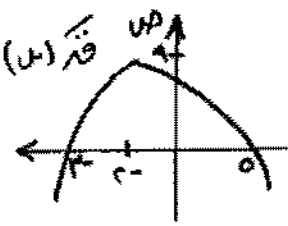
٤) اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق'(س) في الفتره [-٣، ٤] يكون الاقتران ق متزايداً في الفتره



أ) [-٣، ٤]
ب) [٣، ٤]
جـ) [-٣، ٣]
د) [-٣، ٠]

---

٥) معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى ق'(س)



١) فإن للاقتران قيمة عظمى عندما س =
أ) -٣ ب) -٢ جـ) ٩ د) ٥

٢) عدد قيم س الحرجه
أ) ٣ ب) ٥ جـ) ٩ د) صفر

تطبيقات اقتصادية على التفاضل

بداية لازم نتعرف على القوانين التالية الرئيسيه

١) الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفه الكليه

ر(س) = ك(س) - ك(س)

٢) الايراد الكلي = عدد الوحدات × سعر البيع

ك(س) = دائماً س × (رقم أو معادلة)

٣) الايراد الكلي = الربح الكلي + التكلفه الكليه

هذا القانون نستخدمه لايجاد الايراد الكلي إذا لم يكن لدينا (سعر) في السؤال

ما معنى كلمة [حدّي] ؟

معناها اشتقه فقط

مثلاً الربح الكلي ← ر(س)
الربح الحدي ← ر'(س)

جد [شيء] حدي ؟

معناها اشتقه معادلة هذا الشيء

جد الربح الحدي ؟
معناها اشتقه معادلة الربح الكلي

السؤال عن هذا الدرس يأتي بأحد صيغتين

الصيغة الاولى ← [صيغة حدي] مثلاً

جد الربح الحدي

معناها اشتقه معادلة (الربح الكلي)

اذا كانت معادلة الربح الكلي موجودة جاهزة في السؤال ← هُنا فوراً نشتقها مباشرة وتنتهي الاجابه

و اذا كانت غير موجودة ← هُنا
أولاً: نكتب قانون الربح لايجاد معادلة الربح
ثانياً: نشتقه لمعادلة

مثال للتوضيح

اذا كان الربح الكلي ر(س) = س³ - ٣٠ س + ٥٠ جد الربح الحدي ؟

هُنا فوراً نشتقه معادلة الربح الكلي لأنها موجوده

ر'(س) = ٣س² - ٣٠ انتهت الاجابه

ملاحظه هامه

الربح الكلي = الايراد - التكلفه
ر(س) = ك(س) - ك(س)

عند الاشتقاق يصبح

ر'(س) = ك'(س) - ك'(س)

الربح الحدي = الايراد الحدي - التكلفه الحديه

معلومه للحفظ

لا يكون الربح أكبر ما يمكن عند ر'(س) = ٠

أي التكلفة الحديه = الايراد الحدي
ك'(س) = ك'(س)

١ اذا كان اقتران التكلفه الكلية لإنتاج (س) قطعه من منتج ما يُعطى بالعلاقة ك(س) = ٣٠٠ + س² + ٣س
جد التكلفة الحديّه عند إنتاج (٥٠) وحدة ؟

هُنا مطلوب التكلفه الحديه عند انتاج (٥٠) وحدة
نشتقه التكلفه ← ثم نعوض بـ(٥٠)

ك'(س) = ٢س + ٣
ك'(٥٠) = ٢×٥٠ + ٣ = ١٠٣ دينار

٢ اذا كان اقتران الايراد الكلي للمبيعات هو
د(س) = ٦٠س - س² واقتران التكلفه الكليه هو
ك(س) = ٢٠ + ٣٨س حيث (س) عدد الوحدات
جد الربح الحدي .

مطلوب نشتقه معادلة الربح الكلي ← نبني موجودة المعادله
١ نوجد الربح الكلي
٢ نشتقه

الربح = الايراد - التكلفه
ر(س) = د(س) - ك(س) ← قوس لازم داخل
ر(س) = ٦٠س - س² - (٢٠ + ٣٨س)
ر'(س) = ٦٠ - ٢س - ٣٨ ← نقطع مكن بتجميع حدود
ر'(س) = ٥٢ - ٢س

٣ يبيع مصنع (س) جهاز بسعر ٣٠٠ دينار جد
١ الربح الكلي ٢ الربح الحدي
اذا كانت التكلفه ك'(س) = س² + ١٠٠س

١ الربح الكلي = الايراد - التكلفه
ر(س) = عدد × سعر - (س² + ١٠٠س)
س × ٣٠٠
ر(س) = ٣٠٠س - س² - ١٠٠س

٢ الربح الحدي ← فقط نشتقه
ر'(س) = ٣٠٠ - ٢س - ١٠٠
ر'(س) = ٢٠٠ - ٢س

٤ يبيع مصنع (س) جهاز بسعر (٥٠٠ - س)
جد الايراد الحدي ؟

مطلوب نشتقه الايراد الكلي

الايراد = عدد × سعر ← دائماً
د(س) = س × (٥٠٠ - س) ← نوزع الضرب
د(س) = ٥٠٠س - س² ← الآن نشتقه
د'(س) = ٥٠٠ - ٢س

تركيبيز

٥ وجدت شركه لانتاج العاب الأطفال أنّ
التكلفه الكليه لانتاج (س) لعبه هي ك(س) = س² + ٣٠س + ٥
وأنّ الربح الناتج هو ر(س) = ١٠٠س + ٣س² - ٣٠
جد الايراد الحدي ؟

هنا مطلوب أولا ← ايجاد الايراد الكلي ثم نشتقه
لاحظ ← لايوجد (سعر) في السؤال لذا
نستخدم قانون الايراد (الثاني) درك

الايراد = الربح + التكلفه
د(س) = ١٠٠س + ٣س² - ٣٠ + س² + ٣٠س + ٥
د(س) = ١٠٠ + ٤س + ٣س² + ٣٠ ← نجمع الحدود المتشابهه
د'(س) = ١٣٠ + ٦س ← نفضل على راسه

غريب

٦ اذا كان ك'(س) هو اقتران التكلفه الكليه لانتاج (س) قطعه
د(س) اقتران الايراد الكلي ، جد اقتران الربح الكلي ر(س) ؟

الاجابه ر(س) = د(س) - ك(س) بس هيك

* عزيزي الطالب
* عزيزتي الطالبه
أرجوك قُم بإعادة حل هذه الصفحه لمالك
قبل حل صفحة الواجب التاليه
إذا تكرمتوا .....

١ اذا كان اقتران التكلفة الكلية لإنتاج (س) قطعه من منتج ما يُعطى بالعلاقة ك(س) = ٣٠٠ - ٥س + س² فجد التكلفه الحديه عند انتاج (١٠) قطع ؟

١٥

٢ اذا كان الايراد الكلي الناتج عن بيع (س) قطعه من منتج هو ر(س) = ٥س² + ٦س ، والتكلفه الكليه ك(س) = ٣س² + س + ٥٠ فجد الربح الحدي .

تذكر: الربح = الايراد - التكلفه — أجمل ٤س + ٥

٣ يبيع مصنع ما سلعة بسعر (١٥) دينار ، إذا كانت التكلفه الكليه لانتاج (س) وحدة من هذه السلعه ك(س) = ٢٠٠ س² + ٣س + ٢٠٠ فجد الربح الحدي

ر(س) = ١٢٠ - ٤٠٠ س

٤ يبيع مصنع (س) جهاز من أجهزة الحاسوب بسعر (٣٦٠ - س) دينار فجد الايراد الحدي

ر(س) = ٣٦٠ - ٢س

تدريب وزارة

٥ وجد مصنع لانتاج ألعاب الأطفال أن التكلفه الكليه لإنتاج (س) لعبه اسبوعياً تعطى بالاقتران ك(س) = ٦٠ س + ٢٠٠ وأن الربح الناتج من بيع (س) لعبه هو ٠٫٢ س² + ٣٠ س + ٦٥ جد الايراد الحدي .

ر(س) = ٤٠٫٠ س + ٨٠

٦ صيغ أسألة ضمن دائرة :

١ اذا كان ك(س) اقتران التكلفه الكليه ، ر(س) اقتران الايراد فان الربح الحدي يساوي :

أ ر(س) + ك(س) ب ر(س) - ك(س) ج ك(س) - ر(س) د الصفر

٢ ينتج مصنع (س) سلعه بسعر (١٥٠) دينار فان الايراد الحدي =

أ ١٥٠ س ب صفر ج ١٥٠ د س

حفظ

٣ ك(س) التكلفه الكليه ، ر(س) الايراد الكلي يكون الربح اكبر ما يمكن عندما

أ) ر(س) = ٠ ب) ك'(س) = ر'(س) ج) ر(س) > ٠ د) ك'(س) = ٠

الصيغة الثانية للسؤال ← أفعل

جد قيمة (س) التي تجعل

الربح أكبر ما يمكن أو التكلفة أقل ما يمكن

معناها بعد قيمة عظمى | معناها بعد قيمة صغرى

هنا الخطوات

١ نكتب قانون (المعادلة المطلوبة) مثلاً الربح أكبر ما يمكن

ر(س) = د(س) − ك(س)

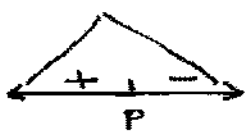
٢ نشتقه ر'(س) =

٣ المشتقة = ٠ ر'(س) = صفر

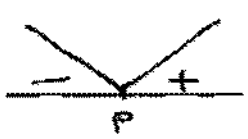
٤ لايجاد قيمة س مثلاً [س = ٢]

٥ حاوه نثبت النوع

أكبر ما يمكن (عظمى) أو أصغر ما يمكن (صغرى)



أكبر ما يمكن عند س = ٢



أصغر ما يمكن عند س = ٢

١ إذا كان الإيراد الكلي الناتج عن بيع (س) قطعة من منتج ما هو ر(س) = ٣٠س − س² والتكلفة الكلية ك(س) = ١٠س + ٥٠ فجد قيمة (س) التي تجعل الربح أكبر ما يمكن

الربح = الإيراد − التكلفة

١) ر(س) = ٣٠س − س² − ١٠س − ٥٠

٢) ر'(س) = ٣٠ − ٢س − ١٠

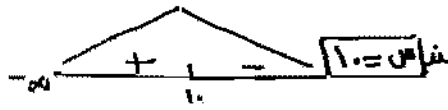
٣) ٣٠ − ٢س = ٠

٢س = ٣٠

٤) [س = ١٥]

حاوة

٥ أكبر ما يمكن عند [س = ١٥]



٢ ينتج مصنع الحواسيب (س) جهاز أسبوعياً فإذا كانت تكلفة الانتاج الكلي الاسبوعي ك(س) = ٣٠٠٠ + ٥٠س + س² وكان المصنع يبيع الجهاز الواحد بمبلغ (٢٥٠) جد عدد الأجهزة التي يجب بيعها أسبوعياً ليحقق أكبر ربح ممكن

١) الربح = الإيراد − التكلفة

ر(س) = عدد × سعر − (٣٠٠٠ + ٥٠س + س²)

ر(س) = ٢٥٠س − ٣٠٠٠ − ٥٠س − س²

٢ نشتقه ر'(س) = ٢٥٠ − ٥٠ − ٢س

٣ مساواة = صفر ٢٠٠ − ٢س =

٤ إيجاد (س) ٢س = ٢٠٠

[س = ١٠٠]

حاوة

٥ جبل

أكبر ما يمكن عند س = ١٠٠

انتاج (١٠٠) جهاز

٣ وجد مصنع لانتاج الأجهزة الالكترونية أن التكلفه الكليه بالدينار ك(س) = ٥٠٠٠ + ٦٠س + ٠٫٠٠٢ س² إذا بيع الجهاز الواحد بمبلغ (٨٠) دينار فما عدد الوحدات التي يجب انتاجها وبيعها أسبوعياً لتحقيق أكبر ربح ممكن ؟

الربح = الايراد − التكلفه

١ ر(س) = (عدد × سعر) − (٥٠٠٠ + ٦٠س + ٠٫٠٠٢ س²)

ر(س) = ٨٠س − ٥٠٠٠ − ٦٠س − ٠٫٠٠٢ س²

٢ ر(س) = ٨٠ − ٦٠ − ٠٫٠٠٤ س

٣ ٢٠ = ٠٫٠٠٤ س = صفر

٤ $\frac{٢٠}{٠٫٠٠٤} = \frac{٠٫٠٠٤ س}{٠٫٠٠٤}$ $\quad \frac{٢٠ \times ١٠٠٠}{٤} = \frac{٢٠٠٠}{٤}$

س = ٥٠٠٠

٥ أكبر ربح عند انتاج (٥٠٠٠) وحدة

+ | + | − | −

٥٠٠٠

٤ وجدت شركه لانتاج ألعاب الأطفال أن التكلفه الكلية لانتاج (س) لعبه بالتقريب هي ك(س) = ٠٫٠٠٢ س² − ٦٠س + ١٠٠ فجد عدد اللعب اللازم انتاجها متى تكون التكلفه أقل ما يمكن

لاحظ معادلة التكلفه ← موجودة جاهزة ← نشتق

١ ك′(س) = ٠٫٠٠٤ س − ٦٠

٢ ٠٫٠٠٤ س − ٦٠ = صفر

$\frac{٠٫٠٠٤ س}{٠٫٠٠٤} = \frac{٦٠}{٠٫٠٠٤}$ $\quad \frac{٦٠ \times ١٠٠٠}{٤}$

س = ١٥٠

− | + | −

١٥٠

أقل ما يمكن عند انتاج (١٥٠) لعبه

٥ ينتج مصنع (س) من الوحدات في الاسبوع من بضاعة معينه، ويبيع الوحدة بمقدار (ر) دينار فاذا كانت تكلفة الانتاج لهذه الوحدات ك(س) = س³ − ٣٨س + ١٥ وكانت العلاقه بين س، ص هي ٣س + ١٠٤ = ٢ص

برهن أن أكبر ربح يحصل عليه المصنع عندما ينتج (١٠) وحدات اسبوعياً

الربح = الايراد − التكلفه

عدد × سعر = س × ص

ايجاد قيمة ص

٣س + ١٠٤ = ٢ص

٢ص = ١٠٤ − ٣س

ص = ٥٢ − $\frac{٣}{٢}$س

هنا المشكله السعر هو (ص) ← ايجاده أولاً

١ ر(س) = ل(س) − ك(س)

= س × ص − (س³ − ٣٨س + ١٥)

= س(٥٢ − $\frac{٣}{٢}$س) − (س³ − ٣٨س + ١٥)

٢ ر(س) = ٥٢س − $\frac{٣}{٢}$س² − س³ + ٣٨س − ١٥

٣ ر′(س) = ٥٢ − ٣س − ٤س² + ٨ نجمع الحدود

٤ ٦٠ − ٦س = صفر

$\frac{٦}{٦}$ س = $\frac{٦٠}{٦}$

س = ١٠

+ | + | −

١٠

أكبر ربح عند انتاج (١٠) وحدات اسبوعياً وهو المطلوب

سؤال قوي ....

١) اذا كان الايراد الكلي لمبيعات سلعه ما هو ر(س) = ٥٠ س - ٣س٢ وكان التكلفه الكليه ك(س) = ٣٠ س + جـ فما قيمة (س) التي تجعل الربح أكبر ما يكن

س = ٥

٢) يبيع مصنع (س) جهاز بسعر (٦٠) دينار فاذا كانت تكلفة الانتاج الكلي معطاة بالعلاقه ك(س) = ٣س٢ + ٣٠س - ٣٠ فجد عدد الأجهزة اللازم انتاجها لتحقيقه أكبر ربح ممكن

س = ١٠

٣) وجد مصنع لانتاج أجهزه الكترونيه أن التكلفه بالدينار ك(س) = ٥٠ س + ٣٠٠ فاذا بيع الجهاز الواحد بسعر (٣٠٠ - س) جد قيمة س التي تجعل الربح الأسبوعي أكبرما يمكن

س = ٧٥

٤) وجدت شركة أجهزه كهربائيه أن التكلفه الكليه ك(س) = س٢ - ٤٠ س + ٣٠٠ وأن الربح الناتج ر(س) = ٣س٢ + ١٦٠ س - ١٠٠

أ) جد عدد اللعب اللازم انتاجها لتكون التكلفه أقل ما يمكن

ب) جد الايراد الحدّي

أ) س = ٢٠

ب) ر'(س) = ٦س + ١٦٠