١٤ابحث في اتصال الاقتران $ق(س) = \begin{cases} [٢س-١]-[س] & س < ١ \\ س + \left|\frac{١}{٢}س\right| & ١ \le س \le ٣ \end{cases}$ عند الواحد فقط

نعيد التعريف

$$ق(س) = \begin{cases} ٠-٠ & \frac{١}{٢} \le س < ١ \\ س + \frac{١}{٢}س & ١ \le س \le ٣ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} ٠ & \frac{١}{٢} \le س < ١ \\ \frac{٣}{٢}س & ١ \le س \le ٣ \end{cases}$$

$\lim\limits_{س \to ١^-} ق(س) = ٠ \ne \lim\limits_{س \to ١^+} ق(س) = \frac{٣}{٢}$ لا يوجد نهاية اذا غير متصل عند الواحد

١٥- جد المشتق الاول باستخدام التعريف $ق(س) = \frac{\sqrt{س}}{س+١}$ $\quad س > ٠$

الحل :

نشكل الاقتران

$$\lim_{ع \to س} \frac{\frac{\sqrt{ع}}{ع+١} - \frac{\sqrt{س}}{س+١}}{ع-س} = \lim_{ع \to س} \frac{(س+١)\sqrt{ع} - (ع+١)\sqrt{س}}{(ع-س)(ع+١)(س+١)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{س\sqrt{ع} + \sqrt{ع} - ع\sqrt{س} - \sqrt{س}}{(ع-س)(ع+١)(س+١)} = \lim_{ع \to س} \frac{س\sqrt{ع} - ع\sqrt{س} + \sqrt{ع} - \sqrt{س}}{(ع-س)(ع+١)(س+١)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{س}\sqrt{ع}\left(\sqrt{س} - \sqrt{ع}\right) + \left(\sqrt{ع} - \sqrt{س}\right)}{(ع-س)(ع+١)(س+١)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\left(\sqrt{ع} - \sqrt{س}\right)\left(-\sqrt{س}\sqrt{ع} + ١\right)}{(ع-س)(ع+١)(س+١)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\left(\sqrt{ع} - \sqrt{س}\right)\left(-\sqrt{س}\sqrt{ع} + ١\right)}{\left(\sqrt{ع} - \sqrt{س}\right)\left(\sqrt{ع} + \sqrt{س}\right)(ع+١)(س+١)}$$

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\left(-\sqrt{س}\sqrt{ع} + ١\right)}{\left(\sqrt{ع} + \sqrt{س}\right)(ع+١)(س+١)} = \frac{-س+١}{٢\sqrt{س}(س+١)^٢}$$

١٦- $ق(س) = \begin{cases} [س] & ١ \le س < ٢ \\ |س-٣| & ٢ \le س < ٤ \end{cases}$ اوجد المشتقة الاولى للاقتران

الحل نعيد التعريف

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 1 & 1 \le \text{س} < 1 \\ -\text{س} + 1 & 2 \le \text{س} < 3 \\ \text{س} - 1 & 3 \le \text{س} < 4 \end{cases}$$

نشتق مع فتح الفترات (كل فرع هو مقصور كثير حدود على فترة مفتوحة)

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 0 & 1 < \text{س} < 1 \\ -1 & 2 < \text{س} < 3 \\ 1 & 3 < \text{س} < 4 \end{cases}$$

غير قابل للاشتقاق عند الواحد وال ٤ اطراف فترة

عند ال ٢ ندرس الاتصال

$\underset{\text{س}\to 2^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = 1$، $\underset{\text{س}\to 2^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = 1$، $\text{ق}(2) = 1$ متصل عند ال ٢ ندرس الاشتقاق

$$\text{ق}'_-(2) = \underset{\text{س}\to 2^-}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(2)}{\text{س} - 2} = \underset{\text{س}\to 2^-}{\text{نهـا}}\ \frac{1-1}{\text{س} - 2} = 0$$

$$\text{ق}'_+(2) = \underset{\text{س}\to 2^+}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(2)}{\text{س} - 2} = \underset{\text{س}\to 2^+}{\text{نهـا}}\ \frac{-\text{س} + 3 - 1}{\text{س} - 2} = -1$$

اذا $\text{ق}'_+(2) \ne \text{ق}'_-(2)$ غير قابل للاشتقاق عند ال٢

عندال٣ متصل نتحقق من ذلك

$$\text{ق}'_-(3) = \underset{\text{س}\to 3^-}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(3)}{\text{س} - 3} = \underset{\text{س}\to 2^-}{\text{نهـا}}\ \frac{-\text{س} + 3}{\text{س} - 3} = -1$$

$$\text{ق}'_+(2) = \underset{\text{س}\to 3^+}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(3)}{\text{س} - 3} = \underset{\text{س}\to 3^+}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س} - 3}{\text{س} - 3} = 1$$

اذا $\text{ق}'_+(3) \ne \text{ق}'_-(3)$ غير قابل للاشتقاق عند ال٢

١٧- ابحث قابلية الاشتقاق عند ال ٥ للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\left[\frac{1}{2}\text{س}\right] - \text{س}}{\text{س} - 1}$

$$\text{ق}'_-(5) = \underset{\text{س}\to 5^-}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(5)}{\text{س} - 5} = \underset{\text{س}\to 5^-}{\text{نهـا}}\ \frac{\frac{2 - \text{س}}{\text{س} - 1} - \frac{-3}{4}}{\text{س} - 5} = \underset{\text{س}\to 5^-}{\text{نهـا}}\ \frac{8 - 4\text{س} + 3\text{س} - 3}{4(\text{س} - 1)(\text{س} - 5)}$$

$$\underset{\text{س}\to 5^-}{\text{نهـا}}\ \frac{5 - \text{س}}{4(\text{س} - 1)(\text{س} - 5)} = \underset{\text{س}\to 5^-}{\text{نهـا}}\ \frac{-1}{4(\text{س} - 1)} = \frac{-1}{16}$$

$$ق'_{+}(٥) = \underset{س\to ٥^{+}}{نها} \frac{ق(س) - ق(٥)}{س - ٥} = \underset{س\to ٥^{+}}{نها} \frac{\frac{٢ - س}{س - ١} - \frac{-٣}{٤}}{س - ٥} = \underset{س\to ٥^{+}}{نها} \frac{٨ - ٤س + ٣س - ٣}{٤(س - ١)(س - ٥)}$$

$$\underset{س\to ٥^{+}}{نها} \frac{٥ - س}{٤(س - ١)(س - ٥)} = \underset{س\to ٥^{+}}{نها} \frac{-١}{٤(س - ١)} = \frac{-١}{١٦}$$

قابل للاشتقاق و $ق'(٥) = \frac{-١}{١٦}$

١٨- جد مشتقة الاقتران $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} & س \geq ١ \\ س + ١ & ١ \succ ١ \end{cases}$

نشتق مع فتح الفترات كل فرع هو مقصور كثير حدود على فترة

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & س \succ ١ \\ ١ & ١ \succ ١ \end{cases}$$

الاتصال عند ال٢

$$\underset{س\to ١^{-}}{نها} ق(س) = \underset{س\to ١^{-}}{نها} (س + ١) = ٢$$

$$\underset{س\to ١^{+}}{نها} ق(س) = \underset{س\to ١^{+}}{نها} \left(س^{٢}\right) = ١$$

غير متصل عند الواحد فهو غير اشتقاقي عندها

١٩ – جد مشتقة الاقتران $ق(س) = \left(س^{٣} + ٣س\right)|س|$

نعيد التعريف

$$ق(س) = \begin{cases} -س\left(س^{٣} + ٣س\right) & س \prec ٠ \\ س\left(س^{٣} + ٣س\right) & س \geq ٠ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} -س^{٤} - ٣س^{٢} & س \prec ٠ \\ س^{٤} + ٣س^{٢} & س \geq ٠ \end{cases}$$

نشتق مع فتح الفترات مقصور كثير حدود على فترة مفتوحة

$$ق'(س) = \begin{cases} -٤س^{٣} - ٦س & س \prec ٠ \\ ٤س^{٣} + ٦س & س \succ ٠ \end{cases}$$

دراسة الاشتقاق عند الصفر طبعا متصل عند الصفر

$$ق'_{-}(٠) = \underset{س\to ٠^{-}}{نها} \frac{ق(س) - ق(٠)}{س - ٠} = \underset{س\to ٠^{-}}{نها} \frac{-س^{٤} - ٣س^{٢} - ٠}{س - ٠} = \underset{س\to ٠^{-}}{نها} \frac{-س\left(س^{٣} + ٣س\right)}{س} =$$

$ق'_-(٠) = \lim_{س\to ٠^-} -(س^٣ + ٣س) = ٠$

$ق'_+(٠) = \lim_{س\to ٠} \frac{ق(س) - ق(٠)}{س - ٠} = \lim_{س\to ٠^+} \frac{س^٤ + ٣س^٢ - ٠}{س - ٠} = \lim_{س\to ٠^+} \frac{س(س^٣ + ٣س)}{س} =$

$ق'_+(٠) = \lim_{س\to ٠^+} +(س^٣ + ٣س) = ٠$

$ق'_+(٠) = ق'_-(٠)$ قابل للاشتقاق عند الصف

الاقتران قابل للاشتقاق على ح

٢٠- اذا كان $ق(س) = \frac{ظا٣س}{جاس}$ جد $ق'\left(\frac{\pi}{٣}\right)$

$ق'(س) = \frac{٣(١+ظا^٢ ٣س)جاس - جتاس ظا٣س}{جا^٢ س}$

$ق'\left(\frac{\pi}{٣}\right) = \frac{٣(١+٠)\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}(٠)}{\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٨}$

٢١- اذا كان ص = جاس − ٣جتاس اوجد $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$

$\frac{ءص}{ءس} =$ جتاس + ٣جاس

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} =$ -جاس + ٣جتاس

٢٢- ص = س − ٤قتاس − ٣ظتا^{٢}س جد المشتقة الاولى

$\frac{ءص}{ءس} = ١ + ٤$قتاس ظتاس + ٦(١ + ظتا^{٢}س)ظتاس

٢٣-ا ذا كانت ص = $ق(س^٢ + ٢س + ٣)$ و $ق'(٦) = ٨$ جد $ق'(١)$

$\frac{ءص}{ءس} = (٢س + ٢)ق'(س^٢ + ٢س + ٣)$

$\frac{ءص}{ءس}(١) = (٤)ق'(٦) = ٤ \times ٨ = ٣٢$

٢٤- اذا كانت $س = \frac{٦ن}{١ + ن^٢}$، $ص = \frac{٢}{١ + ن^٢}$ جد $\frac{ءص}{ءس}$، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$

$$\text{س} = \frac{٦\text{ن}}{١+\text{ن}^٢}،\ \text{ص} = \frac{٢}{١+\text{ن}^٢}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{٦(١+\text{ن}^٢) - ١٢\text{ن}^٢}{(١+\text{ن}^٢)^٢} = \frac{٦-٦\text{ن}^٢}{(١+\text{ن}^٢)^٢}،\ \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{-٤\text{ن}}{(١+\text{ن}^٢)^٢}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}}\frac{\text{دن}}{\text{دس}} = \frac{-٤\text{ن}}{(١+\text{ن}^٢)^٢}\frac{(١+\text{ن}^٢)^٢}{٦-٦\text{ن}^٢} = \frac{-٢\text{ن}}{٣-٣\text{ن}^٢} = \frac{٢}{٣}\frac{\text{ن}}{(\text{ن}^٢-١)}$$

$$\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = \frac{\text{د}}{\text{دن}}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)\frac{\text{دن}}{\text{دس}} = \frac{٢}{٣}\times\frac{\text{ن}^٢-١-٢\text{ن}^٢}{(\text{ن}^٢-١)^٢}\frac{(١+\text{ن}^٢)^٢}{٦-٦\text{ن}^٢} =$$

$$\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = \frac{\text{د}}{\text{دن}}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)\frac{\text{دن}}{\text{دس}} = \frac{٢}{٣}\times\frac{-\text{ن}^٢-١}{(\text{ن}^٢-١)^٢}\frac{(١+\text{ن}^٢)^٢}{٦-٦\text{ن}^٢} = \frac{-٢}{٣}\frac{(١+\text{ن}^٢)^٣}{٦(\text{ن}^٢-١)^٣}$$

طبعا يجب ان نبدل قيم ن ب س ص وهذا صعب هنا

٢٥- اذا كانت $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}^٢ + ٢\text{س})$ وكانت $\text{ق}'(٣) = ٥$ جد $\text{ق}'(١)$

$$\text{ص} = \text{ق}(\text{س}^٢ + ٢\text{س})$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٢\text{س}+٢)\text{ق}'(\text{س}^٢+٢\text{س})$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}(١) = (٤)\text{ق}'(٣) = ٤\times٥ = ٢٠$$

٢٦ – اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^٣ + \text{س})،\text{هـ}(\text{س}) = \text{جتاس}$ اوجد $(\text{ق} \circ \text{هـ})'$

$$(\text{ق} \circ \text{هـ})' = (\text{ق}(\text{هـ}(\text{س})))' = \text{هـ}'(\text{س})\text{ق}'(\text{هـ}(\text{س}))$$

$$\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^٣ + \text{س})،\text{هـ}(\text{س}) = \text{جتاس}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^٢ + ١،\text{هـ}'(\text{س}) = -\text{جاس}$$

$$\text{هـ}'(\text{س})\text{ق}'(\text{هـ}(\text{س})) = -\text{جاس}(٣(\text{جتا}^٢\text{س}) + ١) = -٣\text{جاسجتا}^٢\text{س} - \text{جاس}$$

٢٧- لتكن العلاقة $\text{س}^٢ = -٤(\text{س} + \text{ص})$ اوجد معادلة المماس للخط في نقطة فاصلتها $\text{س} = -٦$

ثم اوجد معادلة المماس الاخر العمودي عليه وعين نقطة التماس واوجد معادلة المستقيم المار من نقطتي التماس وتحقق ان النقطة $(-٢،٠)$ تقع على هذا المستقيم

$$\text{س}^٢ = -٤(\text{س} + \text{ص})$$

$$\text{س}^٢ = -٤\text{س} - ٤\text{ص}$$

$\text{س} = -٦ \Leftarrow \text{ص} = -٣،(-٦،-٣)$ نقطة التماس

نشتق االمعادلة

$$س^{٢} = -٤س - ٤ص$$

$$٢س = -٤ - ٤ص'$$

$$-١٢ = -٤ - ٤م$$

$$م = ٢$$

معادلة المماس $(ص + ٣) = ٢(س + ٦)$

$$ص = ٢س + ٩$$

المماس الاخر العمودي عليه ميله $\frac{-١}{م} = -\frac{١}{٢}$

فرض نقطة التماس الثانية هي (س،ص) نعوض في معادلة المشتق

$$٢س = -٤ - ٤ص'$$

$$٢س = -٤ - ٤\frac{-١}{٢}$$

$$س = -١ \Leftarrow ص = \frac{٣}{٤}$$

$\left(-١، \frac{٣}{٤}\right)$ نقطة تماس المماس الثاني العمودي على الاول

$$ص - \frac{٣}{٤} = \frac{-١}{٢}(س + ١)$$

معادلته $ص - \frac{٣}{٤} = \frac{-١}{٢}س - \frac{١}{٢}$

$$ص = \frac{-١}{٢}س + \frac{١}{٤}$$

معادلة المستقيم المار من نقطتي التماس $\left(-١، \frac{٣}{٤}\right)$ $(-٦، -٣)$

ميله

$$م = \frac{-٣ - \frac{٣}{٤}}{-٦ + ١} = \frac{٣}{٤}$$

$$(ص + ٣) = \frac{٣}{٤}(س + ٦)$$

لنتحقق بالتويض ان النقطة $(-٢، ٠)$ تقع على المستقيم السابق

$$(ص + ٣) = \frac{٣}{٤}(س + ٦)$$

$$(٠ + ٣) = \frac{٣}{٤}(-٢ + ٦)$$

$(٣) = \frac{٣}{٤}(٤) = ٣$ محققة اذا النقطة تقع على هذا المستقيم

٢٨- نسكب ماء في كرة زجاجية بمعدل ٤سم مكعب /ث اوجد معدل تغير ارتفاع الماء في الكرة عندما يصبح ارتفاعه مساو لربع نصف قطر الكرة

بفرض ارتفاع الماء في الكرة ع مجسم الماء في الكرة هو قبة كروية حجمها

$\text{ع} = \frac{\pi}{٣}\,\text{ع}^{٢}\left(٣\text{نق} - \text{ع}\right)$ نق نصف قطر الكرة

$$\text{ع} = \frac{\pi}{٣}\left(٣\text{نق}\,\text{ع}^{٢} - \text{ع}^{٣}\right)$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{\pi}{٣}\left(٣\text{نق}\,٢\text{ع}\,\frac{\text{دع}}{\text{دن}} - ٣\,\text{ع}^{٢}\,\frac{\text{دع}}{\text{دن}}\right)$$

$$٤ = \frac{\pi}{٣}\left(٦\text{نق}\,\frac{١}{٤}\text{نق}\,\frac{\text{دع}}{\text{دن}} - \frac{٣\,\text{نق}^{٢}}{١٦}\,\frac{\text{دع}}{\text{دن}}\right)$$

$$٤ = \frac{\pi}{٣}\left(\frac{٢٤\,\text{نق}^{٢}}{١٦} - \frac{٣\,\text{نق}^{٢}}{١٦}\right)\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$$

$$٤ = \frac{\pi}{٣}\left(\frac{٢١\,\text{نق}^{٢}}{١٦}\right)\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{١٢ \times ١٦}{٢١\,\text{نق}^{٢}}$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{٦٤}{٧\,\text{نق}^{٢}}$$

وحدة /ث

٢٩- اوجد مشتق الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ وفق التعريف

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \text{نها}_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\frac{\text{جاع}}{\text{ع}} - \frac{\text{جاس}}{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}} = \text{نها}_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{سجاع} - \text{عجاس}}{\text{عس}\left(\text{ع} - \text{س}\right)}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{سجاع} - \text{عجاس} + \text{عجاع} - \text{عجاع}}{\text{عس}\left(\text{ع} - \text{س}\right)} = \text{نها}_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\left(\text{س} - \text{ع}\right)\text{جاع} + \text{ع}\left(\text{جاع} - \text{جاس}\right)}{\text{عس}\left(\text{ع} - \text{س}\right)}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{-\text{جاع}}{\text{عس}} - \text{ع}\,\frac{\left(\text{جاع} - \text{جاس}\right)}{\left(\text{ع} - \text{س}\right)} = \text{نها}_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{-\text{جاع}}{\text{عس}} + \text{ع}\,\frac{\left(٢\,\text{جتا}\frac{\text{ع} + \text{س}}{٢}\,\text{جا}\frac{\text{ع} - \text{س}}{٢}\right)}{\left(\text{ع} - \text{س}\right)}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{-\text{جاع}}{\text{عس}} + \text{عجتا}\frac{\text{ع} + \text{س}}{٢}\;\frac{\left(\text{جا}\frac{\text{ع} - \text{س}}{٢}\right)}{\text{عس}\,\frac{\left(\text{ع} - \text{س}\right)}{٢}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{جاس}}{\text{س}^{٢}} + \frac{\text{جتاس}}{\text{س}}$$

٣٠- شكل سداسي منتظم تمر برؤوسه دائرة نصف قطرها نق فاذا علمت ان الدائرة تتقلص مساحتها بمعدل π سم مربع /د احسب معدل تغير مساحة المسدس عندما يصبح طول ضلعه $\frac{\text{نق}}{٢}$

الحل :المسدس شكل منتظم تمر برؤوسه دائرة نصف قطرها يساوي طول ضلع السدس

بفرض طول ضلع المسدس ض اذا ض =نق

مساحة الدائرة

$$\text{م} = \pi \text{نق}^{٢}$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\pi \text{نق} \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$$

$$-\pi = ٢\pi \text{نق} \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$$

$$\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{-١}{٢\text{نق}}$$

لكن ض =نق اذا $\frac{\text{دض}}{\text{دن}} = \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{-١}{٢\text{نق}}$

مساحة المسدس المنتظم وهو ٦ مثلثات كل منها متطابق الاضلاع مساحة كل مثلث منها $\frac{\sqrt{٣}}{٤}\text{ض}^{٢}$

اذا مساحة المسدس

$$\text{م} = ٦ \times \frac{\sqrt{٣}}{٤}\text{ض}^{٢}$$

$$\text{م} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}\text{ض}^{٢}$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\,\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}\text{ض}\,\frac{\text{دض}}{\text{دن}}$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٣\sqrt{٣}\,\text{ض}\,\frac{\text{دض}}{\text{دن}}$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٣\sqrt{٣}\,\text{ض}\,\frac{-١}{٢\text{ض}} = \frac{-٣\sqrt{٣}}{٢}$$

وحدة مساحة /ث