مدارس المعالي الثانوية

أوراق عمل

تأسيس الرياضيات

جميع المعلومات الأساسية لتأسيس الطالب لمادة الرياضيات العلمي

٢٠١٩

إعداد الأستاذ

إيـــاد جاد الله

٠٧٩٥٤٧٥٤٥٧

٠٧٨٨٥١٣٦٥٩

تأسيس ومراجعة هامة جداً" في أساسيات الرياضيات

معلومات عامة في الرياضيات:

* الأعداد الطبيعية هي
{١، ٢، ٣، ....} $ص^+$.
وهي الأعداد الصحيحة الموجبة.

* العدد الحقيقي: هو كل عدد معرف
الأشياء التالية غير معرفة :-
$\frac{٥}{٠}$ ، $\sqrt{-٣}$ ، $\sqrt[٦]{-٧}$ ، $\frac{٠}{٠}$ ، $(٠)^{٠}$
∞ ، $-\infty$

* الأشياء التالية حقيقية "معرفة":-
٩، -٥، ٠٫، $\sqrt[٣]{-٦}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٢٫٠
٧٫٥ ، -٢٫٩ ، $-\frac{٦}{٥}$ ، ....

* المقادير غير المعرفة نوعين :-
١. $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$.
٢. $\sqrt[\text{زوجي}]{\text{سالب}}$

$\frac{٩}{٠}$ ، $\frac{-٣}{٠}$ ، $\frac{١}{٠}$ ، $\frac{٠}{٠}$ ،
$\sqrt{-٢}$ ، $\sqrt{-٩}$ ، $\sqrt[٤]{-٤}$ ....

* الجذور الفردية يسمح تحتها جميع الأعداد موجبة وسالبة.
$\sqrt[٣]{-٦}$ ، $\sqrt[٣]{-٨} = -٢$ ، $\sqrt[٥]{-٣٢} = ٢$
$\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$ ، $\sqrt[٥]{١} = ١$ .....

* $\sqrt{س^٢} = |س|$
لكن $(\sqrt{س})^٢ = س$

الاختلاف بسبب مجال ماكنة الجذر

* $(س + ٣)^٢ \ne س^٢ + ٩$
القوة والجذر لا يوزع على الجمع والطرح.
$\sqrt{س - ٣} \ne \sqrt{س} - \sqrt{٣}$

* $\sqrt{١٦ + ٩} \ne \sqrt{١٦} + \sqrt{٩}$
$\sqrt{٢٥} \ne ٤ + ٣$
$٥ \ne ٧$

* عند حل أي معادلة لا يجوز القسمة على متغير لأن هذا المتغير ممكن أن تكون قيمته صفراً.

س: $س^٢ = س$ جد حل المعادلة
الحل الخاطئ: نقسم على س
$س = ١$ ×××

الحل الصحيح: $س^٢ - س = ٠$
$س(س - ١) = ٠$
$س = ٠$ ، $س = ١$

* عند اختصار البسط مع المقام يجب ان نستثني اصفار المقام لانها تجعل المقدار غير معرف .

مثال: $هـ(س) = \frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤}$

اذا اردنا تبسيط الاقتران

$هـ(س) = \frac{\cancel{(س - ٤)}(س + ٤)}{\cancel{(س - ٤)}}$

$هـ(س) = س + ٤$ حيث $س \neq ٤$

يعني لو طلب صورة الرقم ٤

$هـ(٤) \neq ٨$

لكن $هـ(٤) = \frac{٠}{٠}$ غير معرف

* * *

مثال: $هـ(س) = \frac{س^{٢}}{س}$

اذا اختصرنا لغرض التبسيط

$هـ(س) = س$ حيث $س \neq ٠$.

يعني لو طلب $هـ(٠) = \frac{٠}{٠}$ غير معرف

* * *

* $(م + ب)^{٢} = م^{٢} + ٢مب + ب^{٢}$

$(م - ب)^{٢} = م^{٢} - ٢مب + ب^{٢}$

← $(٢س + ١)^{٢} = ٩س^{٢} + ٩س + ١$

← $(٥ - س)^{٢} = ٢٥ - ١٠س + س^{٢}$

التحليل الى العوامل :-

* * *

أ. الفرق بين مربعين :-

$س^{٢} - م^{٢} = (س - م)(س + م)$

امثلة :-

$س^{٢} - ٩ = (س - ٣)(س + ٣)$

$٤ك^{٢} - ٢٥ = (٢ك - ٥)(٢ك + ٥)$

$\frac{١}{٩}س^{٢} - ١ = (\frac{١}{٣}س - ١)(\frac{١}{٣}س + ١)$

$س^{٢} - ٥ = (س - \sqrt{٥})(س + \sqrt{٥})$

$٣ - س^{٢} = (\sqrt{٣} - س)(\sqrt{٣} + س)$

اذا طلب تبسيط المقدار

$\frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} = \frac{(\sqrt{س} + ٣)\cancel{(\sqrt{س} - ٣)}}{\cancel{(\sqrt{س} - ٣)}}$

$= \sqrt{س} + ٣$

$٢س^{٢} - ٨ = ٢(س^{٢} - ٤)$

$= ٢(س - ٢)(س + ٢)$

$س^{٤} - ٨١ = (س^{٢} - ٩)(س^{٢} + ٩)$

$= (س - ٣)(س + ٣)(س^{٢} + ٩)$

ملاحظة : $س^{٢} + ٩$ لا تحلل لانه مميزها سالب

$(س - ٢)^{٢} - ٩ = (س - ٢ - ٣)(س - ٢ + ٣)$

$= (س - ٥)(س + ١)$

الفرق بين مكعبين ومجموع مكعبين

* $س^{٣} - م^{٣} = (س - م)(س^{٢} + م س + م^{٢})$

* $س^{٣} + م^{٣} = (س + م)(س^{٢} - م س + م^{٢})$

ملاحظة: العوامل التربيعية الناتجة من تحليل فرق او مجموع مكعبين لا تحلل "مميزه سالب" دائماً.

$س^{٣} + ٢٧ = (س + ٣)(س^{٢} - ٣س + ٩)$

$س^{٣} - ١٢٥ = (س - ٥)(س^{٢} + ٥س + ٢٥)$

$\frac{١}{٨}س^{٣} + ٦٤ = (\frac{١}{٢}س + ٤)(\frac{١}{٤}س^{٢} - ٢س + ١٦)$

$١٢٥ - (س+١)^{٣} = (٥ - (س+١))(٢٥ + ٥(س+١) + (س+١)^{٢})$

* * *

العبارة التربيعية :-

$م س^{٢} + ب س + جـ ، م \neq ٠$

حلل العبارات التالية إلى عواملها الأولية

١. $س^{٢} - ٢س - ٣ = (س - ٣)(س + ١)$

٢. $س^{٢} + ٥س - ٦ = (س + ٦)(س - ١)$

٣. $س^{٢} - ٥س + ٦ = (س - ٣)(س - ٢)$

٤. $س^{٢} - ١٠س + ١٦ = (س - ٨)(س - ٢)$

٥. $س^{٢} + ٤س + ٤ = (س + ٢)(س + ٢)$

٦. $س^{٢} - ٩س - ١٠ = (س - ١٠)(س + ١)$

٧. $س^{٢} - ٣س + ٢ = (س - ٢)(س - ١)$

٨. $(س^{٢} - ٦س + ٥) = (س - ٥)(س - ١)$

ملاحظة: عند حل المعادلة يجب مساواتها بالصفر اولاً.

١. $س^{٢} - ٢س = ٨$

$س^{٢} - ٢س - ٨ = ٠$

$(س - ٤)(س + ٢) = ٠$

$س = ٤ \qquad س = -٢$

٢. $س^{٢} - ٦س = ٤٠$

$س^{٢} - ٦س - ٤٠ = ٠$

$(س - ١٠)(س + ٤) = ٠$

$س = ١٠ ، س = -٤$

خطأ شائع جداً

$س^{٢} - ٢س = ٨$

$س(س - ٢) = ٨$

$س = ٨ ، س - ٢ = ٨$

$س = ١٠$

احدى قيم س او كليهما لا تحقق الحل المطلوب.

*عندما تفشل طريقة الأقواس نلجأ إلى حساب المميز والقانون العام.

$المميز = ب^{٢} - ٤ م جـ$

$القانون العام = \frac{-ب \pm \sqrt{المميز}}{٢م}$

مثال: س^٢ + س − ٤ = ٠

لا يمكنه الحل باستخدام الأقواس

المميز = ١^٢ − ٤ × ١ × −٤ = ١٧

القانون العام = (−١ ∓ √١٧) / (٢ × ١)

= (−١ + √١٧) / ٢ ، (−١ − √١٧) / ٢

الملاحظة: العبارة التربيعية

اذا كان مميز > ٠ ← تحلل ولها جذران

مميز = ٠ ← تحلل ولها جذر

مميز < ٠ ← لا تحلل .

المميز فقط نستخدم للعبارات التربيعية.

* اذا كان معامل س^٢ ≠ ١

نحاول التحليل بالأقواس أو القانون العام .

٢س^٢ − س − ٣ = ٠

(٢س − ٣)(س + ١) = ٠

س = ٣/٢ س = −١

٦س^٢ + ٧س − ٥ = ٠

(٢س + ٥)(٢س − ١) = ٠

س = −٥/٣ ، س = ١/٢

* عليك استخدام المميز والقانون العام

* اذا كانت المعادلة لا تحتوي حد مطلق "عدد ثابت لحاله"

نستخدم اخراج العامل المشترك .

✓ س^٢ − ٣س = ٠

س (س − ٢) = ٠

س = ٠ س = ٣

✓ ٥س^٢ + ٧س = ٠

س (٥س + ٧) = ٠

س = ٠ س = −٧/٥

✓ ٣س^٢ − ١٢س = ٠

س (٢س − ١٢) = ٠

س = ٠ ٢س − ١٢ = ٠

س = ٤

✓ ٥س^٢ − س = ٠

س (٥س − ١) = ٠

س = ٠ س = ١/٥

✓ ٢س^٢ − ٨س = ٠

س (٢س − ٨) = ٠

س = ٠ ، س = ٤

* اذا كانت المعادلة من الدرجة الثالثة فأكثر " نستخدم القسمة التركيبية ".

١. $ق(س) = س^{٣} + س^{٢} - ١٢$

الحل: بالتجريب $س = ١$ ✗

$س = ٢$ ✓

قسمة تركيبية

$س^{٣}$	$س^{٢}$	$س$	عدد
١	١	٠	-١٢
	٢	٦	١٢
١	٣	٦	٠

②

$س^{٢} + ٣س + ٦$

$\therefore ق(س) = (س - ٢)(س^{٢} + ٣س + ٦)$

٢. $ق(س) = س^{٤} - ٥س + ٤$

بالتجريب $س = ١$ ✓

قسمة تركيبية

$س^{٤}$	$س^{٣}$	$س^{٢}$	$س$	عدد
١	٠	٠	-٥	٤
	١	١	١	-٤
١	١	١	-٤	٠

①

$س^{٣} + س^{٢} + س - ٤$

$\therefore ق(س) = (س - ١)(س^{٣} + س^{٢} + س - ٤)$

ذكي جداً :-

$س^{٤} + س^{٢} - ٢ = ٠$

$(س^{٢} + ٢)(س^{٢} - ١) = ٠$

$س^{٢} = -٢$ ✗ ... $س^{٢} = ١$

$س = \pm ١$

$س^{٦} + ٢س^{٣} - ٣ = ٠$

$(س^{٣} + ٣)(س^{٣} - ١) = ٠$

$س^{٣} = -٣$ $\quad$ $س^{٣} = ١$

$س = \sqrt[٣]{-٣}$ $\quad$ $س = ١$

* * *

المتباينات :-

هي جمل رياضية تحتوي اشارة > أو < .

* خطوات الحل :-

١. نحول الى معادلة.
٢. نجد جذور المعادلة.
٣. نضع على خط الاعداد.
٤. نبحث الاشارات.
٥. نحدد مجموعة الحل حسب الاشارة
اذا كانت > . نأخذ الموجب.
اذا كانت < . نأخذ السالب.

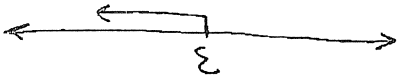
* المتباينة الخطية: يمكن حلها بطريقة أسرع حيث ننقل ونقسم على معامل س.

جد مجموعة حل المتباينات التالية:-

١. $٣س - ١٢ \leq ٠$

الحل: $٣س \leq ١٢$

$س \leq ٤$

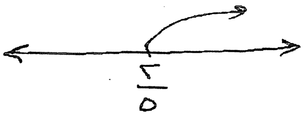


$\therefore$ مجموعة الحل $(-\infty ، ٤]$

٢. ٢ - ٥س < ٠

الحل: ٢ < ٥س

٢/٥ < س



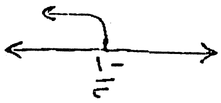
س ∈ (٢/٥ ، ∞)

٣. ٢ + ٤س ≤ ٠

الحل: ٤س ≤ -٢

س ≤ -٢/٤

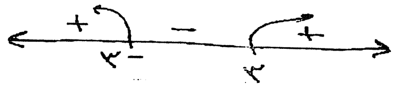
س ≤ -١/٢



س ∈ (-∞ ، -١/٢]

٤. س² - ٩ ≥ ٠

الحل: س² - ٩ = ٠ ← س = ∓٣



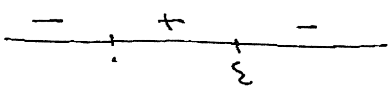
مجموعة الحل: س ≥ ٣ ، س ≤ -٣

٥. ٤س - س² > ٠

الحل: ٤س - س² = ٠

س(٤ - س) = ٠

س = ٠ ، س = ٤



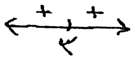
مجموعة الحل (٠ ، ٤)

٦. س² - ٦س + ٩ ≥ ٠

الحل: س² - ٦س - ٩ = ٠

(س - ٣)(س + ٣) = ٠

س = ٣   س = ٣

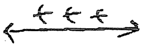


مجموعة الحل س ∈ ح

٧. س² + ٤ ≥ ٠

الحل: س² + ٤ = ٠

س² = -٤ مستحيل



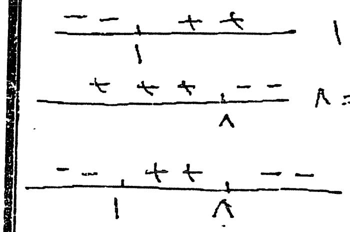
مجموعة الحل س ∈ ح .

٨. $\frac{س - ١}{٨ - س}$ ≥ ٠

الحل: س - ١ = ٠ ← س = ١

٨ - س = ٠ ← س = ٨

$\frac{س - ١}{٨ - س}$ ←



مجموعة الحل [١ ، ٨) أو ١ ≤ س < ٨

ملاحظة: جذور المقام تستثنى من مجموعة الحل لأنها تجعل المقام = ٠ وتصبح المقدار كاملاً غير معرف .

الاقتران النسبي :- . مهم جداً ...
تكون بسطه و مقامه كثيرات حدود

الاقتران الكسري :- . مهم كثير ...
عكس ان تكون بسطه او مقامه او كليهما ليس كثير حدود .

* $\frac{٣س - ١}{٢س - ٥}$ نسبي

* $\frac{٥س + ٧س^٢}{٢س + ١١}$ نسبي

* $\frac{\sqrt{س}}{س + ٥}$ كسري

* $\frac{س^٢ - ٥}{جاس}$ كسري

مجال الاقتران "هام جداً"

المجال: هو مجموعة قيم س التي تجعل الاقتران معرف.

* سندرس المجال في عدة حالات:

① . اذا كان ق كثير حدود فإن مجاله س $\in$ ح.

* س: حدد مجال الاقترانات التالية:

١. $ق(س) = \frac{٥}{٣}س^٢ - ٩س$

مجاله س $\in$ ح

٢. $ق(س) = ٩ - ٥س$

مجاله س $\in$ ح

② . اذا كان ق اقتران نسبي فإن مجاله س $\in$ ح − {اصفار المقام}

للتذكير: النسبي $= \frac{ك.ح}{ك.ح}$

* س: حدد مجال الاقترانات التالية:-

١. $ق(س) = \frac{س^٢ + ٥س - ٦}{س + ٢}$

الحل: اصفار المقام $س + ٢ = ٠$

$س = -٢$

∴ مجاله س $\in$ ح − {−٢}

٢. $ق(س) = \frac{٥}{س^٣ - ٩س}$

الحل: اصفار المقام $س^٣ - ٩س = ٠$

$س(س^٢ - ٩) = ٠$

$س = ٠$ $س = \mp ٣$

∴ مجاله س $\in$ ح − {٠، ٣، −٣}

٢. $ق(س) = \frac{٥س}{س^٢ + ١٦}$

الحل: $س^٢ + ١٦ = ٠$

$س^٢ = -١٦$ مستحيل

∴ مجاله س $\in$ ح

③ . الجذور الفردية:-

مجاله س $\in$ ح ، لانه يصح تحت الجذر الاعداد الموجبة والسالبة:

* حدد مجال الاقترانات:

١. $ق(س) = \sqrt[٣]{٥س}$ مجاله س $\in$ ح

٢. $ق(س) = \sqrt[٥]{س - س^٢}$ مجاله س $\in$ ح

٣. $ق(س) = \sqrt[٣]{\frac{٢س}{س - ١}}$ مجاله س $\in$ ح − {١}

④ . الجذور الزوجية:-

$ق(س) = \sqrt[زوجي]{هـ(س)}$

حتى يكون هذا الجذر معرف يجب ان يكون

$هـ(س) \geq$ صفر ونتبع

متباينة نقوم بحلها حسب ما تعلمناه سابقاً.

* س: حدد مجال الاقترانات التالية:-

١. $ق(س) = \sqrt{س - ٩}$

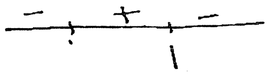
الحل: $س - ٩ \geq ٠$ ← $س \geq ٩$

∴ مجاله $[٩، \infty)$

٢. $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - \text{س}^2}$

الحل : $\text{س} - \text{س}^2 \geq ٠$

$\text{س} - \text{س}^2 = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠ ، \text{س} = ١$



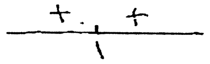
∴ مجاله $\text{س} \in [٠ ، ١]$

٣. $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2 - ٢\text{س} + ١}$

الحل : $\text{س}^2 - ٢\text{س} + ١ = ٠$

$(\text{س} - ١)(\text{س} - ١) = ٠$

$\text{س} = ١$

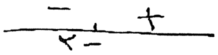


مجاله $\text{س} \in ح$

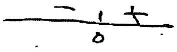
حلو
٤. $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٤]{\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ٥}}$

الحل : $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ٥} \geq ٠$ متباينة كسرية

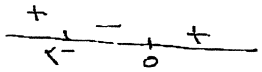
$\text{س} + ٢ = ٠ \Leftarrow \text{س} = -٣$



$\text{س} - ٥ = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٥$



$\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ٥} \Leftarrow$



∴ مجاله $\text{س} \in (٥ ، \infty) \cup (-\infty ، -٣]$

مهم حتى نحدد مجال اقترانين بينهما عملية + ، − ، × نجد تقاطع مجال الاقترانين " المنطقة المشتركة "

٥. $\text{ق}(\text{س}) = ٥\text{س}^2 - \sqrt[٣]{\text{س}}$

الحل : ٥س^2 كثير حدود مجاله $\text{س} \in ح$

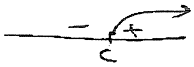
$\sqrt[٣]{\text{س}}$ جذر فردي مجاله $\text{س} \in ح$

∴ مجال $\text{ق}(\text{س})$ $\text{س} \in ح$

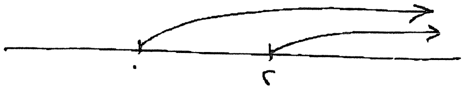
٦. $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} \times \sqrt{\text{س} - ٢}$

الحل : $\sqrt{\text{س}} \Leftarrow$ مجاله $\text{س} \geq ٠$

$\sqrt{\text{س} - ٢} \Leftarrow$ مجاله $\text{س} - ٢ \geq ٠$



الخط المشترك " التقاطع "



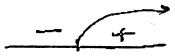
مجاله $\text{س} \geq ٢$

∴ $\text{س} \in [٢ ، \infty)$

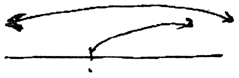
٧. $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س} - ١} \times \sqrt{\text{س}}$

الحل : $\sqrt[٣]{\text{س} - ١}$ مجاله $\text{س} \in ح$

$\sqrt{\text{س}}$ مجاله $\text{س} \geq ٠$



الخط المشترك " التقاطع "

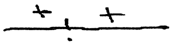


مجاله $\text{س} \geq ٠$

∴ $\text{س} \in [٠ ، \infty)$

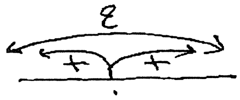
٨. $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2} - \frac{\text{س}^2 - ٧}{٩}$

الحل : $\sqrt{\text{س}^2}$ مجاله $\text{س}^2 \geq ٠$



$\frac{\text{س}^2 - ٧}{٩}$ مجاله ح

الخط المشترك " التقاطع "

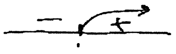


∴ مجاله $(-\infty ، \infty)$

∴ $\text{س} \in ح$

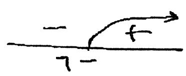
٩. $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} + \sqrt[٤]{\text{س} + ٦}$

الحل : $\sqrt{\text{س}}$ مجاله $\text{س} \geq ٠$

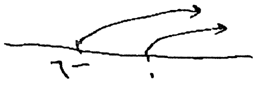


$\sqrt[٤]{\text{س} + ٦}$ مجاله $\text{س} + ٦ \geq ٠$

$\text{س} \geq -٦$



الخط المشترك " التقاطع "



∴ مجاله $\text{س} \geq ٠$

∴ مجاله $\text{س} \in [٠ ، \infty)$

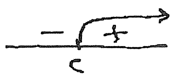
٥ . مجال الاقتران الكسري :-

مجال $\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}$ = مجال ق ∩ مجال هـ
ماعدا { أصفار المقام }

حدد مجال الاقترانات التالية :-

١ . $\text{ق(س)} = \frac{\sqrt{\text{س} - \text{٢}}}{\text{س} - \text{٥}}$

الحل : مجال البسط س - ٢ ≥ ٠
س ≥ ٢



مجال المقام س - ٥ هو س ∈ ح

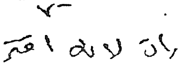
∴ مجال ق(س) هو
س ≥ ٢ ∩ ح - { ٥ }
لأن أصفار المقام تقع ضمن
الفترة س ≥ ٢

٢ . $\text{ق(س)} = \sqrt{\frac{\text{س} - \text{٢}}{\text{س} + \text{٧}}}$ مغالطة مشتركة

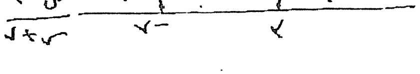
⟸ لا يجوز توزيع الجذر على البسط والمقام
⟸ يجب أن نتعامل مع داخل الجذر كما هو
$\frac{\text{س} - \text{٣}}{\text{س} + \text{٧}} \geq$ ٠ ، نبحث المجال المشترك حيث نقسم الخطوط والإشارات

س - ٢ = ٠ ⟸ س = ٢

س + ٧ = ٠ ⟸ س = -٧



الخط المشترك "دمج الإشارات لأنه اقتران موحد لا يجوز فصل كل مجال لوحده" .



∴ مجاله س ≥ ٢ أو س < -٧
طبعاً نستثني أصفار المقام

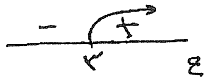
ملاحظة خطيرة جداً :-
لا يجوز الاختصار بين البسط والمقام عند بحث المجال .

٣ . $\text{ق(س)} = \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{س}}$

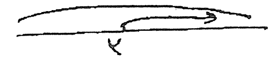
الحل : البسط س² كثير حدود مجاله س ∈ ح
المقام س كثير حدود مجاله س ∈ ح
ماعدا أصفار المقام س = ٠ .
∴ مجال ق(س) س ∈ ح - { ٠ }
لأن ق(٠) = ÷ غير معرف

٤ . $\text{ق(س)} = \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\sqrt{\text{س} - \text{٣}}}$

الحل : س² مجاله س ∈ ح
$\sqrt{\text{س} - \text{٣}}$ مجاله س - ٣ ≥ ٠ ،
س ≥ ٣



تقاطع المجالين



∴ المجال س > ٣ نستثني أصفار المقام
س ∈ (٢ ، ∞) .

٥ . $\text{ق(س)} = \frac{\text{٥س}^{\text{٢}} - \text{٣س}}{\frac{\text{٩}}{\text{س}}}$

الحل : (٥س² - ٣س) مجاله س ∈ ح
$\frac{\text{٩}}{\text{س}}$ مجاله س ∈ ح - { ٠ }
المجال المشترك س ∈ ح - { ٠ }

ملاحظة : $\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}} \neq (\sqrt{\text{س}})^{\text{٢}}$
لأن المجال مختلف

الاقترانات المثلثية و زوايا

المرجع :-

* زوايا المرجع هي ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°

س	$\frac{\pi}{٦}$ ٣٠°	$\frac{\pi}{٣}$ ٦٠°	٤٥° $\frac{\pi}{٤}$
جاس	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتاس	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظاس	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

* قاس = $\frac{١}{\text{جتاس}}$ ، قتاس = $\frac{١}{\text{جاس}}$

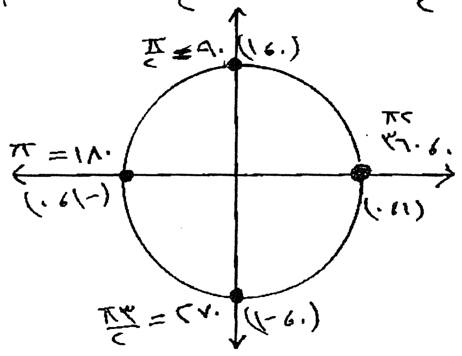
ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ، ظتاس = $\frac{١}{\text{ظاس}}$

ظتاس = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

* زوايا المحاور هي :-

{٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠}

{٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، π ، $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π}



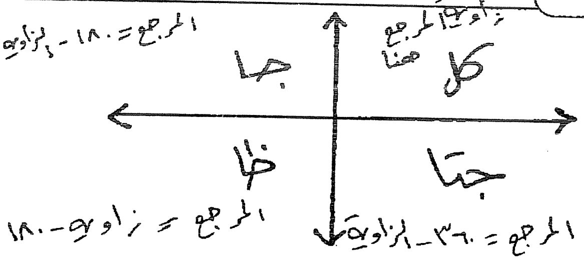
(جتاهـ ، جاهـ)

لاحظ جتا π = -١

جا $\frac{\pi}{٢}$ = ١

ظا ٢π = $\frac{\text{جا}\,٢\pi}{\text{جتا}\,٢\pi}$ = $\frac{٠}{١}$ = صفر ←

ظا $\frac{٣\pi}{٢}$ = $\frac{\text{جا}\,\frac{٣\pi}{٢}}{\text{جتا}\,\frac{٣\pi}{٢}}$ = $\frac{-١}{٠}$ غ. معرف

* 

* جد القيم التالية :-

١. جتا ٢١٠ = - جتا ٣٠

= $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢. ظا ٣٠٠ = - ظا ٦٠

= $-\sqrt{٣}$

٣. جا ٢٢٥ = - جا ٤٥

= $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$

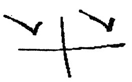
٤. ظا $\frac{٥\pi}{٦}$ = ظا ١٥٠ = - ظا ٣٠ = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$

" ~~~~ * ~~~~ * ~~~~ "

حل المعادلات المثلثية :-

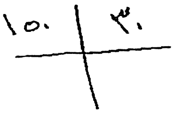
*. جد قيم س في الحالات التالية :-

أ. جاس = $\frac{١}{٢}$



الحل: نحدد الربع أولاً

نجد زاوية المرجع و مرادفها :



س = ٣٠ ، س = ١٥٠

لعدم وجود فترة يجب اضافة الحل العام

الدورة = $\frac{٢\pi}{|\text{معامل س}|}$ = $\frac{٢\pi}{١}$ = ٢π

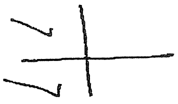
∴ س = ٣٠° + ٢π ن حيث ن ∈ ص⁺

س = ١٥٠ + ٢π ن

٢. جتا٣س = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

حيث س ∈ [٠، ٢π]

الحل: جتا يكون سالب في الربع الثاني والثالث



المرجع = ٣٠

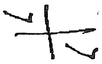
٣س = ١٥٠ ربع ثاني ، ٢س = ٢١٠ ثالث

س = ٥٠ ، س = ٧٠

تنتمي للفترة ✓ ، تنتمي للفترة ✓

٣. ظا $\frac{س}{٢}$ = -١ ، س ∈ [π، $\frac{٣π}{٢}$]

الحل: ظا يكون سالب ربع ثاني ورابع



المرجع = ٤٥°

$\frac{س}{٢}$ = ١٣٥ ثاني ، $\frac{س}{٢}$ = ٣١٥

س = ٢٧٠° ، س = ٦٣٠°

∈ للفترة ✓ ، ∉ للفترة

ملاحظة: عندما يكون جا أو جتا يساوي {٠، ١، -١} تكون زوايا محاور وعندما ظا يساوي {٠، ١، غير معرف} تكون زوايا محاور أيضاً.

٤. جا٢س = ٠ ←

الدورة = $\frac{٢π}{٢}$ = π

٢س = ٠ ، ٢س = π ، ٢س = ٢π

س = ٠ س = $\frac{π}{٢}$ س = π

∴ س = ٠ + πن

س = $\frac{π}{٢}$ + πن

س = π + πن

٥. جتا٢س = ٠ ←

الدورة = $\frac{٢π}{٢}$ = π

٢س = $\frac{π}{٢}$ ، ٢س = $\frac{٣π}{٢}$

س = $\frac{π}{٤}$ ، س = $\frac{٣π}{٤}$

∴ س = $\frac{π}{٤}$ + πن

س = $\frac{٣π}{٤}$ + πن

٦. جتا س = -١

الدورة = $\frac{٢π}{١}$ = ٢π

س = π

∴ س = π + ٢πن

٧. ظا س = صفر

الدورة = $\frac{٢π}{١}$ = ٢π

س = ٠ ، س = π ، س = ٢π

∴ س = ٠ + ٢πن

س = π + ٢πن

س = ٢π + ٢πن

اقتران القيمة المطلقة :-.

ص = |ق(س)|

اولاً : خواص القيمة المطلقة :-.

١. اذا كان |ق(س)| = أ حيث أ > ٠

فإن ق(س) = أ ، ق(س) = -أ

٢. اذا كان |ق(س)| ≤ أ

فإن -أ ≤ ق(س) ≤ أ

٣. اذا كان |ق(س)| ≥ أ

فإن ق(س) ≥ أ **أو** ق(س) ≤ -أ

٤. |أ × ب| = |أ| × |ب|

|أ/ب| = |أ| / |ب|

لكن |أ ∓ ب| ≠ |أ| ∓ |ب|

مثلاً |٥ + -٧| ≠ |٥| + |-٧|

٢ ≠ ١٢

مثال: جد حل المعادلة التالية :-.

١. |٣س - ٢| = ٧

الحل: ٣س - ٢ = ٧ أو ٣س - ٢ = -٧

٣س = ٩ ، ٣س = -٥

س = ٣ ، س = -٥/٣

٢. |٢س + ١| ≤ ٤

الحل: -٤ ≤ ٢س + ١ ≤ ٤

-٥ ≤ ٢س ≤ ٣

-٥/٢ ≤ س ≤ ٣/٢

∴ س ∈ [-٥/٢ ، ٣/٢]

٣. |٤ - ٢س| < ٦

الحل: -٦ < ٤ - ٢س < ٦

-٤ -٤ -٤

-١٠ < -٢س < ٢ ÷ -٢ تقلب المتباينة

٥ > س > -١

∴ س ∈ (-١ ، ٥)

٤. |٥ + ٢س| > ٣

الحل: ٥ + ٢س > ٣ أو ٥ + ٢س < -٣

٢س > -٢ ، ٢س < -٨

س > -١ ، س < -٤

∴ س ∈ (-١ ، ∞) ∪ (-∞ ، -٤)

٥. |٢ - س| > ٧

الحل: ٢ - س > ٧ أو ٢ - س < -٧

-س > ٥ ، -س < -٩

∴ س < -٥ ، س > ٩

∴ س ∈ (-∞ ، -٥) ∪ (٩ ، ∞)

٦. |٢ + س| ≥ ٢

الحل: ٢ + س ≥ ٢ أو ٣ + س ≤ -٢

س ≥ -١ ، س ≤ -٥

∴ س ∈ [-١ ، ∞) ∪ (-∞ ، -٥]

ثانياً: إعادة تعريف القيمة المطلقة.

الخطوات: ١. نجد جذر الاقتران الموجود داخل المطلق.

٢. نضع هذا الجذر على خط الأعداد ونبحث الإشارات.

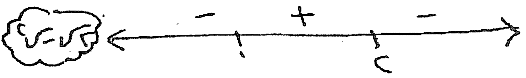
٣. نكتب الاقتران الجديد.

١. $ق(س) = |٢س - س^{٢}|$

أعد تعريف الاقتران.

الحل: $٢س - س^{٢} = ٠ \Leftarrow س(٢ - س) = ٠$

$\boxed{س = ٠}$ $\boxed{س = ٢}$



$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٢س ، & س \geq ٢ \\ ٢س - س^{٢} ، & ٠ < س < ٢ \\ س^{٢} - ٢س ، & س \leq ٠ \end{cases}$$

٢. $ق(س) = |س^{٣} + س|$

الحل: $س^{٣} + س = ٠ \Leftarrow س(س^{٢} + ١) = ٠$

$\boxed{س = ٠}$ $س^{٢} = -١$ مستحيل

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٣} + س ، & س \geq ٠ \\ -س^{٣} - س ، & س < ٠ \end{cases}$$

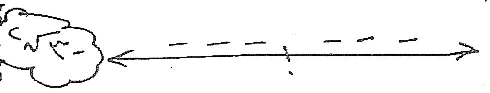
٢. $ق(س) = |س^{٢} + ٩|$

الحل: $س^{٢} + ٩ = ٠ \Leftarrow س^{٢} = -٩$ مستحيل

$\therefore ق(س) = س^{٢} + ٩$

٤. $ق(س) = |-٣ - س^{٢}|$

الحل: $-٣ - س^{٢} = ٠ \Leftarrow$ [illegible] $= ٠$



$ق(س) = +٣ + س^{٢}$

قوانين الأسس: -

* إذا كانت أ، ب $\in ح^{+}$ فإن

١. $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ مثلاً $٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}} = \frac{١}{٨}$

٢. $(أ^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$ مثلاً $(٢^{٣})^{٢} = ٢^{٦} = ٦٤$

٢. $س^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{س^{م}}$ مثلاً $س^{\frac{٣}{٥}} = \sqrt[٥]{س^{٣}}$

$\sqrt{س^{٥}} = س^{\frac{٥}{٢}}$ ، $\sqrt{س} = س^{\frac{١}{٢}}$

٤. $(أ \times ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$ ، ٥. $(\frac{أ}{ب})^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$

مثلاً: $(٩ \times ٣)^{٢} = ٩^{٢} \times ٣^{٢} = ٨١ \times ٩ = ٧٢٩$

: $(\frac{٢}{٣})^{٥} = \frac{٢^{٥}}{٣^{٥}} = \frac{٣٢}{٢٤٣}$

٥. $\sqrt[ن]{أ \times ب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$ ، حيث أ، ب > ٠.

٦. $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$

٧. $أ^{٠} = ١$ حيث $أ \neq ٠$.

خذي حذر: -

$\sqrt{أ + ب} \neq \sqrt{أ} + \sqrt{ب}$

مثلاً $\sqrt{٩ + ١٦} \neq \sqrt{٩} + \sqrt{١٦}$

$٥ \neq ٧$

اقتران أكبر عدد صحيح "علىاليسار"

[أ] : هو أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي أ.

[٢٫٩] = ٢ ، [٣٫١] = ٣ ، [٤٫٧] = ٤

[−١٫٩] = −٢ ، [−٢٫٢] = −٣ ، [$\frac{١}{٢}$] = ٠

لاحظ : الجواب دائماً صحيح سواء "موجب أو سالب.

يعني [صحيح] = نفسه

[كسر] = نأخذ أقرب عدد صحيح تحته "على يساره"

إعادة التعريف : [أ س + ب]

الخطوات : ١. نجد جذر الاقتران.

٢. نجد طول الدرجة

ل = $\frac{١}{|معامل\ س|}$

٣. نضع الجذر على خط الأعداد ونبدأ بإضافة وطرح طول الدرجة.

٤. حتى نعرف قاعدة الاقتران إذا كان معامل س موجب نفوض بداية الفترة ، وإذا كان معامل س سالب نفوض نهاية الفترة.

٥. إذا كان معامل س موجب نضع المساواة على اليمين وإذا كان معامل س سالب نضع المساواة على اليسار حيث نكتب الاقتران على صورة متشعب

* ق(س) = [٢س − ٣] ، س ∈ [٠ ، ٣]

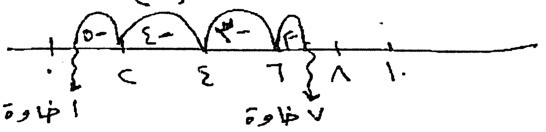
الحل : ٢س = ٣ ⟵ س = $\frac{٣}{٢}$ ، ل = $\frac{١}{|٢|}$ = $\frac{١}{٢}$

ق(س) = {
−٣ ، ٠ ≤ س < $\frac{١}{٢}$
−٢ ، $\frac{١}{٢}$ ≤ س < ١
−١ ، ١ ≤ س < ١٫٥
٠ ، ١٫٥ ≤ س < ٢
١ ، ٢ ≤ س < ٢٫٥
٢ ، ٢٫٥ ≤ س < ٣
٣ ، س = ٣

* ق(س) = [$\frac{١}{٢}$ س − ٥] ، س ∈ [١ ، ٧]

الحل : $\frac{١}{٢}$ س − ٥ = ٠ ⟵ س = ١٠

ل = $\frac{١}{|\frac{١}{٢}|}$ = ٢

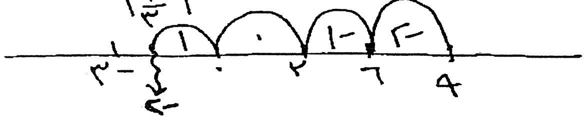


ق(س) = {
−٥ ، ١ ≤ س < ٢
−٤ ، ٢ ≤ س < ٤
−٣ ، ٤ ≤ س < ٦
−٢ ، ٦ ≤ س ≤ ٧

* ق(س) = [١ − $\frac{س}{٣}$] ، س ∈ [−٣ ، ٩]

الحل : ١ − $\frac{س}{٣}$ = ٠ ⟵ س = ٣

⟵ ل = $\frac{١}{|\frac{−١}{٣}|}$ = ٣



ق(س) = {
١ ، −٢ ≤ س ≤ ٠
٠ ، ٠ < س ≤ ٣
−١ ، ٣ < س ≤ ٦
−٢ ، ٦ < س ≤ ٩

خطر :- $\sqrt{س^{٢}}$ = |س|

لكن $(\sqrt{س})^{٢}$ = س

خطر جداً :- [س] ≤ س دائماً

س − [س] ≥ ٠ ، [س] − س ≤ ٠

|س − [س]| = س − [س]

|[س] − س| = س − [س]