* التطبيق الفيزيائي للمشتقة :-

ع : السرعة ت : التسارع ن : الزمن

ويمكن أن يرمز للمسافة بالرموز التالية : ف ، س ، ص ، ل ، م

السرعة: تعرف بأنها المسافة التي يقطعها الجسم في وحدة الزمن وهي نوعان :

أ) السرعة المتوسطة ⇐ $\text{ع} = \frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}(\text{ن}_2) - \text{ف}(\text{ن}_1)}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1}$

ب) السرعة اللحظية (المتغيرة) : $\text{ع}_\text{ن} = \lim_{\Delta \text{ن} \to 0} \frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} \Leftarrow \text{ع}_\text{ن} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}}$

* التسارع : يعرف بأنه مقدار التغير في السرعة في وحدة الزمن وهو نوعان :

أ) التسارع المتوسط ⇐ $\text{ت} = \frac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{ن}} \Leftarrow \text{ت} = \frac{\text{ع}(\text{ن}_2) - \text{ع}(\text{ن}_1)}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1}$

ب) التسارع اللحظي (المتغير) ⇐ $\text{ت}_\text{ن} = \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

قيمة ع

* استنتاج مهم مما تقدم : $\text{ت}_\text{ن} = \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{\text{د}}{\text{دن}}(\text{ع}) = \frac{\text{د}}{\text{دن}}\left(\frac{\text{دف}}{\text{دن}}\right)$

$\Leftarrow \boxed{\text{ت}_\text{ن} = \frac{\text{د}^2\text{ف}}{\text{دن}^2}}$

---

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة $\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^3 + \text{ن}^2$

1) احسب سرعة وتسارع الجسم عندما ن = 5

2) احسب السرعة المتوسطة والتسارع المتوسط في [1 ، 3]

الحل: $\text{ف} = \text{ن}^3 + \text{ن}^2$ ، $\text{ع} = 3\text{ن}^2 + 2\text{ن}$ ، $\text{ت} = 6\text{ن} + 2$

1) $\text{ع}(5) = 3(5)^2 + 2(5) = 75 + 10 = 85$ م/ث

$\text{ت}(5) = 6(5) + 2 = 32$ م/ث²

2) السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}(3) - \text{ف}(1)}{3 - 1} = \frac{36 - 2}{2} = 17$ م/ث

التسارع المتوسط $= \frac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ع}(3) - \text{ع}(1)}{3 - 1} = \frac{33 - 5}{2} = 14$ م/ث²

* **مثال:** يتحرك جسيم في المستوى الديكارتي بحيث كانت المسافة التي يقطعها (ف) متر تعطى بدلالة الزمن (ن) ثانية حسب المعادلة $ف = ن^٣ + ٦ن^٢ + ٥ن$

جد ما يلي:

١) سرعة الجسيم المتوسطة في الفترة [٢ ، ٥]

٢) سرعة الجسيم بعد أربع ثواني (عند ن = ٤)

٣) تسارع الجسيم المتوسط في الفترة [٢ ، ٥]

٤) تسارع الجسيم بعد (٣) ثواني (عند ن = ٣)

**الحل:** ١) السرعة المتوسطة $= \frac{Δف}{Δن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١} = \frac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢}$

$$= \frac{\left((٥)^٣ + ٦(٥)^٢ + ٥(٥)\right) - \left((٢)^٣ + ٦(٢)^٢ + ٥(٢)\right)}{٣} = \frac{٣٠٠ - ٤٢}{٣} = \frac{٢٥٨}{٣} = ٨٦ \text{ م/ث}$$

٢) $ع(٤) \Leftarrow ع_ن = \frac{دف}{دن} = ٣ن^٢ + ١٢ن + ٥$

$\Leftarrow ع(٤) = ٣(٤)^٢ + ١٢(٤) + ٥ = ٤٨ + ٤٨ + ٥ = ١٠١$ م/ث

٣) التسارع المتوسط $= \frac{Δع}{Δن} = \frac{ع(٥) - ع(٢)}{٥ - ٢} = \frac{\left(٣(٥)^٢ + ١٢(٥) + ٥\right) - \left(٣(٢)^٢ + ١٢(٢) + ٥\right)}{٣}$

$\Leftarrow$ التسارع المتوسط $= \frac{٩٩}{٣} = ٣٣$ م/ث$^٢$

٤) المطلوب $ت(٣) \Leftarrow ت_ن = \frac{دع}{دن} = ٦ن + ١٢$

$\Leftarrow ت(٣) = ٦(٣) + ١٢ = ٣٠$ م/ث$^٢$

---

**سؤال:** يتحرك جسيم حسب العلاقة $ف = \frac{١}{٣}ن^٣ - ٤ن^٢ + ٧ن + ١٢$ احسب التسارع عندما تنعدم السرعة.

$\boxed{\text{إرشاد:}}$ عندما تنعدم السرعة تعني عندما $\boxed{ع = ٠}$

نجد السرعة والتسارع ثم نساوي السرعة بالصفر لإيجاد قيمة (ن).

ثم نعوض: $ت(٧) = \dots$

$ت(١) = \dots$

الأستاذ عماد مسك ٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = جا$^{4}$ن احسب التسارع عندما تنعدم السرعة لأول مرة بعد بدء الحركة؟

الحل: ع = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٤جا$^{3}$ن جتان

ت = $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ٤جا$^{3}$ن × -جان + جتان × ١٢جا$^{2}$ن × جتان

= -٤جا$^{4}$ن + ١٢جا$^{2}$ن جتا$^{2}$ن

عندما تنعدم السرعة ⇐ ع = ٠ ⇐ ٤جا$^{3}$ن جتان = ٠

إما ٤جا$^{3}$ن = ٠ ⇐ جان = ٠ ⇐ ن = ٠ ، $\pi$ ، ٢$\pi$ ، ...

أو جتان = ٠ ⇐ ن = $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ، ...

نأخذ أصغر قيمة لـ(ن) بعد ن = ٠ ، فتكون $\boxed{\text{ن} = \frac{\pi}{2}}$

⇐ ت($\frac{\pi}{2}$) = -٤(١) + ١٢(١)(٠) = -٤ م/ث$^{2}$

---

مثال: تتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = ٤جا٣ن احسب تسارع الجسم عندما يكون قد قطع مسافة ٤م؟

الحل: ع = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٤جتا٣ن × ٣ = ٣ ٤جتا٣ن

⇐ ت = $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ٣ × ٤ × -جا٣ن × ٣ = -٩ $\underbrace{\text{٤جا٣ن}}_{\text{ف}}$ = -٩ × ف = -٩ × ٤ = -٣٦ م/ث$^{2}$

---

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = جان + جتان ، ن ∈ [٠ ، ٢$\pi$] احسب المسافة والتسارع عندما يكون الجسم في حالة سكون لحظي؟

الحل: ع = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = جتان - جان ، ت = $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = -جان - جتان

سكون لحظي (لحظي) تعني أن $\boxed{\text{ع} = ٠}$ ⇐ جتان - جان = ٠ ⇐ جتان = جان ⇐ ن = $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$

ف($\frac{\pi}{4}$) = جا$\frac{\pi}{4}$ + جتا$\frac{\pi}{4}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{2}{\sqrt{2}}$ = $\sqrt{2}$

ف($\frac{5\pi}{4}$) = جا$\frac{5\pi}{4}$ + جتا$\frac{5\pi}{4}$ = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ + $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{-2}{\sqrt{2}}$ = -$\sqrt{2}$ (الجيب والجتا في الربع الثالث سالبة)

ت($\frac{\pi}{4}$) = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ - $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{-2}{\sqrt{2}}$ = -$\sqrt{2}$

ت($\frac{5\pi}{4}$) = -($\frac{-1}{\sqrt{2}}$) - ($\frac{-1}{\sqrt{2}}$) = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{2}{\sqrt{2}}$ = $\sqrt{2}$

<u>مثال</u>: يتحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = أن^{٢} + ب ن$ فإذا كانت سرعة الجسم الابتدائية هي ٦ م/ث وتسارع الجسم هو ١٤ م/ث$^{٢}$ جد المسافة المقطوعة بعد ٣ ثواني من الحركة ؟

<u>الحل</u>: $ع_{ن} = ٢أن + ب$

تحدث السرعة الابتدائية عندما $\boxed{ن = ٠}$

$ع(٠) = ٢أ(٠) + ب = ب$ $\Leftarrow$ ومن السؤال $ع(٠) = ٦$

$\therefore \boxed{ب = ٦}$

$ت(ن) = \frac{دع}{دن} = ٢أ$ ومن السؤال $ت_{ن} = ١٤ \Leftarrow ٢أ = ١٤ \Leftarrow \boxed{أ = ٧}$

$\therefore ف = ٧ن^{٢} + ٦ن \Leftarrow ف(٣) = ٧(٣)^{٢} + ٦(٣) = ٨١$ م

---

<u>مثال</u>: يتحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = ٦ن^{٢} - ن^{٣}$

١) جد قيم ن التي تكون السرعة عندها موجبة

٢) جد تسارع الجسم عندما تكون سرعته تساوي ٩ م/ث

<u>الحل</u>: $ع_{ن} = \frac{دف}{دن} = ١٢ن - ٣ن^{٢}$ ندرس اشارة السرعة

$١٢ن - ٣ن^{٢} = ٠ \Leftarrow ٣ن(٤ - ن) = ٠ \Leftarrow \boxed{ن = ٠}$ أو $\boxed{ن = ٤}$

إشارة ع: $- - -$ ٠ $+ + +$ ٤ $- - -$

تكون ع موجبة في $(٠ ، ٤)$

---

٢) $ع_{ن} = ٩ \Leftarrow ١٢ن - ٣ن^{٢} = ٩$ بالقسمة على ٣

$\Leftarrow ٤ن - ن^{٢} = ٣ \Leftarrow ن^{٢} - ٤ن + ٣ = ٠ \Leftarrow (ن - ٣)(ن - ١) = ٠$

$\Leftarrow \boxed{ن = ٣}$ أو $\boxed{ن = ١}$

$\Leftarrow ت = \frac{دع}{دن} = ١٢ - ٦ن$

$\Leftarrow ت(٣) = ١٢ - ٦(٣) = -٦$ م/ث$^{٢}$

$\Leftarrow ت(١) = ١٢ - ٦(١) = ١٢ - ٦ = ٦$ م/ث$^{٢}$

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة $\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^2 + 3\text{ن}$ ، إذا كانت سرعة الجسم عندما $\text{ن} = 5$ تساوي السرعة المتوسطة في $[0، \text{أ}]$ جد أ ؟

الحل: $\text{ع}(\text{ن}) = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = 2\text{ن} + 3 \Leftarrow \text{ع}(5) = 2(5) + 3 = 13$ م/ث

السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}(\text{أ}) - \text{ف}(0)}{\text{أ} - 0} = \frac{\text{أ}^2 + 3\text{أ} - 0}{\text{أ}} = \frac{\cancel{\text{أ}}(\text{أ}+3)}{\cancel{\text{أ}}}$

$= \text{أ} + 3$

$\Leftarrow \text{أ} + 3 = 13 \Leftarrow \boxed{\text{أ} = 10}$

---

ملاحظة: الجسم يعكس اتجاه حركته عندما تتغير إشارة سرعته.

---

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة $\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^3 - 6\text{ن}^2 + 12\text{ن} + 4$ بين أن الجسم يتوقف لمرة واحدة فقط دون أن يغير اتجاه حركته.

الحل: $\text{ع}(\text{ن}) = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = 3\text{ن}^2 - 12\text{ن} + 12$ وبما أن الجسم يتوقف $\text{ع}(\text{ن}) = 0$

$\Leftarrow 3\text{ن}^2 - 12\text{ن} + 12 = 0$ بالقسمة على (3) $\Leftarrow \text{ن}^2 - 4\text{ن} + 4 = 0$

$\Leftarrow (\text{ن} - 2)(\text{ن} - 2) = 0 \Leftarrow \boxed{\text{ن} = 2}$

أي أن الجسم يتوقف مرة واحدة وهي عندما $\boxed{\text{ن} = 2}$

ندرس إشارة السرعة $\underset{2}{+++\,|\,+++}$ ع

وبما أن السرعة لم تتغير إشارتها حول $\boxed{\text{ن} = 2}$ لذلك يبقى الجسم متحركا في نفس الاتجاه.

---

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة $\text{ف}(\text{ن}) = \sqrt{\text{ن}}\,(48 - \text{ن})$ متى يبدأ الجسم بالعودة وجد المسافة المقطوعة عندئذ.

الحل: $\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{\frac{1}{2}}(48 - \text{ن}) = 48\text{ن}^{\frac{1}{2}} - \text{ن}^{\frac{3}{2}}$

$\text{ع}(\text{ن}) = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = 48 \times \frac{1}{2}\text{ن}^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\text{ن}^{\frac{1}{2}} = \frac{48}{2\text{ن}^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2}\text{ن}^{\frac{1}{2}}$

يبدأ الجسم بالعودة عندما $\text{ع}(\text{ن}) = 0 \Leftarrow \frac{48}{2\text{ن}^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2}\text{ن}^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftarrow \frac{48}{\cancel{2}\text{ن}^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{\cancel{2}}\text{ن}^{\frac{1}{2}}$

$\Leftarrow 48 = 3\text{ن} \Leftarrow \boxed{\text{ن} = 16}$ إشارة ع $\underset{16}{+++\,|\,---}$

وبما أن إشارة (ع) تتغير حول $\boxed{\text{ن} = 16}$ أي أن الجسم يبدأ بالعودة بعد 16 ثانية

$\Leftarrow \text{ف}(16) = \sqrt{16}\,(48 - 16) = 4 \times 32 = 128$ م

**مثال ٤** يتحرك جسيم في المستوى بحيث كانت المسافة التي يقطعها (س) بالأمتار ترتبط مع الزمن (ن) بالثواني حسب المعادلة: س = ٥ جا ٢ن ، ن ∈ $[0, \frac{\pi}{2}]$ جد :

١) سرعة الجسيم لحظة انعدام تسارعه
٢) تسارع الجسيم لحظة انعدام سرعته
٣) جد العلاقة بين تسارع الجسيم والمسافة التي يقطعها س ومن ثم جد تسارع الجسيم عندما س = ٢,٥ متر .

**الحل:** ع(ن) = $\frac{دس}{دن}$ ⟸ ع(ن) = ١٠ جتا ٢ن

ت(ن) = $\frac{دع}{دن}$ ⟸ ت(ن) = −٢٠ جا ٢ن

١) المطلوب: ع(ن) عندما ت(ن) = صفر ⟸ −٢٠ جا ٢ن = ٠ ⟸ جا ٢ن = ٠
⟸ ٢ن = ٠ ، π ، ٢π ، ... ⟸ ن = ٠ ، $\frac{\pi}{2}$ (لأنه الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$)

∴ ينعدم التسارع مرتين الأولى عند $\boxed{ن = ٠}$
⟸ ع(٠) = ١٠ جتا ٠ = ١٠(١) = ١٠ م/ث
والثانية عندما $\boxed{ن = \frac{\pi}{2}}$ ⟸ ع($\frac{\pi}{2}$) = ١٠ جتا π = ١٠(−١) = −١٠ م/ث
أي أنه الجسم أصبح يسير بعكس اتجاه الحركة الأولى .

---

٢) المطلوب: ت(ن) عندما ع(ن) = ٠
⟸ ع(ن) = ٠ ⟸ ١٠ جتا ٢ن = ٠ ⟸ جتا ٢ن = ٠ ⟸ ٢ن = $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ، ...
⟸ ن = $\frac{\pi}{4}$ ، $\cancel{\frac{3\pi}{4}}$ ، ... (لأنه الفترة من $[0, \frac{\pi}{2}]$)
ت($\frac{\pi}{4}$) = −٢٠ جا $\frac{\pi}{2}$ = −٢٠ م/ث² (تباطؤ) أي أنه الجسم يتباطأ

---

٣) س = ٥ جا ٢ن ، ت(ن) = −٢٠ جا ٢ن
⟸ $\frac{س}{ت}$ = $\frac{٥ جا ٢ن}{−٢٠ جا ٢ن}$ ⟸ $\frac{س}{ت}$ = −$\frac{1}{4}$ ⟸ $\boxed{ت = −٤س}$
وعندما س = ٢,٥ فإن ت = −٤(٢,٥) = −١٠ م/ث²

**سؤال:** تتحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = \sqrt{٢ن^{٢} + ١٨}$ احسب المسافة عندما تكون السرعة ١م/ث وجد التسارع عندئذ .

**إرشاد:** نشتق المسافة لإيجاد السرعة ونساوي السرعة بالعدد (١) لإيجاد ن
$ن = ٣ ، \cancel{-٣}$ نأخذ $\boxed{ن = ٣}$ ثم نشتق لإيجاد التسارع ونجد $ت(٣)$

---

**مثال:** تحرك جسمان معاً من نقطة واحدة الأول حسب العلاقة $ف_{١}(ن) = ن^{٣} + ٢ن + ١٢$ والثاني حسب العلاقة $ف_{٢}(ن) = \frac{٢}{٣}ن^{٣} + ٦ن + ٥$ ، احسب تسارع كل من الجسمين عندما يكون لهما نفس السرعة .

**الحل:** $ع_{١} = \frac{دف_{١}}{دن} = ٣ن^{٢} + ٢$ ، $ع_{٢} = \frac{دف_{٢}}{دن} = ٢ن^{٢} + ٦$

$ع_{١}(ن) = ع_{٢}(ن) \Leftarrow ٣ن^{٢} + ٢ = ٢ن^{٢} + ٦ \Leftarrow ن^{٢} = ٤ \Leftarrow \boxed{ن = ٢}$

$ت_{١}(ن) = \frac{دع_{١}}{دن} = ٦ن \Leftarrow ت_{١}(٢) = ٦(٢) = ١٢ م/ث^{٢}$

$ت_{٢}(ن) = \frac{دع_{٢}}{دن} = ٤ن \Leftarrow ت_{٢}(٢) = ٤(٢) = ٨ م/ث^{٢}$

---

**مثال:** من سطح بناية سقط جسم حسب العلاقة $ف_{١}(ن) = ٥ن^{٢}$ وبعد ثانية واحدة قذف جسم آخر رأسياً للأسفل من نفس المكان حسب العلاقة $ف_{٢}(ن) = ١٥ن + ٥ن^{٢}$ فوصل الجسمان معاً إلى الأرض، جد سرعة كل من الجسمين لحظة وصول الأرض وجد ارتفاع البناية .

**الحل:** اذا احتاج الجسم الثاني ن ثانية للوصول إلى الأرض فإن الأول يحتاج ن+١
وبما أن الجسمين قطعا نفس المسافة $\Leftarrow ف_{١}(ن + ١) = ف_{٢}(ن)$

$\Leftarrow ٥(ن + ١)^{٢} = ١٥ن + ٥ن^{٢} \Leftarrow ٥(ن^{٢} + ٢ن + ١) = ١٥ن + ٥ن^{٢}$

$\Leftarrow ٥ن^{٢} + ١٠ن + ٥ = ١٥ن + ٥ن^{٢} \Leftarrow ٥ن = ٥ \Leftarrow \boxed{ن = ١}$

∴ زمن الجسم الأول $ن + ١ = ١ + ١ = ٢$ ثانية ، زمن الجسم الثاني هو (١) ثانية

$ف_{١}(٢) = ٥(٢)^{٢} = ٢٠ م$ ، $ف_{٢}(١) = ١٥(١) + ٥(١)^{٢} = ٢٠ م$

∴ ارتفاع البناية = ٢٠ م

$ع_{١}(ن) = ١٠ن \Leftarrow ع_{١}(٢) = ١٠(٢) = ٢٠ م/ث$ سرعة الجسم الأول

$ع_{٢}(ن) = ١٥ + ١٠ن \Leftarrow ع_{٢}(١) = ١٥ + ١٠(١) = ٢٥ م/ث$ سرعة الجسم الثاني

سؤال: من سطح بناية سقط جسم حسب العلاقة $\text{ف}_1(\text{ن}) = ١٦\text{ن}^2$ وفي نفس اللحظة رمى شخص ثاني جسماً رأسياً لأسفل حسب العلاقة $\text{ف}_2(\text{ن}) = ٢٠\text{ن} + ١٦\text{ن}^2$ فإذا وصل الجسم الأول بعد $\frac{1}{2}$ ثانية من وصول الجسم الثاني جد ارتفاع البناية وجد سرعة كل من الجسمين لحظة وصول الأرض.

إرشاد: اذا وصل الجسم الثاني بعد (ن) ثانية فإن الأول يصل بعد $(\text{ن} + \frac{1}{2})$ ثانية

$\Leftarrow \text{ف}_1(\text{ن} + \frac{1}{2}) = \text{ف}_2(\text{ن})$ ثم نجد (ن) — — $\boxed{\text{ن} = ١}$ الجسم الثاني

$\boxed{\text{ن} = ١ + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}}$ الجسم الأول

ثم نجد $\text{ف}_1(\text{ن})$ ، $\text{ف}_2(\text{ن})$ (ارتفاع البناية)

ثم نجد $\text{ع}_1(\text{ن})$ ، $\text{ع}_2(\text{ن})$ بعد اشتقاق المسافة الأولى والثانية.

---

مثال: يتحرك جسم في المستوى بحيث كانت سرعته (ع) م/ث ترتبط مع المسافة التي يقطعها ف بالأمتار حسب المعادلة $\text{ع}^2 = ٨١ - ٢٠\text{ف}$ جد تسارع الجسم وسجل ملاحظاتك.

الحل: المطلوب: ت(ن) ؟؟ $\text{ت}(\text{ن}) = \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

$\text{ع}^2 = ٨١ - ٢٠\text{ف}$ نشتق الطرفين بالنسبة إلى (ن) (اشتقاق ضمني)

$٢\text{ع} \underbrace{\frac{\text{دع}}{\text{دن}}}_{\text{ت}} = ٠ - ٢٠ \underbrace{\frac{\text{دف}}{\text{دن}}}_{\text{ع}} \Leftarrow ٢\text{ع ت} = -٢٠\text{ع}$

$\Leftarrow \text{ت} = \frac{-٢٠\cancel{\text{ع}}}{٢\cancel{\text{ع}}} = -١٠ \text{ م/ث}^2$ (نلاحظ أن الجسم يتحرك بتسارع ثابت لأنه لا يعتمد)

---

مثال: من ارتفاع ١٠٠م سقط جسم حسب العلاقة $\text{ف}_1(\text{ن}) = ٥\text{ن}^2$ وفي نفس الوقت قذف جسم من سطح الأرض رأسياً للأعلى حسب العلاقة $\text{ف}_2(\text{ن}) = ٥٠\text{ن} - ٥\text{ن}^2$ جد سرعة كل من الجسمين عندما يكون لهما نفس الارتفاع عن سطح الأرض؟

الحل: بما أن لهما نفس الارتفاع عن سطح الأرض يكون مجموع المسافتين = المسافة الكلية:

أي أن $\text{ف}_1 + \text{ف}_2 = ١٠٠ \Leftarrow \cancel{٥\text{ن}^2} + ٥٠\text{ن} - \cancel{٥\text{ن}^2} = ١٠٠ \Leftarrow ٥٠\text{ن} = ١٠٠ \Leftarrow \boxed{\text{ن} = ٢}$

$\text{ع}_1(\text{ن}) = \frac{\text{دف}_1}{\text{دن}} = ١٠\text{ن} \Leftarrow \text{ع}_1(٢) = ١٠(٢) = ٢٠ \text{ م/ث}$

$\text{ع}_2(\text{ن}) = \frac{\text{دف}_2}{\text{دن}} = ٥٠ - ١٠\text{ن} \Leftarrow \text{ع}_2(٢) = ٥٠ - ١٠(٢) = ٥٠ - ٢٠ = ٣٠ \text{ م/ث}$

* ملاحظة : يصل الجسم المقذوف رأسياً لأعلى أقصى ارتفاع عندما تصبح سرعته تساوي صفر ثم يعود إلى الأرض

**مثال:** قذف جسم رأسياً إلى أعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٤٠ن − ٥ن²

1) جد أقصى ارتفاع يصله الجسم
2) جد سرعة الجسم وهو على ارتفاع ٦٠ م
3) متى تصبح سرعة الجسم مساوية لنصف سرعته الابتدائية
4) جد قيم ن التي تكون السرعة عندها موجبة
5) متى يعود الجسم إلى الأرض

الأستاذ عماد مسك ٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

**الحل:** 1) عند أقصى ارتفاع ع(ن) = ٠ ⟸ ع(ن) = ٤٠ − ١٠ن

٤٠ − ١٠ن = ٠ ⟸ ٤٠ = ١٠ن ⟸ ن = ٤

∴ أقصى ارتفاع هو ف(٤) = ٤٠(٤) − ٥(٤)² = ١٦٠ − ٨٠ = ٨٠ م

---

2) ف(ن) = ٤٠ن − ٥ن² ⟸ وعلى ارتفاع ٦٠ فإن ٦٠ = ٤٠ن − ٥ن²

⟸ ٥ن² − ٤٠ن + ٦٠ = ٠ ⟸(÷٥) ن² − ٨ن + ١٢ = ٠ ⟸ (ن − ٦)(ن − ٢) = ٠

⟸ ن = ٦ أو ن = ٢

⟸ ع(٦) = ٤٠ − ١٠(٦) = −٢٠ م/ث ، ع(٢) = ٤٠ − ١٠(٢) = ٢٠ م/ث

---

3) السرعة الابتدائية عند ن = ٠ ⟸ ع(٠) = ٤٠ − ١٠(٠) = ٤٠

السرعة الابتدائية

⟸ تكون سرعة الجسم مساوية لنصف سرعته الابتدائية تعني:

ع(ن) = ½ × ٤٠ ⟸ ٤٠ − ١٠ن = ٢٠ ⟸ ٢٠ = ١٠ن ⟸ ن = ٢ ثانية

---

4) ندرس إشارة السرعة ⟸ ع(ن) = ٤٠ − ١٠ن ⟸ ٤٠ − ١٠ن = ٠

⟸ ن = ٤

إشارة ع: + + + (٤) − − − − −

قيم ن

⟸ ع > ٠ في [٠ ، ٤)

---

5) عندما يعود الجسم إلى الأرض تصبح ف(ن) = ٠

⟸ ٤٠ن − ٥ن² = ٠ ⟸ ٥ن(٨ − ن) = ٠ ⟸ ن = ٠ (مرفوضة) أو ن = ٨

∴ يعود الجسم إلى الأرض عندما ن = ٨

**سؤال:** من قمة برج ارتفاعه ٢٢٠م قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٦٠ن − ٥ن٢

١) جد أقصى ارتفاع يصله الجسم عن قمة البرج وعن سطح الأرض. ف(٦) = ١٨٠ ، ف = ١٨٠ + ٢٢٠

٢) جد الزمن اللازم حتى يصل الجسم إلى الأرض ——— $\boxed{ن = ١٠}$

٣) جد سرعة الجسم لحظة وصوله الأرض ——— ع(١٠) = −٩٠ م/ث

---

**مثال:** من قمة برج ارتفاعه ١٠٠م قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة ف(ن) = م ن − ٥ن٢ ، حيث م > ٠ ، وكانت سرعة الجسم لحظة الوصول الى الأرض تساوي −٦٠م/ث جد م ؟

**الحل:** المسافة عن الأرض ⟸ ف(ن) = م ن − ٥ن٢ + ١٠٠

⟸ ع(ن) = دف/دن = م − ١٠ن ⟸ م − ١٠ن = −٦٠ ⟸ م = ١٠ن − ٦٠

وعند الوصول إلى الأرض تكون ف(ن) = ٠

⟸ م ن − ٥ن٢ + ١٠٠ = صفر ⟸ (١٠ن − ٦٠) ن − ٥ن٢ + ١٠٠ = ٠

⟸ ١٠ن٢ − ٦٠ن − ٥ن٢ + ١٠٠ = ٠ ⟸ ٥ن٢ − ٦٠ن + ١٠٠ = ٠ نقسم على ٥

⟸ ن٢ − ١٢ن + ٢٠ = ٠ ⟸ (ن − ١٠)(ن − ٢) = ٠ ⟸ $\boxed{ن = ١٠}$ أو $\boxed{ن = ٢}$

عندما $\boxed{ن = ١٠}$ ⟸ م = ١٠(١٠) − ٦٠ = ٤٠

عندما $\boxed{ن = ٢}$ ⟸ م = ١٠(٢) − ٦٠ = −٤٠

نأخذ قيمة $\boxed{م = ٤٠}$

---

**مثال:** من قمة بناية قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٤٠ن − ٥ن٢ فإذا وصل الجسم الى الأرض بسرعة ٥٠م/ث جد ارتفاع البناية .

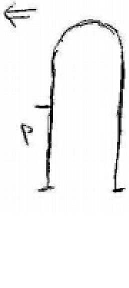
**الحل:** نفرض ارتفاع البناية هو م ⟸ ف عن الأرض ⟸ ف(ن) = ٤٠ن − ٥ن٢ + م

ع(ن) = دف/دن = ٤٠ − ١٠ن ⟸ ٤٠ − ١٠ن = −٥٠ ⟸ ٩٠ = ١٠ن ⟸ $\boxed{ن = ٩}$

(وضعنا ع(ن) = −٥٠ لأن الجسم وصل الأرض وهو هابط بعكس اتجاه الحركة الأصلي للأعلى)

∴ ف(٩) = صفر ⟸ ٤٠(٩) − ٥(٩)٢ + م = ٠

⟸ ٣٦٠ − ٤٠٥ + م = ٠ ⟸ −٤٥ = −م ⟸ $\boxed{م = ٤٥}$



**مثال:** من قمة برج ارتفاعه ٦٠ م قذف جسم رأسياً للأعلى حسب العلاقة ف١(ن) = ٢٠ن − ٥ن$^{٢}$ ومن سطح الأرض قذف جسم آخر رأسياً للأعلى حسب العلاقة ف٢(ن) = أن − ٥ن$^{٢}$ ، فإذا كان لهما نفس أقصى ارتفاع جد أ ؟

**الحل:** ع١(ن) = ٢٠ − ١٠ن ⇐ ٢٠ − ١٠ن = ٠ ⇐ ٢٠ = ١٠ن ⇐ $\boxed{ن = ٢}$

أقصى ارتفاع عن قمة البرج ف١(٢) = ٢٠(٢) − ٥(٢)$^{٢}$ = ٢٠ م

أقصى ارتفاع عن سطح الأرض = ٦٠ + ٢٠ = ٨٠ م

أما للجسم الثاني: ع٢(ن) = أ − ١٠ن ⇐ أ − ١٠ن = ٠ ⇐ $\boxed{أ = ١٠ن}$

⇐ ف٢(ن) = أن − ٥ن$^{٢}$ ⇐ أن − ٥ن$^{٢}$ = ٨٠ نعوض قيمة أ

⇐ (١٠ن)(ن) − ٥ن$^{٢}$ = ٨٠ ⇐ ١٠ن$^{٢}$ − ٥ن$^{٢}$ = ٨٠ ⇐ ٥ن$^{٢}$ = ٨٠ ⇐ ن$^{٢}$ = ١٦

⇐ ن = ٤ ، ~~−٤~~ ⇐ $\boxed{ن = ٤}$ ∴ $\boxed{أ = ١٠ × ٤ = ٤٠}$

---

**مثال:** يتحرك جسم بحيث أن ع$^{٢}$ = ف$^{٣}$ احسب التسارع عندما تكون السرعة = ٨ م/ث

**الحل:** نشتق ضمنياً ⇐ ٢ع (دع/دن) = ٣ف$^{٢}$ (دف/دن)

⇐ ٢~~ع~~ت = ٣ف$^{٢}$ ~~ع~~ ⇐ ٢ت = ٣ف$^{٢}$ ⇐ $\boxed{ت = \frac{٣}{٢} ف^{٢}}$

وعندما ع = ٨ ⇐ (٨)$^{٢}$ = ف$^{٣}$ (من السؤال) ⇐ ف$^{٣}$ = ٦٤ ⇐ $\boxed{ف = ٤}$

∴ ت = $\frac{٣}{٢}$ف$^{٢}$ ⇐ ت = $\frac{٣}{٢}$ (١٦) = ٢٤ م/ث$^{٢}$

---

**مثال:** يتحرك جسم بحيث أن ع$^{٢}$ = ١ − ف$^{٣}$ جد تسارع الجسم في حالة السكون اللحظي

**الحل:** نشتق ضمنياً ⇐ ٢ع (دع/دن) = −٣ف$^{٢}$ (دف/دن) ⇐ ٢~~ع~~ت = −٣ف$^{٢}$ ~~ع~~

⇐ ٢ت = −٣ف$^{٢}$ ⇐ $\boxed{ت = \frac{-٣}{٢} ف^{٢}}$

وعندما يكون الجسم في حالة سكون لحظي ⇐ ع(ن) = ٠ نعوض في معادلة السؤال

⇐ (٠)$^{٢}$ = ١ − ف$^{٣}$ ⇐ ف$^{٣}$ = ١ ⇐ $\boxed{ف = ١}$

∴ $\boxed{ت = \frac{-٣}{٢} (١)^{٢} = \frac{-٣}{٢}}$

مثال: قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة $ف(ن) = أن + ب ن^{2}$ بسرعة ابتدائية ٤٠ م/ث، فإذا كان أقصى ارتفاع وصله الجسم هو ٨٠ م، جد أ، ب

الحل: $ع(ن) = أ + ٢ب ن$

سرعة الابتدائية ٤٠ م/ث $\Leftarrow ع(٠) = ٤٠$

$\Leftarrow أ + ٢ب(٠) = ٤٠$

$\Leftarrow \boxed{أ = ٤٠}$

$\therefore ف(ن) = ٤٠ن + ب ن^{2}$

وعند أقصى ارتفاع تكون $ع(ن) = ٠ \Leftarrow ٠ = ٤٠ + ٢ب ن$

$\Leftarrow ٢ب ن = -٤٠ \Leftarrow \boxed{ب = \frac{-٢٠}{ن}}$

$\therefore ف(ن) = ٤٠ن + \left(\frac{-٢٠}{ن}\right) ن^{2} \Leftarrow ٨٠ = ٤٠ن - ٢٠ن$

$\Leftarrow ٨٠ = ٢٠ن \Leftarrow \boxed{ن = ٤}$

$\therefore ب = \frac{-٢٠}{٤} \Leftarrow \boxed{ب = -٥}$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩