التكامل

تعريف : ليكن ق اقتران متصل على الفترة [أ،ب] نقول عن الاقتران م(س) انه اقتران ابتدائي للاقتران ق اذا تحقق م′(س) = ق(س) لاجل كل س∋(أ،ب)

نتيجة كل اقتران من الشكل ل(س) = م(س)+جـ هو اقتران ابتدائي للاقتران ق

اصبحنا ندعو الاقتران ل(س) = م(س)+جـ معكوسة المشتقة للاقتران ق(س)

مثال الاقتران م(س) = س³+جتاس+١ هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = ٣س²−جاس

لان م′(س) = ق(س) والاقتران ق(س) = ٣س²−جاس متصل على ح

ندعى الاقتران م(س) معكوسة لمشتقة الاقتران ق(س) على الفترة [أ،ب]
بالتكامل غير المحدد للقتران ق(س) ويرمز له ب

$$\boxed{م(س) = \int ق(س)\, ءس}$$

وندعو $\int$ إشارة التكامل غير المحدد ق(س) الاقتران المكامل ءس العنصر التفاضلي

<u>نتائج</u>

١- $\int م'(س)\, ءس = م(س) + جـ$

٢- $\frac{ء}{ءس}\left(\int ق(س)\, ءس\right) = ق(س)$

التكامل والتفاضل عمليتان متعاكستان (كذلك الاشتقاق والاقتران الابتدائي متعاكستان)

مثال :

اذا كان $\int ق(س)\, ءس = س^{٢} - ٣س + ١$ جد ق(٢) ، ق′(٢)

الحل : نشتق الطرفين

$$\frac{ء}{ءس}\left(\int ق(س)\, ءس\right) = \frac{ء}{ءس}\left(س^{٢} - ٣س + ١\right)$$

$ق(س) = ٢س - ٣$

$ق(٢) = ٢(٢) - ٣ = -١$

$ق'(س) = ٢$

$ق'(٢) = ٢$

مثال : اذا كان $\int \left(ق'(س) + ٢س\right) ءس = س^{٣} + أس^{٢} + ١$ وكان ق(٢)=٧ ، ق′(١) = ٥

جد قيمة أ و ق(٠) ، ق′(٤)

الحل نشتق الطرفين نجد

$ق'(س) + ٢س = ٣س^{٢} + ٢أس$

$ق'(١) + ٢(١) = ٣(١)^{٢} + ٢أ(١)$

$٥ + ٢ = ٣ + ٢أ$

$٢ = أ$

نكامل الطرف الاول نجد

$$\int \left(\text{ق}'(\text{س}) + ٢\text{س}\right) \text{ءس} = \text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} + ١$$

$$\text{ق}(\text{س}) + \text{س}^{٢} = \text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} + ١$$

$$\text{ق}(٠) + ٠^{٢} = ٠^{٣} + ٢\,٠^{٢} + ١$$

$$\text{ق}(٠) = ١$$

$$\text{ق}'(\text{س}) + ٢\text{س} = ٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س}$$

$$\text{ق}'(٤) + ٢\times٤ = ٣\times٤^{٢} + ٤\times٤$$

$$\text{ق}'(٤) + = ٥٦$$

جدول التكاملات

$$\int (٠)\,\text{ءس} = \text{جـ}$$

$$\int \text{أ}\,\text{ءس} = \text{أس} + \text{جـ}$$

$$\int \text{أس}^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \text{أ}\frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ} \quad \text{،} \quad \text{ن} \neq -١$$

$$\int \text{جاس}\,\text{ءس} = -\text{جتاس} + \text{جـ}$$

$$\int \text{جتاس}\,\text{ءس} = \text{جاس} + \text{جـ}$$

$$\int (١ + \text{ظا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس} = \int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} = \text{ظاس} + \text{جـ}$$

$$\int (١ + \text{ظتا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس} = \int \text{قتا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} = -\text{ظتاس} + \text{جـ}$$

$$\int \text{قاس ظاس}\,\text{ءس} = \text{قاس} + \text{جـ}$$

$$\int \text{قتاس ظتاس}\,\text{ءس} = -\text{قتاس} + \text{جـ}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$$

$\text{هـ} = ٢٫٧١٨٢٨$ يدعى العدد النيبري ويرمز له في

$$\int \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$$

المراجع (e)

ملاحظة : تكتب الجذور والكسور كقوى الأس فيها عدد نسبي

$\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}^{\text{هـ}}} = \text{ب}^{\frac{\text{هـ}}{\text{ن}}}$ و $\text{ب}^{-\text{ن}} = \frac{١}{\text{ب}^{\text{ن}}}$ كما يحول حاصل الضرب إلى مجموع إذا أمكن ذلك

قواعد التكامل غير المحدد

(١-) $\int \text{أق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{أ}\int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$ أ ثابت حقيقي

(٢-) $\int \left(\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\right)\text{ءس} = \int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} + \int \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس}$

تدريبات : اوجد تكامل كل من الاقتران التالية

١- $$\int ٢\,ءس = ٢س + جـ$$

٢- $$\int ٢س^{٣}\,ءس = ٢\frac{س^{٤}}{٤} + جـ$$

٣- $$\int \sqrt{س}\,ءس = \int س^{\frac{١}{٢}}\,ءس = \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

٤- $$\int \frac{٢}{س^{٢}}\,ءس = \int ٢س^{-٢}\,ءس = ٢\frac{س^{-١}}{-١} + جـ$$

٥- $$\int \sqrt[٥]{س^{٢}}\,ءس = \int س^{\frac{٢}{٥}}\,ءس = \frac{س^{\frac{٧}{٥}}}{\frac{٧}{٥}} + جـ$$

٦- $$\int \frac{٢س}{\sqrt[٣]{س}}\,ءس = \int ٢س\,س^{-\frac{١}{٣}}\,ءس = \int ٢س^{\frac{٢}{٣}}\,ءس = \frac{٢س^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣}} + جـ$$

٧- $$\int \left(٢ + س - ٤س^{٣}\right)ءس = ٢س + \frac{١}{٢}س^{٢} - س^{٤} + جـ$$

٨- $$\int (٢ - س)\sqrt{س}\,ءس = \int \left(٢س^{\frac{١}{٢}} - س^{\frac{٣}{٢}}\right)ءس = ٢\frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} - \frac{س^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} + جـ$$

٩- $$\int \frac{٢س + \sqrt{س}}{س}\,ءس = \int \left(٢ + س^{\frac{-١}{٢}}\right)ءس = ٢س + ٢\sqrt{س} + جـ$$

١٠- $$\int \left(س^{٢} + ١\right)^{٢}ءس = \int \left(س^{٤} + ٢س^{٢} + ١\right)ءس = \frac{١}{٥}س^{٥} + \frac{٢}{٣}س^{٣} + س + جـ$$

١١- $$\int \frac{س^{٢} - ٤س}{س}\,ءس = \int (س - ٤)\,ءس = \frac{١}{٢}س^{٢} - ٤س + جـ$$

١٢- $$\int ٢جا\frac{س}{٢}جتا\frac{س}{٢}\,ءس = \int جاس\,ءس = -جتاس + جـ$$

١٣- $$\int \left(٢ - جتاس\right)ءس = ٢س - جاس + جـ$$

١٤- $$\int \frac{١}{١ + جتا٢س}\,ءس = \int \frac{١}{٢جتا^{٢}س}\,ءس = \int \frac{١}{٢}قا^{٢}س\,ءس = \frac{١}{٢}ظاس + جـ$$

١٥- $$\int \frac{١ - جا^{٢}س}{جا^{٢}\frac{س}{٢}جتا^{٢}\frac{س}{٢}}\,ءس = \int \frac{جتا^{٢}س}{\left(جا\frac{س}{٢}جتا\frac{س}{٢}\right)^{٢}}\,ءس = \int \frac{جتا^{٢}س}{\frac{١}{٤}جا^{٢}س}\,ءس = \int ٤ظتا^{٢}س\,ءس$$

$$= \int ٤\left(قتا^{٢}س - ١\right)ءس = ٤\left(-ظتاس - س\right) + جـ = -٤ظتاس - س + جـ$$

التكامل بالتعويض (تغير المتحول)

ملاحظة : قد يكون لدينا تكامل اقتران هو حاصل ضرب اقترانيين احدهما مشتق الآخر من الشكل

$$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{ق}^{\text{ن}}(\text{س})\,\text{دس}$$

هنا نفرض ص = ق(س) اذا $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}'(\text{س})$ وبالتالي $\text{دص} = \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس}$

$$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{ق}^{\text{ن}}(\text{س})\,\text{دس} = \int \text{ص}^{\text{ن}}\,\text{دص} = \frac{\text{ص}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{جـ}$$

وتطبق هذه الطريقة على كل من

$$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{هـ}^{\text{ق}(\text{س})}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\,\text{دس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{2\sqrt{\text{ق}(\text{س})}}\,\text{دس} = \sqrt{\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{جا}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -\text{جتا}\,\text{ص} + \text{جـ}$$

$$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{جتا}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{جا}\,\text{ص} + \text{جـ}$$

$$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{قا}^2\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{ظا}\,\text{ص} + \text{جـ}$$

$$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{قتا}^2\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -\text{ظتا}\,\text{ص} + \text{جـ}$$

$$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{قا}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{ظا}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{قا}\,\text{ص} + \text{جـ}$$

$$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{قتا}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{ظتا}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -\text{قتا}\,\text{ص} + \text{جـ}$$

حيث ص = ق(س)

وتطبق على كل من (بشرط أساسي س من الدرجة الأولى)

$$\int (\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{دس} = \frac{\text{ص}^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)} + \text{جـ}$$

$$\int \text{جا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{دس} = -\frac{1}{\text{أ}}\text{جتا}\,\text{ص} + \text{جـ}$$

$$\int \text{جتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{دس} = \frac{1}{\text{أ}}\text{جا}\,\text{ص} + \text{جـ}$$

$$\int \text{قا}^2(\text{أس}+\text{ب})\,\text{دس} = \frac{1}{\text{أ}}\text{ظا}\,\text{ص} + \text{جـ}$$

$$\int \text{قتا}^2(\text{أس}+\text{ب})\,\text{دس} = -\frac{1}{\text{أ}}\text{ظتا}\,\text{ص} + \text{جـ}$$

$$\int \text{قا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ظا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{دس} = \frac{1}{\text{أ}}\text{قا}\,\text{ص} + \text{جـ}$$

$$\int \text{قتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ظتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{دس} = -\frac{1}{\text{أ}}\text{قتا}\,\text{ص} + \text{جـ}$$

$$\int هـ^{(أس+ب)} ءس = \frac{1}{أ} هـ^{ص} + جـ$$

$$\int \frac{1}{أس+ب} ءس = \frac{1}{أ} لـو_{هـ} |أس+ب| + جـ$$

وتطبق على كل من الاقترانات المركبة مثل

جاهـ(س)،جتاهـ(س)،ظاهـ(س)،ظتاهـ(س)،قاهـ(س)،قتاهـ(س)،هـ $^{هـ(س)}$،لـوهـ(س)

ملاحظة

من اجل تكامل حاصل ضرب نسبتين مثلثيتين نستخدم قوانين التحويل من ضرب الى مجموع وهي

$$جاجـ جاء = -\frac{1}{2}\left[جتا(جـ+ء) - جتا(جـ-ء)\right]$$

$$جتاجـ جتاء = \frac{1}{2}\left[جتا(جـ+ء) - جتا(جـ-ء)\right]$$

$$جاجـ جتاء = \frac{1}{2}\left[جا(جـ+ء) + جا(جـ-ء)\right]$$

$$جتاجـ جاء = \frac{1}{2}\left[جا(جـ+ء) - جا(جـ-ء)\right]$$

من اجل تكاملات مربعات النسب المثلثية نستخدم قوانين ضعفي الزاوية

$$جا^{2}\frac{جـ}{2} = \frac{1-جتاجـ}{2} \Leftarrow جا^{2}جـ = \frac{1-جتا2جـ}{2}$$

$$جتا^{2}\frac{جـ}{2} = \frac{1+جتاجـ}{2} \Leftarrow جتا^{2}جـ = \frac{1+جتا2جـ}{2}$$

تدريبات : جد التكاملات الآتية

(1) $\int (س^{3} - 3س^{2} + 1)^{4}(س^{2} - 2س) ءس$

$$ص = س^{3} - 3س^{2} + 1 \Leftarrow ءص = (3س^{2} - 6س) ءس \Leftarrow \frac{1}{3}ءص = (س^{2} - 2س) ءس$$

$$\int \frac{1}{3} ص^{4} ءص = \frac{1}{3}\frac{ص^{5}}{5} + جـ = \frac{(س^{3} - 3س^{2} + 1)^{5}}{15} + جـ$$

(2) $\int س(س^{2} + 1)^{5} ءس$

$$ص = س^{2} + 1 \Leftarrow ءص = 2س ءس \Leftrightarrow \frac{1}{2}ءص = س ءس$$

$$\int \frac{1}{2} ص^{5} ءص = \frac{ص^{6}}{12} + جـ = \frac{(س^{2} + 1)^{6}}{12} + جـ$$

$$(٣)\ \int \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\,ءس$$

$$\int \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\,ءس = \int س\left(س^{٢}+١\right)^{\frac{-١}{٢}}\,ءس$$

$$ص = س^{٢}+١ \Leftrightarrow ءص = ٢س\,ءس \Leftrightarrow \frac{١}{٢}ءص = س\,ءس$$

$$\frac{١}{٢}\int (ص)^{\frac{-١}{٢}}\,ءص = \frac{١}{٢}\,\frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}}+جـ = \sqrt{ص}+جـ = \sqrt{س^{٢}+١}+جـ$$

$$(٤)\ \int \frac{١}{\left(س^{٢}+٢س+١\right)^{٥}}\,ءس = \int \frac{١}{(س+١)^{١٠}}\,ءس = \int (س+١)^{-١٠}\,ءس$$

$$ص = س+١ \Leftrightarrow ءص = ءس$$

$$\int ص^{-١٠}\,ءص = \frac{ص^{-٩}}{-٩}+جـ = \frac{-١}{٩(س+١)^{٩}}+جـ$$

$$(٥)\ \int \frac{٢س+١}{\left(س^{٢}+س+١\right)^{٣}}\,ءس$$

$$ص = س^{٢}+س+١ \Leftrightarrow ءص = (٢س+١)\,ءس$$

$$\int \frac{١}{(ص)^{٣}}\,ءص = \int ص^{-٣}\,ءص = \frac{ص^{-٢}}{-٢}+جـ = \frac{-١}{٢\left(س^{٢}+س+١\right)^{٢}}+جـ$$

$$(٦)\ \int \frac{٢س-٣}{س^{٢}-٣س+١}\,ءس$$

$$ص = س^{٢}-٣س+١ \Leftrightarrow ءص = (٢س-٣)\,ءس$$

$$\int \frac{١}{ص}\,ءص = لو_{هـ}|ص|+جـ = لو_{هـ}\left|س^{٢}-٣س+١\right|+جـ$$

كل اقتران كسري البسط فيه مشتق المقام تكاملة لوغاريتم القيمة المطلقة للمقام سندرسه بشكل مفصل

$$(٧)\ \int (٢س+٣)\,هـ^{س^{٢}+٣س+٥}\,ءس$$

$$ص = س^{٢}+٣س+٥ \Leftrightarrow ءص = (٢س+٣)\,ءس$$

$$\int هـ^{ص}\,ءص = هـ^{ص}+جـ = هـ^{س^{٢}+٣س+٥}+جـ$$

$$(٨)\ \int جاس\,جتا^{٣}س\,ءس$$

$$ص = جتاس \Leftrightarrow ءص = -جاس\,ءس$$

$$-\int ص^{٣}\,ءص = -\frac{ص^{٤}}{٤}+جـ = -\frac{جتا^{٤}س}{٤}+جـ$$

$$(٩)\ \int \text{جا٢س جا}^{٣}\text{س ءس}$$

$$\int \text{٢جاس جتاس جا}^{٣}\text{س ءس} = ٢\int \text{جتاس جا}^{٤}\text{س ءس}$$

$$\text{ص} = \text{جاس} \Leftrightarrow \text{ءص} = \text{جتاس ءس}$$

$$٢\int \text{ص}^{٤}\text{ءص} = ٢\frac{\text{ص}^{٥}}{٥} + \text{جـ} = \frac{٢}{٥}\text{جا}^{٥}\text{س} + \text{جـ}$$

$$(١٠)\ \int \text{جاس هـ}^{\text{جتاس}}\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{جتاس} \Leftrightarrow \text{ءص} = -\text{جاس ءس}$$

$$-\int \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص} = -\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = -\text{هـ}^{\text{جتاس}} + \text{جـ}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} (١١)\ \int \text{جا٢س ءس} \\ \int \text{٢جاس جتاس ءس} \\ \text{ص} = \text{جاس} \Leftrightarrow \text{ءص} = \text{جتاس ءس} \\ \int \text{٢ص ءص} = \text{ص}^{٢} + \text{جـ} = \text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جـ} \end{array}}$$

او مباشرة $\boxed{\int \text{جا٢س ءس} = -\frac{١}{٢}\text{جتا٢س} + \text{جـ}}$

$$(١٢)\ \int \text{س}^{٥}\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢}\ \text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٢ \Leftrightarrow \text{س}^{٢} = \text{ص} - ٢ \Leftrightarrow \text{ءص} = \text{٢س ءس} \Leftrightarrow \frac{١}{٢}\text{ءص} = \text{س ءس}$$

$$\frac{١}{٢}\int \text{٢س}^{٤}\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢} \times \text{س ءس} = \frac{١}{٢}\int (\text{ص} - ٢)^{٢}\sqrt{\text{ص}}\ \text{ءص} = \frac{١}{٢}\int \left(\text{ص}^{\frac{٥}{٢}} - ٤\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + ٤\text{ص}^{\frac{١}{٢}}\right)\text{ءص}$$

$$= \left(\frac{\text{ص}^{\frac{٧}{٢}}}{٧} - ٤\frac{\text{ص}^{\frac{٥}{٢}}}{٥} + ٤\frac{\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + \text{جـ}\right)$$

$$(١٣)\ \int \text{ظا}^{٤}\text{س قا}^{٢}\text{س ءس}$$

$$\text{ص} = \text{ظاس} \Leftrightarrow \text{ءص} = \text{قا}^{٢}\text{س ءس}$$

$$\int \text{ص}^{٤}\text{ءص} = \frac{\text{ص}^{٥}}{٥} + \text{جـ} = \frac{\text{ظا}^{٥}\text{س}}{٥} + \text{جـ}$$

$$(١٤)\ \int \text{س قا}(١ - ٢\text{س}^{٢})\text{ظا}(١ - ٢\text{س}^{٢})\text{ءس}$$

$$\text{ص} = ١ - ٢\text{س}^{٢} \Leftrightarrow \text{ءص} = -\text{٤س ءس} \Leftrightarrow \frac{-١}{٤}\text{ءص} = \text{س ءس}$$

$$\frac{-١}{٤}\int \text{قا(ص)ظا(ص)ءص} = \frac{-١}{٤}\text{قاص} + \text{جـ} = \frac{-١}{٤}\text{قا}(١ - ٢\text{س}^{٢}) + \text{جـ}$$

$$(١٥)\ \int \frac{\text{س} - ١}{(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)^{٣}}\text{ءس} = \int \frac{\text{س} - ١}{(\text{س} - ١)^{٦}}\text{ءس} = \int \frac{١}{(\text{س} - ١)^{٥}}\text{ءس} = \int (\text{س} - ١)^{-٥}\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{س} - ١ \Leftrightarrow \text{ءص} = \text{ءس}$$

$$\int (\text{س}-١)^{-٥}\,\text{ءس} = \int \text{ص}^{-٥}\,\text{ءص} = \frac{١}{-٦(\text{س}-١)^{٦}} + \text{جـ}$$

(١٦) $\int \frac{\text{قتا}^{٢}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \Leftrightarrow \text{ص}^{٢} = \text{س} \Leftrightarrow ٢\text{ص}\,\text{ءص} = \text{ءس}$

$$\int \frac{\text{قتا}^{٢}\text{ص}}{\text{ص}}\,٢\text{ص}\,\text{ءص} = \int ٢\,\text{قتا}^{٢}\text{ص}\,\text{ءص} = -٢\,\text{ظتاص} + \text{جـ} = -٢\,\text{ظتا}\left(\sqrt{\text{س}}\right) + \text{جـ}$$

(١٧) $\int \frac{(١+\text{س})^{٧}}{\text{س}^{٩}}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\left(\frac{١+\text{س}}{\text{س}}\right)^{٧}\text{ءس} = \int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\left(\frac{١}{\text{س}}+١\right)^{٧}\text{ءس}$

$\text{ص} = \frac{١}{\text{س}} + ١ \Leftrightarrow \text{ءص} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

$$-\int (\text{ص})^{٧}\,\text{ءص} = -\frac{\text{ص}^{٨}}{٨} + \text{جـ} = -\frac{١}{٨}\left(\frac{١+\text{س}}{\text{س}}\right)^{٨} + \text{جـ}$$

(١٨) $\int \text{س}^{٢}\sqrt[٣]{\text{س}^{٧}-\text{س}^{٣}}\,\text{ءس} = \int \text{س}^{٢}\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}(\text{س}^{٤}-١)}\,\text{ءس} = \int \text{س}^{٣}\sqrt[٣]{(\text{س}^{٤}-١)}\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٤} - ١ \Leftrightarrow \text{ءص} = ٤\text{س}^{٣}$

$$\int \text{س}^{٣}\sqrt[٣]{(\text{س}^{٤}-١)}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{٤}\text{ص}^{\frac{١}{٣}}\,\text{ءص} = ٣\frac{\text{ص}^{\frac{٤}{٣}}}{١٦} + \text{جـ} = ٣\frac{(\text{س}^{٤}-١)^{\frac{٤}{٣}}}{١٦} + \text{جـ}$$

(١٩) $\int \text{س}\,\text{جاس}^{٢}\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} \Leftrightarrow \text{ءص} = ٢\text{س}\,\text{ءس}$

$$\int \frac{١}{٢}\text{جاص}\,\text{ءص} = -\frac{١}{٢}\text{جتاص} + \text{جـ} = -\frac{١}{٢}\text{جتاس}^{٢} + \text{جـ}$$

(٢٠) $\int \text{جاس}\,\text{جا}(\text{جتاس})\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جتاس} \Leftrightarrow \text{ءص} = -\text{جاس}\,\text{ءس}$

$$-\int \text{جاص}\,\text{ءص} = \text{جتاص} + \text{جـ} = \text{جتا}(\text{جتاس}) + \text{جـ}$$

(٢١) $\int (٢\text{س}+١)\,\text{جتا}(\text{س}^{٢}+\text{س}+١)\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + \text{س} + ١ \Leftrightarrow \text{ءص} = ٢\text{س} + ١$

$$\int \text{جتاص}\,\text{ءص} = \text{جاص} + \text{جـ} = \text{جا}(\text{س}^{٢}+\text{س}+١) + \text{جـ}$$

$$(٢٢)\ \int \text{قا٢س ظا٢س ءس}$$

$$\text{ص} = \text{٢س} \Leftarrow \text{ءص} = \text{٢ءس}$$

$$\frac{١}{٢}\int \text{قاص ظاص ءص} = \frac{١}{٢}\text{قا٢س} + \text{جـ}$$

$$(٢٣)\ \int \text{س قا}^{٢}\left(\text{س}^{٢}+١\right)\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ١ \Leftarrow \text{ءص} = \text{٢س ءس}$$

$$\frac{١}{٢}\int \text{قا}^{٢}\text{ص ءص} = \frac{١}{٢}\text{ظا}\left(\text{س}^{٢}+١\right) + \text{جـ}$$

حاصل ضرب نسبتين مثلثتين نطبق قوانين الانتقال من ضرب الى مجموع

$$(٢٤)\ \int \text{جا٢س جتا٣س ءس} = \frac{١}{٢}\int\left(\text{جا٥س} + \text{جا}(-\text{س})\right)\text{ءس} = \frac{١}{٢}\int\left(\text{جا٥س} - \text{جا}(\text{س})\right)\text{ءس} =$$

$$= \frac{١}{٢}\left\{-\frac{١}{٥}\text{جتا٥س} + \text{جتاس}\right\} + \text{جـ}$$

$$(٢٥)\ \int \text{جتا٢س جتا٣س ءس} = \frac{١}{٢}\int\left(\text{جتا٥س} + \text{جتا}(-\text{س})\right)\text{ءس} = \frac{١}{٢}\int\left(\text{جتا٥س} + \text{جتاس}\right)\text{ءس}$$

$$\frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٥}\text{جا٥س} + \text{جاس}\right) + \text{جـ}$$

$$(٢٦)\ \int \text{جا٢س جا٤س ءس} = -\frac{١}{٢}\int\left(\text{جتا٦س} + \text{جتا}(-\text{٢س})\right)\text{ءس} = -\frac{١}{٢}\int\left(\text{جتا٦س} + \text{جتا}(-\text{٢س})\right)\text{ءس}$$

$$-\frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٦}\text{جا٦س} + \frac{١}{٢}\text{جا٢س}\right) + \text{جـ}$$

$$(٢٧)\ \int \text{جاس}\sqrt{١-\text{جتاس}}\,\text{ءس} = \int \text{جاس}\sqrt{\text{٢جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}\,\text{ءس} = \int ٢\sqrt{٢}\,\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢}\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\text{ءس} \text{ ، } ٠ \le \frac{\text{س}}{٢} \le \frac{\pi}{٢}$$

$$\text{ص} = \text{جا}\frac{\text{س}}{٢} \Leftarrow \text{ءص} = \frac{١}{٢}\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢}$$

$$\int ٢\sqrt{٢}\,\text{ص}^{٢}\,\text{٢ءص} = ٤\sqrt{٢}\,\frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{جـ} = ٤\sqrt{٢}\,\frac{\left(\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}\right)^{٣}}{٣} + \text{جـ}$$

$$(٢٨)\ \int \text{جا}^{٢}\text{س ءس} = \int\left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{جتا٢س}\right)\text{ءس} = \frac{١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٤}\text{جا٢س} + \text{جـ}$$

$(\text{٢٩})\ \int \text{جا}^{\text{٤}}\text{س}\,\text{ءس} = \int\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جتا٢س}\right)^{\text{٢}}\text{ءس} = \int\left(\frac{\text{١}}{\text{٤}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جتا٢س} + \frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{جتا}^{\text{٢}}\text{٢س}\right)\text{ءس}$

$\int\left(\frac{\text{١}}{\text{٤}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جتا٢س} + \frac{\text{١}}{\text{٤}}\frac{\text{١}}{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٤}}\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جتا٤س}\right)\text{ءس} = \int\left(\frac{\text{٣}}{\text{٨}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جتا٢س} + \frac{\text{١}}{\text{٨}}\text{جتا٤س}\right)\text{ءس}$

$= \left(\frac{\text{٣}}{\text{٨}}\text{س} - \frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{جا٢س} + \frac{\text{١}}{\text{٣٢}}\text{جا٤س}\right) + \text{جـ}$

$(\text{٣٠})\ \int \text{جا}^{\text{٢}}\text{٣س}\,\text{ءس} = \int\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جتا٦س}\right)\text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س} - \frac{\text{١}}{\text{١٢}}\text{جا٦س} + \text{جـ}$

$(\text{٣١})\ \int \text{جتا}^{\text{٤}}\text{س}\,\text{ءس} = \int\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جتا٢س}\right)^{\text{٢}}\text{ءس} = \int\left(\frac{\text{١}}{\text{٤}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جتا٢س} + \frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{جتا}^{\text{٢}}\text{٢س}\right)\text{ءس}$

$\int\left(\frac{\text{٣}}{\text{٨}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جتا٢س} + \frac{\text{١}}{\text{٨}}\text{جتا٤س}\right)\text{ءس} = \left(\frac{\text{٣}}{\text{٨}}\text{س} + \frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{جا٢س} + \frac{\text{١}}{\text{٣٢}}\text{جا٤س}\right) + \text{جـ}$

الحالات الخاصة

نطبق القاعدة $\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}+\text{١}}}{\text{أ}(\text{ن} + \text{١})} + \text{جـ}$

$(\text{٣٢})\ \int (\text{٢س} + \text{١})^{\text{٣}}\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{٢س} + \text{١} \Leftrightarrow \text{ءص} = \text{٢ءس}$

$\int (\text{٢س} + \text{١})^{\text{٣}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{ص}^{\text{٣}}\,\text{ءص} = \frac{\text{ص}^{\text{٤}}}{\text{٨}} + \text{جـ} = \frac{(\text{٢س} + \text{١})^{\text{٤}}}{\text{٨}} + \text{جـ} =$

$(\text{٣٣})\ \int \sqrt{\text{١} - \text{س}}\,\text{ءس} = \int (\text{١} - \text{س})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{١} - \text{س} \Leftrightarrow \text{ءص} = -\text{ءس}$

$-\int \text{ص}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\,\text{ءص} = -\frac{\text{ص}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}}{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} + \text{جـ} = -\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\sqrt{(\text{١} - \text{س})^{\text{٣}}} + \text{جـ}$

$(\text{٣٤})\ \int \frac{\text{١}}{(\text{٢س} + \text{١})^{\text{٤}}}\,\text{ءس} = \int (\text{٢س} + \text{١})^{-\text{٤}}\,\text{ءس} = \frac{(\text{٢س} + \text{١})^{-\text{٣}}}{-\text{٦}} + \text{جـ}$

$(\text{٣٥})\ \int (\text{س} - \text{١})^{-\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}\,\text{ءس} = \frac{(\text{س} - \text{١})^{-\frac{\text{١}}{\text{٢}}}}{\frac{-\text{١}}{\text{٢}}} + \text{جـ} = -\frac{\text{٢}}{\sqrt{\text{س} - \text{١}}} + \text{جـ}$

$(\text{٣٦})\ \int \frac{\text{٣}}{(-\text{٢س} + \text{١})}\,\text{ءس} = \frac{\text{٣}}{-\text{٢}}\text{لوهـ}|-\text{٢س} + \text{١}| + \text{جـ}$

$(\text{٣٧})\ \int \text{س}\sqrt{(\text{س} + \text{١})}\,\text{ءس} = \int (\text{س} + \text{١} - \text{١})\sqrt{(\text{س} + \text{١})}\,\text{ءس} =$

$\int \left((\text{س} + \text{١})\sqrt{(\text{س} + \text{١})} - \sqrt{(\text{س} + \text{١})}\right)\text{ءس} = \int \left((\text{س} + \text{١})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} - (\text{س} + \text{١})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\right)\text{ءس}$

$$= \frac{2(\text{س}+1)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2(\text{س}+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + \text{جـ}$$

(38) $$\int \text{س}\sqrt{(1-2\text{س})}\,\text{ءس} = \frac{1}{-2}\int (-2\text{س})\sqrt{(1-2\text{س})}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{1}{-2}\int (1-2\text{س}-1)\sqrt{(1-2\text{س})}\,\text{ءس}$$

$$\frac{1}{-2}\int (1-2\text{س})^{\frac{3}{2}} - (1-2\text{س})^{\frac{1}{2}}\,\text{ءس} = \frac{1}{-2}\,\frac{2(1-2\text{س})^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{1}{2}\,\frac{2(1-2\text{س})^{\frac{3}{2}}}{3} + \text{جـ}$$

(39) $$\int \text{هـ}^{2\text{س}+3}\,\text{ءس} = \frac{1}{2}\,\text{هـ}^{2\text{س}+3} + \text{جـ}$$

(40) $$\int \text{جا}(2\text{س}+4)\,\text{ءس} = -\frac{1}{2}\,\text{جتا}(2\text{س}+4) + \text{جـ}$$

(41) $$\int \text{جا}3\text{س}\,\text{جتا}3\text{س}\,\text{ءس} = \frac{1}{2}\int \text{جا}6\text{س}\,\text{ءس} = \frac{1}{-12}\,\text{جتا}6\text{س} + \text{جـ}$$

(42) $$\int \text{ظتاس}\,\text{لـو}\,\text{جاس}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{لـو}\,\text{جاس} \Leftrightarrow \text{ءص} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\,\text{ءس} = \text{ءص} = \text{ظتاس}\,\text{ءس}$$

$$\int \text{ص}\,\text{ءص} = \frac{\text{ص}^{2}}{2} + \text{جـ} = \frac{(\text{لـو}\,\text{جاس})^{2}}{2} + \text{جـ}$$

(43) $$\int \frac{\text{ظا}^{2}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{ظا}^{2}\text{ص}}{\text{ص}}\,2\text{ص}\,\text{ءص} = 2\int (\text{قا}^{2}\text{ص} - 1)\,\text{ءص} = \text{ظاص} - \text{ص} + \text{جـ}$$

$$= \text{ظا}\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$$

(44) $$\int \text{ظتا}(2\text{س}+4)\,\text{ءس} =$$

$$\text{ص} = 2\text{س} + 4 \Leftrightarrow \text{ءص} = 2\text{ءس}$$

$$\frac{1}{2}\int \text{ظتاص}\,\text{ءص} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{جتاص}}{\text{جاص}}\,\text{ءص} = \frac{1}{2}\int \frac{(\text{جاص})'}{\text{جاص}}\,\text{ءص} = \frac{1}{2}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{جاص}\right| + \text{جـ} = \frac{1}{2}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{جا}2\text{س}+4\right| + \text{جـ}$$

(45) $$\int \text{ظا}(2\text{س})\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = 2\text{س} \Leftrightarrow \text{ءص} = 2\text{ءس}$$

$$\int \frac{1}{2}\,\text{ظاص}\,\text{ءص} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{جاص}}{\text{جتاص}}\,\text{ءص} = -\frac{1}{2}\int \frac{(\text{جتاص})'}{\text{جتاص}}\,\text{ءص} = -\frac{1}{2}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{جتا}2\text{س}\right| + \text{جـ}$$

(46) $$\int (2\text{س}^{2} + 8\text{س} + 8)^{4}\,\text{ءس} = 16\int (\text{س}^{2} + 4\text{س} + 4)^{4}\,\text{ءس} = 16\int (\text{س}+2)^{8}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{(\text{س}+2)^{9}}{9} + \text{جـ}$$

(47) $$\int \text{قا}^{2}\text{س}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \sqrt{\text{ظاس}} \Leftrightarrow \text{ءص} = \frac{\text{قا}^2\text{س}}{2\sqrt{\text{ظاس}}}\text{ءس} \Leftrightarrow 2\text{ص ءص} = \text{قا}^2\text{س ءس}$$

$$\int \text{قا}^2\text{س هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}}\,\text{ءس} = \int 2\text{ص هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$$

هذا التكامل هو تكامل بالتجزئة (أجزاء) لكن الحل بطريقة أخرى مختلفة فقط من حيث الشكل

$$\left(\text{ص هـ}^{\text{ص}}\right)' = \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ص هـ}^{\text{ص}}$$

$$\text{ص هـ}^{\text{ص}} = \left(\text{ص هـ}^{\text{ص}}\right)' - \text{هـ}^{\text{ص}}$$

$$\int \text{ص هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} = \int \left(\text{ص هـ}^{\text{ص}}\right)'\text{ءص} - \int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$$

$$\int \text{ص هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} = \text{ص هـ}^{\text{ص}} - \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$2\int \text{ص هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} = 2\text{ص هـ}^{\text{ص}} - 2\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$= 2\sqrt{\text{ظاس}}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}} - 2\text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}} + \text{جـ}$$

$$(48)\ \int \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}+1}{\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{ءس} = \int \left(\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}\right)\text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{جـ}$$

$$(49)\ \int \text{جا}2\text{س هـ}^{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{جا}^2\text{س} \Leftrightarrow \text{ءص} = 2\text{جاس جتاس ءس} = \text{جا}2\text{س ءس}$$

$$\int \text{جا}2\text{س هـ}^{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس} = \int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} = \text{هـ}^{\text{جا}^2\text{س}} + \text{جـ}$$

$$(50)\ \int \frac{1+\text{ظا}^2\text{س}}{\text{ظاس}}\,\text{ءس} = \int \frac{(\text{ظاس})'}{\text{ظاس}}\,\text{ءس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{ظاس}\right| + \text{جـ}$$

التكامل بالأجزاء (التجزئة)

ليكن كل من $\text{ں}(\text{س})$،$\text{هـ}(\text{س})$ اقتران قابل للاشتقاق ومشتقه متصل على الفترة [أ،ب]

$$(\text{ں}.\text{هـ})' = \text{ں}.\text{هـ}' + \text{هـ}.\text{ں}'$$

$$\text{هـ}.\text{ں}' = (\text{ں}.\text{هـ})' - \text{ں}'.\text{هـ}$$

$$\int \text{هـ}.\text{ں}'\,\text{ءس} = \int (\text{ں}.\text{هـ})'\,\text{ءس} - \int \text{ں}'.\text{هـ}\,\text{ءس}$$

$$\boxed{\int (\text{هـ}.\text{ں}')\,\text{ءس} = (\text{ں}.\text{هـ}) - \int (\text{ں}'.\text{هـ})\,\text{ءس}}$$

ويطبق هذا التكامل بالاجزاء على كل من

(أس+ب)جاس ، (أس+ب)جتاس ، لـوس ، (أس+ب) $\text{هـ}^{\text{س}}$

س^2جاس ، س^2جتاس ، لـوس ، $\text{س}^2\text{هـ}^{\text{س}}$

كل تكامل لاقتران هو حاصل ضرب اقترانين فهو

1- اما ان يتحول الى مجموع

٢- او ان يكون حاصل ضرب اقترانين احدهما مشتق الاخر

$\int هـ'(س)\, هـ^{ن}(س)\, دس = \frac{هـ^{ن+١}(س)}{ن+١} + جـ$ وهذا تكامل بالتعويض

٣- او نستخدم التكامل بالاجزاء $\boxed{\int (هـ . ن')\, دس = (ن . هـ) - \int (ن . هـ')\, دس}$

علينا حين نختار الاقتران ق و هـ ان نستطيع ان نشتق احدهما وان نجد الاقتران الابتدائي للآخر

(٤٧)

$\int قا^{٢}س\, هـ^{\sqrt{ظاس}}\, دس = \int ٢ص\, هـ^{ص}\, دص$

$ن = ٢ص \Leftarrow دن = ٢دص$

$دم = هـ^{ص}\, دص \Leftarrow م = هـ^{ص}$

$\int ٢ص\, هـ^{ص}\, دص = [٢ص\, هـ^{ص}] - \int ٢هـ^{ص}\, دص$

$= [٢ص\, هـ^{ص}] - ٢هـ^{ص} + جـ$

(١) $\int س\, هـ^{-٢س}\, دس$

$ن = س \Leftarrow دن = دس$

$دم = هـ^{-٢س}\, دس \Leftarrow م = \frac{-١}{٢} هـ^{-٢س}$

$\int س\, هـ^{-٢س}\, دس = \left[\frac{١}{-٢} س\, هـ^{-٢س}\right] + \int \frac{١}{٢} هـ^{-٢س}\, دس = \left[\frac{١}{-٢} س\, هـ^{-٢س}\right] - \frac{١}{٤} هـ^{-٢س} + جـ$

(٢) $\int س\, هـ^{٤س}\, دس$

$ن = س \Leftarrow دن = د$

$دم = هـ^{٤س}\, دس \Leftarrow م = \frac{١}{٤} هـ^{٤س}$

$\int س\, هـ^{٤س}\, دس = [س\, هـ^{٤س}] - \frac{١}{٤} \int هـ^{٤س}\, دس = [س\, هـ^{٤س}] - \frac{١}{١٦} هـ^{٤س} + جـ$

(٣) $\int س^{٢}\, هـ^{س}\, دس$

$ن = س^{٢} \Leftarrow دن = ٢س\, دس$

$دم = هـ^{س}\, دس \Leftarrow م = هـ^{س}$

$\int س^{٢}\, هـ^{س}\, دس = [س^{٢}\, هـ^{س}] - \int ٢س\, هـ^{س}\, دس$

$\int ٢س\, هـ^{س}\, دس$

$ل = ٢س \Leftarrow دل = ٢دس$

$دف = هـ^{س}\, دس \Leftarrow ف = هـ^{س}$

$\int ٢س\, هـ^{س}\, دس = [٢س\, هـ^{س}] - \int ٢هـ^{س}\, دس = [٢س\, هـ^{س}] - ٢هـ^{س} + جـ$

$\int س^{٢}\, هـ^{س}\, دس = [س^{٢}\, هـ^{س}] - [٢س\, هـ^{س}] + ٢هـ^{س} - جـ$

(٤) $\int$ س جا٣س ءس

ن = س ⟸ ءن = ءس

ءم = جا٣س ءس ⟸ م = $\frac{-١}{٣}$ جتا٣س

$\int$ س جا٣س ءس = $\left[\frac{١}{-٣}\right.$ س جتا٣س $\left.\right]$ + $\frac{١}{٣}$ $\int$ جتا٣س ءس = $\left[\frac{١}{-٣}\right.$ س جتا٣س $\left.\right]$ + $\frac{١}{٩}$ جا٣س + جـ

(٥) $\int$ س جتا٢س ءس

(٦) $\int$ س^{٢} جا٣س ءس

ن = س^{٢} ⟸ ءن = ٢س ءس

ءم = جا٣س ءس ⟸ م = $\frac{-١}{٣}$ جتا٣س

$\int$ س^{٢} جا٣س ءس = $\left[-\frac{١}{٣}\right.$ س^{٢} جتا٣س $\left.\right]$ + $\frac{٢}{٣}$ $\int$ س جتا٣س ءس

$\int$ س جتا٣س ءس

ل = س ⟸ ءل = ءس

ءف = جتا٣س ءس ⟸ ف = $\frac{١}{٣}$ جا٣س

$\int$ س جتا٣س ءس = $\left[\frac{١}{٣}\right.$ س جا٣س $\left.\right]$ − $\frac{١}{٣}$ $\int$ جا٣س ءس = $\left[\frac{١}{٣}\right.$ س جا٣س $\left.\right]$ + $\frac{١}{٩}$ جتا٣س + جـ

$\int$ س^{٢} جا٣س ءس = $\left[-\frac{١}{٣}\right.$ س^{٢} جتا٣س $\left.\right]$ + $\frac{٢}{٣}$ $\left[\frac{١}{٣}\right.$ س جا٣س $\left.\right]$ + $\frac{٢}{٣}\frac{١}{٩}$ جتا٣س + جـ

(٧) $\int$ (س + ٢)^{٢} جا٣س ءس

ن = (س + ٢)^{٢} ⟸ ءن = ٢(س + ٢) ءس

ءهـ = جا٣س ءس ⟸ هـ = $-\frac{١}{٣}$ جتا٣س

$\int$ (س + ٢)^{٢} جا٣س ءس = $\left[\frac{١}{-٣}\right.$ (س + ٢)^{٢} جتا٣س $\left.\right]$ + $\frac{٢}{٣}$ $\int$ (س + ٢) جتا٣س ءس

$\int$ (س + ٢) جتا٣س ءس

ل = س + ٢ ⟸ ءل = ءس   ءف = جتا٣س ءس ⟸ ف = $\frac{١}{٣}$ جا٣س

$\int$ (س + ٢) جتا٣س ءس = $\left[\frac{١}{٣}\right.$ (س + ٢) جا٣س $\left.\right]$ − $\frac{١}{٣}$ $\int$ جا٣س ءس = $\left[\frac{١}{٣}\right.$ (س + ٢) جا٣س $\left.\right]$

+ $\frac{١}{٩}$ جتا٣س

$\int$ (س + ٢)^{٢} جا٣س ءس = $\left[\frac{١}{-٣}\right.$ (س + ٢)^{٢} جتا٣س $\left.\right]$ + $\frac{٢}{٣}$ $\left[\frac{١}{٣}\right.$ (س + ٢) جا٣س $\left.\right]$ + $\frac{٢}{٢٧}$ جتا٣س + جـ

مشتق اللوغاريتم= مشتق ما بعد اللوغاريتم على ما بعد اللوغاريتم $\boxed{(\text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ن(س)})' = \frac{\text{ن}'\text{(س)}}{\text{ن(س)}}}$

$(\text{٨})\ \int \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{٣س ءس}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{٣س} \Leftarrow \text{ءع} = \frac{\text{١}}{\text{س}}\text{ءس} \quad \text{،} \quad \text{ءهـ} = \text{س ءس} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}}$

$$\int \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{٣س ءس} = \left[\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{٣س}\right] - \int \frac{\text{١}}{\text{س}}\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}}\text{ءس} = \left[\text{س}^{\text{٢}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{٣س}\right] - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \text{جـ}$$

$(\text{٩})\ \int \sqrt{\text{س}}\,\text{لو٣س ءس}$

$(\text{١٠})\ \int (\text{لو٣س})^{\text{٢}}\,\text{ءس}$

$\text{ع} = (\text{لو٣س})^{\text{٢}} \Leftarrow \text{ءع} = \frac{\text{٢}}{\text{س}}(\text{لو٣س})\text{ءس} \quad \text{،} \quad \text{ءهـ} = \text{١ءس} \Leftarrow \text{هـ} = \text{س}$

$$\int (\text{لو٣س})^{\text{٢}}\text{ءس} = \left[\text{س}(\text{لو٣س})^{\text{٢}}\right] - \text{٢}\int (\text{لو٣س})\text{ءس}$$

$$\int (\text{لو٣س})\text{ءس}$$

$\text{ل} = \text{لو٣س} \Leftarrow \text{ءل} = \frac{\text{١}}{\text{س}}\text{ءس} \quad \text{،} \quad \text{ءف} = \text{١ء} \Leftarrow \text{ف} = \text{س}$

$$\int (\text{لو٣س})\text{ءس} = [\text{س لو٣س}] - \int \frac{\text{١}}{\text{س}}\text{س ءس} = [\text{س لو٣س}] - \text{س}$$

$$\int (\text{لو٣س})^{\text{٢}}\text{ءس} = \left[\text{س}(\text{لو٣س})^{\text{٢}}\right] - \int \text{س}\frac{\text{٢}}{\text{س}}(\text{لو٣س})\text{ءس} =$$

$$\int (\text{لو٣س})^{\text{٢}}\text{ءس} = \left[\text{س}(\text{لو٣س})^{\text{٢}}\right] - \text{٢}[\text{س لو٣س}] + \text{٢س} + \text{جـ}$$

$(\text{١١})\ \int \frac{\text{لوس}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$

$(\text{١٢})\ \int \text{لو}(\text{٣س} + \text{٢})\,\text{ءس}$

$(\text{١٣})\ \int \text{لو}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١})\,\text{ءس}$

$\text{ع} = \text{لو}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}) \Leftarrow \text{ءع} = \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}\text{ءس} \quad \text{،} \quad \text{ءهـ} = \text{١ءس} \Leftarrow \text{هـ} = \text{س}$

$$\int \text{لو}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١})\text{ءس} = \left[\text{س لو}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١})\right] - \int \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}\text{س ءس} = \left[\text{س لو}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١})\right] - \int \frac{\text{٢س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}\text{ءس}$$

$$-\int \frac{\text{٢س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}\text{ءس}$$

ملاحظة : من اجل التكامل الاخير نستخدم طرقة التعويض وهنا سنحتاج للاقتران العكسي وهو خارج المنهاج ومع ذلك ساكمل التدريب

لو كان المقام $\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}$ نقسم البسط على المقام ثم نفرق الكسور سنرى ذلك فيما بعد

بفرض $\text{س} = \text{ظاص} \Leftarrow \text{ءس} = \text{قا}^{\text{٢}}\text{ص ءص}$ نعوض في التكامل

$$-\int \frac{\text{ظا}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{ظا}^{\text{٢}}\text{ص} + \text{١}}\text{قا}^{\text{٢}}\text{ص ءص} = -\int \text{ظا}^{\text{٢}}\text{ص ءص} = -\int (\text{قا}^{\text{٢}}\text{ص} - \text{١})\text{ءص} = -\text{ظاص} + \text{ص} + \text{جـ}$$

$$= -\text{س} + \text{ص} + \text{جـ}$$

المشكلة ان نعوض بدل ص ما يساويها س =ظاص

(١٤) $\int$ هـ ^{س} جا٣س ءس

ى = هـ ^{س} $\Leftarrow$ ءى = هـ ^{س} ءس ، ءم =جا٣س ءس $\Leftarrow$ م = − $\frac{١}{٣}$ جتا٣س

$\int$ هـ ^{س} جا٣س ءس = [$\frac{١}{٣-}$ هـ ^{س} جتا٣س] − $\frac{١}{٣-}$ $\int$ هـ ^{س} جتا٣س ءس ، (١)

$\int$ هـ ^{س} جتا٣س ءس

ل = هـ ^{س} $\Leftarrow$ ءل = هـ ^{س} ءس،، ءف =جتا٣س ءس $\Leftarrow$ ف = $\frac{١}{٣}$ جا٣س

$\int$ هـ ^{س} جتا٣س ءس = [$\frac{١}{٣}$ هـ ^{س} جا٣س] − $\frac{١}{٣}$ $\int$ هـ ^{س} جا٣س ءس ، (٢)

$\int$ هـ ^{س} جا٣س ءس = [$\frac{١}{٣-}$ هـ ^{س} جتا٣س] − $\frac{١}{٣-}$ { [$\frac{١}{٣}$ هـ ^{س} جا٣س] − $\frac{١}{٣}$ $\int$ هـ ^{س} جا٣س ءس }

$\int$ هـ ^{س} جا٣س ءس = [$\frac{١}{٣-}$ هـ ^{س} جتا٣س] + $\frac{١}{٣}$ [$\frac{١}{٣}$ هـ ^{س} جا٣س] − $\frac{١}{٩}$ $\int$ هـ ^{س} جا٣س ءس

$\frac{١١}{٩}$ $\int$ هـ ^{س} جا٣س ءس = − $\frac{١}{٣}$ [هـ ^{س} جتا٣س] + $\frac{١}{٩}$ [هـ ^{س} جا٣س]

$\int$ هـ ^{س} جا٣س ءس = − $\frac{٣}{١١}$ [هـ ^{س} جتا٣س] + $\frac{١}{١١}$ [هـ ^{س} جا٣س]

(١٥) $\int$ هـ ^{٣س} جتا٢س ءس

(١٦) $\int$ جالـو(٢س) ءس

ص =لـو(٢س) $\Leftrightarrow$ ٢س = هـ ^{ص} $\Leftarrow$ ءص هـ ^{ص} = ٢ءس

$\frac{١}{٢}$ $\int$ هـ ^{ص} جاص ءص

سبق ان كاملنا هذا الاقتران في التمرين (١٤)

(١٧) $\int$ جتا(لـو(٢س)) ءس

لـو(٢س) = ص $\Leftrightarrow$ ٢س = هـ ^{ص} $\Leftarrow$ س = $\frac{١}{٢}$ هـ ^{ص} $\Leftarrow$ ٢ $\frac{ءس}{س}$ = ءص $\Leftrightarrow$ ءس = $\frac{١}{٢}$ هـ ^{ص} ءص

$\int$ جتا(لـو(٢س)) ءس = $\frac{١}{٢}$ $\int$ جتا(ص) هـ ^{ص} ءص

(١٨) $\int$ (س) ظا^{٢}س ءس

ق = س ⟸ ءق = ءس ، ءهـ = ظا^{٢}س ءس ⟸ هـ = ظاس − س

$\int$ (س) ظا^{٢}س ءس = [س (ظاس − س)] − $\int$ (ظاس − س) ءس = [س (ظاس − س)] − [(ظاس − س)]

− $\int$ $\left(\dfrac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} - \text{س}\right)$ ءس

= [س (ظاس − س)] − (−لـو$_{\text{هـ}}$|جتاس| − $\dfrac{١}{٢}$س^{٢}) + جـ

ق = س ⟸ ءق = ءس ، ءهـ = قا^{٢}س ءس ⟸ هـ = ظاس − س

(١٩) $\int$ (س) قا^{٢}س ءس

ق = س ⟸ ءق = ءس ، ءهـ = قا^{٢}س ءس ⟸ هـ = ظاس

$\int$ (س) قا^{٢}س ءس = [س (ظاس)] − $\int$ (ظاس) ءس = [س (ظاس)] + لـو$_{\text{هـ}}$|جتاس| + جـ

(٢٠) $\int \dfrac{\text{سهـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}$ ءس

ق = سهـ$^{\text{س}}$ ⟸ ءق = (س + ١) هـ$^{\text{س}}$ ءس ، ءم = $\dfrac{١}{(\text{س}+١)^{٢}}$ ءس ⟸ م = $\dfrac{-١}{\text{س}+١}$

$\int \dfrac{\text{سهـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}$ ءس = $\left[\dfrac{-\text{سهـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١}\right]$ − $\int \dfrac{-(\text{س}+١)\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١}$ ءس = $\left[\dfrac{-\text{سهـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١}\right]$ + هـ$^{\text{س}}$ + جـ

(٢١) $\int$ س $\sqrt{٢\text{س}+١}$ ءس

ق = س ⟸ ءق = ءس ، ءهـ = $\sqrt{٢\text{س}+١}$ ءس ⟸ هـ = $\dfrac{(٢\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}}}{٢\frac{٣}{٢}}$ = $\dfrac{١}{٣}$(٢س + ١)$^{\frac{٣}{٢}}$

$\int$ س $\sqrt{٢\text{س}+١}$ ءس = [س $\dfrac{١}{٣}$(٢س + ١)$^{\frac{٣}{٢}}$] − $\int \dfrac{١}{٣}$(٢س + ١)$^{\frac{٣}{٢}}$ =

= [س $\dfrac{١}{٣}$(٢س + ١)$^{\frac{٣}{٢}}$] − $\dfrac{١}{٣}$ $\dfrac{(٢\text{س}+١)^{\frac{٥}{٢}}}{٢\frac{٥}{٢}}$

(٢٢) $\int$ جتا $\sqrt{\text{س}}$ ءس

(٢٣) $\int \dfrac{\text{سجاس}}{\text{قاس}}$ ءس = $\int$ سجتاس جاس ءس = $\dfrac{١}{٢}\int$ س جا٢س ءس ثم نكمل الحل

ق = س ⟸ ءق = ءس ، ءهـ = جا٢س ءس ⟸ هـ = −$\dfrac{١}{٢}$جتا٢س

(٢٤) $\int \dfrac{\text{سجاس}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}}$ ءس = $\int$ سجاس جتا$^{-٣}$س ءس

$$\text{ن} = \text{س} \Leftarrow \text{دن} = \text{دس} \;،\; \text{دهـ} = \text{جاس جتا}^{-٣}\text{س دس} \Leftarrow \text{هـ} = -\int (\text{جتاس})' \, \text{جتا}^{-٣}\text{س دس}$$

$$\text{هـ} = -\frac{\text{جتا}^{-٢}\text{س}}{-٢} = \frac{١}{٢}\,\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \frac{١}{٢}\text{قا}^{٢}\text{س}$$

$$\int \text{س جاس جتا}^{-٣}\text{س دس} = \left[\frac{١}{٢}\text{س قا}^{٢}\text{س}\right] - \int \frac{١}{٢}\text{قا}^{٢}\text{س دس} = \left[\frac{١}{٢}\text{س قا}^{٢}\text{س}\right] - \frac{١}{٢}\text{ظاس} + \text{جـ}$$

$$(٢٥)\; \int \frac{٣\text{س}}{\sqrt[٣]{٢\text{س}+١}}\,\text{دس} = \int ٣\text{س}(٢\text{س}+١)^{\frac{-١}{٣}}\,\text{دس}$$

$$\text{ن} = ٣\text{س} \Leftarrow \text{دن} = \text{دس} \qquad ،\; \text{دهـ} = (٢\text{س}+١)^{\frac{-١}{٣}}\,\text{دس} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{(٢\text{س}+١)^{\frac{٤}{٣}}}{٢\left(\frac{٤}{٣}\right)} = \frac{٣}{٨}(٢\text{س}+١)^{\frac{٤}{٣}}$$

$$\int ٣\text{س}(٢\text{س}+١)^{\frac{-١}{٣}}\,\text{دس} = \left[٣\text{س}\,\frac{٣}{٨}(٢\text{س}+١)^{\frac{٤}{٣}}\right] - \int \frac{٣}{٨}(٢\text{س}+١)^{\frac{٤}{٣}}\,\text{دس}$$

$$= \left[٣\text{س}\,\frac{٣}{٨}(٢\text{س}+١)^{\frac{٤}{٣}}\right] - \frac{٣}{٨}\,\frac{(٢\text{س}+١)^{\frac{٧}{٣}}}{٢\,\frac{٧}{٣}} + \text{جـ}$$

$$(٢٦)\; \int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\;\text{جتا}^{٣}\sqrt{\text{س}}\;\text{دس}$$

$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \text{دص} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس} \Leftrightarrow \text{دس} = ٢\text{ص دص}$$

$$\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\;\text{جتا}^{٣}\sqrt{\text{س}}\;\text{دس} = \int \text{جاص جتا}^{٣}\text{ص}\;٢\text{ص دص} = \int ٢\text{ص جاص جتا}^{٣}\text{ص دص}$$

$$\text{ن} = ٢\text{ص} \Leftarrow \text{دن} = ٢\text{دص} \;،\; \text{دهـ} = \text{جاص جتا}^{٣}\text{ص دص} = -(\text{جتاص})'\,\text{جتا}^{٣}\text{ص دص} = -\frac{\text{جتا}^{٤}\text{ص}}{٤}$$

$$\int ٢\text{ص جاص جتا}^{٣}\text{ص دص} = \left[-٢\text{ص}\frac{\text{جتا}^{٤}\text{ص}}{٤}\right] - \int -\frac{\text{جتا}^{٤}\text{ص}}{٤}\,\text{دص} = \left[-٢\text{ص}\frac{\text{جتا}^{٤}\text{ص}}{٤}\right] + \frac{١}{٤}\int \text{جتا}^{٤}\text{ص دص}$$

$$\left[-٢\text{ص}\frac{\text{جتا}^{٤}\text{ص}}{٤}\right] + \frac{١}{٤}\left(\frac{٣}{٨}\text{س} + \frac{١}{٤}\text{جا}٢\text{س} + \frac{١}{٣٢}\text{جا}٤\text{س}\right) + \text{جـ}$$

$$(٢٧)\; \int \text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}-١}\;\text{دس}$$

$$\text{ن} = \text{س}^{٢} \Leftarrow \text{دن} = ٢\text{س دس} \qquad ،\; \text{دهـ} = \sqrt{\text{س}-١}\;\text{دس} \Leftarrow \text{هـ} = ٢\,\frac{(\text{س}-١)^{\frac{٣}{٢}}}{٣}$$

$$\int \text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}-١}\;\text{دس} = \left[\text{س}^{٢}\,٢\,\frac{(\text{س}-١)^{\frac{٣}{٢}}}{٣}\right] - \int \frac{٤}{٣}\text{س}(\text{س}-١)^{\frac{٣}{٢}}\,\text{دس}$$

$$\text{ل} = \frac{٤}{٣}\text{س} \Leftarrow \text{دل} = \frac{٤}{٣}\text{دس} \;،\; \text{دم} = ٢\,\frac{(\text{س}-١)^{\frac{٣}{٢}}}{٣}\,\text{دس} \Leftarrow \text{م} = ٤\,\frac{(\text{س}-١)^{\frac{٥}{٢}}}{١٥}$$

$$\int \frac{\text{٤}}{\text{٣}}\text{س}(\text{س}-\text{١})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}\,\text{ءس} = \left[\frac{\text{٤}}{\text{٣}}\text{س}\,\text{٤}\frac{(\text{س}-\text{١})^{\frac{\text{٥}}{\text{٢}}}}{\text{١٥}}\right] - \frac{\text{١٦}}{\text{٤٥}}\int (\text{س}-\text{١})^{\frac{\text{٥}}{\text{٢}}}\,\text{ءس} =$$

$$= \left[\frac{\text{٤}}{\text{٣}}\text{س}\,\text{٤}\frac{(\text{س}-\text{١})^{\frac{\text{٥}}{\text{٢}}}}{\text{١٥}}\right] - \frac{\text{٣٢}}{\text{٤٥}}\frac{(\text{س}-\text{١})^{\frac{\text{٧}}{\text{٢}}}}{\text{٧}} = \left[\frac{\text{٤}}{\text{٣}}\text{س}\,\text{٤}\frac{(\text{س}-\text{١})^{\frac{\text{٥}}{\text{٢}}}}{\text{١٥}}\right] - \frac{\text{٣٢}}{\text{٤٥}}\frac{(\text{س}-\text{١})^{\frac{\text{٧}}{\text{٢}}}}{\text{٧}}$$

$$= \left[\text{س}^{\text{٢}}\,\text{٢}\frac{(\text{س}-\text{١})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}}{\text{٣}}\right] - \left[\frac{\text{٤}}{\text{٣}}\text{س}\,\text{٤}\frac{(\text{س}-\text{١})^{\frac{\text{٥}}{\text{٢}}}}{\text{١٥}}\right] + \frac{\text{٣٢}}{\text{٤٥}}\frac{(\text{س}-\text{١})^{\frac{\text{٧}}{\text{٢}}}}{\text{٧}} + \text{جـ}$$

(٢٨) $\int \text{س}^{\text{٥}}\sqrt{\text{س}^{\text{٣}}-\text{١}}\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{\text{٣}} - \text{١} \Leftrightarrow \text{س}^{\text{٣}} = \text{ص} + \text{١}$ ، $\text{ءص} = \text{٣س}^{\text{٢}}\,\text{ءس}$

$$\int \text{س}^{\text{٥}}\sqrt{\text{س}^{\text{٣}}-\text{١}}\,\text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}\int \text{س}^{\text{٣}}\,\text{٣س}^{\text{٢}}\sqrt{\text{س}^{\text{٣}}-\text{١}}\,\text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}\int (\text{ص}+\text{١})\,\text{ص}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\,\text{ءص} =$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٣}}\int\left(\text{ص}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} + \text{ص}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\right)\text{ءص} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}\left(\text{٢}\frac{\text{ص}^{\frac{\text{٥}}{\text{٢}}}}{\text{٥}} + \text{٢}\frac{\text{ص}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}}{\text{٣}}\right) + \text{جـ} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\left(\frac{(\text{س}^{\text{٣}}-\text{١})^{\frac{\text{٥}}{\text{٢}}}}{\text{٥}} + \frac{(\text{س}^{\text{٣}}-\text{١})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}}{\text{٣}}\right) + \text{جـ}$$

(٢٩) $\int \text{س}^{\text{٣}}\,\text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}}\,\text{ءس}$

التكامل المحدد

ليكن ق اقتران متصل على الفترة [ء،هـ] ولتكن أ،ب∈[ء،هـ] وليكن م(س) معكوسة المشتق للاقتران ق على الفترة [ء،هـ] نعرف التكامل المحدد على [أ،ب] بالشكل

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{م}(\text{ب}) - \text{م}(\text{أ})$$

ندعو أ،ب حدي التكامل المحدد ونرمز للتكامل السابق بالشكل $[\text{م}(\text{س})]_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \text{م}(\text{ب}) - \text{م}(\text{أ})$

مثال : اوجد

$$\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \text{٣س}^{\text{٢}}\,\text{ءس} = \left[\text{س}^{\text{٣}}\right]_{\text{١}}^{\text{٣}} = (\text{٣})^{\text{٣}} - (\text{١})^{\text{٣}} = \text{٢٦}$$

اوجد : $\int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \text{جاس}\,\text{ءس} = \left[-\text{جتاس}\right]_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} = (\text{٠}) - (-\text{١}) = \text{١}$

فيما بعد نقدم خواص التكامل المحدد وتطبيقات عليه

الاقتران اللوغاريتمي

ليكن الاقتران $\int_{1}^{س} \frac{1}{ع} ءع = [م(س)]_{1}^{س} = م(س) - م(1)$ حيث س $\succ$ ١

هذا الاقتران يدعى الاقتران اللوغاريتمي والذي نرمز له ب لــو(س) وعليه نستنتج ان

١- $م'(س) = (لــوس)' = \frac{1}{س}$ لاجل كل $س \in (٠،\infty)$

٢- $م(1) =$ لــو(١) $= ٠$

اذا م(س) = لــوس

واذا كانت قيمة التكامل تساوي الواحد لــوس = ١ فان حل هذه المعادلة هو الحل الوحيد س = هـ ≈ ٢،٧١٨٢٨ وهذا هو العدد النيبري هـ وكان من الافضل ان نرمز له ب e

وبالتالي الاقتران الناتج هو الاقتران الطبيعي للاساس هـ

ويرمز له ب $ن(س) = لــو_{هـ}(س)$ وله خواص اللوغاريتم الطبيعي وهي

من اجل

أ $\succ$ ٠ ، ب $\succ$ ٠

$لــو_{هـ}(أ \times ب) = لــو_{هـ}(أ) + لــو_{هـ}(ب)$

$لــو_{هـ}\left(\frac{أ}{ب}\right) = لــو_{هـ}(أ) - لــو_{هـ}(ب)$

$لــو_{هـ}(أ)^{ن} = ن لــو_{هـ}(أ)$

$لــو_{هـ}(هـ) = 1$

$لــو_{هـ}(1) = ٠$

كذلك

مشتق اقتران لوغاريتمي يساوي مشتق مضمون اللوغاريتم على مضمون اللوغاريتم

$$(لــو_{هـ}(س))' = \frac{1}{س}$$

$$(لــو_{هـ}ن(س))' = \frac{ن'(س)}{ن(س)}$$

اما التكامل

$$\int \frac{1}{س} ءس = لــو_{هـ}|س| + جـ$$

$$\int \frac{ن'(س)}{ن(س)} ءس = لــو_{هـ}|ن(س)| + جـ$$

سندرس التكامل بشكل مفصل

تدريبات : اوجد مشتقة كل من

$$(١)\ \text{ت}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٣}) \Longrightarrow \text{ت}'(\text{س}) = \frac{٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}} = \frac{٣}{\text{س}}$$

$$(٢)\ \text{ت}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}+١) \Longrightarrow \text{ت}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$$

$$(٣)\ \text{ت}(\text{س}) = \text{س}^{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Longrightarrow \text{ت}'(\text{س}) = ٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{س}^{٢}\,\frac{١}{\text{س}}$$

$$(٤)\ \text{ت}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}^{٣}\text{س} \Longrightarrow \text{ت}'(\text{س}) = \frac{٣\,\text{جتاس}\,\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٣}\text{س}}$$

$$(٥)\ \text{ت}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظا}^{٣}\text{س} \Longrightarrow \text{ت}(\text{س}) = ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} \Longrightarrow \text{ت}'(\text{س}) = \frac{٣\,\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظاس}}$$

$$(٦)\ \text{ت}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}+١}\right) \Longrightarrow \text{ت}'(\text{س}) = \frac{\frac{\text{س}+١-\text{س}}{(\text{س}+١)^{٢}}}{\frac{\text{س}}{\text{س}+١}} = \frac{١}{\text{س}(\text{س}+١)}$$

$$(٧)\ \text{ت}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١| = \begin{cases} \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}-١) & \text{س} > ١ \\ \text{لو}_{\text{هـ}}(١-\text{س}) & \text{س} < ١ \end{cases} \Longrightarrow \text{ت}'(\text{س}) = \begin{cases} \frac{١}{\text{س}-١} & \text{س} > ١ \\ \frac{-١}{١-\text{س}} = \frac{١}{\text{س}-١} & \text{س} < ١ \end{cases}$$

الاقتران الاسي الطبيعي

الاقتران

$\text{لـو}: (\cdot ,\infty) \to \text{ع}$ هو اقتران واحد لواحد لانه متزايد تماما على الفترة $(\cdot ,\infty)$

$\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

$(\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س})' = \frac{1}{\text{س}} \succ \cdot$ ، $\text{س} \in (\cdot ,\infty)$

وبالتالي لهذا الاقتران اقتران عكسي هو الاقتران الاسي الطبيعي

$\text{لـو}^{-1}_{\text{هـ}}: \text{ح} \to (\cdot ,\infty)$

$\text{لـو}^{-1}_{\text{هـ}}\,\tilde{\text{ص}} = \tilde{\text{س}}$

اذا $\boxed{\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \Leftrightarrow \text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}}}$

نظرية مشتقة الاقتران $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

الاثبات

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftrightarrow \text{س} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} \\ \text{س} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} \Leftrightarrow 1 = \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} \Leftrightarrow \text{ص}' = \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \end{array}}$$

مشتق $\text{ن}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{م}(\text{س})} \Leftarrow \text{ن}'(\text{س}) = \text{م}'(\text{س})\,\text{هـ}^{\text{م}(\text{س})}$

خواص القوى للأساس الطبيعي

$\text{هـ}^{\cdot} = 1$

$\text{هـ}^{1} = \text{هـ}$

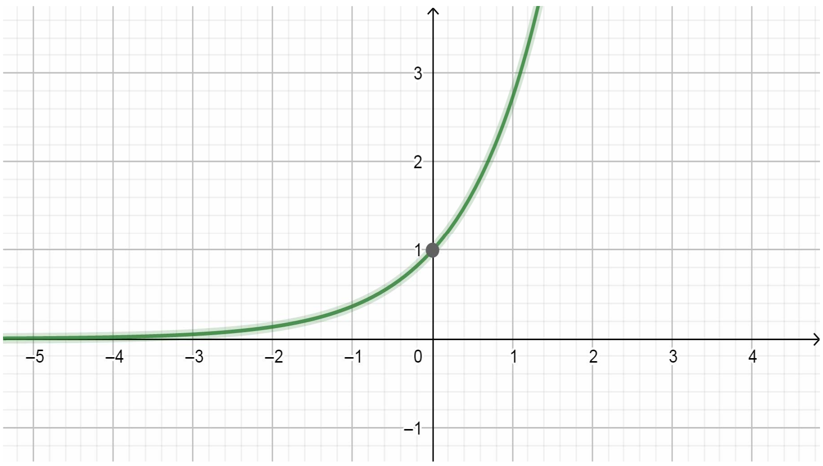
$\text{هـ}^{-1} = \frac{1}{\text{هـ}}$

$\text{هـ}^{\text{أ}}\,\text{هـ}^{\text{ب}} = \text{هـ}^{\text{أ}+\text{ب}}$

$\frac{\text{هـ}^{\text{أ}}}{\text{هـ}^{\text{ب}}} = \text{هـ}^{\text{أ}-\text{ب}}$

$(\text{هـ}^{\text{أ}})^{\text{ب}} = \text{هـ}^{\text{أ}\times\text{ب}}$

$\sqrt[\text{ن}]{\text{هـ}^{\text{أ}}} = \text{هـ}^{\frac{\text{أ}}{\text{ن}}}$



ويمكن ان نستنتج ان

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}} = \text{س} & \text{س} \in \text{ح} \\ \text{هـ}^{\text{لـو}(\text{س})} = \text{س} & \text{س} \in (\cdot ,\infty) \end{array}}$$

تدريبات اوجد مشتقة كل من

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^2+\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (2\text{س}+1)\,\text{هـ}^{\text{س}^2+\text{س}}$

$(٢)\ ص = \sqrt{هـ^{٢س} + هـ} \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢هـ^{٢س}}{٢\sqrt{هـ^{٢س}+هـ}}$

$(٣)\ ص = س^{س}$

$ص = هـ^{س لـوس} \Leftarrow ص' = \left(لـوس + س\frac{١}{س}\right)هـ^{س لـوس} = \left(لـوس + ١\right)س^{س}$

التكامل

$\int هـ^{س} ءس = هـ^{س} + جـ$

$\int م'(س)\, هـ^{م(س)} ءس = هـ^{م(س)} + جـ$

$\int هـ^{أس+ب} ءس = \frac{١}{أ} هـ^{أس+ب} + جـ$

تذكرة كل من التكاملات $س^{ن} هـ^{س}$ ، $لـو_{هـ} س$ ، $س^{ن} لـو_{هـ} س$ تكاملات بالاجزاء

جد التكاملات التالية

$(١) \int هـ^{٢س+١} ءس = \frac{١}{٢} هـ^{٢س+١} + جـ$

$(٢) \int سهـ^{س^{٢}} ءس = \frac{١}{٢}\int (س^{٢})' هـ^{س^{٢}} ءس = \frac{١}{٢} هـ^{س^{٢}} + جـ$

$(٣) \int هـ^{٢} ءس = هـ^{٢} س + جـ$

$(٣) \int جا٢س هـ^{جا^{٢}س} ءس = \int (جا^{٢}س)' هـ^{جا^{٢}س} ءس = هـ^{جا^{٢}س} + جـ$

$(٤) \int \frac{١}{س^{٢}} هـ^{\frac{٣}{س}} ءس = \frac{-١}{٣}\int \left(\frac{٣}{س}\right)' هـ^{\frac{٣}{س}} ءس = \frac{-١}{٣} هـ^{\frac{٣}{س}} + جـ$

$(٥) \int \frac{هـ^{س}+١}{هـ^{٢س}} ءس = \int هـ^{-س} + هـ^{-٢س} ءس = -هـ^{-س} + \frac{١}{-٢} هـ^{-٢س} + جـ$

اذا كان $هـ^{س ص} = س + ص$ اثبت ان $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١ - س ص - ص^{٢}}{س^{٢} + س ص - ١}$

الحل من الافضل ان ناخذ لوغاريتم الطرفين

$هـ^{س ص} = س + ص \Leftrightarrow لـو_{هـ} هـ^{س ص} = لـو_{هـ}(س + ص) \Leftrightarrow س ص = لـو_{هـ}(س + ص)$

$ص + س ص' = \frac{١ + ص'}{س + ص} \Leftrightarrow \left(ص + س ص'\right)(س + ص) = ١ + ص'$

$س ص + ص^{٢} + س^{٢} ص' + س ص ص' = ١ + ص'$

$س^{٢} ص' + س ص ص' - ص' = ١ - س ص - ص^{٢}$

$\left(س^{٢} + س ص - ١\right) ص' = ١ - س ص - ص^{٢}$

$ص' = \frac{١ - س ص - ص^{٢}}{\left(س^{٢} + س ص - ١\right)}$

كيف نتعامل مع الكسور

١- اذا كان البسط مشتق المقام فان التكامل هو لوغاريتم القيمة المطلقة للمقام
٢- اذا كانت درجة البسط اكبر او تساوي درجة المقام نقسم البسط على المقام
٣- اذا لم يكن ايا من الحالات السابق علينا ان نحاول تفريق الكسر

مثال :

فرق الكسر $\dfrac{1}{\text{س}^2 - 4\text{س} + 3}$

نحلل المقام $\dfrac{1}{(\text{س}-3)(\text{س}-1)}$

م نكتب الكسر بالشكل $\dfrac{1}{(\text{س}-3)(\text{س}-1)} = \dfrac{\text{ا}}{(\text{س}-3)} + \dfrac{\text{ب}}{(\text{س}-1)}$

نوحد المقامات $\dfrac{1}{(\text{س}-3)(\text{س}-1)} = \dfrac{\text{ا}(\text{س}-1) + \text{ب}(\text{س}-3)}{(\text{س}-3)(\text{س}-1)}$

$$= \dfrac{\text{اس} - \text{ا} + \text{بس} - 3\text{ب}}{(\text{س}-3)(\text{س}-1)} = \dfrac{(\text{ا}+\text{ب})\text{س} + (-\text{ا} - 3\text{ب})}{(\text{س}-3)(\text{س}-1)}$$

تطابق بسط الكسر الاخير مع البسط الاول

$$(\text{ا}+\text{ب})\text{س} + (-\text{ا}-3\text{ب}) \equiv 1$$
$$(\text{ا}+\text{ب})\text{س} + (-\text{ا}-3\text{ب}) \equiv 0\text{س} + 1$$
$$\text{ا} + \text{ب} = 0$$
$$-\text{ا} - 3\text{ب} = 1$$
$$4\text{ب} = 1 \Leftarrow \text{ب} = \tfrac{1}{4} \quad \text{ا} = -\tfrac{1}{4}$$

$$\dfrac{1}{\text{س}^2 - 4\text{س} + 3} = \dfrac{\frac{-1}{4}}{\text{س}-3} + \dfrac{\frac{1}{4}}{\text{س}-1} = \dfrac{-1}{4}\,\dfrac{1}{\text{س}-3} + \dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{\text{س}-1}$$

احسب التكامل

$$\int \dfrac{1}{\text{س}^2 - 4\text{س} + 3}\,\text{دس} = \int \dfrac{-1}{4}\,\dfrac{1}{\text{س}-3}\,\text{دس} + \int \dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{\text{س}-1}\,\text{دس} =$$

$$= \dfrac{1}{-4}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-3| + \dfrac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1| = \dfrac{1}{4}\left(\text{لو}_{\text{هـ}} \dfrac{|\text{س}-1|}{|\text{س}-3|}\right)$$

$$(1)\ \int \dfrac{2\text{س}}{\text{س}^2+5}\,\text{دس} = \int \dfrac{(\text{س}^2+5)'}{\text{س}^2+5}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^2+5| + \text{جـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^2 + 5 + \text{جـ}$$

$$(2)\ \int \dfrac{6}{\text{س}}\,\text{دس} = 6\int \dfrac{1}{\text{س}}\,\text{دس} = 6\int \dfrac{\text{دس}}{\text{س}} = 6\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$$

$$(3)\ \int \dfrac{\text{س}+1}{\text{س}}\,\text{دس} = \int 1 + \dfrac{1}{\text{س}}\,\text{دس} = \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$$

(٤) $\int \frac{١}{س\,لـو_{هـ} س}\,ءس = \int \frac{\frac{١}{س}}{لـو_{هـ} س}\,ءس = \int \frac{(لـو_{هـ} س)'}{لـو_{هـ} س}\,ءس = لـو_{هـ} |لـو_{هـ} س| + جـ$

تدريب محلول (١) :

اوجد قيمة التكامل $\int \frac{س+٢}{س-١}\,ءس$

نقسم البسط على المقام لان درجة البسط اكبر او تساوي درجة المقام

$$\int \frac{س+٢}{س-١}\,ءس = \int \frac{(س-١)+٣}{س-١}\,ءس = \int ١ + \frac{٣}{س-١}\,ءس = س + ٣لـو_{هـ}|س-١| + جـ$$

(٢) $\int \frac{هـ^{٢س}+٢}{هـ^{س}-١}\,ءس$

نقسم البسط على المقام لان درجة البسط اكبر او تساوي درجة المقام

$$\begin{array}{r|l} هـ^{س}+١ & \\ \hline هـ^{٢س}+٢ & هـ^{س}-١ \\ هـ^{٢س}-هـ^{س} & \\ ٠+هـ^{س}+٢ & \\ ٠+هـ^{س}-١ & \\ ٠+٠+٣ & \\ ٠+٠+٣ & \end{array}$$

$$\int \frac{هـ^{٢س}+٢}{هـ^{س}-١}\,ءس = \int هـ^{س}+١+\frac{٣}{هـ^{س}-١}\,ءس = هـ^{س}+س+\int \frac{٣}{هـ^{س}-١}\,ءس$$

لنجد $\int \frac{٣}{هـ^{س}-١}\,ءس$

نفرض

$هـ^{س}-١ = ص \Leftrightarrow هـ^{س} = ص+١ \Leftrightarrow س = لـو|ص+١|$

$هـ^{س}ءس = ءص \Leftrightarrow ءس = \frac{ءص}{ص+١}$

$\int \frac{٣}{هـ^{س}-١}\,ءس = ٣\int \frac{١}{ص}\frac{ءص}{ص+١}$ تفريق كسور

$$\frac{٣}{ص(ص+١)} = \frac{أ}{ص+١} + \frac{ب}{ص} = \frac{أص+بص+ب}{ص(ص+١)} = \frac{(أ+ب)ص+ب}{ص(ص+١)}$$

$أ+ب = ٠ و ب = ٣ \quad ، \quad أ = -٣$

$$\int \frac{٣}{هـ^{س}-١}\,ءس = \int \frac{١}{ص}\frac{٣}{ص+١}\,ءص = \int \frac{-٣}{ص+١}\,ءص + \int \frac{٣}{ص}\,ءص$$

$$= -٣لـو|ص+١| + ٣لـو|ص| + جـ = ٣لـو\left|\frac{ص}{ص+١}\right| + جـ = ٣لـو\left|\frac{هـ^{س}-١}{هـ^{س}}\right| + جـ$$

اذا $\int \frac{هـ^{٢س}+٢}{هـ^{س}-١}\,ءس = \int هـ^{س}+١+\frac{٣}{هـ^{س}-١}\,ءس = هـ^{س}+س+٣لـو\left|\frac{هـ^{س}-١}{هـ^{س}}\right| + جـ$

طريقة ثانية لحساب التكامل

$$\int \frac{٣}{\text{هـ}^{\text{س}}-١}\,\text{ءس} = -٣\int \frac{-١}{\text{هـ}^{\text{س}}-١}\,\text{ءس} = -٣\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}-١-\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}-١}\,\text{ءس} = -٣\int ١-\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}\,\text{ءس}$$

$$= -٣\text{س} + ٣\text{لو}\left(\text{هـ}^{\text{س}}+١\right)+\text{جـ}$$

طريقة أخرى لحساب $\int \frac{٣}{\text{هـ}^{\text{س}}-١}\,\text{ءس}$ نضرب البسط والمقام ب $\text{هـ}^{-\text{س}}$ نجد

$$\int \frac{٣\text{هـ}^{-\text{س}}}{١-\text{هـ}^{-\text{س}}}\,\text{ءس} = ٣\int \frac{\left(١-\text{هـ}^{-\text{س}}\right)'}{١-\text{هـ}^{-\text{س}}}\,\text{ءس} = ٣\text{لو}\left|١-\text{هـ}^{-\text{س}}\right|+\text{جـ}$$

ملاحظة هنالك اختلاف فقط بالشكل بالنتيجة الأخيرة وبعد التبسيط ستكون نفس الشكل

تدريب ()

$$\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}-١}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}-١}\,\text{ءس}$$

نفرض

$$\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}} \Leftrightarrow \text{ص}^{٣} = \text{س} \Leftrightarrow ٣\text{ص}^{٢}\text{ءص} = \text{ءس}$$

$$\text{ص}^{٢} = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$$

$$\int \frac{\text{ص}-١}{\text{ص}^{٢}-١}\,٣\text{ص}^{٢}\text{ءص} = ٣\int \frac{\text{ص}^{٢}-١+١}{\text{ص}+١}\,\text{ءص} = ٣\int \text{ص}-١+\frac{١}{\text{ص}+١}\,\text{ءص} =$$

$$= \frac{٣}{٢}\text{ص}^{٢} - \text{ص} + \text{لو}|\text{ص}+١| + \text{جـ} = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} - \sqrt[٣]{\text{س}} + \text{لو}\left|\sqrt[٣]{\text{س}}+١\right| + \text{جـ}$$

٢- $$\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٥\text{ظا}^{٢}\text{س}-٣\text{ظاس}-٢}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\left(\text{ظاس}-١\right)\left(٥\text{ظاس}+٢\right)}\,\text{ءس}$$

$$\text{ظاس} = \text{ص} \Leftrightarrow \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} = \text{ءص}$$

$$\int \frac{١}{(\text{ص}-١)(٥\text{ص}+٢)}\,\text{ءص}$$

$$\frac{١}{(\text{ص}-١)(٥\text{ص}+٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-١} + \frac{\text{ب}}{٥\text{ص}+٢} = \frac{(٥\text{أ}+\text{ب})\text{ص}+٢\text{أ}-\text{ب}}{(\text{ص}-١)(٥\text{ص}+٢)}$$

$$\begin{cases} ٥\text{أ}+\text{ب} = ٠ \\ ٢\text{أ}-\text{ب} = ١ \end{cases} ٧\text{أ} = ١ \Leftrightarrow \text{أ} = \frac{١}{٧} \quad ، \quad \text{ب} = \frac{-٥}{٧}$$

$$\int \frac{١}{(\text{ص}-١)(٥\text{ص}+٢)}\,\text{ءص} = \frac{١}{٧}\int \frac{١}{\text{ص}-١}\,\text{ءص} - \frac{٥}{٧}\int \frac{١}{٥\text{ص}+٢}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٧}\text{لو}|\text{ص}-١| - \frac{٥}{٧}\text{لو}|٥\text{ص}+٢| + \text{جـ} = \text{لو}|\text{ظاس}-١| - \frac{٥}{٧}\text{لو}|٥\text{ظاس}+٢| + \text{جـ}$$

تمارين ومسائل

(١) $$\int \frac{\text{ءس}}{(\text{س}-٤)(\text{س}+١)}$$

$$\frac{1}{(\text{س}-4)(\text{س}+1)} = \frac{\text{أ}}{(\text{س}-4)} + \frac{\text{ب}}{(\text{س}+1)} = \frac{(\text{أ}+\text{ب})\text{س} + \text{أ} - 4\text{ب}}{(\text{س}-4)(\text{س}+1)}$$

$\text{أ} + \text{ب} = 0$

$\text{أ} - 4\text{ب} = 1$

$\text{ب} = \frac{-1}{5}$ ، $\text{أ} = \frac{1}{5}$

$$(1)\ \int \frac{\text{دس}}{(\text{س}-4)(\text{س}+1)} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\text{س}-4}\,\text{دس} - \frac{1}{5}\int \frac{1}{\text{س}+1}\,\text{دس}$$

$$= \frac{1}{5}\text{لـو}|\text{س}-4| - \frac{1}{5}\text{لـو}|\text{س}+1| + \text{جـ} = \frac{1}{5}\text{لـو}\left|\frac{\text{س}-4}{\text{س}+1}\right| + \text{جـ}$$

$$(2)\ \int \frac{4\text{س}-1}{\text{س}^2+\text{س}-2}\,\text{دس} = \int \frac{4\text{س}-1}{(\text{س}-1)(\text{س}+2)}\,\text{دس}$$

$$\frac{4\text{س}-1}{(\text{س}-1)(\text{س}+2)} = \frac{\text{أ}}{(\text{س}-1)} + \frac{\text{ب}}{(\text{س}+2)} = \frac{(\text{أ}+\text{ب})\text{س} + 2\text{أ} - \text{ب}}{(\text{س}-1)(\text{س}+2)}$$

$\text{أ} + \text{ب} = 4$

$2\text{أ} - \text{ب} = -1$

$\text{أ} = 1$ ، $\text{ب} = 3$

$$\int \frac{4\text{س}-1}{\text{س}^2+\text{س}-2}\,\text{دس} = \int \frac{1}{\text{س}-1}\,\text{دس} + \int \frac{3}{\text{س}+2}\,\text{دس} = \text{لـو}|\text{س}-1| + 3\text{لـو}|\text{س}+2| + \text{جـ}$$

ملاحظة المتطابقة معادلة صحيحة من اجل كل قيم مجموعة التعويض اما المعادلة فهي صحيحة من اجل بعض قيم مجموعة التعويض

$$(3)\ \int \frac{2\text{س}^2+3}{\text{س}^2-\text{س}}\,\text{دس}$$

درجة البسط اكبر او تساوي درجة المقام نقسم البسط على المقام

$$\begin{array}{r|l} 2 & \\ \hline 2\text{س}^2 + 3 & \text{س}^2 - \text{س} \\ 2\text{س}^2 - 2\text{س} & \\ 2\text{س} + 3 & \end{array}$$

$$\int \frac{2\text{س}^2+3}{\text{س}^2-\text{س}}\,\text{دس} = \int 2 + \frac{2\text{س}+3}{\text{س}(\text{س}-1)}\,\text{دس}$$ نفرق الكسر

$$(4)\ \int \frac{\text{س}^3+4\text{س}-8}{\text{س}^2-9}\,\text{دس}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{س} & \\ \hline \text{س}^3 + 4\text{س} - 8 & \text{س}^2 - 9 \\ \text{س}^3 - 9\text{س} & \\ 0 + 13\text{س} - 8 & \end{array}$$

$$\int \frac{\text{س}^3+4\text{س}-8}{\text{س}^2-9}\,\text{دس} = \int \text{س} + \frac{13\text{س}-8}{(\text{س}+3)(\text{س}-3)}\,\text{دس}$$ نفرق الكسر

$$(٥)\quad \int \frac{\sqrt{\text{س}-٢}+١}{\sqrt{\text{س}-٢}-١}\,\text{ءس} =$$

$$\sqrt{\text{س}-٢}=\text{ص} \Leftrightarrow \text{س}-٢=\text{ص}^{٢}$$

$$\text{ءس} = ٢\text{ص}\,\text{ءص}$$

$$\int \frac{\text{ص}+١}{\text{ص}-١}\,٢\text{ص}\,\text{ءص} = ٢\int \frac{\text{ص}^{٢}+\text{ص}}{\text{ص}-١}\,\text{ءص} = ٢\int \frac{\text{ص}^{٢}-١+\text{ص}-١+١+٢}{\text{ص}-١}\,\text{ءص} =$$

$$٢\int \text{ص}+٢+\frac{٢}{\text{ص}-١}\,\text{ءص} = ٢\left(\frac{\text{ص}^{٢}}{٢}+٢\text{ص}+٢\text{لـو}|\text{س}-١|\right)+\text{جـ}$$

$$(٦)\quad \int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}-٤}\,\text{ءس}$$

$$\sqrt{\text{س}}=\text{ص} \Leftrightarrow \text{س}=\text{ص}^{٢}$$

$$\text{ءس} = ٢\text{ص}\,\text{ءص}$$

$$\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}-٤}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{ص}}{\text{ص}^{٢}-٤}\,٢\text{ص}\,\text{ءص} = \int \frac{٢\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢}-٤}\,\text{ءص} = ٢\int \frac{\text{ص}^{٢}-٤+٤}{\text{ص}^{٢}-٤}\,\text{ءص} = ٢\int ١+\frac{٤}{\text{ص}^{٢}-٤}\,\text{ءص}$$

$$= \int ١+\frac{٤}{(\text{ص}-٢)(\text{ص}+٢)}\,\text{ءص}$$

ثم تفريق كسور

$$(٧)\quad \int \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}}-٣\text{هـ}^{\text{س}}-٤}\,\text{ءس} =$$

$$\text{هـ}^{\text{س}}=\text{ص} \Leftrightarrow \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}=\text{ءص}$$

$$\int \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}}-٣\text{هـ}^{\text{س}}-٤}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{ص}^{٣}}{\text{ص}^{٢}-٣\text{ص}-٤}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ص}} = \int \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢}-٣\text{ص}-٤}\,\text{ءص}$$

نقسم البسط على المقام ثم نفرق الكسور

$$(٨)\quad \int \frac{\text{س}\,\text{ءس}}{\text{س}^{٤}+\text{س}^{٢}} = \int \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{٣}+\text{س}} = \int \frac{\text{ءس}}{\text{س}(\text{س}^{٢}+١)}$$

$$\frac{١}{\text{س}(\text{س}^{٢}+١)} = \frac{\text{ا}}{\text{س}}+\frac{\text{ب}\text{س}+\text{جـ}}{\text{س}^{٢}+١} = \frac{(\text{ا}+\text{ب})\text{س}^{٢}+\text{جـ}\text{س}+\text{ا}}{\text{س}(\text{س}^{٢}+١)}$$

$$\text{ا}+\text{ب}=٠$$

$$\text{جـ}=٠$$

$$\text{ا}=١ \Leftrightarrow \text{ب}=-١$$

$$\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}(\text{س}^{٢}+١)} = \int \frac{\text{ءس}}{\text{س}} - \frac{١}{٢}\int \frac{٢\text{س}\,\text{ءس}}{(\text{س}^{٢}+١)} = \text{لـو}|\text{س}| - \frac{١}{٢}\text{لـو}|\text{س}^{٢}+١|+\text{جـ}$$

التكامل المحدد

خواص التكامل المحدد

(١) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{جـ} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

(٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\text{ق}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س})\right)\text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس}$

(٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

(٤) اذا كانت هـ ، ق اقترانين قابلين للتكامل على [أ ،ب] وكان

ايا كانت س∈[أ،ب]فان $\text{ق}(\text{س}) \le \text{هـ}(\text{س})$

عندئذ $\int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} \le \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس}$

هذه الخاصة ندعوها الحصر وهي هامة

أما الخاصة (٣) ندعوها الإضافة وهي تستخدم في القيم المطلقة والاقتران على فترات المتشعبة وفي حساب المساحات

(٥) $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٠$

(٦) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

تطبيق على خاصية الحصر

ملاحظة اذا كان الاقتران يمتلك قيمة كبرى مطلقة ك وقيمة صغرى مطلقة م

$\text{ق}(\text{س})$ فان $\text{م} \le \text{ق}(\text{س}) \le \text{ك}$

وهنالك نظرية تقول ان كل اقتران متصل على فترة مغلقة هو اقتران محدود ويبلغ كل من حديه الاعلى والادنى

لحصر اقتران علينا ان نستخدم خواص المتباينات

مثال احصر التركيب $\text{ق}(\text{س}) = ٢ + \frac{١}{\text{س}}$

عندما س∈[١،٤]

$$\text{ق}(\text{س}) = ٢ + \frac{١}{\text{س}}$$

$$\text{س} \in [١،٤] \Leftarrow \frac{١}{\text{س}} \in \left[\frac{١}{٤}،١\right]$$

$$٢ + \frac{١}{\text{س}} \in \left[٢ + \frac{١}{٤}،١ + ٢\right] = \left[٢\frac{١}{٤}،٣\right]$$

مثال

احصر التركيب $ى(س) = ١ - ٢ جتاس$ ، $س \in ع$

$س \in ح \Leftarrow -١ \le جتاس \le ١ \Leftrightarrow -٢ \le -٢ جتاس \le ٢ \Leftrightarrow ١ - ٢ \le ١ - ٢ جتاس \le ١ + ٢$

$-١ \le ١ - ٢ جتاس \le ٣$

مثال :

احصر التركيب

$$ى(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}} \quad ، \quad س \in [-٢،٢]$$

الحل :

$س \in [-٢،٢] \Leftarrow س^{٢} \in [٠،٤]$

$-س^{٢} \in [-٤،٠] \Leftarrow ٤ - س^{٢} \in [٠،٤]$

$\sqrt{٤ - س^{٢}} \in [٠،٢]$

مثال : احصر التركيب $ى(س) = جتا\sqrt{س}$ ، $س \in \left[٠،\frac{\pi}{٤}\right]$

$س \in \left[٠،\frac{\pi}{٤}\right] \Leftarrow \sqrt{س} \in \left[٠،\frac{\sqrt{\pi}}{٢}\right] \subset \left[٠،\frac{\pi}{٢}\right]$

$جتا\sqrt{س} \subset [٠،١] \Leftarrow جتا\sqrt{س} \ge ٠$

تمارين ومسائل

$$(أ) \int_{٠}^{٣} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+٢}} ءس = \int_{٠}^{٣} \frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}+٢}} ءس = \left[\sqrt{س^{٢}+٢}\right]_{٠}^{٣} = \sqrt{١١} - ٠ = \sqrt{١١}$$

$$(ب) \int \frac{١}{س^{٢}+٦س+٩} ءس = \int \frac{١}{(س+٣)^{٢}} ءس = \int (س+٣)^{-٢} ءس = \frac{(س+٣)^{-١}}{-١} + جـ$$

$$(هـ) \int_{١}^{٠} \sqrt{س^{٢} - ١٠س + ٢٥} ءس = \int_{١}^{٠} \sqrt{(س-٥)^{٢}} ءس = \int_{١}^{٠} |(س-٥)| ءس = \left[-\frac{س^{٢}}{٢} + ٥\right]_{١}^{٠}$$

$$= ٠ - \left(٤\frac{١}{٢}\right) = \frac{-٩}{٢}$$

بين ان $٠ \le \int_{-١}^{١} ى(س) ءس \le ٤$

الحل :

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}^{٢}+١} \quad ، \quad \text{س} \in [-١،١]$$

$$\text{س} \in [-١،١] \Leftarrow \text{س}^{٢} \in [٠،١]$$

$$\text{س}^{٢}+١ \in [١،٢] \Leftarrow \frac{٢}{\text{س}^{٢}+١} \in [١،٢]$$

$$١ \leq \text{ق}(\text{س}) \leq ٢$$

$$\int_{-١}^{١} ١\,\text{ءس} \leq \int_{-١}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} \leq \int_{-١}^{١} ٢\,\text{ءس}$$

$$٢ \leq \int_{-١}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} \leq ٤$$

$$\int_{٠}^{٣} [٢-\text{س}]\,\text{ءس} =$$

نعيد تعريف

$$[٢-\text{س}] = \begin{cases} ٢ & \text{س} = ٠ \\ ١ & ٠ < \text{س} \leq ١ \\ ٠ & ١ < \text{س} \leq ٢ \\ -١ & ٢ < \text{س} \leq ٣ \end{cases}$$

$$\int_{٠}^{٣} [٢-\text{س}]\,\text{ءس} = \int_{٠}^{٠} ٢\,\text{ءس} + \int_{٠}^{١} ١\,\text{ءس} + \int_{١}^{٢} ٠\,\text{ءس} + \int_{٢}^{٣} -١\,\text{ءس}$$

$$\int_{٠}^{٣} [٢-\text{س}]\,\text{ءس} = ٠ + [\text{س}]_{٠}^{١} + [٠]_{١}^{٢} + [-\text{س}]_{٢}^{٣}$$

$$\int_{٠}^{٣} [٢-\text{س}]\,\text{ءس} = ٠ + ١ + ٠ + (-١) = ٠$$

ملاحظة هذا التكامل يدعى التكامل المعتل ويجب ان يحل بالشكل التالي

$$\int_{٠}^{٣} [٢-\text{س}]\,\text{ءس} = \int_{٠}^{٠} ٢\,\text{ءس} + \lim_{\text{ء} \to ٠^{+}} \int_{\text{ء}}^{١} ١\,\text{ءس} + \lim_{\text{أ} \to ١^{+}} \int_{\text{أ}}^{٢} ٠\,\text{ءس} + \lim_{\text{ب} \to ٢^{+}} \int_{\text{ب}}^{٣} -١\,\text{ءس}$$

$$\int_{٠}^{٣} [٢-\text{س}]\,\text{ءس} = ٠ + \lim_{\text{ء} \to ٠^{+}} [١-\text{ء}] + \lim_{\text{أ} \to ١^{+}} [٠] + \lim_{\text{ب} \to ٢^{+}} [-٣+\text{ب}]$$

$$\int_{٠}^{٣} [٢-\text{س}]\,\text{ءس} = ٠ + ١ + ٠ + -١ = ٠$$

تدريب اذا كان $\int_{٠}^{٢} \left(ن(س) - ٢س\right) ءس = ٢٠$

جد $\int_{٠}^{٢} ٣ن(س)\, ءس$

الحل $\int_{٠}^{٢} \left(ن(س) - ٢س\right) ءس = ٢٠$

$$\int_{٠}^{٢} ن(س)\, ءس + \left[-س^{٢}\right]_{٠}^{٢} = ٢٠$$

$$\int_{٠}^{٢} ن(س)\, ءس - ٤ = ٢٠$$

$$\int_{٠}^{٢} ن(س)\, ءس = ٢٤$$

$$\int_{٠}^{٢} ٣ن(س)\, ءس = ٧٢$$

مراجعة

جد التكاملات الآتية

(أ) $\int_{٢}^{٣} \sqrt{٤س+١}\, ءس = \int_{٢}^{٣} (٤س+١)^{\frac{١}{٢}}\, ءس = \left[\frac{(٤س+١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤\,\frac{٣}{٢}}\right]_{٢}^{٣} = \frac{١}{٦}\left[\sqrt{(٤س+١)^{٣}}\right]_{٢}^{٣}$

$= \frac{١}{٦}\left(١٣\sqrt{١٣} - ٢٧\right)$

(ب) $\int_{١}^{٣} \frac{(س+١)^{٧}}{س^{٩}}\, ءس = \int_{١}^{٣} \frac{١}{س^{٢}}\left(\frac{س+١}{س}\right)^{٧} ءس = \int_{١}^{٣} \frac{١}{س^{٢}}\left(١+\frac{١}{س}\right)^{٧} ءس$

$ص = ١ + \frac{١}{س} \Leftarrow ءص = \frac{-١}{س^{٢}}\, ءس$

$س = ١ \Leftarrow ص = ٢، س = ٣ \Leftarrow ص = \frac{٤}{٣}$

$$\int_{١}^{٣} \frac{١}{س^{٢}}\left(١+\frac{١}{س}\right)^{٧} ءس = -\int_{٢}^{\frac{٤}{٣}} ص^{٧}\, ءص = -\left[\frac{ص^{٨}}{٨}\right]_{٢}^{\frac{٤}{٣}} = -\frac{١}{٨}\left(\frac{٤}{٣}\right)^{\frac{٤}{٣}} + ٣٢$$

$$(\text{جـ})\ \int_{1}^{4} \left|\text{س}^{2} - 9\right| \text{ءس} = -\int_{1}^{3} \left(\text{س}^{2} - 9\right) \text{ءس} + \int_{3}^{4} \left(\text{س}^{2} - 9\right) \text{ءس}$$

$$= -\left[\frac{\text{س}^{3}}{3} - 9\text{س}\right]_{1}^{3} + \left[\frac{\text{س}^{3}}{3} - 9\text{س}\right]_{3}^{4} = -\left(-18 - \left(\frac{1}{3} - 9\right)\right) + \left(\left(\frac{64}{3} - 36\right) + 18\right)$$

$$(\text{ء})\ \int_{1}^{7} \left[\frac{1}{3}\text{س} - 2\right] \text{ءس}$$

نعيد تعريف الاقتران

طول الدرجة $\text{ل} = 3$

$$\left[\frac{1}{3}\text{س} - 2\right] = \begin{cases} -2 & \text{،} \ 1 \le \text{س} < 3 \\ -1 & \text{،} \ 3 \le \text{س} < 6 \\ 0 & \text{،} \ 6 \le \text{س} \le 7 \end{cases}$$

$$\int_{1}^{7} \left[\frac{1}{3}\text{س} - 2\right] \text{ءس} = \int_{1}^{3} -2\,\text{ءس} + \int_{3}^{6} -1\,\text{ءس} + \int_{6}^{7} 0\,\text{ءس} = -4 - 3 + 0 = -7$$

$$(\text{ي})\ \int \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{10} + \text{س}} = \int \frac{\text{ءس}}{\text{س}\left(\text{س}^{9} + 1\right)}$$

$$\text{س}^{9} + 1 = \text{ص} \Leftarrow \text{س}^{9} = \text{ص} - 1$$

$$\text{ءص} = 9\text{س}^{8}\,\text{ءس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{1}{9\text{س}^{8}}\,\text{ءص}$$

$$\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}\left(\text{س}^{9} + 1\right)} = \int \frac{\text{ءص}}{\text{س}\,\text{ص}\,9\text{س}^{8}} = \int \frac{\text{ءص}}{9\text{ص}\left(\text{ص} - 1\right)}$$

$$\frac{1}{\text{ص}\left(\text{ص} - 1\right)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} - 1} = \frac{\left(\text{أ} + \text{ب}\right)\text{ص} - \text{أ}}{\text{ص}\left(\text{ص} - 1\right)}$$

$$\text{أ} + \text{ب} = 0 \text{، } \text{أ} = -1 \Leftarrow \text{ب} = 1$$

$$\int \frac{\text{ءص}}{9\text{ص}\left(\text{ص} - 1\right)} = \frac{1}{9}\int \frac{-1}{\text{ص}}\,\text{ءص} + \frac{1}{9}\int \frac{\text{ءص}}{\text{ص} - 1} = \frac{-1}{9}\text{لـو}\left|\text{ص}\right| + \frac{1}{9}\text{لـو}\left|\text{ص} - 1\right| + \text{جـ}$$

$$= \frac{-1}{9}\text{لـو}\left|\text{س}^{9} + 1\right| + \frac{1}{9}\text{لـو}\left|\text{س}^{9}\right| + \text{جـ}$$

اذا كان $\int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{س}^{2} - 2\text{س} + 3$ (٢) جد $\text{ق}'(2)$

الحل :

نشتق الطرفين

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{س}^{2} - 2\text{س} + 3\right)$$

$$\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س} - 2$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = 2$$

(٣) جد كثير الحدود $\text{ق}(\text{س})$ من الدرجة الاولى بحيث يكون

$$\int_{-١}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٤ \quad ، \quad \int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢$$

الحل الاقتران من الشكل $\text{ق}(\text{س}) = \text{أس} + \text{ب}$

$$\left\{\begin{array}{l} \int_{-١}^{١} (\text{أس} + \text{ب})\,\text{ءس} = ٤ \\ \left[\frac{١}{٢}\text{أس}^{٢} + \text{سب}\right]_{-١}^{١} = ٤ \\ \frac{١}{٢}\text{أ} + \text{ب} - \frac{١}{٢}\text{أ} + \text{ب} = ٤ \\ ٢\text{ب} = ٤ \Leftarrow \text{ب} = ٢ \end{array}\right\} \quad ، \quad \left\{\begin{array}{l} \int_{١}^{٣} (\text{أس} + \text{ب})\,\text{ءس} = ٢ \\ \left[\frac{١}{٢}\text{أس}^{٢} + \text{سب}\right]_{١}^{٣} = ٢ \\ \frac{٩}{٢}\text{أ} + ٢ - \frac{١}{٢}\text{أ} - ٢ = ٢ \\ ٥\text{أ} = ٢ \Leftarrow \text{أ} = \frac{٢}{٥} \end{array}\right\}$$

٢) اذا كان $\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٦$ ، $\int_{١}^{٣} ٢\text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس} = ١٠$ جد

$$\int_{٣}^{١} \left(\text{هـ}(\text{س}) - ٢\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س} - ٤\right)\text{ءس} = ٦$$

الحل :

$$\int_{٣}^{١} \left(\text{هـ}(\text{س}) - ٢\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س} - ٤\right)\text{ءس} = ٦$$

$$\left(\int_{٣}^{١} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس} - ٢\int_{٣}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{٣}^{١} (٢\text{س} - ٤)\,\text{ءس}\right) = ٦$$

$$-٥ + ٦ + \left[\text{س}^{٢} - ٤\text{س}\right]_{٣}^{١} = ١ + - ٣ + ٣ = ١$$

٢)تدريبات

جد $\int \left(\text{س}^{٢}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س}^{٣}\right)\text{ءس}$

حسب خواص اللوغاريتم نجد

$$\int \left(\text{س}^{٢}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س}^{٣}\right)\text{ءس} = \int \left(٣\text{س}^{٢}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س}\right)\text{ءس}$$

تجزئة

$\text{ن} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \Leftarrow \text{دن} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس} ،\ \text{ده} = \text{س}^{\text{ن}}\,\text{دس} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{1}{\text{ن}+1}\,\text{س}^{\text{ن}+1}$

$= ٣\int \left(\text{س}^{\text{ن}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)\text{دس} = ٣\left[\frac{1}{\text{ن}+1}\,\text{س}^{\text{ن}+1}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right] - ٣\int \frac{1}{\text{ن}+1}\,\text{س}^{\text{ن}+1}\,\frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$= ٣\left[\frac{1}{\text{ن}+1}\,\text{س}^{\text{ن}+1}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right] - ٣\,\frac{1}{(\text{ن}+1)^{2}}\,\text{س}^{\text{ن}+1} + \text{جـ}$

(د) $\int \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)^{2}\text{دس}$

$\text{ن} = \left(\text{لوس}\right)^{2} \Leftarrow \text{دن} = ٢\,\frac{1}{\text{س}}\,\text{لوس}\,\text{دس} ،\ \text{ده} = ١\,\text{دس} \Leftarrow \text{هـ} = \text{س}$

$\int \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)^{2}\text{دس} = \left[\text{س}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)^{2}\right] - \int \text{س}\,٢\,\frac{1}{\text{س}}\,\text{لوس}\,\text{دس} = \left[\text{س}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)^{2}\right] - \int ٢\,\text{لوس}\,\text{دس}$

$\int ٢\,\text{لوس}\,\text{دس} = ٢\text{س}\,\text{لوس} - ٢\text{س}$

$\left[\text{س}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)^{2}\right] - ٢\text{س}\,\text{لوس} + ٢\text{س} + \text{جـ}$

ليكن الاقتران ص = ق(س) القابل للاشتقاق مرة واحدة على الأقل
كل معادلة تحوي مشتقا على الاقل للاقتران ق تدعى معادلة تفاضلية
مثال

$\text{ص}'' + ٣\text{ص}' - \text{ص} = ٠$ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية والدرجة الاولى

مثال $\left(\text{ص}'''\right)^{٢} + \left(\text{ص}'\right)^{٣} + ٢ = ٠$ معادلة تفاضلية من المرتبة الثالثة والدرجة الثانية

لاحظ ناخذ درجة اعلى مرتبة
ملاحظة : المعادلات في الكتاب كلها نموذج فصل المتغيرات
مثال حل المعادلة التفاضلية

$$٢\text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{ءص} + \text{ص}^{٢}\,\text{ءس} = ٢\,\text{ءص}$$

الحل :

$$٢\text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{ءص} + \text{ص}^{٢}\,\text{ءس} = ٢\,\text{ءص}$$

$$٢\text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{ءص} - ٢\,\text{ءص} = \text{ص}^{٢}\,\text{ءس}$$

$$\left(٢\text{جا}^{٢}\text{س} - ٢\right)\text{ءص} = \text{ص}^{٢}\,\text{ءس}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ص}^{٢}} = \frac{\text{ءس}}{\left(٢\text{جا}^{٢}\text{س} - ٢\right)}$$

$$\int \frac{\text{ءص}}{\text{ص}^{٢}} = \int \frac{\text{ءس}}{٢\left(\text{جا}^{٢}\text{س} - ١\right)}$$

$$\int \frac{\text{ءص}}{\text{ص}^{٢}} = \frac{-١}{٢} \int \frac{\text{ءس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$$

$$\frac{-١}{\text{ص}} = \frac{-١}{٢}\text{ظاس} + \text{جـ}$$

$$\text{ص} = \frac{٢}{\text{ظاس} + \text{جـ}_{١}}$$

حل المعادلة \

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \sqrt{\frac{\text{س}}{\text{ص}}}$$

الحل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \sqrt{\frac{\text{س}}{\text{ص}}} \Leftrightarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ص}}} \Leftrightarrow \sqrt{\text{ص}}\,\text{ءص} = \sqrt{\text{س}}\,\text{ءس}$

$$\int \sqrt{\text{ص}}\,\text{ءص} = \int \sqrt{\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$٢\frac{\sqrt{\text{ص}^{٣}}}{٣} = ٢\frac{\sqrt{\text{س}^{٣}}}{٣} + \text{جـ}$$

$$\sqrt{\text{ص}^{٣}} = \sqrt{\text{س}^{٣}} + \text{جـ}\frac{٣}{٢}$$

$$\text{ص}^{٣} - \text{س}^{٣} = \text{جـ}_{١}$$

تدريب : تتحرك سيارة كتلتها ٥٠٠ كيلو غرام على خط مستقيم بسرعة ١٠٠ كيلو متر على الساعة فإذا تعرضت لقوة مكابح مقدارها ٤٠٠٠ نيوتن والمطلوب إيجاد الزمن اللازم لوقوف السيارة

والمسافة المقطوعة عندئذ

الحل

القوة تساوي الكتلة ضرب التسارع

$-٤٠٠٠ = ٥٠٠ \times \text{ت} \Leftrightarrow \text{ت} = -٨$ متر/ ثانية تربيع

$\text{ف}''(\text{ن}) = -٨$

$\frac{\text{دف}'}{\text{دن}} = -٨$

$\int \text{دف}' = \int -٨\,\text{دن}$

$\text{ع} = -٨\text{ن} + \text{ع}_{.}$

$\text{ع}_{.} = \frac{٧٢ \times ١٠٠٠}{٣٦٠٠} = ٢٠\,\text{م}\backslash\text{ث}$

$\text{ع} = -٨\text{ن} + ٢٠$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = -٨\text{ن} + ٢٠$

$\int \text{دف} = \int -٨\text{ن}\,\text{دن} + \int ٢٠\,\text{دن}$

$\text{ف} = -٤\text{ن}^{٢} + ٢٠\text{ن} + \text{ف}_{.}$

$\text{ف}_{.} = ٠$ اذا اعتبرنا المسافة الابتدائية لحظة الضغط على المكابح فان

$\text{ف} = -٤\text{ن}^{٢} + ٢٠\text{ن}$

تتوقف السيارة عندما تنعدم السرعة

$\text{ع} = -٨\text{ن} + ٢٠$

$-٨\text{ن} + ٢٠ = ٠ \Leftarrow \text{ن} = \frac{٢٠}{٨} = ٢٫٥\text{ث}$

وهو الزمن اللازم للوقوف

المسافة اللازمة للوقوف هي

$\text{ن} = ٢٫٥$

$\text{ف} = -٤\text{ن}^{٢} + ٢٠\text{ن}$

$\text{ف} = -٤ \times ٦٫٢٥ + ٢٠ \times ٢٫٥ = -٢٥ + ٥٠ = ٢٥\text{م}$

اعتبرنا ان الحركة خلال استخدام الكوابح هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام لان التسارع ثابت

تدريب :

اوجد مشتق الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{س}}$ حيث $\text{س} > ٠$

نطبق خواص اللوغاريتم

$$\text{ن}(\text{س}) = \text{س}^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{لـو س}^{\text{س}}} = \text{هـ}^{\text{س لـو س}}$$

$$\text{ص}' = (\text{س لـو س})'\ \text{هـ}^{\text{س لـو س}}$$

$$\text{ص}' = (١ + \text{لـو س})\ \text{هـ}^{\text{س لـو س}}$$

$$\text{ص}' = (١ + \text{لـو س})\ \text{س}^{\text{س}}$$

تدريب اوجد التكامل

$$\int ٣^{\text{س}}\ \text{ءس} = \int \text{هـ}^{\text{لـو}٣^{\text{س}}}\ \text{ءس} = \int \text{هـ}^{\text{س لـو}٣}\ \text{ءس} = \frac{١}{\text{لـو}٣}\ \text{هـ}^{\text{س لـو}٣} + \text{جـ} = \frac{٣^{\text{س}}}{\text{لـو}٣} + \text{جـ}$$