

رياضيات (العلمي) الوحدة (تطبيقات التفاضل) عصام محمد الشيخ

ماجستير رياضيات

(الفصل الأول)

النقط الحرجة

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300623

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300623

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300623

تعريف

س، من مجال فـ نقول أن س، قيمة حرجة للاقتران فـ إذا

النقط الحرجة
 $(-3, f(-3)), (-2, f(-2)), (-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1))$

فـ(س) = صفر أو فـ(س) غير موجودة

أي أن (س، فـ(س)) نقطة حرجة.

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

فـ(س) = $s^3 - 2s^2 + 1$ $\exists s \in [-2, 2]$

عماد الشيخ
 عمان طبربور
 جامعة آل البيت
 0796500625

الحل:

فـ'(س) = $3s^2 - 4s$

$0 = (1-3s)s$

$0 = s(1-3s)$

$s = 1$

فـ(س) غير موجودة $\Leftrightarrow 3 < 2 - s$

النقط الحرجة

$(-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1))$

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

فـ(س) = $3s^3 - 3s^2 - 3s$ $\exists s \in [-3, 3]$

الحل:

فـ'(س) = $9s^2 - 6s - 3$

$0 = 9s^2 - 6s - 3$

$0 = 3(3s^2 - 2s - 1)$

$0 = 3(s-1)(s+1)$

فـ(س) غير موجودة $\Leftrightarrow 3 < 5 - s$
 لأنصم أطراف فترة

النقط الحرجة

$(-2, f(-2)), (0, f(0)), (2, f(2))$

٣١.١ شتوي

إذا كان فـ معرفاً على $(0, 1)$ وكان
 فـ(س) = $1 - 3s$ حيث $s \in (0, 1)$ فإن
 مجموعة قيم س التي يكون للاقتران فـ
 عند كل منها نقطة حرجة هي

(أ) $\{ \frac{1}{3} < s < 1 \}$ (ب) $\{ 0 < s < 1 \}$

(ج) $\{ 1 \}$ (د) $\{ \frac{1}{3} < s < 1 \}$

الحل:

فـ(س) غير موجودة عند $s = 1$ (طرف فترة)

فـ(س) = 0

$1 - 3s = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1}{3}$

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

فـ(س) = $s^3 - 13s^2 + 1$ $\exists s \in [-3, 3]$

الحل:

فـ'(س) = $3s^2 - 26s$

$0 = 3s^2 - 26s$

$0 = s(3s - 26)$

$0 = s(3s - 26)$

$s = 0, s = \frac{26}{3}$

٣١.١ صيفي

إذا كان فـ(س) كثير حدود من الدرجة الرابعة
 فإن أكبر عدد ممكن من النقاط الحرجة

فـ(س) غير موجودة $\Leftrightarrow 3 < 3 - s$
 أطراف الفترة $s = 3 - 3 < 3$

رياضيات (المعلمي) الوحدة (تطبيقات التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (النقط الحرجة) ماجستير رياضيات

للاقتراح (د) على الفترة $[c, p]$ هو

(د) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (هـ) ٥

الحل:

د من الدرجة الرابعة \Leftarrow

فد من الدرجة الثالثة \Leftarrow له على الأكثر

٣ أصفار

فد (د) غير موجودة عند c, p

\Leftarrow عدد النقاط الحرجة على الأكثر = ٥

عصام الشيخ
عمان طبريزور
جامعة آل البيت
0796500629

* الاقتارانات المثلثية .

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران
 مر(س) = جاس + ج٢اس

الحل:

$$\begin{aligned} \text{فد(س)} &= \text{جاس} - \text{جاس} \\ &= 0 \\ \text{جاس} &= \text{جاس} \\ \Leftrightarrow \text{س} &= 0, \pi, 2\pi \end{aligned}$$

فد(س) غير موجودة عند $\pi/2, 3\pi/2$
 \Leftrightarrow النقط الحرجة

$$\begin{aligned} &((\pi/2), \text{مر}(\pi/2)), (\pi, \text{مر}(\pi)), \\ &((3\pi/2), \text{مر}(3\pi/2)), (2\pi, \text{مر}(2\pi)) \end{aligned}$$

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

$$\text{مر(س)} = \text{جاس} - \text{ج}^2\text{اس}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \text{فد(س)} &= \text{جاس} - 2\text{جاس} \\ &= 0 \\ \text{جاس} &= 2\text{جاس} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{جاس} &= 0 \\ \Leftrightarrow \text{س} &= 0, \pi \\ \Leftrightarrow \text{س} &= \pi/2, 3\pi/2 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow النقط الحرجة

$$\begin{aligned} &((0), \text{مر}(0)), (\pi, \text{مر}(\pi)), \\ &((\pi/2), \text{مر}(\pi/2)), (3\pi/2, \text{مر}(3\pi/2)), \\ &((\pi/2), \text{مر}(\pi/2)), (\pi, \text{مر}(\pi)) \end{aligned}$$

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

$$\text{مر(س)} = \text{جاس} - \frac{1}{\text{جاس}}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \text{فد(س)} &= \text{جاس} - \text{جاس} \times \text{جاس} \\ &= 0 \\ \text{جاس} &= \text{جاس} \times \text{جاس} \\ &= 0 \\ \text{جاس} &= 0 \\ \Leftrightarrow \text{جاس} &= \text{صفر} \\ \Leftrightarrow \text{س} &= \pi/2, 3\pi/2 \end{aligned}$$

فد(س) غير موجودة عند $\pi, 2\pi$

\Leftrightarrow النقط الحرجة

$$((\pi/2), \text{مر}(\pi/2)), (\pi, \text{مر}(\pi)), ((3\pi/2), \text{مر}(3\pi/2)), (2\pi, \text{مر}(2\pi))$$

عصام الشيخ
 عمان طبربور
 جامعة ال البيت
 0796500625

* الاقتران المشتعب :

عصام الشيخ
 عمان طبرور
 جامعة آل البيت
 0796300625

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

$$\begin{aligned} \text{فرد (س)} &= \{س + 1\} \\ \text{فرد (س)} &= 3 - س \geq 1 \\ 3 &\geq س + 1 \end{aligned}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \text{فرد (س)} &= \{س - 2\} \\ 3 - س &\geq 1 \\ 2 &> س > 1 \\ 3 - س &= 0 \text{ غير موجودة} \end{aligned}$$

فرد متصل عند $س = 1$ $س = 2$ فرد قابل للاشتقاق عند 1

$$0 = \text{فرد (س)}$$

$$0 = س \iff 2 = س$$

النقط الحرجة

$$((2, 0), (3, 2), (3, 0))$$

← النقط الحرجة

$$(1, 1), (2, 3), (3, 2)$$

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

$$\text{فرد (س)} = س - 1 \quad | \quad س - 1 \geq 3$$

الحل:

$$\begin{aligned} \text{فرد (س)} &= \{س - 1\} \\ 3 - س &\geq 1 \\ 2 &\geq س > 1 \\ \text{فرد (س)} &= \{س - 3\} \\ 3 - س &\geq 3 \\ 2 &\geq س > 1 \end{aligned}$$

$$\text{فرد (س)} = \{س - 2\} \quad 3 - س \geq 3 - 1$$

$$\begin{aligned} 3 - س &\geq 1 \\ 2 &> س > 1 \\ 3 - س &= 0 \text{ غير موجودة} \end{aligned}$$

فرد متصل عند 1 وغير قابل للاشتقاق عند 1

$$0 = \text{فرد (س)}$$

$$0 = س - 3$$

$$0 = (س - 2)$$

$$\frac{س}{3} = 0 \iff 0 = س$$

النقط الحرجة

$$((1, 1), (2, 3), (3, 2)), ((0, 0), (0, 3))$$

مثال

إذا كان فرد (س) = $|س - 2|$ $س \in [2, 1]$
 جد النقط الحرجة للاقتران فرد.

الحل:

$$\begin{aligned} \text{فرد (س)} &= \{س - 2\} \\ 2 &\geq س \geq 1 \\ 2 &\geq س > 2 \end{aligned}$$

$$\text{فرد (س)} = \{2 - س\} \quad 2 > س > 1$$

$$\begin{aligned} 2 - س &= 0 \\ 2 > س > 1 \\ 2 < 2 < 1 = س \end{aligned}$$

فرد متصل عند 2 و فرد غير قابل للاشتقاق عند 2

مثال

جد النقط الحرجة للاقتران

$$\text{فرد (س)} = \sqrt{س} \quad | \quad س \in [0, \pi]$$

الحل:

$$\text{فرد (س)} = |س|$$

رياضيات (العلمي) الوحدة (تطبيقات التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (النقطة الحرجة) ماجستير رياضيات

عصام الشيخ
عمان طبريز
جامعة آل البيت
0796300629

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \geq \pi \geq 0 \\ \pi \geq \pi > \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{فرص} \\ \text{جاس} \\ \text{جاس} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} > \pi > 0 \\ \pi > \pi > \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{فرص} \\ \text{جاس} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi > \pi > \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} < \pi < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{جاس} \\ \text{غير موجودة} \end{array}$$

وه متصل عند $\pi = \frac{\pi}{2}$ وغير قابل للاشتقاق
جاس = 0 ← لا يوجد قيم π في الفترة
من النقطة الحرجة

$$(0 < \text{فرص}) < (\pi < \text{فرص}) < (\frac{\pi}{2} < \text{فرص})$$

* الجذور :

قد (س) غير موجودة عند $s = -2, -3$
لأنهم أطراف فترة

← النقط الحرجة

(0, 2) , (2, 3) , (3, 2) , (3, -2) , (-2, 3)

مثال

جد النقط الحرجة للاقتزان

$$f(s) = \sqrt[3]{s^2 - 2} \quad s \in [-2, 2]$$

الحل :

$$f'(s) = \frac{2}{3} s^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(s) = \frac{2}{3} s^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{s}}$$

أولاً

قد (س) ≠ صفر

ثانياً

فه معرف عند $s = 0$. لكن قد (0) غير موجودة
← (0, 2) , (2, 3) نقطة حرجة .

قد (2) غير موجودة ، قد (3) غير موجودة
(-2, 3) , (3, 2) نقطت حرجة .

٢.١٣ صفر

إذا كان $f'(s) = \sqrt{s-1}$ فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها قيم حرجة للاقتزان هي

$$\{1-1\} = \{0\} \quad \{1-1\} = \{0\}$$

الحل :

$$f'(s) = \frac{s-1}{\sqrt{s-1}} = 0$$

$$0 = s \Leftrightarrow \frac{s-1}{\sqrt{s-1}} = 0$$

قد (س) غير موجودة عند $s = 1$ ، $s = -1$ أمصار المقام

مثال

جد النقط الحرجة للاقتزان

$$f(s) = \sqrt[3]{s^2 - 4} \quad s \in [-2, 2]$$

الحل :

$$f'(s) = \frac{2s}{3\sqrt[3]{s^2-4}}$$

$$\frac{2s}{3\sqrt[3]{s^2-4}} = 0$$

$$0 = s \Leftrightarrow s^2 - 4 = 0$$

قد (س) غير موجودة عند $s = 2$ ، $s = -2$
لأنهم أمصار المقام المشتقة

عماد الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796500629

رياضيات (العلمي) الوحدة (تطبيقات التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (النقط الحرجة) ماجستير رياضيات

* الاقتانات الكسرية

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796500629

مثال

جد النقط الحرجة للاقتان
فرض $\frac{1-x^3}{1+x^3} = 0$

الحل:

فم غير معرف عند $x = -1$ لأنه صفر
المقام \Leftarrow فم (-1) غير موجودة .

$$\frac{(1-x^3) - (1+x^3)}{(1+x^3)} = 0$$

$$1-x^3 + 1-x^3 - 1-x^3 = 0$$
$$1-x^3 = 0$$
$$\Leftarrow x = 1 \text{ صفر}$$

$x = -1$ تعتبر خارج مجال فم \Leftarrow
 $x = 1$ لا تعتبر قيمة حرجة .

\Leftarrow النقط الحرجة
(, 0)

⊗ سرعة قدر (س)

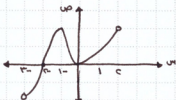
عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796500629

← النقط الحرجة

$$(١٠, ١) \text{ و } (١١, -١)$$

$$(٢, ٢) \text{ و } (٢٠, -٢)$$

٣.١٨ شتوي قديم



الشكل يمثل منحنى قدر (س) حيث قدر (س) معرف على $[-٣, ٣]$ فإن مجموعة القيم الحرجة للائتمان قدر (س) هي

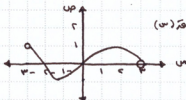
$$(أ) \{٢, ٠, -٢, -٣, -٢\}$$

$$(ب) \{٢, ١, -٢, -٣\}$$

$$(ج) \{٠, ١, -٢\}$$

$$(د) \{٠, -٢, -٣, -٢\}$$

مثال



الشكل يمثل منحنى قدر (س) حيث قدر (س) معرف على $[-٣, ٣]$ جد النقط الحرجة.

الحل:

$$\text{قدر (س) = صفر عند } ٣ - c = ٠$$

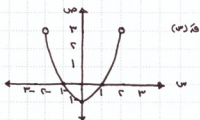
$$\text{قدر (س) غير موجودة عند } ٣ - c = ٣$$

← النقط الحرجة

$$(٠, ٠) \text{ و } (٢, -٢)$$

$$(٢, ٢) \text{ و } (٢, -٢)$$

مثال



يمثل الشكل منحنى قدر (س) حيث قدر (س) معرف على الفترة $[-٣, ٣]$ جد النقط الحرجة

الحل:

$$\text{قدر (س) = صفر عند } ١ - c = ١$$

$$\text{قدر (س) غير موجودة عند } ٣ - c = ٣$$

رياضيات (العلمي) الوحدة (تطبيقات التفاضل) عماد محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (النقط الحرجة) ماجستير رياضيات

* سرعة $v(t)$:

عماد الشيخ
عماد طبربور
جامعة آل البيت
0796500629

٣٠٨ شتوي



يمثل الشكل منحني الاقتران v على مجاله
ما مجموعة قيم t التي يكون للاقتران v
عندها نقطتا حرجة؟

(أ) $\{0, 2, 4, 5\}$

(ب) $[2, 4] \cup \{0, 5\}$

(ج) $[2, 4) \cup \{0, 5\}$

(د) $[2, 4) \cup \{0, 5\}$

رياضيات (العلمي) الوحدة (تطبيقات التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (النقط الحرجة) ماجستير رياضيات

* ايجاد ثوابت

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300029

مثال

جد قيم c, p, b التي تجعل للاقتراح

$$c^3 + 3c^2 + 3c + b = 0 \quad (1)$$

نقطتين حرجيتين عند $c = 1 = -c = -3$

الحل:

$$c = 1 = -c = -3 \Rightarrow \text{قيمة حرجية}$$

$$c = (1) = \text{صفر} \quad c = (-3) = \text{صفر}$$

$$c^3 + 3c^2 + 3c + b = 0 \quad (2)$$

$$b + 3c^2 + 3c + 1 = 0$$

$$b + 1 - 3c^2 + 3c = 0$$

$$b + 3c^2 - 3 = 0$$

$$\textcircled{1} \quad b + 3c^2 - 3 = 0$$

$$b + 3c^2 + 3c + 1 = 0$$

$$b + 3c^2 + 3c + 1 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad b + 3c^2 + 3c + 1 = 0$$

$$3 = b + 3c^2 -$$

$$3c + 1 = b + 3c^2 -$$

$$3c = 1 -$$

$$3 = 1$$

$$3 = b + 3c^2 -$$

$$3 = b + 1$$

$$7 - 3 = b$$

$$4 = b$$