تتمات في الاقتران أللوغاريتمي

$\text{لـو}:(٠،+\infty) \rightarrow \text{ح}$

$\text{ص} = \text{لـو س}$

هذا الاقتران يدعى الاقتران اللوغاريتمي

وهو متصل وقابل للاشتقاق على مجاله $(٠،\infty)$ ومشتقه $\text{ق}'(\text{س}) = \left(\text{لـو}(\text{س})\right)' = \frac{١}{\text{س}}$

وهو يحقق $\text{ق}(١) = \text{لـو}(١) = ٠$ مدى الاقتران ح

نتائج

١- $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}} \succ ٠$ لان $(\text{س} \succ ٠)$ اذا الاقتران متزايد تماما على مجال $(٠،\infty)$

٢- بما انه اقتران متصل ومتزايد تماما على $(٠،\infty)$ فهو واحد لواحد وبالتالي

$\text{لـو}(\text{س}_١) = \text{لـو}(\text{س}_٢) \Leftrightarrow \text{س}_١ = \text{س}_٢$

تطبيق حل المعادلة $\text{لـو}(\text{س} + ١) = \text{لـو}(٢\text{س} - ٤)$

الحل : الشرط

$$\left\{\begin{array}{l} \text{س} + ١ \succ ٠ \text{ و } ٢\text{س} - ٤ \succ ٠ \\ \text{س} \succ -١ \text{ و } \text{س} \succ ٢ \\ (-١،\infty) \cap (٢،\infty) = (٢،\infty) \end{array}\right.$$

$\text{لـو}(\text{س} + ١) = \text{لـو}(٢\text{س} - ٤) \Leftarrow \text{س} + ١ = ٢\text{س} - ٤ \Leftarrow \text{س} = ٥ \in (٢،\infty)$ مقبول

٣- بما انه متزايد تماما على $(٠،\infty)$ و $\text{ق}(١) = \text{لـو}(١) = ٠$ فان

$٠ \prec \text{س} \prec ١ \Leftarrow \text{لـو س} \prec ٠$

$١ \prec \text{س} \prec \infty \Leftarrow \text{لـو س} \succ ٠$

مثال $\text{لـو}\frac{١}{٢} \prec ٠ ، \text{لـو}٢ \succ ٠$

٤- هذا الاقتران يحقق خواص اللوغاريتم العشري

$\text{أ} \succ ٠، \text{ب} \succ ٠$

$\text{لـو}(\text{أ} \times \text{ب}) = \text{لـو أ} + \text{لـو ب}$

$\text{لـو}\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \text{لـو أ} - \text{لـو ب}$

$\text{لـو}\frac{١}{\text{ب}} = -\text{لـو ب}$

$\text{لـو أ}^{\text{ن}} = \text{ن لـو أ}$ $\text{ن} \in$ مجموعة الاعداد النسبية (وسنجد انها صحية من اجل ن عدد حقيقي

$\text{لـو} \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} = \frac{١}{\text{ن}}\text{لـو أ}$ $\text{ن} \neq ٠$

حل المعادلة $\text{لـو س} = ١$ لهذه المعادلة حل وحيد $\text{س} = \text{هـ} \approx ٢،٧١٨٢٨$ ندعوه العدد النيبري نسبة لجون نيير العالم الفرنسي

وبالتالي هذا الاقتران هو اقتران لوغاريتمي بالنسبة للأساس هـ

وعليه فان $ص = لـو_{هـ} س$

أما حل المعادلة $لـو_{هـ} س = م \Leftarrow س = هـ^{م}$

تطبيق حل المعادلة $لـو_{هـ}(س+1) = -1 \Leftarrow س = -1 + هـ^{-1} = -1 + \frac{1}{هـ}$

الاقتران من الشكل

$ق(س) = لـو_{هـ}(ل(س))$ ملاحظة لن أشير في الكتابات لأساس اللوغاريتم اذا كان الاساس هـ لصعوبة كتابتها وسأكتب فقط لـوس وهي تعني $لـو_{هـ}(س)$ اما اذا كان الاساس مختلف عن هـ سأكتبه بشكل صريح

مجاله (مجموعة تعريفه) $ع = \{س: ل(س) \succ 0\}$

بمعنى هذا الاقتران معرف حيث $ل(س)$ معرف وموجب تماما

مثال: ليكن الاقتران $ق(س) = لـو(س^{2} - 1)$ اوجد مجاله

الحل معرف عندما $س^{2} - 1 \succ 0 \Leftarrow (س+1)(س-1) \succ 0$ هذه المتباينة محققة خارج الجذرين

اذا مجاله $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

قابلية الاشتقاق للاقتران $ق(س) = لـو(ل(س))$

اذا كان $ل(س)$ موجب تماما على فترة مفتوحة سـ وقابل للاشتقاق عليها فان الاقتران $ق(س) = لـو(ل(س))$ قابل للاشتقاق على هذه الفترة ومشتقه

$ق'(س) = \frac{ل'(س)}{ل(س)}$ بمعنى مشتق ما بعد اللوغاريتم على ما بعد اللوغاريتم

مثل اوجد مشتق الاقتران

$ق(س) = لـو(س^{2} + 1)$ لاحظ ان مجاله ح وان $س^{2} + 1 \succ 0 \quad \forall س \in ع$

اذا ق قابل للاشتقاق على ح ومشتقه

$$ق'(س) = \frac{2س}{س^{2} + 1}$$

ملاحظة : لا يجوز ان نطبق ايا من خواص الاقتران اللوغاريتمي قبل أن نجد مجاله

خاصة هامة للاقتران اللوغاريتمي

$لـو_{ب} أ = لـو_{جـ} أ \times لـو_{ب} جـ \Leftarrow لـو_{جـ} أ = \frac{لـو_{ب} أ}{لـو_{ب} جـ}$ طبعا $أ \succ 0$، $جـ \succ 0$، $جـ \neq 1$

$ب \in (0,1) \cup (1, \infty)$

وبالتالي $لـو_{10}(س) = \frac{لـو_{هـ}(س)}{لـو_{هـ}(10)}$

مثال اوجد مشتقة الاقتران

$ق(س) = لـو_{2}(س)$

الحل :

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{لـو}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{لـو}_{\text{هـ}}٢}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{لـو}_{\text{هـ}}٢} \times \frac{١}{\text{س}}$$

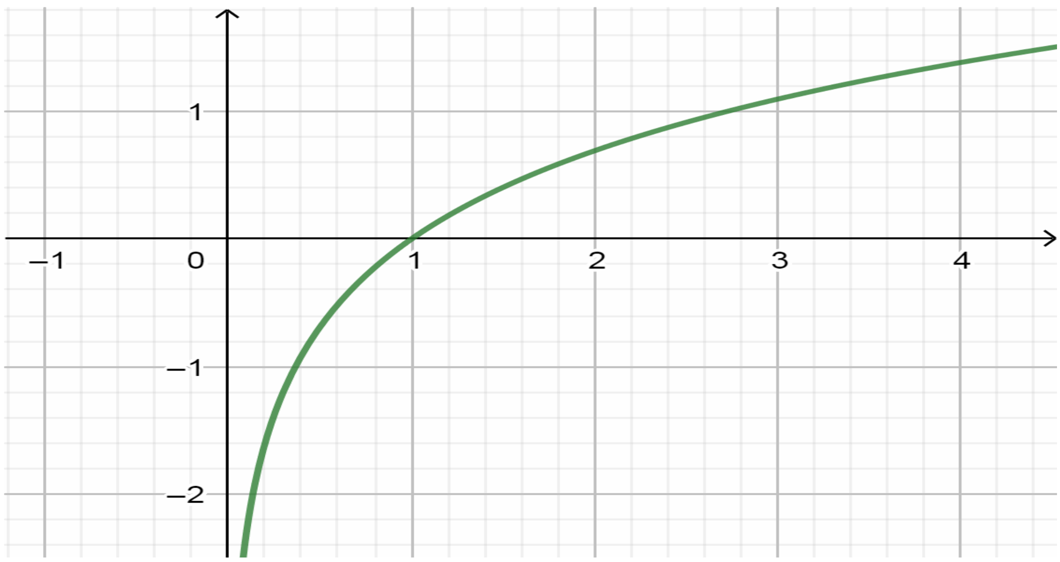
اوجد مشتق الاقتران

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{لـو}_{١٠}\left(\text{س}^{٢} + \text{س}\right)$$

الحل

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{لـو}_{١٠}\left(\text{س}^{٢} + \text{س}\right) = \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢} + \text{س}\right)}{\text{لـو}_{\text{هـ}}١٠}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \left(\frac{١}{\text{لـو}_{\text{هـ}}١٠}\right)\frac{٢\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} + \text{س}}$$



الخط البياني للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}$

تدريب اوجد مشتق الاقتران

١-

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)$$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)\right)'$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)'}{\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)} = \frac{\frac{١}{\text{س}}}{\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)} = \frac{١}{\text{س}\,\text{لـو}(\text{س})}$$

٢-

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{10}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,10} = \frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,10} \times \frac{1}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س})}$$

٣- $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}\left(\frac{1+\text{س}}{\text{لوس}}\right)$

الحل :

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}\left(\frac{1+\text{س}}{\text{لوس}}\right)$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\left(\frac{1+\text{س}}{\text{لوس}}\right)'}{\left(\frac{1+\text{س}}{\text{لوس}}\right)} = \frac{\left(\frac{\text{لوس} - \frac{1}{\text{س}}(1+\text{س})}{(\text{لوس})^2}\right)}{\left(\frac{1+\text{س}}{\text{لوس}}\right)} = \frac{\text{لوس} - \frac{1}{\text{س}} - 1}{(\text{لوس})^2\left(\frac{1+\text{س}}{\text{لوس}}\right)}$$

هذا التمرين للأساس النيبري

التكامل

١ $\int \frac{1}{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{جـ}$
٢- $\int \frac{\text{ل}'(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left\lvert\left(\text{ل}(\text{س})\right)\right\rvert + \text{جـ}$

كل اقتران كسري البسط فيه مشتق المقام تكامله لوغاريتم القيمة المطلقة للمقام

تدريب اوجد تكامل كل من

١- $\int \frac{1}{\text{س}+1}\,\text{ءس} = \int \frac{(\text{س}+1)'}{\text{س}+1}\,\text{ءس} = \text{لو}\lvert \text{س}+1\rvert + \text{جـ}$

٢- $\int \frac{1}{\text{س}\,\text{لوس}}\,\text{ءس} = \int \frac{\frac{1}{\text{س}}}{\text{لوس}}\,\text{ءس} = \int \frac{(\text{لوس})'}{\text{لوس}}\,\text{ءس} = \text{لو}\lvert\text{لوس}\rvert + \text{جـ}$

٣- $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} - 1}\,\text{ءس} = \int \frac{(\text{هـ}^{\text{س}} - 1)'}{\text{هـ}^{\text{س}} - 1}\,\text{ءس} = \text{لو}\lvert\text{هـ}^{\text{س}} - 1\rvert + \text{جـ}$

٤- $\int \frac{2}{\text{هـ}^{\text{س}} + 1}\,\text{ءس} = 2\int \frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}} + 1}\,\text{ءس} = 2\int \frac{\text{هـ}^{-\text{س}}}{1 + \text{هـ}^{-\text{س}}}\,\text{ءس} = -2\int \frac{(1 + \text{هـ}^{-\text{س}})'}{1 + \text{هـ}^{-\text{س}}}\,\text{ءس}$

$= -2\,\text{لو}\lvert 1 + \text{هـ}^{-\text{س}}\rvert + \text{جـ}$

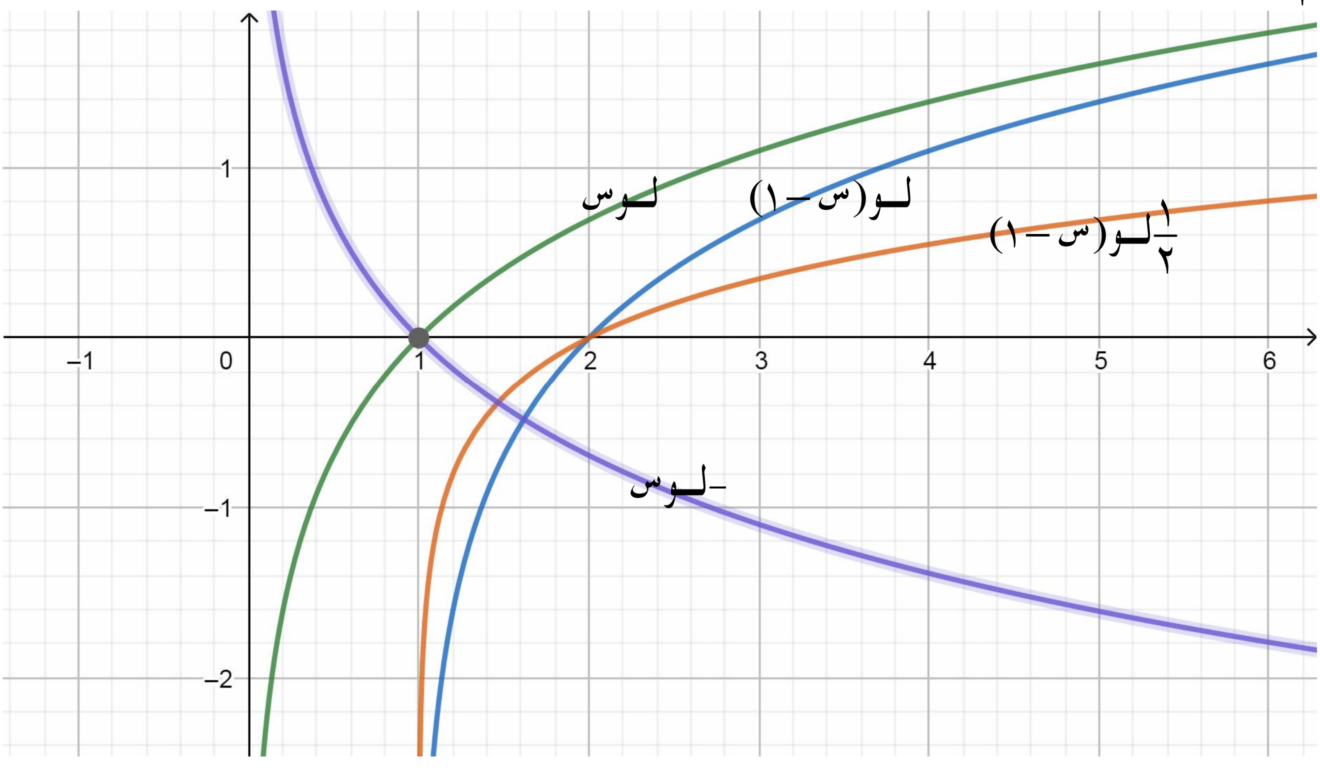
في هذا التدريب ضربنا البسط والمقام ب $هـ^{-س}$

في التدريبات السابقة كان علينا حلها بطريقة تغير المتحول إلا أنني أردت أن أقدم للطالب شكل آخر من اجل توسيع إدراك الطالب
بقي ان اقول ان الادراك هو ربط الصور الموضوعية في دماغ الانسان

استنتاج بعض الخطوط البيانية

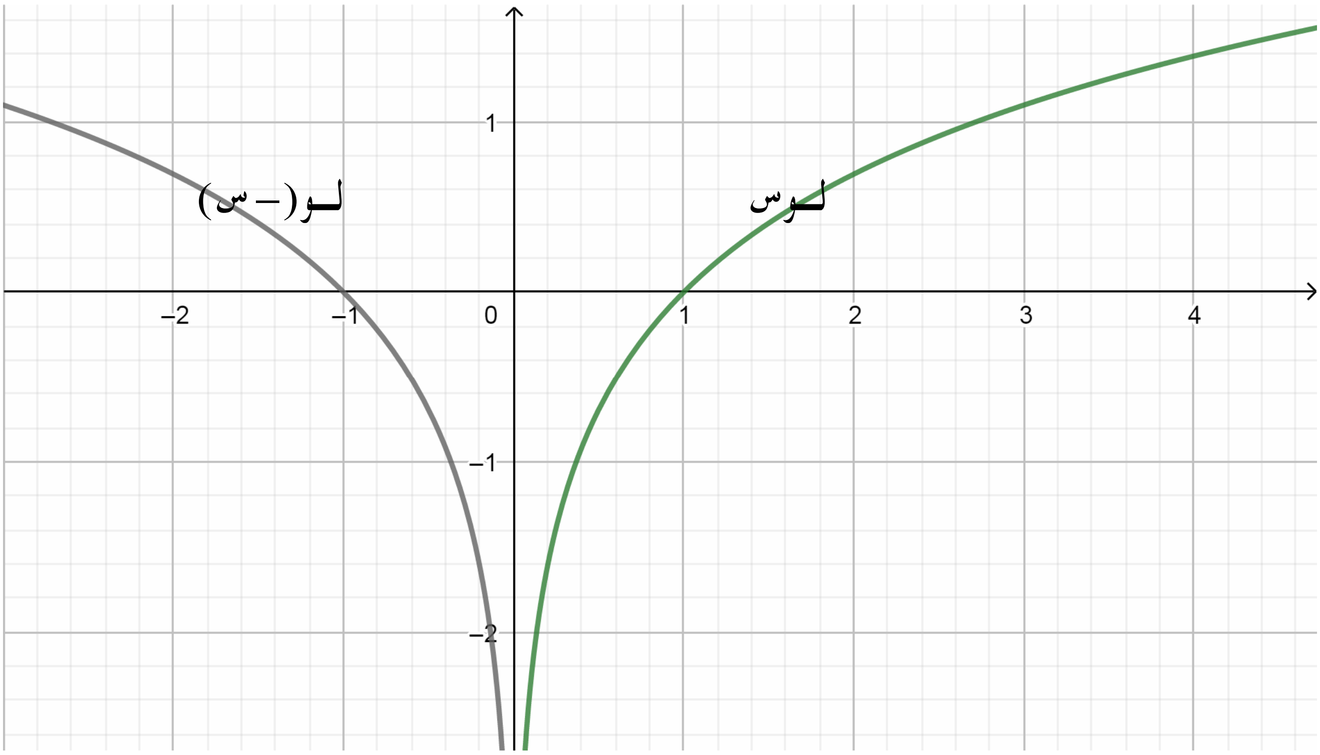
١- خط الاقتران $ن(س) =$ لــو$(س - ١)$ هذا الخط ينتج عن خط الاقتران لــوس بانسحاب نحو اليمين على السينات بمقدار وحدة واحدة ويقطع محور السينات في نقطة سينها ٢

٢- خط الاقتران $ن(س) =$ لــو $\sqrt{س - ١} = \frac{١}{٢}$لــو$(س - ١)$ هذا الخط ينتج عن خط الاقتران ص=لــو$(س - ١)$ بضرب كل قيمة ل ص بالعدد $\frac{١}{٢}$



اما ص =لــو $\frac{١}{س}$ = –لــوس خطه نظير خط لــوس بالنسبة لمحور السينات لاحظ بدلنا كل ص ب –ص

اما خط الاقتران ص =لــو$(- س)$ فهو نظير خط الاقتران لــوس بالنسبة لمحور الصادات

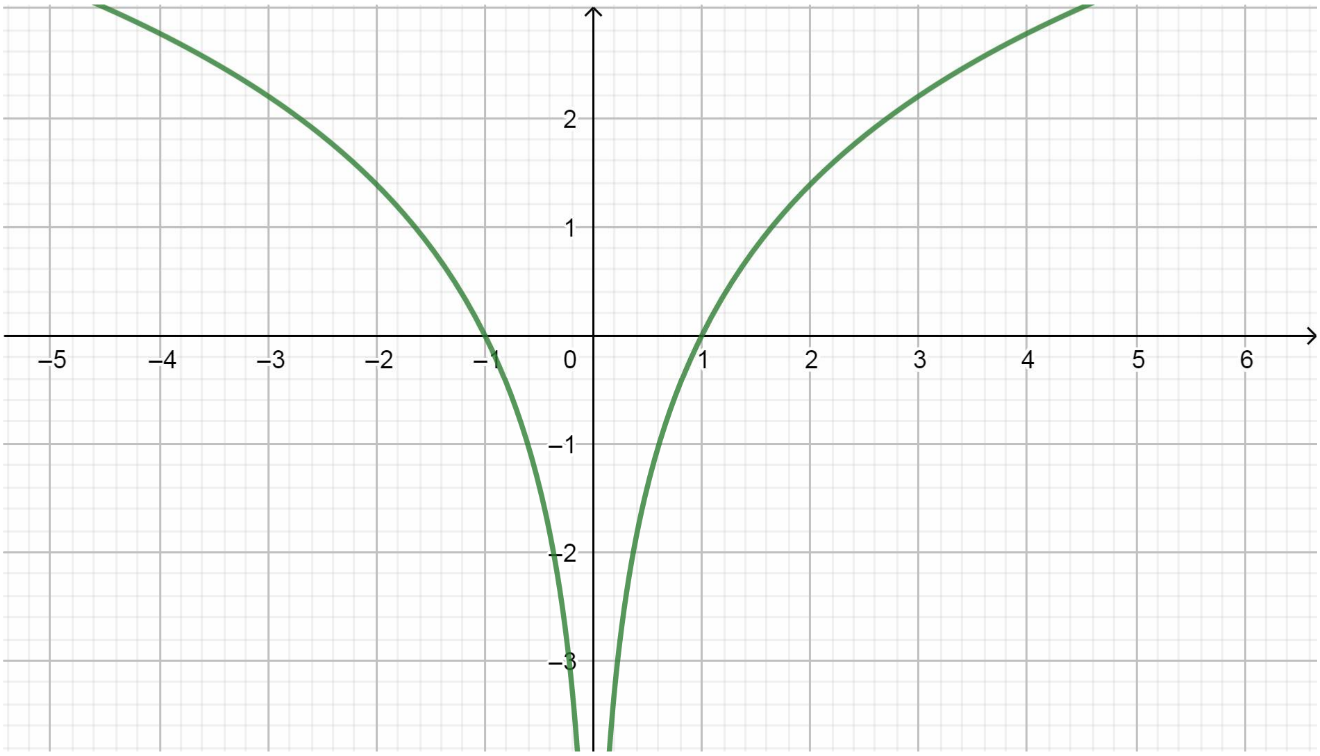


اما خط ص =لــو|س| فهو كلا الخطين لـــو(س)،لــو(– س) لان

$$\text{ص} = \text{لو}|\text{س}| = \begin{cases} \text{لو}(-\text{س}) & \text{س} < ٠ \\ \text{لو}(\text{س}) & \text{س} > ٠ \end{cases}$$

اما خط

$\text{ص} = \text{لو}\,\text{س}^{٢}$



هذه الخطوط للمساعدة في حساب المساحات وفي درس المساحات سأقدم شرح مفصل لرسم خط أي اقتران كان

تدريبات :
اوجد مشتقة كل من الاقترانات الاتية

١- $ق(س) = \text{لـو}\frac{س-١}{س+٢}$

٢- $ق(س) = \frac{\text{لـوس}}{\text{لـو}(س+١)}$

٣- $ق(س) = \sqrt{\text{لـوس}}$

٤- $ق(س) = \text{لـو}\left(\text{جتاس}\right)$

٥- $ق(س) = \text{لـو}\left(\frac{س+\text{لـوس}}{س+١}\right)$

٦- $ق(س) = \text{لـو}_{١٠}\left(س^{٣}-١\right)$

اوجد تكامل كل من

٧- $\int \frac{٣س^{٢}}{س^{٣}+٢}\,ءس$

٨- $\int \left(\frac{١}{س+٢}-\frac{١}{س}\right)ءس$

٩- $\int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}+٢}\,ءس$

١٠- $\int \frac{س^{٣}+٣س+١}{س}\,ءس$

١١- $\int \frac{هـ^{س}}{١-هـ^{س}}\,ءس$

١٢- $\int \frac{س+١}{س-٣}\,ءس$

$\int \frac{\text{لـوس}}{س}\,ءس$

١٣ – حل المعادلة $\text{لـو}\sqrt{٢س-٣} = \text{لـو}(٦-س) - \frac{١}{٢}\text{لـوس}$

١٤- اكتب بدلالة لـو٢ ، لـو٥ كل من

$\text{لـو}_{هـ}٥٠$ ، $\text{لـو}_{هـ}\frac{١٦}{٢٥}$ ، $\text{لـو}_{هـ}٢٥٠$

١٥- بسط العبارة $ل = \text{لـو}\sqrt{٢١٦} + \text{لـو}\sqrt{٧٥} - \text{لـو}١٥ - \text{لـو}\sqrt{٢٧}$

١٦- ارسم الخط البياني للاقتران $ق(س) = \text{لـو}\sqrt{(س+٢)}$ استنتجه من خط $ص = \text{لـوس}$

١٧- للتذكير بالفصل الأول ليكن الاقتران $ق(س) = س\,\text{لـو}_{هـ}(س)$ مجاله $(٠،\infty)$ والمطلوب
ادرس تزايد وتناقص الاقتران اوجد ما له من قيم محلية وقيم قصوى وادرس جهة تقعره
أما من تقدم في الدراسة فعليه أن يجد مساحة السطح المحصور بين خط الاقتران ومحور السينات والمستقيم $س = هـ$