

التكامل بتفريق الكسور
نصادف احيانا اقتراعات كسرية لا ترد الى الحالات المعروفة وبالتالي سنفرق الكسر الى كسرين او اكثر

مثال فرق الكسر (وهي العملية العكسية لتوحيد المقامات)

$$\frac{1}{1-s^2}$$

نحلل المقام ونكتب الكسر بالشكل

$$\frac{1}{1-s^2} = \frac{1}{(1+s)(1-s)} = \frac{1}{1-s^2}$$

ثم نوحّد المقامات

$$\frac{(1-s)b + (1+s)a}{(1+s)(1-s)} = \frac{1}{(1+s)(1-s)}$$

$1 = (1+s)a + (1-s)b$ وهذه العلاقة متطابقة في s بمعنى محققة ايا كانت s

لذلك نعطي s أي قيم نريد نجد كل من a, b

$$\text{من اجل } s = 1 \quad 1 = (1+1)a = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{من اجل } s = -1 \quad 1 = (1-1)b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

وبالتالي

$$\left(\frac{1}{1+s} - \frac{1}{1-s} \right) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s} \right) = \frac{1}{(1+s)(1-s)} = \frac{1}{1-s^2}$$

تدريبات

$$1 - \frac{2}{s-2}$$

$$\frac{1 + (1-s)a}{(1-s)s} = \frac{b}{1-s} + \frac{1}{s} = \frac{2}{(1-s)s} = \frac{2}{s-2}$$

$$1 + (1-s)a = 2$$

$$s = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$s = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\frac{2}{1-s} + \frac{2}{s} = \frac{2}{(1-s)s} = \frac{2}{s-2}$$

$$\frac{2}{s-2} = \frac{2}{s} + \frac{2}{1-s}$$

$$\frac{2}{s-2} = \frac{2}{s} + \frac{2}{1-s} \Rightarrow \frac{2}{s-2} = \frac{2}{s} + \frac{2}{1-s}$$

$$\frac{(2-s)b + (1-s)a}{(1-s)(2-s)} = \frac{b}{1-s} + \frac{a}{2-s} = \frac{2}{(1-s)(2-s)} = \frac{2}{2+s^2-2s}$$

$$(2-s)b + (1-s)a = 2$$

$$2-s = b \leftarrow 1 = s$$

$$2 = a \leftarrow 2 = s$$

$$\frac{2-s}{1-s} + \frac{2}{2-s} = \frac{2}{2+s^2-2s}$$

$$s \left[\frac{2-s}{1-s} \right] + s \left[\frac{2}{2-s} \right] = s \left[\frac{2}{2+s^2-2s} \right]$$

$$s + \left(\frac{2-s}{1-s} \right) s = s + |s| - |s| = s \left[\frac{2}{2+s^2-2s} \right]$$

$$s \left[\frac{(جاس+جتاس) + جتا^2}{(جاس-1)(جتاس+1)} \right] - 3$$

$$\frac{(جاس+جتاس) + (جتا^2 - جاس^2)}{(جاس-1)(جتاس+1)} = \frac{(جاس+جتاس) + جتا^2}{(جاس-1)(جتاس+1)}$$

$$\frac{(جاس-1)جاس + (جتاس+1)جتاس}{(جاس-1)(جتاس+1)} = \frac{(جاس-جتاس) + (جتاس+جتاس^2)}{(جاس-1)(جتاس+1)}$$

$$\frac{جاس(جاس-1)}{(جاس-1)(جتاس+1)} + \frac{جتاس(جتاس+1)}{(جاس-1)(جتاس+1)} =$$

$$\frac{جاس}{(جتاس+1)} + \frac{جتاس}{(جاس-1)}$$

$$s \left[\frac{جاس}{(جتاس+1)} \right] + s \left[\frac{جتاس}{(جاس-1)} \right] = s \left[\frac{(جاس+جتاس) + جتا^2}{(جاس-1)(جتاس+1)} \right]$$

$$s \left[\frac{(جتاس+1)}{(جتاس+1)} \right] - s \left[\frac{(جاس-1)}{(جاس-1)} \right] =$$

$$s + \left[\frac{1}{(جتاس+1)(جاس-1)} \right] s$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{س}{س^2 - 2س - 3} \right] - 4 \\
& \frac{ب}{3-س} + \frac{1}{1-س} = \frac{س}{س^2 - 2س - 3} \\
& (1-س)ب + (3-س)1 = س \\
& 1 - س = 1 \leftarrow 1 = س \\
& \frac{1}{2} = ب \leftarrow 3 = س \\
& \frac{1}{3-س} + \frac{1}{1-س} = \frac{س}{س^2 - 2س - 3} \\
& \left[\frac{1}{3-س} \right] + \left[\frac{1}{1-س} \right] = \left[\frac{س}{س^2 - 2س - 3} \right] \\
& \frac{1}{3-س} + \frac{1}{1-س} = \frac{س}{س^2 - 2س - 3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{س+1}{س^2 - 2س - 1} \right] - 5 \\
& \frac{1}{1-س} = \frac{س+1}{(س+1)(1-س)} = \frac{س+1}{س^2 - 2س - 1} \\
& \left[\frac{1}{1-س} \right] = \left[\frac{س+1}{س^2 - 2س - 1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{س^3 + س^2 ه}{س^2 ه - 1} \right] - 6 \\
& \frac{ص}{ص} = س \leftarrow ل = ص \leftarrow س = \frac{س^3 + س^2 ه}{س^2 ه - 1} \\
& \left[\frac{1+ص^3}{1-ص^2} \right] = \left[\frac{ص + 3ص^2}{ص^2 ه - 1} \right] = \left[\frac{س^3 + س^2 ه}{س^2 ه - 1} \right] \\
& \frac{ب}{1+ص} + \frac{1}{1-ص} = \frac{1+ص^3}{1-ص^2} \\
& (1-ص)ب + (1+ص)1 = 1+ص^3 \\
& 2 = 1 \leftarrow 1 = ص \\
& 1 = ب \leftarrow 1 = ص \\
& \frac{1}{1+ص} + \frac{1}{1-ص} = \frac{1+ص^3}{1-ص^2} \\
& \left[\frac{1}{1+ص} \right] + \left[\frac{1}{1-ص} \right] = \left[\frac{1+ص^3}{1-ص^2} \right] \\
& ل = (س^3 + س^2 ه) (1-ص)^2 + (1+ص)
\end{aligned}$$

$$\left[-\frac{1}{س^2 - 2س + 1} \right] - 7$$

$$9- \left[\frac{ص^2 + 3ص + 1}{ص(ص-2)} = \frac{ص^2 + 3ص + 1}{ص(ص-2)} \right] = \frac{ص^2 + 3ص + 1}{ص(ص-2)}$$

$$\frac{ص}{ص} = ص \leftarrow ص = ص$$

$$\frac{ج}{2+ص} + \frac{ب}{2-ص} + \frac{1}{ص} = \frac{ص^2 + 3ص + 1}{ص(ص-2)}$$

$$ص^2 + 3ص + 1 = (2-ص)(2+ص)ج + (2+ص)ب + (2+ص)(2-ص)1$$

$$\frac{1}{8} = ب \leftarrow ب8 = 1 \leftarrow 2 = ص$$

$$\frac{1}{8} = ج \leftarrow ج8 = 1 \leftarrow 2 = ص$$

$$\frac{1}{4} = 1 \leftarrow 4 = 1 \leftarrow 0 = ص$$

$$\frac{1}{2+ص} \frac{1}{8} + \frac{1}{2-ص} \frac{1}{8} + \frac{1}{ص} \frac{1}{4} = \frac{ص^2 + 3ص + 1}{ص(ص-2)}$$

$$\left[\frac{1}{2+ص} \frac{1}{8} + \frac{1}{2-ص} \frac{1}{8} + \frac{1}{ص} \frac{1}{4} \right] = \frac{ص^2 + 3ص + 1}{ص(ص-2)}$$

$$\left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right] = \frac{ص^2 + 3ص + 1}{ص(ص-2)}$$

احيانا نحتاج تقسيم البسط على المقام عندما تكون درجة البسط اكبر او تساوي درجة المقام

$$10- \left[\frac{1-ص}{(3-ص)(1+ص)(2-ص)} \right]$$

$$\frac{ج}{(3-ص)} + \frac{ب}{(1+ص)} + \frac{1}{(2-ص)} = \frac{1-ص}{(3-ص)(1+ص)(2-ص)}$$

$$(1+ص)(2-ص)ج + (3-ص)(2-ص)ب + (3-ص)(1+ص)1 = 1-ص$$

$$\frac{1}{4} = ج \leftarrow ج4 = 2 \leftarrow 3 = ص$$

$$\frac{1}{6} = ب \leftarrow ب6 = 2 \leftarrow 1 = ص$$

$$\frac{1}{3} = 1 \leftarrow 3 = 1 \leftarrow 2 = ص$$

$$\frac{1}{(3-ص)2} + \frac{1}{(1+ص)6} + \frac{1}{(2-ص)3} = \frac{1-ص}{(3-ص)(1+ص)(2-ص)}$$

$$\left[\frac{1}{(3-ص)2} + \frac{1}{(1+ص)6} + \frac{1}{(2-ص)3} \right] = \frac{1-ص}{(3-ص)(1+ص)(2-ص)}$$

$$\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right] = \frac{1-ص}{(3-ص)(1+ص)(2-ص)}$$

كيف ن فكر لإيجاد تكامل اقتران

١- من الافضل وليس دوما اذا كان لدينا اقتران مركب من الشكل

قال (س)، ظطال (س) ، ظطال (س) ، جمال (س)، جمال (س) ، لول (س) ، هـ^{ل(س)}

ان نفرض $v = ل(س)$ ونجد $ص = ل'(س) دس$

٢- اذا كان لدينا كسر

ا- اما ان يكون البسط مشتق المقام وبالتالي التكامل لو غار يتم القيمة المطلقة للمقام
ب- اذا كان درجة المقام لا تساوي -١ فيمكن رفع المقام للبسط وتغير إشارة الأس وتصبح من

$$\text{الشكل } \int \frac{u'(س) v(س) + \frac{u(س)^{١+n}}{١+n}}{دس} = \int \frac{u(س)^{١+n}}{١+n} + \frac{u'(س) v(س)}{دس}$$

ج- قد تكون درجة البسط اكبر او تساوي درجة المقام عندها نقسم البسط على المقام
د- يمكن الا تكون ايا من الحالات السابقة ويكون المقام قابل للتحليل عندها نستخدم طريقة تفريق الكسور

٣- قد يكون الاقتران حاصل ضرب

ا- يمكن ان نحول الضرب الى مجموع

ب- قد يكون حاصل ضرب اقترانين احدهما مشتق الاخر وهنا تكامل بالتعويض
اذا لم يكن ايا من الحالات السابقة نستخدم التكامل بالاجزاء

٤- من الأفضل ان نتعلم كل الحالات الخاصة الواردة بالكتاب فهذه الحالات تستهوي من يضع
الأسئلة فهم لا يحبون طرح مسائل تعتمد المنطق بالحل بل يميلون لوضع جزورة

$$\text{من قبيل } \int \frac{س هـ^س}{(١+س) دس}$$