

## الدائرة :

الدائرة :

هي منحنى مستوي ينتج من قطع مستوي معين لمخروط دائري قائم مزدوج عمودي على المحور ولا يمر برأسه

الدائرة في المستوى الديكارتي :

هي المحل الهندسي للنقطة  $هـ(س، ص)$  التي تتحرك على بعد ثابت (نصف قطرها) من نقطة ثابتة (مركزها)

معادلة الدائرة بالصورة القياسية :

$$ر^2 = (س - س) + (ص - هـ)^2$$

حيث :

 $(س، هـ)$  : مركز الدائرة $(ر)$  : نصف قطرها $(س، ص)$  : النقطة المتحركة

## ملاحظة :

بعد النقطة  $(س، ص)$  عن المسـ تقييم

$$س + ص + ج = ٠ \text{ هو}$$

$$\frac{|س + ص + ج|}{\sqrt{ب^2 + ٢٢}}$$

الصورة العامة لمعادلة الدائرة :

$$س^2 + ص^2 + ٢س + ٢ص + ج = ٠$$

المركز :

$$(-٢، -٢) = (-\text{نصف معامل } س، -\text{نصف معامل } ص)$$

نصف القطر :

$$ر = \frac{\sqrt{٢٢ + ٢ب}}{٢}$$

## امثلة :

(١) اوجد احداثيات مركز الدائرة وطول نصف قطر الدوائر التالية :

$$١٧ = (س + ١)^2 + (ص - ٥)^2 \text{ (أ)}$$

$$٢٦ = س^2 + ص^2 \text{ (ب)}$$

$$١٢ = (س + ٣)^2 + (ص - ١)^2 \text{ (ج)}$$

$$٨١ = س^2 + (ص - ٧)^2 \text{ (د)}$$

## الحل :

$$\text{أ) المركز : } (١، -٥) \text{ ، نصف القطر } ر = \sqrt{١٧}$$

$$\text{ب) المركز : } (٠، ٠) \text{ ، نصف القطر } ر = \sqrt{٢٦}$$

$$\text{ج) المركز : } (-٣، ١) \text{ ، نصف القطر } ر = \sqrt{١٢}$$

$$\text{د) المركز : } (٧، ٠) \text{ ، نصف القطر } ر = \sqrt{٨١} = ٩$$

(٢) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها  $(٣، -٤)$  وطول نصف قطرها (٦) وحدات

## الحل :

$$٣٦ = (س - ٣)^2 + (ص + ٤)^2$$

(٣) اكتب معادلة الدائرة التي طرفي قطرها هما  $(٣، ٤)$  و  $(٣، ٤)$

## الحل :

$$٢ = \sqrt{((٣ - ٣) - ٤)^2 + (٣ - ٣)^2}$$

$$\frac{٥٢}{٢} = ر \leftarrow \sqrt{٥٢} = ر^2 \leftarrow \sqrt{٣٦ + ١٦} = ر^2$$

منتصف المسافة = المركز

$$(٥، ١) = \left( \frac{٣ + ٣}{٢}, \frac{٤ + ٤}{٢} \right) = \left( \frac{٧ + ٣}{٢}, \frac{٤ + ٤}{٢} \right) =$$

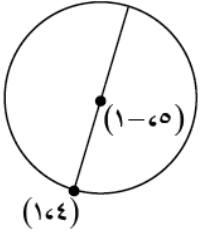
معادلة الدائرة :

$$٢ \left( \frac{٥٢}{٢} \right) = (س - ٥)^2 + (ص - ١)^2$$

$$\frac{٥٢}{٤} = (س - ٥)^2 + (ص - ١)^2$$

٩) اكتب معادلة الدائرة التي نهايتا القطر هما النقطتين

$$(1, 4) \text{ و } (3, -6)$$



الحل :

المركز :

$$(1, 4) = \left( \frac{1+3}{2}, \frac{4+(-6)}{2} \right)$$

$$\sqrt{r^2} = r \iff \sqrt{((1-1)^2 + (-3)^2)} + \sqrt{(4-6)^2} = r$$

$$5 = \sqrt{(1+3)^2 + (4-6)^2} \text{ معادلة الدائرة :}$$

١٠) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (٥, ٢) وتمس

$$\text{المستقيم } 3x + 4y + 5 = 0$$

الحل :

ر = بعد نقطة عن المستقيم

$$r = \left| \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = r$$

$$36 = \sqrt{(5-3)^2 + (2-2)^2} \text{ معادلة الدائرة :}$$

١١) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (٤, ٤) وتمس

$$\text{المستقيم } 2x - 3y = 3$$

الحل :

$$2x - 3y = 3$$

$$0 = 3 + 2x - 3y$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \left| \frac{3 + 4 - 4 \times 2}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2}} \right| = r$$

$$\frac{1}{5} = \sqrt{(4-2)^2 + (4-3)^2} \text{ معادلة الدائرة :}$$

١١) اوجد مركز ونصف قطر الدوائر التالية :

$$(أ) x^2 + y^2 + 2x + 3y + 3 = 0$$

$$(ب) x^2 + y^2 + 3x + 2y - 6 = 0$$

$$(ج) x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0$$

$$(د) x^2 + y^2 - 6x - 4y - 9 = 0$$

الحل :

$$(أ) \text{ المركز : } \left( -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right) = (1, -1)$$

$$r = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$$

٤) اكتب معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها يساوي (٣) وحدات وتمس المحورين وتقع في الربع الثالث

الحل :

$$\text{المركز : } (-3, -3)$$

$$\text{معادلة الدائرة : } (x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$$

٦) اوجد معادلة الدائرة التي مركزها (-٣, ٤) وتمس

محور السينات

الحل :

تمس محور السينات

$$r = |h| = |4| = r \iff 4 = r$$

$$\text{معادلة الدائرة : } (x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$$

٦) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل وطول نصف قطرها (٥) وحدات

الحل :

$$\text{المركز : } (0, 0) \text{ , } r = 5$$

$$\text{معادلة الدائرة : } x^2 + y^2 = 25$$

$$25 = x^2 + y^2$$

٧) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (٥, -٣) وطول

قطرها (٦) وحدات

الحل :

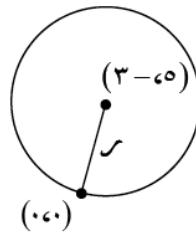
$$\text{المركز : } (5, -3) \text{ , } r = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{معادلة الدائرة : } (x-5)^2 + (y+3)^2 = 9$$

٨) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (٥, -٣) وتمر بنقطة

الاصل

الحل :



$$r = \sqrt{(0-5)^2 + (0+3)^2} = r$$

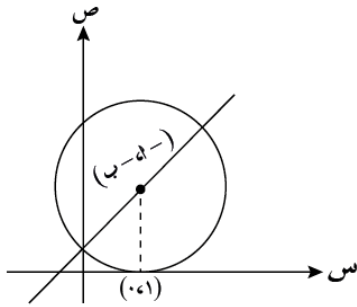
$$r = \sqrt{25 + 9} = r$$

$$r = \sqrt{34}$$

$$\text{معادلة الدائرة : } (x-5)^2 + (y+3)^2 = 34$$

معادلة الدائرة :  $9 = x^2 + (y+3)^2$

١٤) اوجد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم  $x = y + 2$  وتمس محور السينات عند النقطة  $(0,1)$



**الحل :**

تمس السينات عند  $(0,1)$

$$1 - = 2 \leftarrow 1 = 2 - \leftarrow$$

المركز :  $(2, -1)$

يقع على المستقيم  $x = y + 2$

$$2 - = 2 \leftarrow 2 = 2 - \leftarrow 4 + 2 - = 2 -$$

المركز :  $(6,1)$  وبما انها تمس السينات  $r = 6$

معادلة الدائرة :  $36 = x^2 + (y-1)^2$

١٥) اوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط

$(0,1)$  ،  $(0,7)$  ،  $(3,-5)$

**الحل :**

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$$

$$(0,1) \leftarrow 0 + 1 + 2 + 2 + 2 = 0$$

$$(0,7) \leftarrow 0 + 49 + 14 + 14 + 2 = 0$$

$$(3,-5) \leftarrow 9 + 25 + 12 - 10 + 10 + 2 = 0$$

$$(2) \dots \dots 49 = 14 + 14 \leftarrow$$

$$(3,-5) \leftarrow 9 + 25 + 12 - 10 + 10 + 2 = 0$$

$$(3) \dots \dots 36 = 14 + 14 \leftarrow$$

$$\frac{49}{10} = 1 \leftarrow 49 = 14 + 14 \leftarrow \text{من (2) :}$$

عوض في (1) :

$$1 - = 2 + \frac{49}{10} \times 2 \leftarrow 1 - = 2 + 2$$

$$\frac{108}{10} = 2 \leftarrow \frac{98}{10} - 1 = 2 \leftarrow 1 - = 2 + \frac{98}{10} \leftarrow$$

عوض في (3) :

١٦) نقسم المعادلة على (3)

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$$

$$\text{المركز : } (2, -1) = (2 \times \frac{1}{3}, 2 \times \frac{1}{3}) = (2, -1)$$

$$\sqrt{r} = \sqrt{2 + 4 + 1} = r$$

$$\text{ج) المركز : } (1, -3) = (2 \times \frac{1}{3}, 6 - \times \frac{1}{3}) = (1, -3)$$

$$\sqrt{r} = \sqrt{2 - 1 + 9} = r$$

$$\text{د) } x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$$

$$\text{المركز : } (2, 3) = (2 \times \frac{1}{3}, 6 - \times \frac{1}{3}) = (2, 3)$$

$$\sqrt{r} = \sqrt{(9 -) - 4 + 9} = r$$

١٢) اوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين  $(0,1)$  ،  $(1,-3)$  ويقع مركزها على محور السينات

**الحل :**

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$$

المركز :  $(2, -1)$

يقع على محور السينات  $x = 0$

$$(1, -3) \leftarrow 1 + 9 + 2 - 6 + 2 = 0$$

$$(1) \dots \dots 1 - = 2 + 2 \leftarrow$$

$$(0,1) \leftarrow 0 + 1 + 2 + 2 + 2 = 0$$

$$(2) \dots \dots 26 - = 2 + 2 \leftarrow$$

$$(2) - (1) \leftarrow 16 = 24 \leftarrow 4 = 2 \leftarrow$$

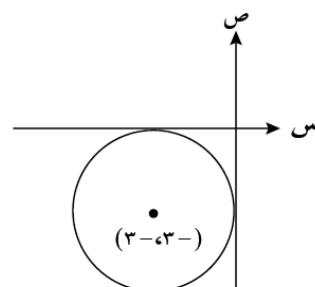
عوض في (1) :  $34 - = 2 + 2 \leftarrow 1 - = 2 + 2 \leftarrow$

$$\text{المعادلة : } x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$$

١٣) اوجد معادلة الدائرة التي تقع في الربع الثالث وتمس محوري السينات والصادات علما بأن طول قطرها (6) وحدات

وحدات

**الحل :**



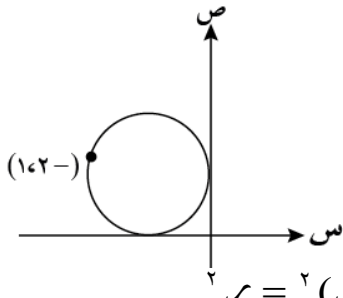
$$r = \frac{6}{2} = 3$$

المركز :  $(-3, -3)$

المركز :  $(-2, 2)$  ،  $r = 2$

معادلة الدائرة :  $x^2 + (y-2)^2 = 4$

١٨) اوجد معادلة الدائرة التي تماس المحاور وتتمر بالنقطة  $(-2, 1)$



**الحل :**

المركز :  $(-r, r)$

المعادلة :

$$x^2 + (y-r)^2 = r^2$$

$$(-2)^2 + (1-r)^2 = r^2$$

$$4 + 1 - 2r + r^2 = r^2$$

$$5 - 2r = 0$$

$$5 = 2r$$

$$r = \frac{5}{2}$$

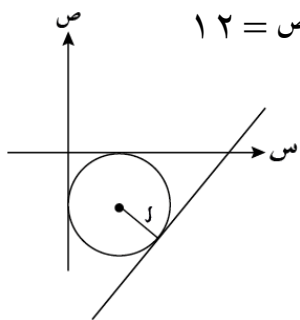
$$r = \frac{5}{2} \leftarrow \text{المركز } (-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$$

$$x^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = (\frac{5}{2})^2$$

$$r = \frac{5}{2} \leftarrow \text{المركز } (-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$$

$$x^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = (\frac{5}{2})^2$$

١٩) اوجد معادلة الدائرة التي تقع بالربع الرابع وتمس المحاور والمستقيم  $3x - 4y = 12$



**الحل :**

المركز :  $(r, -r)$

$$r = \frac{|12 - 3r - 4(-r)|}{\sqrt{16 + 9}}$$

$$r = |12 - 7r|$$

$$r - 12 = -7r \quad r - 12 = 7r$$

$$r = 1 \quad r = 6$$

المركز :  $(1, -1)$       المركز :  $(6, -6)$

$$x^2 + (y+1)^2 = 2 \quad x^2 + (y+6)^2 = 36$$

$$10 \times \frac{9-4}{10} + 6 - 63 = b \leftarrow \frac{108}{10}$$

معادلة الدائرة :

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 63 = 0$$

١٦) اوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين

$(2, 3)$  ،  $(-1, 1)$  والتي يقع مركزها على

$$x - 3y - 11 = 0$$

**الحل :**

المركز :  $(-a, -b)$

$$(-a)^2 + (-b)^2 = 11$$

$$(-a)^2 + (-b)^2 = 11 \dots (1)$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 63 = 0$$

$$(2, 3) \leftarrow 4 + 9 + 4 + 6 - 63 = 0$$

$$(-1, 1) \leftarrow 1 + 1 + 2 - 2 - 63 = 0$$

$$(-1, 1) \leftarrow 1 + 1 + 2 - 2 - 63 = 0$$

$$(-1, 1) \leftarrow 1 + 1 + 2 - 2 - 63 = 0$$

اطرح (٢) من (٣)

$$11 = 4 - 3b + 3a$$

$$11 = 4 + 8b - 14a$$

$$7 = 14a - 12b$$

$$11 = 4 + 8b - 14a$$

$$-\frac{33}{4} = b - \frac{33}{4} \leftarrow b = \frac{33}{4}$$

$$a = \frac{143}{4}, \quad b = \frac{205}{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 63 = 0$$

١٧) اوجد معادلة الدائرة التي تقع بالربع الثاني وتمس المحاور ويقع مركزها على

$$x + 2y = 6$$

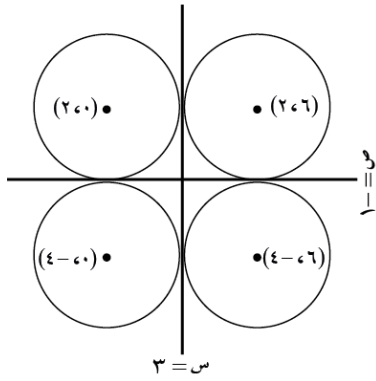
**الحل :**

المركز :  $(-r, -r)$  ويحقق المعادلة  $x + 2y = 6$

$$r = -2 - r \leftarrow r = -6$$

(٢٢) اوجد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين

$$ص = 1 - س, 3 = س \text{ ونصف قطرها } (3)$$



الحل :

$$(1) 9 = (2 - س)^2 + (6 - س)^2$$

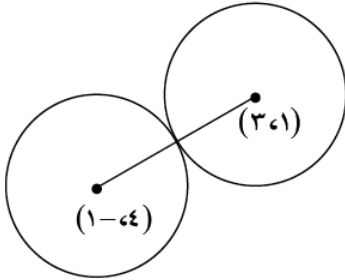
$$(2) 1 = (2 - س)^2 + (0 - س)^2$$

$$(3) 9 = (4 + س)^2 + (0 - س)^2$$

$$(4) 9 = (4 + س)^2 + (6 - س)^2$$

(٢٣) اوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣,١) وتمس الدائرة

$$\text{التي معادلتها } س^2 + ص^2 - ٨س - ٢ص + ٨ = ٠$$



الحل :

المركز :

$$\left( \frac{2 - (8 - س)}{2}, \frac{(1 - س)}{2} \right)$$

$$(1 - س, 4) =$$

$$3 = 9\sqrt{ص} = \sqrt{8 - 1 + 16\sqrt{ص}} = ر$$

لإيجاد نصف القطر:

$$٥ = 2٥\sqrt{ص} = \sqrt{(1 + 3) + (4 - 1)\sqrt{ص}} = ر$$

$$\text{المعادلة : } ٢٥ = (3 - س)^2 + (1 - س)^2$$

(٢٤) اوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين

(٣,٢), (١,١) ويقع مركزها على المستقيم

$$س - ٣ = ص - ١$$

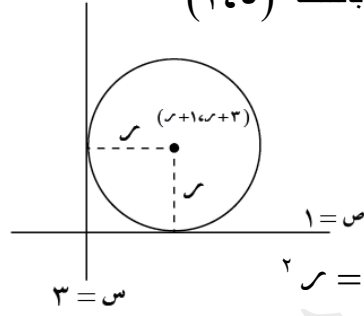
الحل :

$$س^2 + ص^2 + ٢س + ٢ص + ج = ٠$$

$$(٣,٢) \Leftarrow 14 + 6 + ج = -٣ \dots (1)$$

(٢٥) اوجد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين

$$س = 3, ص = 1 \text{ وتمر بالنقطة } (2,5)$$



الحل :

$$\text{المركز : } (ر + ١, ر + ٣)$$

المعادلة :

$$٣ = س \quad ٢ر = (٥ - ص)^2 + (س + ٣)^2$$

$$٢ر = (ر - ١ - ص)^2 + (ر - ٣ - س)^2$$

$$(٢٥) \text{ تحقق المعادلة } ٢ر = (ر - ١)^2 + (ر - ٢)^2$$

$$٢ر = ٢ر + ٢ر - ١ + ٢ر + ٤ - ٤$$

$$٠ = ٥ + ٢ر - ٢ر$$

$$٠ = (١ - ر)(٥ - ر)$$

$$١ = ر, ٥ = ر$$

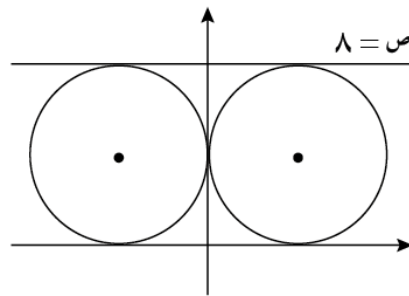
$$٥ = ر \Leftarrow \text{المركز } (٦, ٨)$$

$$٢٥ = (٦ - ص)^2 + (٨ - س)^2$$

$$١ = ر \Leftarrow \text{المركز } (٢, ٤)$$

$$١ = (٢ - ص)^2 + (٤ - س)^2$$

(٢١) اوجد معادلة الدائرة التي تمس المحاور والمستقيم



$$٨ = ص$$

$$٨ = ص$$

الحل :

$$٤ = ر \Leftarrow ٨ = ٢ر$$

حالة (١) :

$$\text{المركز : } (٤, ٤)$$

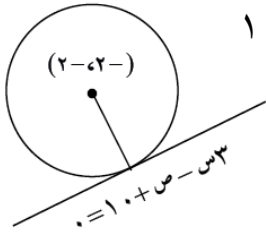
$$\text{المعادلة : } ١٦ = (٤ - ص)^2 + (٤ - س)^2$$

حالة (٢) :

$$\text{المركز : } (٤, ٤)$$

$$\text{المعادلة : } ١٦ = (٤ - ص)^2 + (٤ + س)^2$$

(٢٧) اوجد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة  $(-٢, -٢)$



وتمس المستقيم  $ص = ٣س + ١٠$

الحل :

$$\left| \frac{١٠ + (-٢) - ٢ - ٣}{١ + ٩} \right| = r$$

$$r = \frac{٦}{١٠}$$

$$\frac{٣٦}{١٠} = ٢(٢ + ص) + ٢(٢ + س) : \text{المعادلة}$$

(٢٨) ما قيم  $(ج)$  التي تجعل المعادلة

$$س^٢ + ٢ص + ٨س - ٤ص + ج = ٠$$

الحل :

$$٢ب + ٢ - ٤ج < ٠$$

$$٦٤ + ٦٤ - ١٦ج < ٠$$

$$٨٠ < ٤ج < ٢٠$$

(٢٩) اوجد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين

$ص = ٠$  ،  $ص = ٢$  وتمر بالنقطة  $(٤, ٠)$  ويقع

مركزها في الربع الاول وطول نصف قطرها اكبر من

وحدتين

الحل :

$$\text{المركز : } (٠, ر - ٢)$$

المعادلة :

$$٢ر = ٢((٠ - ر) - ٢) + ٢(٠ - ٤)$$

$$٢ر = ٢(٢ + ر - ٠) + ٢(٠ - ٤) \text{ تحقق } (٤, ٠)$$

$$٢ر = ٤ + ٢ر - ٢ر + ٢ر + ٨ - ١٦$$

$$٠ = ٢٠ + ٢ر - ٢ر$$

$$٠ = (٢ - ر)(١٠ - ر)$$

$$١٠ = ر , ٢ = ر$$

$$١٠٠ = ٢(٨ - ص) + ٢(١٠ - س)$$

$$(١٠١) \leftarrow ١٢ + ب + ج = ٢ - ..... (٢)$$

المركز  $(-١, -ب)$  يحقق  $س - ٣ص - ١١ = ٠$

$$\leftarrow ٢٢ = ب٣ + ١ -$$

بحل المعادلات :

$$١٤ - = ج , ٥ = ب , ٧ - = ٢$$

معادلة الدائرة :

$$س^٢ + ٢ص - ٢س + ٧س + ٥ص - ١٤ = ٠$$

(٢٥) اوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين

$(١٠, ٣)$  ،  $(٥, ١٦)$  ويقع مركزها على محور

الصادات

الحل :

$$س^٢ + ٢ص + ٢س + ١٢ + ٢بص + ج = ٠$$

المركز  $(-١, -ب)$  يقع على محور الصادات  $\leftarrow ٢ = ٠$

$$\leftarrow (١٠, ٣) \leftarrow ١ + ٩ + ٠ + ٦ب + ج = ٠$$

$$\leftarrow ١٠ + ٦ب + ج = ..... (١)$$

$$\leftarrow (١٠, ٥) \leftarrow ٢٥ + ١ + ٠ + ب + ج = ٠$$

$$\leftarrow ٢٦ + ب + ج = ..... (٢)$$

$$\text{بحل المعادلات : } ب = ٨ , ج = ٣٤ -$$

معادلة الدائرة :

$$س^٢ + ٢ص + ٨س - ٣٤ = ٠$$

(٢٦) اوجد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم

$ص - ٢س = ٤$  وتمر بالنقطة

$(٠, ١)$

الحل :

المركز :  $(١, ر)$

$$ص - ٢س = ٤ \leftarrow ر - ٢ = ٤ \leftarrow ر = ٦$$

معادلة الدائرة :

$$٣٦ = ٢(٦ - ص) + ٢(١ - س)$$

المركز :  $(2+s, s)$  ،  $r = r$

$$\frac{|5 + (2+s)4 - s^3|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|11 - (2+s)4 + s^3|}{\sqrt{16+9}}$$

$$|3-s| = |3-s7|$$

$$\text{أما } 3-s = 3-s7$$

$$0 = s \leftarrow 0 = s8 \leftarrow 3 + 3 - = s + s7$$

المركز :  $(2, 0)$

$$\frac{3}{5} = \frac{|3-0|}{5} = r$$

$$\frac{9}{25} = 2(2-s) + 2s \text{ : المعادلة}$$

$$\text{أو } 3+s = 3-s7$$

$$1 = s \leftarrow 6 = s6$$

$$\frac{4}{5} = \frac{|3-7|}{5} = r$$

$$\frac{16}{25} = 2(3-s) + 2(1-s) \text{ : المعادلة}$$

### تمارين وواجبات :

(1) اوجد مركز ونصف القطر للدوائر الآتية :

$$(أ) 81 = 2(5+s) + 2(2-s)$$

$$(ب) 13 = 2(6-s) + 2s$$

$$(ج) 36 = 2(9+s) + 2(3-s)$$

$$(د) 0 = 12 - 6s + 4s + 2s + 2$$

$$(هـ) 0 = 6 - 6s + 2s - 2s + 2$$

$$(و) 14 = 2s + 2(2-s) + 2(1-s)$$

$$(ز) 3s + 2(3-s) + 2(7-s) = 18$$

(2) اوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط

$$(0,0) ، (3,-1) ، (2,-4)$$

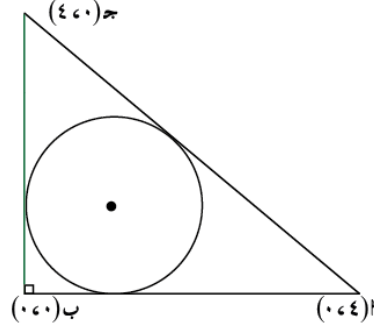
(3) تتحرك نقطة في المستوى بحيث

$s = 3 + 2$  جاهد ،  $s = 4 + 2$  جتاه ، اوجد معادلة

المحل الهندسي للنقطة وبين نوعه

(30) من خلال الشكل الذي يمثل دائرة مرسومة داخل مثلث

أ ب ج وتمس اضلاعه ، اوجد معادلة الدائرة



**الحل :**

المركز :  $(r, r)$

نصف القطر :  $r$

نجد معادلة المستقيم

$$\text{الميل} = \frac{4-0}{4-0} = 1$$

$$\text{المعادلة : } 0 = 4 - s + s \leftarrow 1 = (s-4)$$

$$0 = 4 - s + s \leftarrow s - 4 = s$$

$$r\sqrt{2} = |4 - r| = \frac{|4 - r + r|}{1 + 1} = r$$

$$\text{أما } r\sqrt{2} = 4 - r2$$

$$4 = r\sqrt{2} - r2$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}-2} = r \leftarrow 4 = (2\sqrt{2}-2)r$$

وهذا يتعارض مع الرسم حيث تكون  $r < 4$

$$\text{أو } r\sqrt{2} - = 4 - r2$$

$$4 = r\sqrt{2} + r2$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}+2} = r \leftarrow 4 = (2\sqrt{2}+2)r$$

المعادلة :

$$2\left(\frac{4}{\sqrt{2}+2}\right) = 2\left(\frac{4}{\sqrt{2}+2} - s\right) + 2\left(\frac{4}{\sqrt{2}+2} - s\right)$$

(31) اكتب معادلة الدائرة التي يقع مركزها على

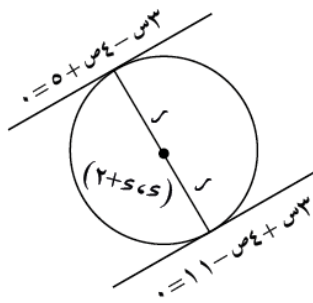
$s = 2 + s$  وتمس المسـ تقيمين

$$0 = 11 - 4s + 3s = 5 + s$$

**الحل :**

المركز :  $(s, s)$

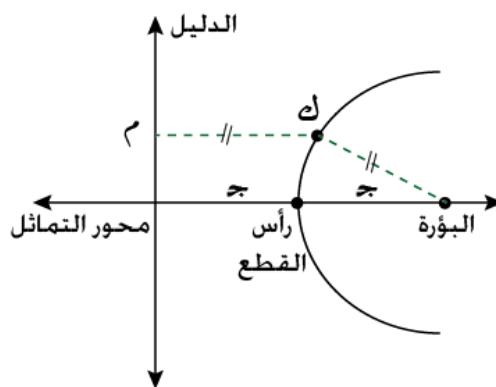
يقع على  $s = 2 + s$



## القطع المكافئ :

هو المحل الهندسي لمجموعة النقط المتحركة والتي يكون بعدها عن نقطة ثابتة (البؤرة) مساوياً لبعدها عن مستقيم معلوم

$$|ك ب| = |ك ل| = \text{الدليل}$$



معادلة القطع المكافئ :

$$(ص - ل) = ٢(س - ب)$$

نستنتج من التعريف ان هناك خصائص للقطع المكافئ وهي :

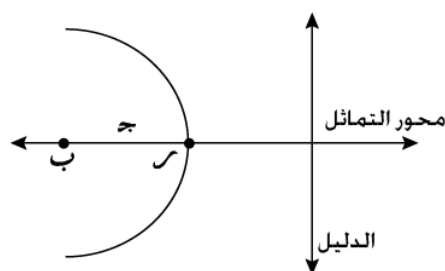
(١) البؤرة : عبارة عن نقطة على المحور تقع داخل المنحنى

(٢) الرأس : عبارة عن نقطة في المنتصف تماماً بين البؤرة والدليل

(٣) الدليل : عبارة عن مستقيم يكون عمودي على محور التماثل ويكون عكس اتجاه المنحنى باتجاه الخلف

(٤) هناك نوعان من القطوع المكافئة سيني او صادي حيث اذا كان المحور سيني فالقطع سيني واذا كان المحور صادي فالقطع صادي

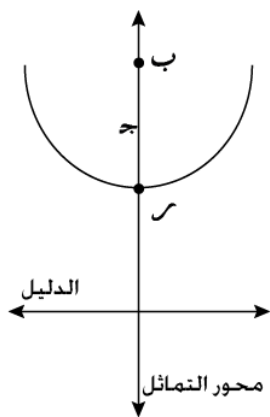
(٥) هناك ثلاث اشكال اخرى للقطع المكافئ ، وهي :



النوع : سيني

$$(ص - ل) = ٢(س - ب)$$

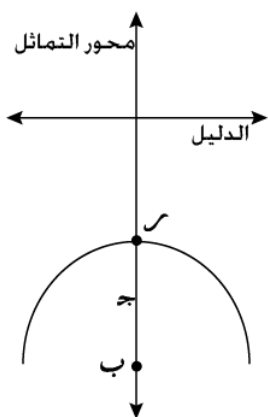
(ب)



النوع : صادي

$$(ص - ل) = ٢(س - ب)$$

(ج)



النوع : صادي

$$(ص - ل) = ٢(س - ب)$$

## مثال (١) :

اوجد الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ ثم ارسم منحناه في كل مما يلي :

$$(١) \text{ البؤرة هي } (٣, ٠) \text{ ومعادلة الدليل } ص = -٣$$

الحل :

$$\text{الرأس : } (٠, ٠) = \left( \frac{(٣) + ٣}{٢}, ٠ \right)$$

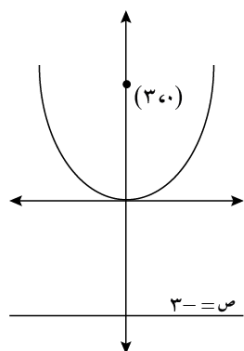
$$٢ = ٣ - (٣) = ٢$$

$$٢ = ٦ \leftarrow ٣ = ٢$$

المعادلة :

$$(س - ٠) = ٢(ص - ٠)$$

$$س = ٢ص$$



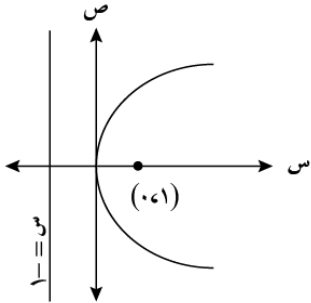


## مثال (٢) :

اوجد الرأس واحداثيات البؤرة ومعادلتى المحور والدليل لكل مما يلي ثم ارسم منحناه

$$(١) \text{ ص } ٢ = ٤ - \text{ع}$$

الحل :



$$\text{الرأس: } (٠,٠)$$

$$٤ = \text{ع} \leftarrow \text{ع} = ١$$

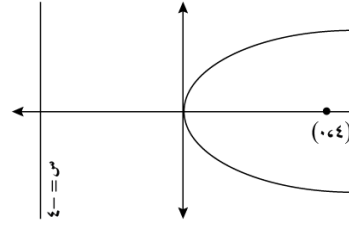
$$\text{الدليل: ص} = ١ -$$

$$\text{البؤرة: } (٠,١)$$

(٢) البؤرة هي (٠,٤) ومعادلة الدليل  $\text{ع} = -$

الحل :

$$\text{الرأس: } (٠,٠) = \left( ٠, \frac{٤(-) + ٤}{٢} \right)$$



$$٢ = \text{ع} - (-٤)$$

$$٢ = \text{ع} \leftarrow ٨ = \text{ع}$$

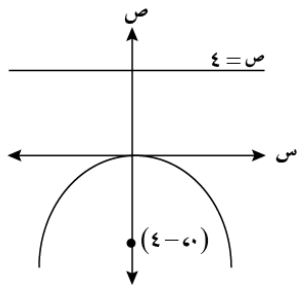
المعادلة :

$$(٠ - \text{ص}) ١٦ = ٢ (٠ - \text{ص})$$

$$\text{ص } ١٦ = ٢$$

$$(٢) \text{ ص } ٢ = ٦ - \text{ع}$$

الحل :



$$\text{الرأس: } (٠,٦)$$

$$٤ = \text{ع} \leftarrow ١٦ = \text{ع}$$

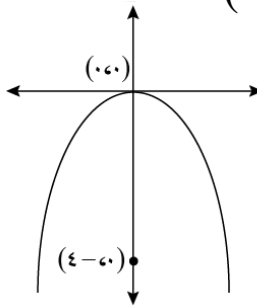
$$\text{المحور: ص} = ٠$$

$$\text{الدليل: ص} = ٤ + ٠ = ٤$$

$$\text{البؤرة: } (٤,٠)$$

(٣) البؤرة هي (٤,٠) والرأس (٠,٠)

الحل :



$$\text{ع} = (-٤) - ٠ = ٤$$

المعادلة :

$$(٠ - \text{ص}) ١٦ = ٢ (٠ - \text{ص})$$

$$\text{ص } ١٦ = ٢$$

$$(٣) \text{ ص } ٣ = ٢(٢ - \text{ع})$$

الحل :

نرتب المعادلة :

$$\text{ص } ٣ = ٢(٢ - \text{ع})$$

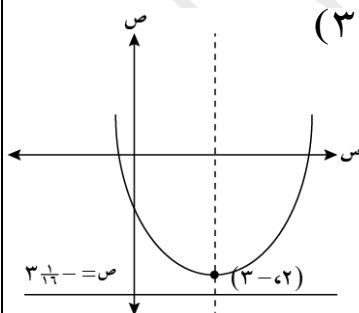
$$\text{ص } ٣ = ٤ - ٢\text{ع}$$

$$\frac{١}{٤} (٣ + \text{ص}) = ٢(٢ - \text{ع})$$

$$\text{الرأس: } (٣, -٢)$$

$$\frac{١}{١٦} = \text{ع} \leftarrow \frac{١}{٤} = \text{ع}$$

$$\text{المحور: ص} = ٢$$

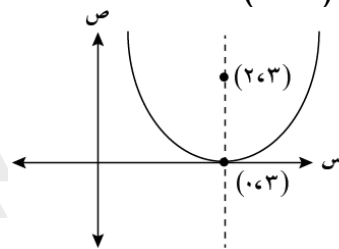


$$\text{الدليل: ص} = ٣ - \frac{١}{١٦} = \frac{٣١٥}{١٦}$$

$$\text{البؤرة: } \left( \frac{١}{١٦}, ٣ - \frac{١}{١٦} \right) = \left( \frac{١}{١٦}, \frac{٤٧٩}{١٦} \right)$$

(٤) البؤرة هي (٢,٣) والرأس (٠,٣)

الحل :



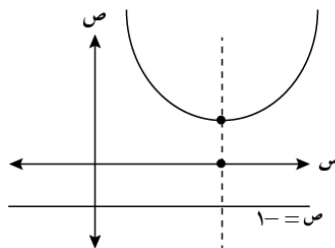
$$\text{ع} = ٠ - ٢ = -٢$$

المعادلة :

$$(٠ - \text{ص}) ٨ = ٢(٣ - \text{ص})$$

(٥) الرأس هو (١,٣) ومعادلة الدليل  $\text{ص} = ١ -$

الحل :



$$\text{ع} = (١ -) - ١ = ٢$$

المعادلة :

$$(١ - \text{ص}) ٨ = ٢(٣ - \text{ص})$$

(٢) الذي رأسه (١،٢) ويمر بالنقطة (٥،٤) ومحوره يوازي محور الصادات

**الحل :**

$$(س - ٢)^٢ = ٤(ص - ١)$$

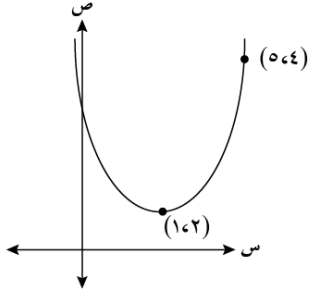
يمر بالنقطة (٥،٤)

$$(٥ - ٢)^٢ = ٤(٤ - ١)$$

$$٤ \times ٣ = ٤$$

$$١ = ٣ \leftarrow$$

$$(س - ٢)^٢ = ١(ص - ١)$$



**ملاحظات :**

(١) معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات او الدليل يوازي محور السينات هو

$$ص = ٢س^٢ + ب + ج ، ب \neq ٢$$

(٢) معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات او الدليل يوازي محور الصادات هو

$$س = ٢ص^٢ + ب + ج ، ب \neq ٢$$

**امثلة :**

(١) اوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات ويمر بالنقاط (٠،٤) ، (٠،٤) ، (٤،٢)

**الحل :**

محوره يوازي محور الصادات

$$ص = ٢س^٢ + ب + ج$$

$$٠ = ٢ \times ٠ + ٠ + ج \leftarrow (٠،٠)$$

$$٠ + ٤ \times ١ + ١٦ \times ٢ = ٠ \leftarrow (٠،٤)$$

$$٠ = ٢ \times ٤ + ١٦ + ج \leftarrow (١)$$

$$٠ + ٤ \times ٢ + ١٦ \times ٤ = ٤ \leftarrow (٤،٢)$$

$$٤ = ٢ \times ٤ + ١٦ + ج \leftarrow (٢)$$

$$(٤) ص^٢ = ٤(س - ٢)$$

**الحل :**

الرأس: (٠،٢)

$$١ = ٤ \leftarrow ٤ = ٤$$

المحور: ص = ٠

$$٣ = ١ + ٢ = س$$

البؤرة: (٠،١) = (٠،١ - ٢)

$$(٥) (١ - س)^٢ = ٨(١ - ص)$$

**الحل :**

الرأس: (١،١)

$$٢ = ٨ \leftarrow ٨ = ٢$$

المحور: س = ١

$$١ - ٢ = ١ - ٢ = ص$$

البؤرة: (٣،١) = (٢ + ١،١)

$$(٦) (٢ + ص)^٢ = ٢(١ + س)$$

**الحل :**

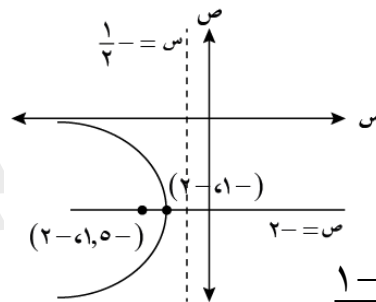
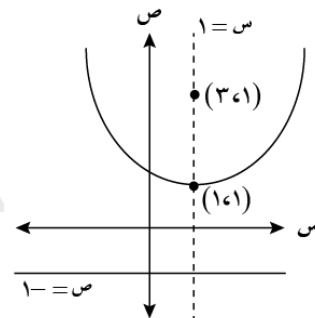
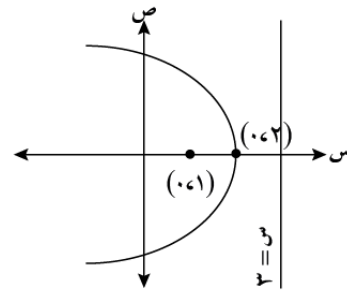
الرأس: (٢ - ٤، -)

$$\frac{١}{٢} = ٢ \leftarrow ٢ = \frac{١}{٢}$$

المحور: ص = ٢ -

$$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} + ١ - = س$$

البؤرة: (٢ - ٤، ٥ -) = (٢ - ٤، \frac{١}{٢} - ١ -)



**مثال (٣) :**

في كل مما يلي ، اوجد معادلة القطع المكافئ ثم ارسم منحناه

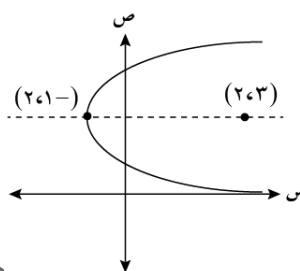
(١) الذي رأسه (٢،١ -) وبؤرته (٢،٣)

**الحل :**

$$٣ - ١ = ج$$

$$٤ = ج$$

$$(٢ - ص)^٢ = ١٦(١ + س)$$



$$ج + ١ \times ٤ = ٣ \leftarrow (٢,٣)$$

$$(١) \dots\dots ج + ١ \times ٤ = ٣ \leftarrow$$

$$ج + ١ \times ٩ = ٢ \leftarrow (٣ - ٤,٢)$$

$$(٢) \dots\dots ج + ١ \times ٩ = ٢ \leftarrow$$

بطرح المعادلتين :

$$ج + ١ \times ٤ = ٣$$

$$ج + ١ \times ٩ = ٢$$

$$\frac{١-}{٥} = ١ \leftarrow ١٥- = ١$$

عوض قيمة (١) في (١) :

$$\frac{١٩}{٥} = ج \leftarrow ج + \frac{٤-}{٥} = ٣ \leftarrow ج + ٤ \times \frac{١-}{٥} = ٣$$

$$\frac{١٩}{٥} + ص \times ٥ + ٢ = ص \leftarrow \frac{١-}{٥} = ٣$$

(٤) ما معادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته

$$ص = ص^٢ + ٢س - ٢$$

الحل :

$$ص = ص^٢ + ٢س - ٢$$

$$٢(٢ \times \frac{١}{٤}) = ٢(٢ \times \frac{١}{٤})$$

$$١ + ص = ١ + ٢س - ٢$$

$$ص = ٢س - ١$$

$$\frac{١}{٤} = ج \leftarrow ١ = ج٤$$

معادلة الدليل :

$$ص = ص - ٣ - \frac{١}{٤} \leftarrow ص = \frac{٣١}{٤}$$

بحل المعادلتين (١) و (٢)

$$٠ = ٦ + ١ب$$

$$٤ = ٤ + ١ب - ٢$$

$$٨ = ٨ + ١ب - ٢$$

عوض قيمة (٢) في (١)

$$٠ = ٦ + ١ب - ٢ \leftarrow ١٦ = ١٦ + ١ب - ٢ \leftarrow ٤ = ب$$

$$ص = ص - ٢س + ٤س + ٠$$

(٢) اكتب الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات ويمر بالنقاط

$$(٠,٣), (١,٤), (١-٤,٦)$$

الحل :

محوره يوازي محور السينات

$$ص = ص^٢ + ٢ب + ج$$

$$٣ = ج \leftarrow ج + ٠ + ٠ = ٣ \leftarrow (٠,٣)$$

$$٤ = ٤ + ١ب + ١ \leftarrow (١,٤)$$

$$\leftarrow ٤ - ٣ = ١ + ١ب \leftarrow ١ = ١ + ب \leftarrow \dots\dots ب$$

$$٦ = ٦ + ١ب - ٢ \leftarrow (١-٤,٦)$$

$$\leftarrow ٦ - ٣ = ١ب - ٢ \leftarrow ٣ = ١ب - ٢ \leftarrow \dots\dots ب$$

بجمع المعادلتين (١) و (٢)

$$١ = ١ + ب$$

$$٣ = ٣ - ١ب$$

$$٤ = ٤ + ١ب - ٢$$

عوض قيمة (٢) في (١) :

$$ص = ص - ٢س + ٣$$

(٣) اوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره ص = ٠ ويمر

$$بالنقطتين (٢,٣), (٣-٤,٦)$$

الحل :

محوره ص = ٠ < محور هو محور السينات

$$ص = ص^٢ + ٢ب + ج$$

$$٠ = ص \leftarrow ٠ = ب$$

الدليل :  $ص = ٣ + ١ \leftarrow ص = ٤$

(٧) ما معادلة الدليل للقطع  $(س - ١) = ٨ - ٢ ص$

**الحل :**

$$٨ + ص = ٢ (س - ١)$$

$$(س - ١) = ٢ (٤ + ص)$$

$$١ = ٤ = ٢ ص$$

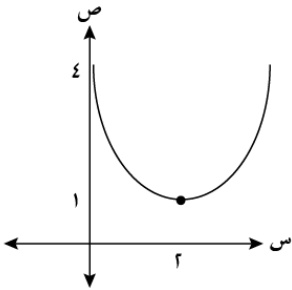
المركز :  $(١ - ٤)$

$$٣ - = ١ - ٢ - = ص$$

معادلة الدليل :  $ص = ٣ -$

(٨) اوجد معادلة القطع المكافئ الذي احدائيات رأسه  $(١٤٢)$

واحدائيات بؤرته  $(٤٤٢)$



**الحل :**

الرأس :  $(١٤٢)$

$$٣ = ١ - ٤ = ٢ ص$$

نوعه مكافئ للأعلى

المعادلة :

$$(س - ٢) = ٢ (٤ - ص)$$

$$(س - ٢) = ٢ (٣ - ص)$$

$$(س - ٢) = ٢ (١ - ص)$$

(٩) اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه النقطة  $(١٤٢)$

ويمر بمنحناه بالنقطة  $(٥٤٤)$  ومحوره يوازي محور

الصادات

**الحل :**

نوعه مكافئ للأعلى

$$٢ = ٤ - ١ = ٢ ص$$

المعادلة :

$$(س - ٢) = ٢ (٤ - ص)$$

لكن  $(٥٤٤)$  تحقق المعادلة

$$(١ - ٥) = ٢ (٤ - ص)$$

(٥) اذا كانت  $س = ٨ - ص - ٤ - ٢٨$  تمثل معادلة

قطع مكافئ ، اوجد ما يلي :

(أ) احدائيات الرأس

(ب) البؤرة

(ج) معادلة المحور والدليل

**الحل :**

$$٢٨ - ص - ٤ - ٢٨ = ٢ س$$

$$٢٨ - ص = ٢ س + ٤$$

$$٢٨ - ص = ٢ س + ٤$$

$$٢٤ - ص = ٢ (س + ٢)$$

$$(س + ٢) = ٢ (٣ - ص)$$

$$٢ = ٨ = ٢ ص$$

الرأس :  $(٣ - ٢)$

البؤرة :  $(٥٤٢) = (٢ + ٣٤٢)$

المحور :  $س = ٢ + ٠ = ٢ -$

الدليل :  $ص = ٢ - ٣ = ١ -$

(٦) قطع مكافئه معادلته :  $س = ٨ - ص + ٤ - ٢$  ،

اوجد ما يلي :

(أ) احدائيات الرأس

(ب) البؤرة

(ج) معادلة الدليل

**الحل :**

$$٨ - ص + ٤ - ٢ = ٢ س$$

$$٨ - ص = ٢ س + ٢$$

$$٨ - ص = ٢ س + ٢$$

نضيف للطرفين من خلال اكمال المربع

$$(س - ٢) = ٢ (٤ - ص)$$

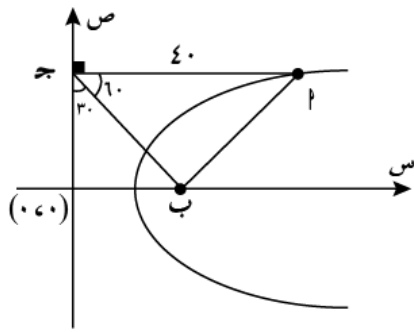
$$(س - ٢) = ٢ (٣ - ص)$$

$$١ = ٤ = ٢ ص$$

الرأس :  $(٣ - ٢)$

البؤرة :  $(٢٤٢) = (١ - ٣٤٢)$

الحل :



المثلث متطابق الاضلاع  $\Leftarrow$  كل من زواياه  $60^\circ$

$$\frac{PB}{40} = \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{PB}{B} = 3 \text{ جا.}$$

$$PB = 20 = \text{وحدة}$$

بعد البؤرة من الدليل = 20 وحدة

بعد الرأس عن الدليل =  $20 \times \frac{1}{2} = 10$  وحدات

$$20 = B \Leftarrow 10 = B$$

$\therefore$  الرأس : (0, 10) ، البؤرة : (0, 20)

$$(ص - هـ)^2 = 4ج(س - س)$$

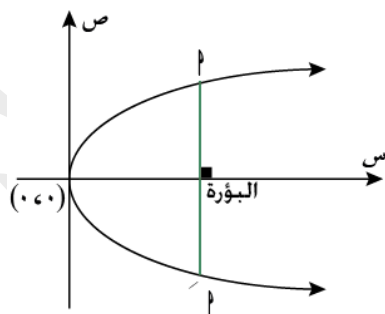
$$ص^2 = 4(س - 10)$$

$$ص^2 = 4س - 40$$

١٢ معتمدا الشكل الآتي الذي يمثل قطعاً

مكافئاً اذا علمت ان طول  $PM$  (٨) وحدات ، فجد

معادلته



الحل :

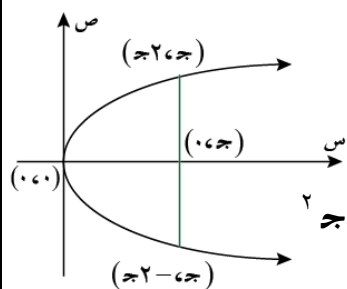
معادلة القطع المكافئ

$$ص^2 = 4جس$$

البؤرة : (ج، 0)

$$\text{عند } س = ج \Leftarrow ص^2 = 4ج^2$$

$$ص = \pm 2ج$$



$$\frac{1}{4} = ج \Leftarrow 6 = 4 \Leftarrow 4 \times ج = 4 = 4$$

المعادلة :

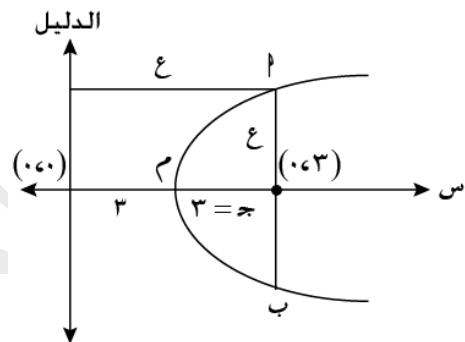
$$(س - 2)^2 \times \frac{1}{4} = 4(1 - ص)$$

$$(س - 2)^2 = 4(1 - ص)$$

١٠ من الشكل الذي يمثل قطع مكافئ بؤرته (3, 0) ورأسه

نقطة الاصل ، اوجد :

(أ) طول  $PM$  (ب) طول  $PM$



الحل :

(أ) من تعريف القطع المكافئ :

بعد النقطة (P) عن البؤرة = بعد (P) النقطة عن الدليل

$$6 = 3 + 3$$

$$6 = 4$$

$\Leftarrow$   $PM$  عمودية وتصل بين نقطتين

$$PM = 6 \times 2 = 4 \times 2 = 12$$

(ب) حسب نظرية فيثاغورس :

$$(PM)^2 = 4^2 + 3^2$$

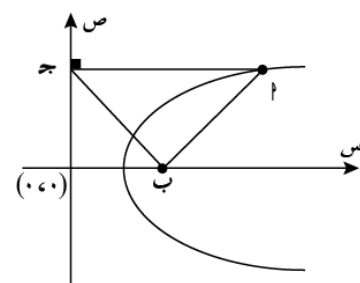
$$45 = 4^2 + 3^2 = (PM)^2$$

$$PM = \sqrt{45}$$

١١ الشكل ادناه يمثل منحنى القطع المكافئ الذي بؤرته

(ب) وكان المثلث  $PM$  متطابق الأضلاع طول ضلعه

(٤٠) وحدة ، جد معادلة القطع المكافئ



وعليه تكون احداثيات النقطة (ب) هي :

وهي تحقق معادلة القطع  $(3\sqrt{4} + 3, 4)$

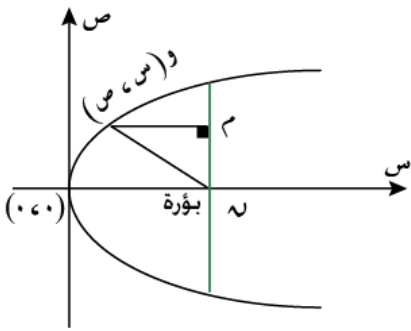
$$(3 - 3\sqrt{4} + 3)ج٤ = ١٦$$

$$\frac{1}{3\sqrt{4}} = ج٤ \leftarrow ج٤ \sqrt{3\sqrt{4} + 3} = ١٦ \leftarrow (3\sqrt{4})ج٤ = ١٦$$

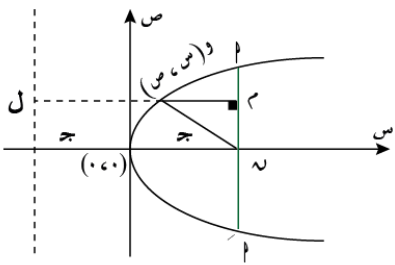
$$\therefore \text{المعادلة : } س^٢ = \frac{٤}{3\sqrt{4}} (٣ - ص)$$

١٤) يمثل الشكل الآتي قطعاً مكافئاً والنقطة و (س، ص)

تتحرك على منحنى القطع بحيث يبقى و٢ ه قائمة الزاوية في (٢) وكان و٢ + و١ = ٣ وحدات ، جد معادلة القطع المكافئ



**الحل :**



$$ص^٢ = ٤جس$$

$$٣ = و١ + و٢$$

$$٢ = و١ + و٢$$

$$\text{لكن : } و١ = و٢$$

من تعريف القطع المكافئ

$$\frac{٣}{٢} = ج٤ \leftarrow ٣ = ج٤ \leftarrow ٣ = ج٤$$

$$ص^٢ = ٤جس$$

$$ص^٢ = ٤ \times \frac{٣}{٢} = ٦ \leftarrow ص = \sqrt{٦}$$

١١) قذف جسيم رأسياً الى الأعلى حسب العلاقة :

ف (٧) =  $٧٥ - ٧٢٠$  حيث (٧) الزمن

بالتواني ، (ف) المسافة بالامتار ، احسب اقصى ارتفاع

يصل اليه الجسيم مستخدماً تعريف القطع المكافئ

**الحل :**

المطلوب احداثيات الرأس

$$ف (٧) = ٧٥ - ٧٢٠$$

نقاط التقاطع هما :  $(٤, ٢)$  ،  $(٤ - ٢, ٢)$

المسافة بين نقطتي التقاطع = ج٤

$$٢ = ج٤ \leftarrow ٨ = ج٤$$

المعادلة :  $ص^٢ = ٨س$

حل آخر :

النقطة (٤, ٤) تقع على المنحنى

$ص^٢ = ٨جس$  ، البؤرة :  $(٠, ٢)$

$$١٦ = ج٤ \leftarrow ٢ = ج٤ \leftarrow ٤ = ج٤$$

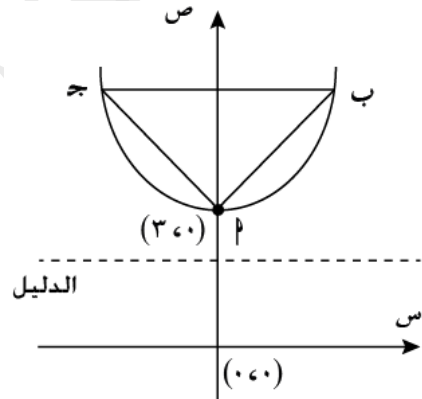
المعادلة :  $ص^٢ = ٨س$

١٣) معتمدا الشكل الآتي الذي يمثل قطعاً مكافئاً اذا علمت ان

المثلث ا ب ج متطابق الأضلاع طول ضلعه (٨)

وحدات فيه الضلع (ب ج) يوازي دليل القطع المكافئ ،

جد معادلته هذا القطع

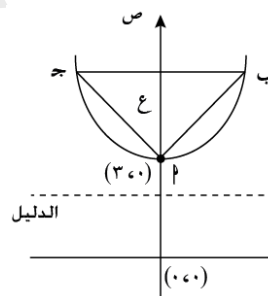


**الحل :**

من خلال الشكل نوع القطع

صادي موجب وتكون

معادلته على الصورة :



$$(س - ٣)^٢ = ٤(ص - ه)$$

وبما ان رأس القطع النقطة (٣, ٠)

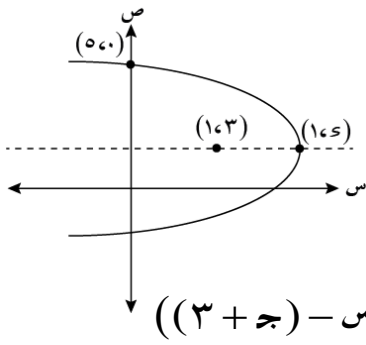
$$\text{تصبح المعادلة } (س - ٣)^٢ = ٤(٠ - ص)$$

نجد نقطة تقع على منحنى القطع وذلك بفرض ان ارتفاع

المثلث ا ب ج هو (ع) ، باستخدام نظرية فيثاغورس :

$$٤ = ٢(٨) - ٢(٤)$$

$$٤ = \sqrt{١٦ - ٦٤} = \sqrt{٤٨} = ٤\sqrt{٣}$$



ثانياً : الشكل لليسا

$$3 = ج - س$$

$$ج + 3 = س$$

المعادلة :

$$((3 + ج) - س) ج - 4 = (1 - ص)^2$$

يمر بالنقطة (0,0)

$$((3 + ج) - 0) ج - 4 = (1 - 0)^2$$

$$(3 - ج) ج - 4 = 16$$

$$ج^2 + 3ج = 4$$

$$ج^2 + 3ج - 4 = 0$$

$$ج = 1, ج = 4$$

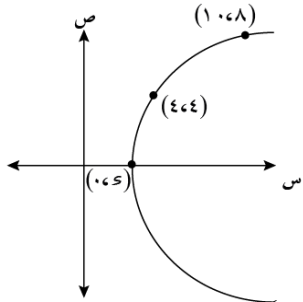
$$ج = 1, ج = 4$$

المعادلة :

$$(1 - ص)^2 = 4(س - 4)$$

١٣ اوجد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (1,3) و (4,4) ومحوره هو محور السينات

الحل :



الرأس : (0,0)

المعادلة :

$$ص = 4(س - 4)$$

$$4(س - 4) = 16 \leftarrow (4,4)$$

$$4(س - 8) = 100 \leftarrow (10,8)$$

بالقسمة :

$$\frac{س - 4}{س - 8} = \frac{16}{100}$$

$$\frac{س - 4}{س - 8} = \frac{4}{25}$$

$$25(س - 4) = 4(س - 8)$$

$$25س - 100 = 4س - 32$$

$$ص^2 = 4(س - 4)$$

$$ص^2 = 4(س - 4)$$

$$ص^2 = 4(س - 4)$$

$$ص^2 = 4(س - 4)$$

$$ص^2 = 4(س - 4)$$

الرأس : (2,0)

يصل الى اقصى ارتفاع عندما  $ص = 2$  ويكون اقصى ارتفاع

هو (2,0)

١٢ اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته النقطة (1,3)

ومحوره يوازي محور السينات ويمر بمنحناه بالنقطة

(0,0)

الحل :

يوجد حالتان :

اولاً : الشكل لليمين

$$3 = ج + س$$

$$ج - 3 = س$$

المعادلة :

$$ص = 4(س - 3)$$

$$ص = 4(س - 3)$$

يمر بالنقطة (0,0)

$$4(ج + 3) = 16$$

$$4ج + 12 = 16$$

$$4ج = 4$$

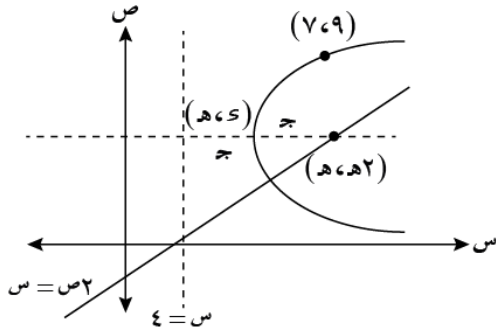
$$ج = 1, ج = 4$$

$$ج = 1, ج = 4$$

المعادلة :

$$ص^2 = 4(س + 1)$$

١٥) اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يورته على المستقيم  $ص = ٢س$  ودليله  $س = ٤$  والقطع يمر بالنقطة  $(٧, ٩)$



الحل :

نفرض الرأس :  $(٥, ٥)$

البؤرة تقع على المستقيم  $ص = ٢س$  فتكون إحداثيات البؤرة

$$(٥, ١٠) \text{ وتكون } ٤ + ج = ٥$$

$$٤ + ج + ج = ١٠$$

$$٢ + ج = ٥ \iff ٤ + ج = ١٠$$

المعادلة :

$$(ص - ٥) = ٢(٤ - س)$$

$$((٤ + ج) - ٥) = ٢((٢ + ج) - ٥)$$

يمر بالنقطة  $(٧, ٩)$

$$((٤ + ج) - ٩) = ٢((٢ + ج) - ٧)$$

$$(ج - ٥) = ٢(ج - ٥)$$

$$٠ = (ج - ٥) - ٢(ج - ٥)$$

$$٠ = (ج - ٥)(ج - ٥)$$

$$٠ = (ج - ٥)(ج - ٥)$$

$$١ = ج , ٥ = ج$$

أولاً :  $ج = ٥$

$$\text{المعادلة : } (ص - ٥) = ٢(٧ - س)$$

ثانياً :  $ج = ١$

$$\text{المعادلة : } (ص - ٥) = ٢(٣ - س)$$

$$\frac{٦٨}{٢١} = س \iff ٦٨ = ٢١س$$

بالتعويض :

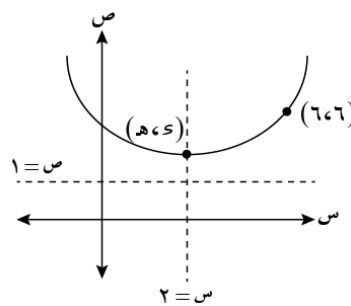
$$\left(\frac{٦٨}{٢١} - ٤\right)ج = ١٦$$

$$\frac{١٦}{٢١} \times ج = ١٦$$

$$٢١ = ج \iff \frac{٢١}{١٦} \times ١٦ = ج$$

$$\text{المعادلة : } (ص - ٥) = ٢(٣ - س)$$

١٤) اوجد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة محوره  $ص = ٢$  ومعادلة دليله  $س = ١$  ويمر بمنحاه بالنقطة  $(٦, ٦)$



الحل :

الرأس :  $(١, ٢)$

يقع على المستقيم

$$ص = ٢ \iff ٢ = ٢$$

$$١ = ج - ٥ \iff ١ + ٥ = ج$$

المعادلة :

$$((١ + ج) - ٢) = ٢(٦ - س)$$

يمر بالنقطة  $(٦, ٦)$

$$((١ + ج) - ٦) = ٢(٦ - ٦)$$

$$(ج - ٥) = ١٦$$

$$٢ج - ٥ = ١٦$$

$$٢ج = ٢١ \iff ج = ١٠,٥$$

$$١ = ج , ٤ = ج \iff ٠ = (١ - ج)(٤ - ج)$$

أولاً :  $ج = ٤$

$$\text{المعادلة : } (ص - ٢) = ٢(٦ - س)$$

ثانياً :  $ج = ١$

$$\text{المعادلة : } (ص - ٢) = ٢(٢ - س)$$



يمر بالنقطة  $(٨,٩) \Leftarrow (٨ - ٨) = ٢ \times ٩ = ١٨$

$$\frac{١}{٩} = \frac{٢(٨ - ٤)}{٢(٨ - ٨)} \text{ : بالقسمة}$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\frac{١}{٣} \pm = \frac{٨ - ٤}{٨ - ٨}$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{٨ - ٤}{٨ - ٨} \text{ : أولاً}$$

$$٨ - ٨ = ٨٣ - ١٢$$

$$٢ = ٨ \Leftarrow ٨٢ = ٤ \Leftarrow ٨٣ + ٨ - = ٨ - ١٢$$

$$\text{بالتعويض : } (٢ - ٤) = ٢ \times ١ \times ٤ = ٤ \Leftarrow ٤ = ٤$$

$$\text{المعادلة : } (٢ - ٤) = ٢ \times ٤ = ٤$$

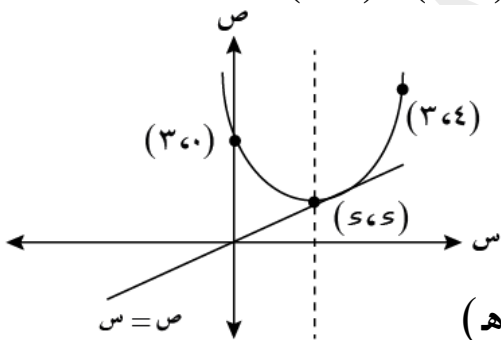
$$\frac{١ -}{٣} = \frac{٨ - ٤}{٨ - ٨} \text{ : ثانياً}$$

:

$$\text{المعادلة : } (٥ - ٤) = ٢ \times ١ = ٢$$

١٨) اكتب معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي الصادات ورأسه على المستقيم  $ص = س$  ويمر

بالنقطتين  $(٣,٤)$  ،  $(٣,٠)$



الرأس :  $(٣, ٢)$

يقع على المستقيم  $ص = س \Leftarrow ٣ = ٣$

$(٣, ٢)$  : الرأس  $\Leftarrow$

المعادلة :

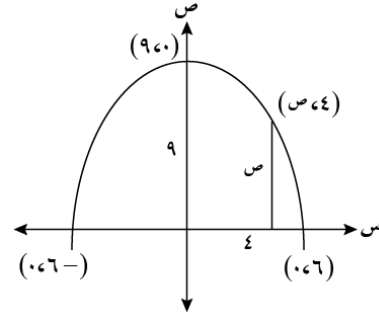
$$(س - ٣) \times ٤ = ٢ (س - ٣)$$

$$\text{يمر بالنقطة } (٣, ٠) \Leftarrow ٣ (س - ٣) \times ٤ = ٢$$

$$\text{يمر بالنقطة } (٣, ٤) \Leftarrow (٣ - ٤) \times ٤ = ٢ (س - ٣)$$

١٦) يني جسر على شكل قطع مكافئ طول قاعدته الأفقية  $(١٢)$  وأعلى ارتفاع للجسر  $(٩)$  ، اكتب معادلة الجسر على اعتبار أنه متمائل حول محور الصادات ، ثم اوجد ارتفاع الجسر على بعد  $(٤)$  من مركز القاعدة

**الحل :**



الرأس :  $(٩, ٠)$

المعادلة :

$$(س - ٥) \times ٤ = ٢ (س - ٥)$$

$$(٠ - ٥) \times ٤ = ٢ (٠ - ٥)$$

يمر بالنقطة  $(٠, ٦)$

$$(٦ - ٠) \times ٤ = ٢ (٦ - ٠)$$

$$١ = ٣ \Leftarrow ٣٦ = ٣٦$$

$$\text{المعادلة : } ٤ = ٢ (س - ٥)$$

يمر بالنقطة  $(٤, ٤)$

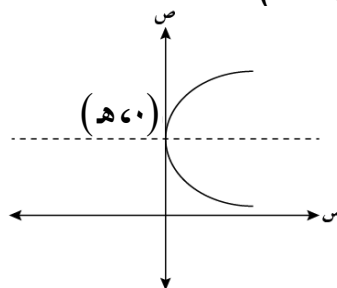
$$٣٦ + ٤ = ١٦$$

$$٥ = ٤ \Leftarrow ٢٠ = ١٦ - ٣٦ = ٤$$

ارتفاع الجسر بعد  $(٤)$  امتار يساوي  $(٥)$

١٧) اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه يمس الصادات ويمر بالنقطتين  $(٤, ١)$  ،  $(٨, ٩)$

**الحل :**



الرأس :  $(٤, ٠)$

يقع على محور الصادات

$$٠ = ٤ \Leftarrow$$

المعادلة :

$$(س - ٤) \times ٩ = ٢ (س - ٤)$$

$$(س - ٤) \times ٩ = ٢ (س - ٤)$$

$$\text{يمر بالنقطة } (٤, ١) \Leftarrow (٤ - ٤) \times ٩ = ٢ \times ١$$

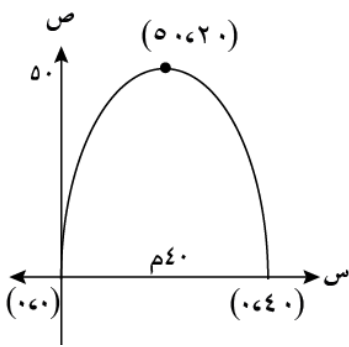
$$ج = 1 - (1 -) = 2$$

$$\text{المعادلة: } (س + 1) = 2(س + 1) - 8$$

(٢١) اطلقت قذيفة من مستوى سطح الارض الى أعلى ثم عادت الى نفس المستوى وكان مسارها على منحنى قطع مكافئ ، فإذا كان اعلى ارتفاع وصلته القذيفة  $(٥٠)$  م وأقصى مدى افقي لها هو  $(٤٠)$  م معتبراً نقطة الانطلاق القذيفة النقطة  $(٠,٠)$  ، اوجد ما يلي :

(أ) معادلة القطع المكافئ

(ب) ارتفاع القذيفة عن سطح الارض عندما يكون هذا الارتفاع مساوياً للمسافة بين نقطة الانطلاق القذيفة ومسقطها على



الارض

**الحل:**

$$\text{الرأس: } (٥٠, ٢٠)$$

$$ج = ???$$

مكافئ للأسفل

$$(أ) (س - ٥٠) = ٢(س - ٥٠) - ٤$$

لكن  $(٠, ٠)$  تحقق

$$(٥٠ - ٠) = ٢(٥٠ - ٠) - ٤$$

$$٤٠٠ = ٢٠٠ - ٤$$

$$\text{المعادلة: } (س - ٥٠) = ٢(س - ٥٠) - ٨$$

(ب) قيمة  $(ص)$  عندما  $ص = س$

$$(س - ٥٠) = ٢(س - ٥٠) - ٨$$

$$س - ٤٠٠ = ٢س - ٤٠٠ - ٨$$

$$س - ٣٢ = ٠$$

$$س = ٣٢$$

$$س = ٣٢$$

$$\text{بالقسمة: } \frac{٢س}{(س - ٤)} = \frac{٢س}{(س - ٤)}$$

$$\frac{٢س}{(س - ٤)} = \frac{٢س}{(س - ٤)}$$

$$٢س + ٨ - ١٦ = ٢س$$

$$٢س = ٨ - ١٦ = ٢س - ٨$$

بالتعويض :

$$٢س = ٢(س - ٣) - ٤$$

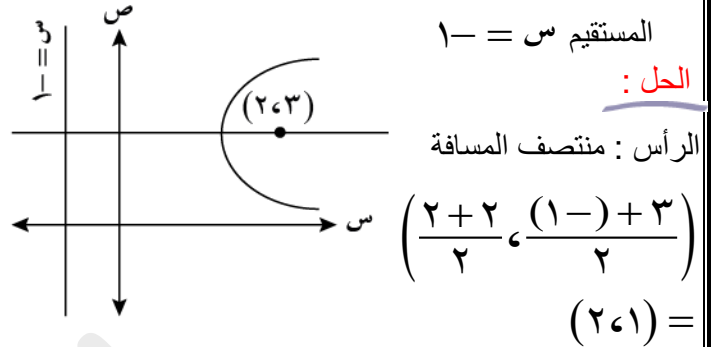
$$١ = ٢(س - ٣) - ٤$$

$$\text{المعادلة: } (س - ٢) = ٢(س - ٢) - ٤$$

(١٩) ما معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته  $(٢, ٣)$  ودليله

المستقيم  $س = ١$

**الحل:**



الرأس : منتصف المسافة

$$\left( \frac{٢+٣}{٢}, \frac{(١-)+٣}{٢} \right)$$

$$(٢, ١) =$$

$$ج = ١ - ٣ = ٢$$

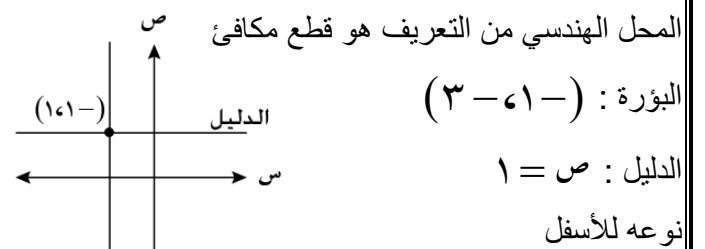
$$\text{المعادلة: } (س - ٢) = ٢(س - ٢) - ٨$$

(٢٠) اوجد معادلة المحل الهندسي للنقطة  $(س, ص)$

بحيث ان بعدها عن النقطة  $(٣, -١)$  يساوي

بعدها عن المستقيم  $ص = ١$

**الحل:**



المحل الهندسي من التعريف هو قطع مكافئ

$$\text{البؤرة: } (٣, -١)$$

$$\text{الدليل: } ص = ١$$

نوعه للأسفل

$$\text{الرأس: } \left( \frac{(٣-)+١}{٢}, \frac{(١-)+١-}{٢} \right)$$

$$(١, -١) = \left( \frac{٢-}{٢}, \frac{٢-}{٢} \right) =$$

$$س^2 = 1 + جا^2 \Leftarrow س^2 = 1 + ص^2$$

قطع مكافئ صادي للأعلى

(ب) س = ظتانه + 1 ..... (1)

ص = قتا^2 ..... (2)

من (1) : س - 1 = ظتانه  $\Leftarrow$  س - 1 = ظتا^2

من (2) : قتا^2 = س - 1 + ظتا^2

$$ص = 1 + (س - 1)^2$$

$$ص = 1 + (س - 1)^2$$

او  $1 - ص = 1 + (س - 1)^2$

قطع مكافئ

(ج) ص = جتانه ..... (1)

س = جا^2 + جتا^2 ..... (2)

لكن : س = جا^2 + جتا^2 - جا^2

$$س = جتا^2 \Leftarrow س = ص^2$$

قطع مكافئ

(24) قذف جسيم رأسياً للأعلى حسب العلاقة :

ف (ص) =  $٤٤ - ٤٦ص + ٢ص^2$  احسب أقصى ارتفاع

يصل اليه الجسيم مستخدماً تعريف القطع المكافئ

الحل :

$$ف = ٤٤ - ٤٦ص + ٢ص^2$$

$$- = ٤٤ - ٤٦ص + ٢ص^2 \quad (6 \div)$$

$$٤ - ٢ص = \frac{1}{٢} ف$$

$$٤ - ٢ص = \frac{1}{٢} ف + ٤$$

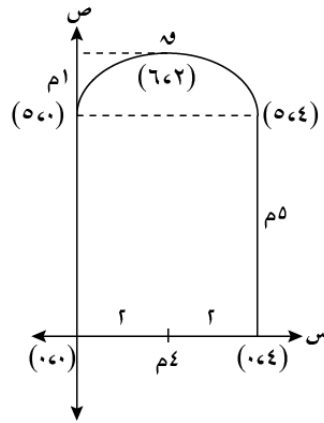
$$\frac{1}{٢} (٢٤ - ف) = ٢(٢ - ص)$$

الرأس : (٢٤، ٢)

أقصى ارتفاع هو (٢٤) م

(٢٢) الشكل المجاور يمثل المدخل الجنوبي لوزارة التربية والتعليم وهو على شكل قطع مكافئ ، اوجد مساحة واجهة هذا المدخل

الحل :



معادلة ص هي معادلة قطع مكافئ للأسفل

الرأس : (٦، ٢)

ج = ؟؟؟

المعادلة :

$$(س - ٢)^2 = ٤ - ج(٦ - س)$$

لكن (٥، ٠) تحقق  $\Leftarrow (٢ - ٠)^2 = ٤ - ج(٦ - ٥)$

$$٤ = ج(٦ - ٥) \Leftarrow ج = ٤$$

المعادلة :  $(س - ٢)^2 = ٤ - (٦ - س)٤$

$$س^2 - ٤س + ٤ = ٤ - ٢٤ + ٤س$$

$$ص = س - \frac{٢س}{٤} + ٥$$

$$\int_0^6 (س - \frac{٢س}{٤} + ٥) ds = ١٢$$

$$= \left[ \frac{٢س^2}{٢} - \frac{٢س^3}{١٢} + ٥س \right]_0^6 = \frac{٦٨}{٣}$$

وحدة مساحة

(٢٣) عين نوع القطع ومعادلته في الحالات الآتية :

(أ) س = جانه + جتانه ، ص = جا^2

(ب) س = ظتانه + 1 ، ص = قتا^2

(ج) ص = جتانه ، س = جا^2 + جتا^2

الحل :

(أ) س = جانه + جتانه ..... (1)

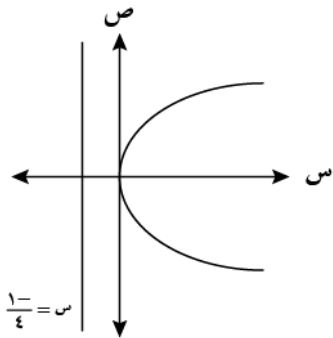
ص = جا^2 ..... (2)

بترتيب المعادلة رقم (1) :

$$س = (جانه + جتانه)^2$$

$$س = جا^2 + ٢جانهجتانه + جتا^2$$

(٢٧) المعادلتان  $s = \sqrt{v}$  ،  $v = s^2$  يحددان موقع جسيم اكتب معادلة المنحنى الذي يتحرك على الصورة  $s = \sqrt{v}$  (ص) ثم عين نوع المنحنى وعناصره الاساسية ومثل ذلك بالرسم



**الحل :**

$$s = \sqrt{v} \text{ ، } v = s^2$$

$$\leftarrow s = s^2$$

وهذه تمثل معادلة قطع

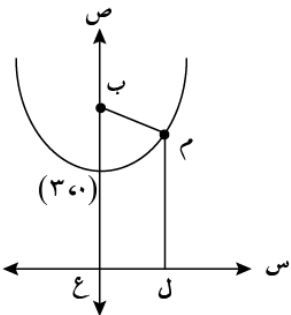
مكافئ رأسه  $(0,0)$

ومحوره  $v = 0$

$$4 = 1 \leftarrow 1 = 4$$

البؤرة :  $(\frac{1}{4}, 0)$  ، الدليل  $s = \frac{1}{4}$

(٢٨) في الشكل قطع مكافئ رأسه  $(3,0)$  والبؤرة (ب) والدليل محور السينات والنقطة  $M(2, \frac{1}{3})$  تقع على المنحنى ، احسب محيط الشكل الرباعي ل م ب ع



**الحل :**

$$M(2, \frac{1}{3})$$

$$M = \frac{1}{3}$$

$$M = \frac{1}{3}$$

$$L = 2$$

$$E = 3 + 3 = 6$$

$$\frac{44}{3} = 6 + 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \text{المحيط}$$

(٢٩) احسب معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي السينات ورأسه للأسفل ويمر بالنقاط

$$(0,2) \text{ ، } (2,5) \text{ ، } (4,-2)$$

**الحل :**

المحور يوازي السينات

$$s = \sqrt{v} + \text{ج}$$

(٢٥) اثبت ان معادلة المماس لمنحنى القطع المكافئ  $v = s^2$  حيث  $(p)$  عدد ثابت عند النقطة  $(s_1, v_1)$  هي  $v = 2s_1(s + s_1)$

**الحل :**

$$v = s^2$$

$$2s_1 v = \frac{v}{s} \leftarrow 2s_1 = \frac{v}{s}$$

$$\leftarrow \frac{v}{s} = \frac{2s_1}{v} \leftarrow \frac{v}{s} = \frac{2s_1}{v} \leftarrow \frac{v}{s} = \frac{2s_1}{v}$$

معادلة المماس هي :

$$v - v_1 = 2s_1(s - s_1)$$

$$(v - v_1) \times \left( \frac{2s_1}{v} = v - v_1 \right)$$

$$v - v_1 = 2s_1 s - 2s_1^2$$

$$v - v_1 = 2s_1 s - 2s_1^2$$

$$v - v_1 = 2s_1 s - 2s_1^2$$

$$v - v_1 = 2s_1 s - 2s_1^2$$

$$v - v_1 = 2s_1 s - 2s_1^2$$

$$v - v_1 = 2s_1 s - 2s_1^2$$

(ب) باستخدام السؤال السابق اوجد معادلة المماس لمنحنى

القطع المكافئ  $v = s^2$  عند النقطة  $(4,1)$

**الحل :**

$$v = s^2 \text{ ، } s = 4 \text{ عند } (4,1)$$

$$s = 1 \text{ ، } v = 4$$

$$4 = 1 \leftarrow 16 = 4$$

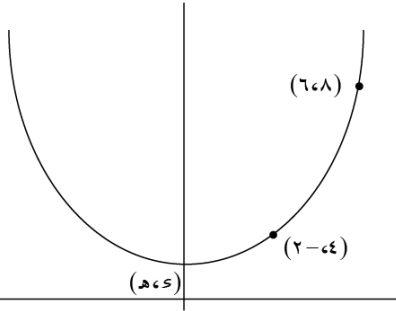
المعادلة :

$$4v = 8(1 + s) \leftarrow v = 2(1 + s)$$

٣١) احسب معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين

$$(٦,٨) ، (٢,٤) \text{ ومحور التماثل } س = ٢$$

**الحل :**



الرأس : (٥,٤) هـ

المحور س = ٢

$$٢ = س \Leftarrow$$

المعادلة :

$$(س - ٥)٢ = ٤(٢ - س) هـ$$

$$(٢ - ٤)٢ = ٤(٢ - ٤) \Leftarrow (٢,٤) هـ$$

$$\Leftarrow ٤ = ٤(٢ - ٥) هـ \dots (١)$$

$$\Leftarrow ٣٦ = ٤(٦ - ٥) هـ \dots (٢)$$

$$\frac{س - ٥}{س - ٦} = \frac{١}{٩} \text{ بالقسمة :}$$

$$٦ - ٥ = س - ٦$$

$$٦ - ٥ = س - ٦$$

$$٣ - ٥ = س \Leftarrow ٢٤ - ٥ = س٨$$

$$\text{بالتعويض : } ٤ = ٤(٣ + ٢ - س) \Leftarrow ٤ = ٤(٣ + س)$$

$$\text{المعادلة : } ٤ = ٤(٣ + س)$$

**تأريين وواجبات :**

١) اوجد احداثيات الرأس والبؤرة والدليل لكل مما يلي :

أ)  $س٢ - ٢ = ١٢$  ص

ب)  $س٢ = ٦$  ص

ج)  $٢ص٢ + ٤س = ٠$

د)  $(٢ - س)٨ = ٢(٢ - س)$

هـ)  $(٣ + س)٢ - ٢ = ٢(٣ + س)$

و)  $٢ص٢ + ٢٤ - ١ = ٢$  ص

ز)  $٣س٢ - ٢ = ٢ - ١س - ٣ + ٦ = ٠$

ح)  $٨س - ٩ص٢ - ٣٣ - ٨ = ٠$  ص

$$٢ = ٢ \Leftarrow ٠ + ٠ + ٠ = ٢ \Leftarrow (٠,٢)$$

$$٢ + ٢ + ١٤ = ٥ \Leftarrow (٢,٥)$$

$$\Leftarrow ٣ = ٢ + ١٤ \dots (١)$$

$$٢ + ٤ - ١٦ = ٢ \Leftarrow (٤,٢)$$

$$\Leftarrow ٠ = ٤ - ١٦ \dots (٢)$$

$$\text{بالحذف : } ١ = ب \text{ ، } \frac{١}{٤} = ٢$$

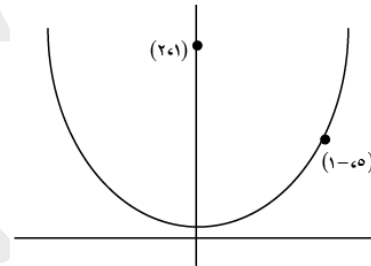
$$\text{المعادلة : } ٢ + ص + \frac{١}{٤}ص = ٢$$

٣٠) احسب معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي

الصادات وبؤرته (٢,١) ويمر بالنقطة (١,٥)

والرأس اسفل البؤرة

**الحل :**



الرأس : (٥,٤) هـ

$$١ = س \Leftarrow ٢ = هـ$$

المعادلة :

$$(س - ٥)٢ = ٤(٢ - س) هـ$$

$$(١ - ٥)٢ = ٤(١ - ٥) \Leftarrow (١,٥) هـ$$

$$\Leftarrow ١٦ = ٤(١ - ٥) هـ$$

$$\Leftarrow ١٦ = ٤(١ - ٥) هـ$$

$$١٦ = ٤(١ - ٥) هـ$$

$$١٦ = ٤(١ - ٥) هـ$$

$$١٦ = ٤(١ - ٥) هـ$$

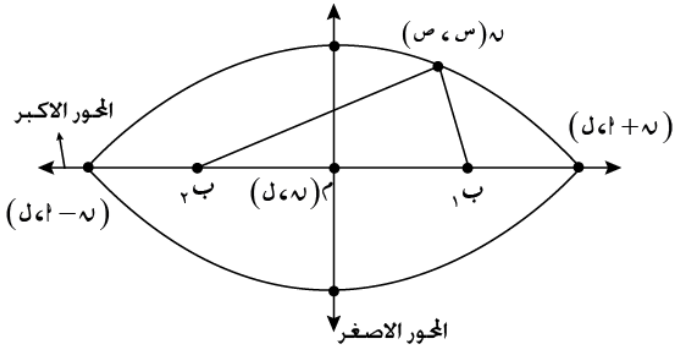
$$١٦ = ٤(١ - ٥) هـ$$

$$\Leftarrow ٤ = ١ - ٥ \text{ ، } ١ = ٥ - ٤$$

$$\text{المعادلة : } ١٦ = ٤(١ - ٥) (٢ + ص)$$

## القطع الناقص :

هو المحل الهندسي لمجموعة النقط  $هـ(س، ص)$  التي يكون مجموع بعدها عن النقطتين الثابتتين (البورتين) مقداراً ثابتاً يساوي  $(٢ج)$  أي  $وب١ + وب٢ = ٢ج$



نوعه قطع ناقص سيني مركزه  $(ل، ن)$   
معادلته :

$$١ = \frac{٢(ل-ص)^٢}{ب١} + \frac{٢(ن-س)^٢}{ب٢}$$

$$١ = \frac{(ل-ص)^٢}{ب١} + \frac{(ن-س)^٢}{ب٢}$$

$$١ = \frac{(ل-ص)^٢}{ب١} + \frac{(ن-س)^٢}{ب٢}$$

• احداثيات :

$$١ = \frac{(ل-ص)^٢}{ب١} + \frac{(ن-س)^٢}{ب٢}$$

$$١ = \frac{(ل-ص)^٢}{ب١} + \frac{(ن-س)^٢}{ب٢}$$

$$٢ج = ب١ - ب٢$$

•  $ج = \frac{ب١ + ب٢}{٢}$  : البعد البؤري  $ج٢$

طول المحور الاصغر =  $ب٢$

طول المحور الاكبر =  $ب١$

الاختلاف المركزي  $هـ = \frac{ج}{ب١}$  ( $١ > هـ$  دائماً اقل من واحد)

• الرأسين يعتمد على  $(ب١)$

البورتين تعتمد على  $(ج)$

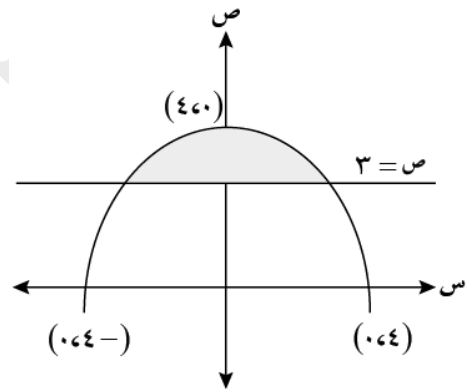
(٢) اوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات ويمر بالنقاط  $(٣، ٢)$  ،  $(٦، ١)$  ،  $(٠، ١)$

(٣) اوجد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يوازي محور السينات ويمر بالنقاط  $(٠، ٤)$  ،  $(٤، ٢)$  ،  $(٤، ٠)$

(٤) اوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات ورأسه يقع على المستقيم  $ص = ٣س$  ويمر بالنقطتين  $(٣، ٤)$  ،  $(٣، ٠)$

(٥) ارسم منحنى القطع المكافئ الذي معادلته  $٣س٢ - ٢س - ٩ص - ٥ص - ٢ = ٠$  موضحاً عليه عناصره

(٦) ما مساحة المنطقة المظللة في الشكل



(٧) اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه يقع على المستقيم

$ص = ٢س$  والقطع يمر بالنقطتين  $(٠، ٤)$  ،  $(٨، ٤)$

ومحوره يوازي السينات

(٨) قاعدة قوس على شكل قطع مكافئ طولها  $(٢، ١)$

وارتفاعها  $(٩، ٢)$  فوق الارض ، اكتب المعادلة الممثلة

لهذا القوس