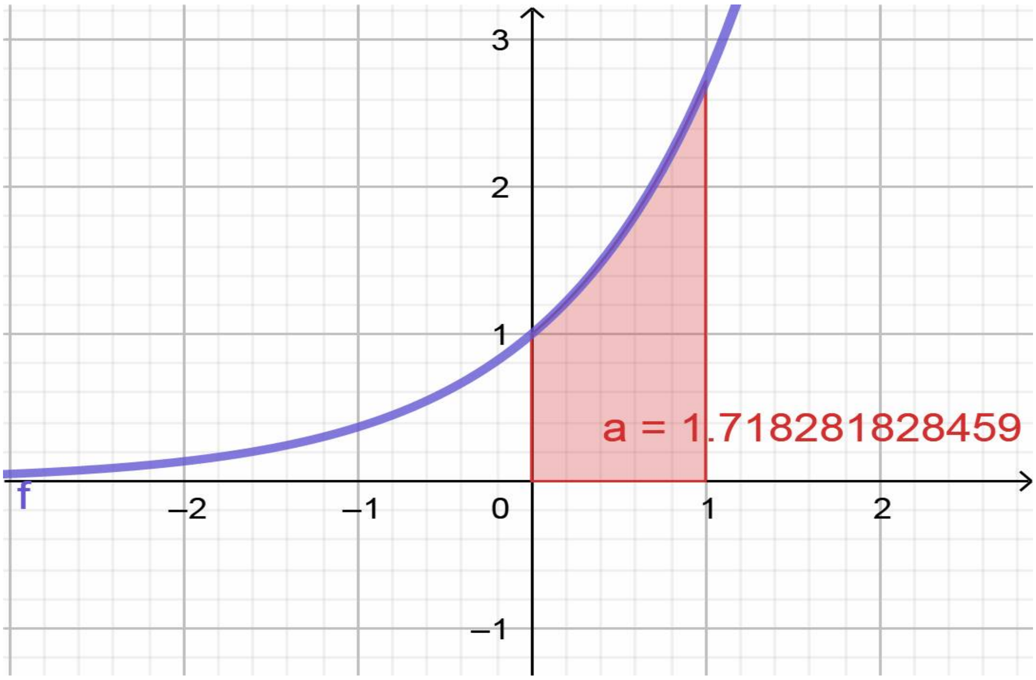
# تطبيقات ( المساحات )

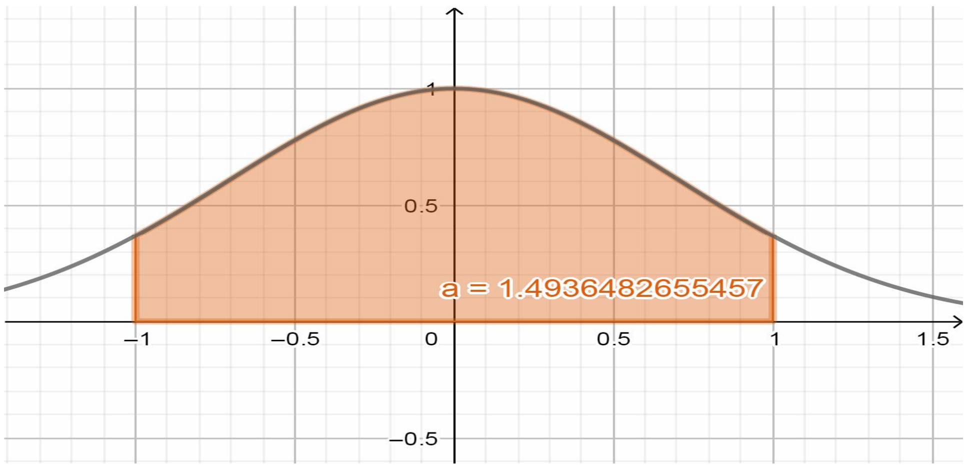
ليكن الاقتران ق(س) القابل للتكامل على الفترة [أ،ب] عندئذ تعطى مساحة السطح المحور بين الخط البياني للاقتران ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب بالعلاقة

$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)| \, ءس$$




## حالات خاصة

١ ـ اذا كان الخط يقع فوق محور السينات فان ق(س) > ٠ وبالتالي $|ق(س)| = ق(س)$



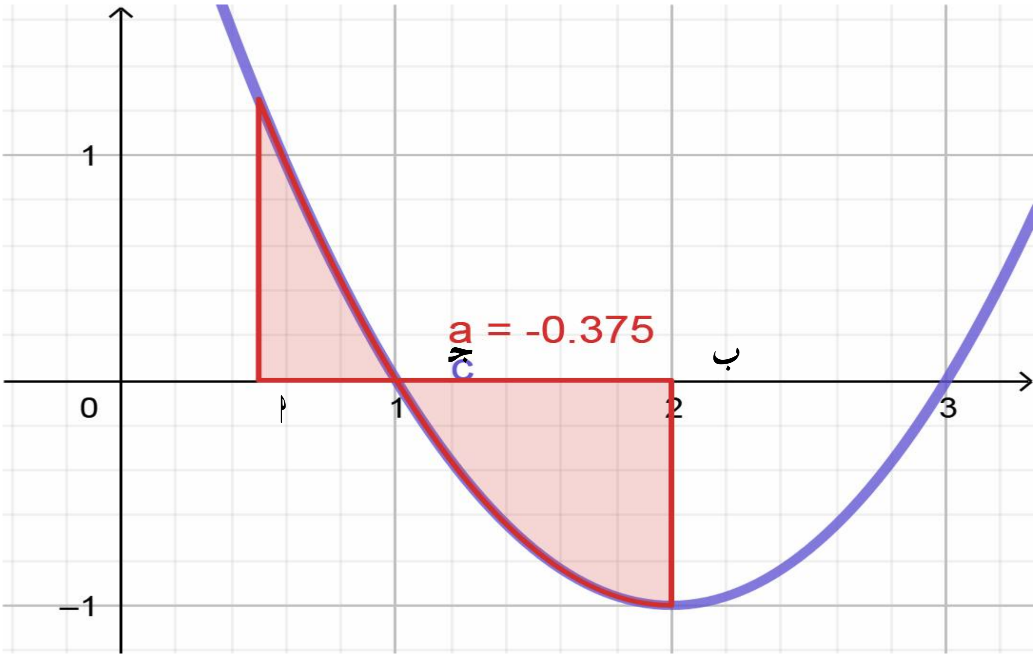

اذا المساحة $م = \int_{أ}^{ب} ق(س) \, ءس$

٢ ـ اذا كان الخط يقع تحت محور السينات فان ق(س) < ٠ وبالتالي $|ق(س)| = -ق(س)$

$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق}(\text{س})|\,\text{ء}\text{س} = \text{م} = -\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$$

٣- اذا كان جزء من المساحة فوق محور السينات وجز تحت محور السينات كما في الشكل التالي

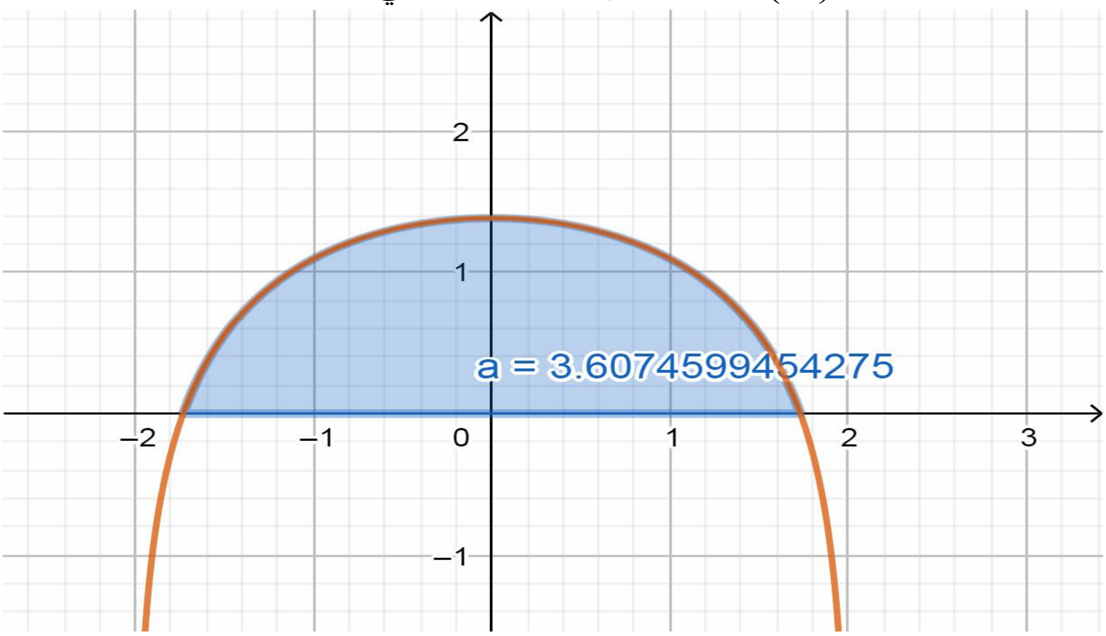
المساحة المطلوبة هي $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} - \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$




ملاحظات

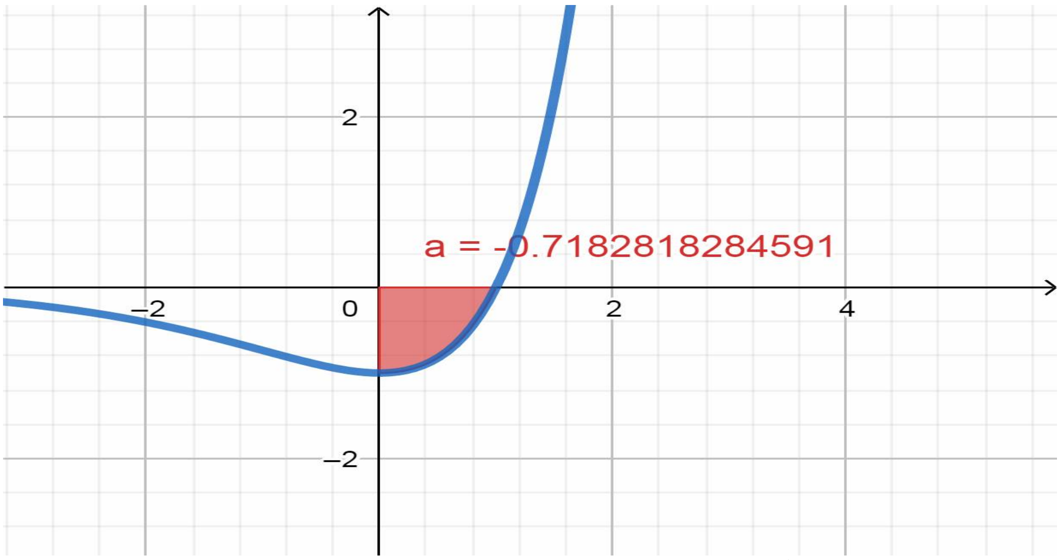
١- قد يطلب من حساب مساحة السطح بين الخط ومحور السينات

علينا ان نحل المعادلة $\text{ق}(\text{س}) = ٠$ أصفار هذه المعادلة هي حدود التكامل




المساحة $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$ أ ، ب جذور المعادلة $\text{ق}(\text{س}) = ٠$

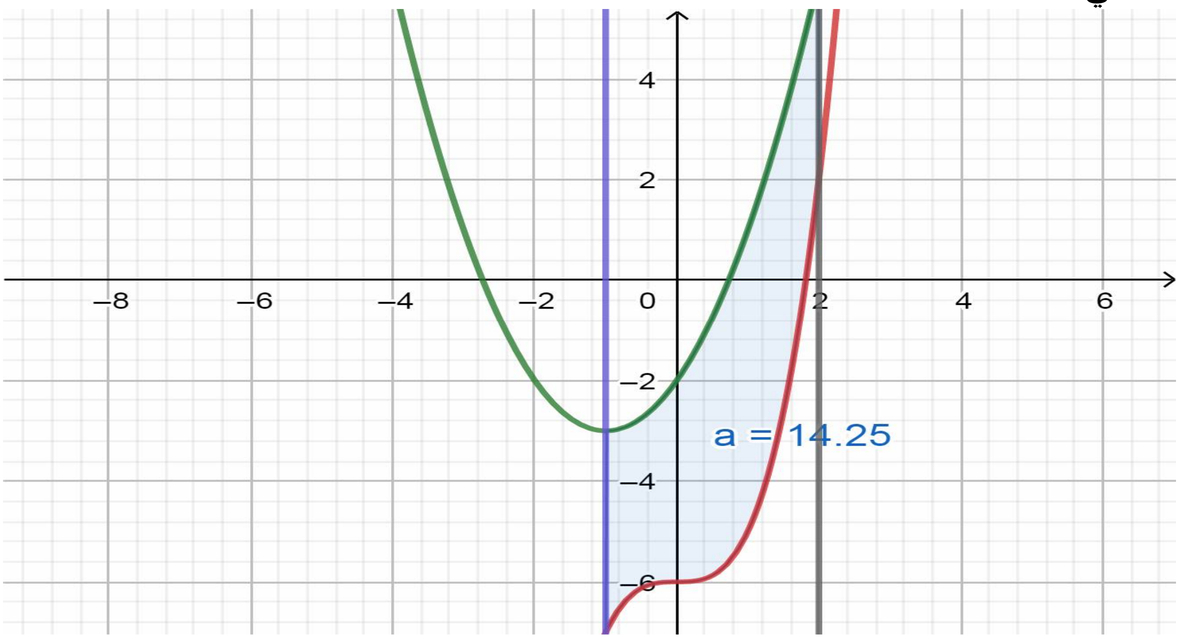
٢- قد يطلب المساحة بين الخط ومحوري السينات والصادات
علينا حل المعادلة ق(س) = ٠ جذرها احد حدود التكامل والجذر الاخر هو س = ٠ محور الصادات




٣- المساحة بين خطين
ليكن ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين على الفترة [أ،ب] وكانت ق(س) ≤ هـ(س)
لاجل كل س∈[أ،ب]
عندئذ تعطى مساحة السطح المحصور بين الخطين والمستقيمين س = أ ، س = ب

بالعلاقة م = $\int_{أ}^{ب}$ (ق(س) − هـ(س))ءس

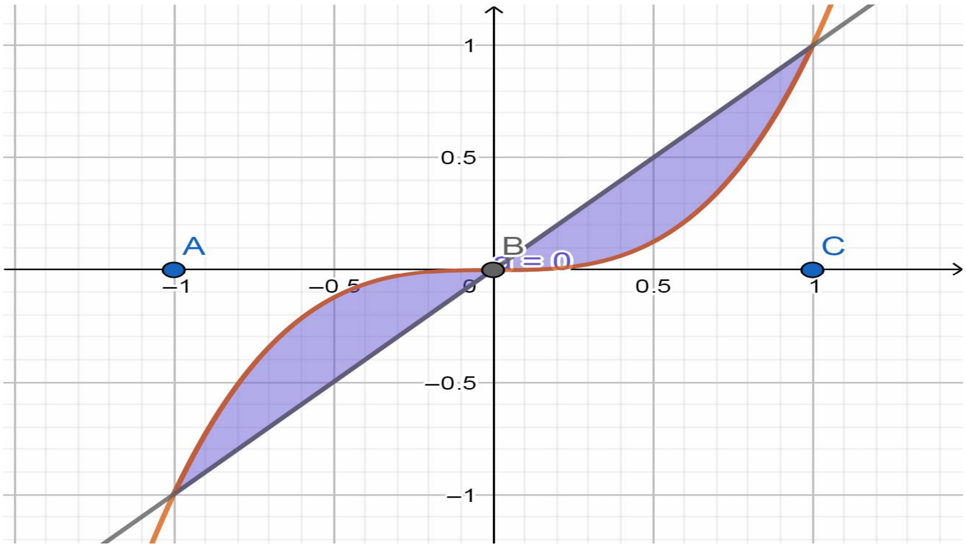
كما في الشكل



ملاحظة في هذه الحالة لا نهتم بوجود المساحة فوق او تحت محور السينات نهتم فقط بوضع الخطين

المساحة بين خطين ق(س) ، هـ(س)

لمعرفة حدود التكامل علينا حل المعادلة ق(س) = هـ(س)




قد يكون المطلوب حساب مساحة السطح المحصور بين ثلاث منحنيات وهنا علينا تجزئة هذا السطح

الى مجموعة سطوح كل منها يقع بين خطين فقط ثم نجمع هذة المساحات

| |
|---|
| ملاحظة : قد يستصعب الطالب رسم الخط البياني للاقتران<br>ما يهمنا نحن وضع الخط فوق او تحت محور السينات وهذا ما نستطيع معرفته من خلال دراسة إشارة الاقتران اذا ان دراسة إشارة تركب جبري يعطي الوضع النسبي |

مثال احسب مساحة السطح المحصور بين منحني الاقتران ق(س) = س$^{٢}$ − ٤س ومحور

| س | +∞ | | ٤ | | ٢ | ٠ | | ١- | −∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ق(س) = س$^{٢}$ − ٤س | | موجب | ٠ | سالب | | ٠ | موجب | | |

السينات وكل من المستقيمين س = ٢ ، س = −١

الحل : دون رسم

ندرس إشارة الاقتران ق(س) = س$^{٢}$ − ٤س نجد جذوره فهو ينعدم عندما

ق(س) = س(س − ٤) = ٠ ⟺ س = ٠ ∨ س = ٤

لاحظ ان من -١ الى الصفر موجب خطه فوق محور السينات

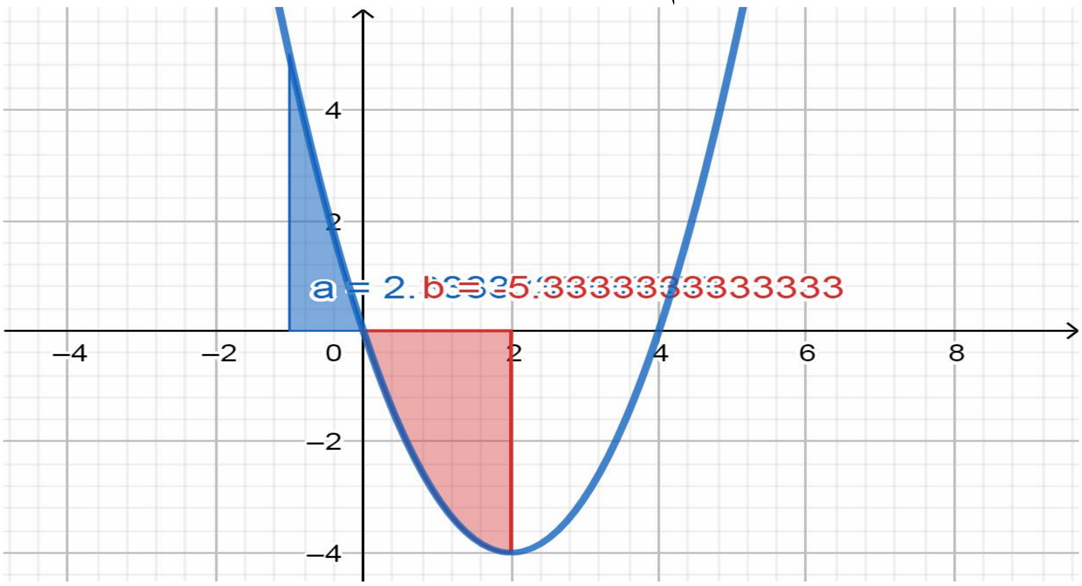
$$م_{١} = \int_{-١}^{٠} (س^{٢} - ٤س)\, ءس = \left[\frac{س^{٣}}{٣} - ٢س^{٢}\right]_{-١}^{٠} = ٠ - \left(\frac{-٧}{٣}\right) = \frac{٧}{٣}$$

ومن صفر الى ٢ سالب خطه تحت محور السينات

$$م_{٢} = \int_{٠}^{٢} (س^{٢} - ٤س)\, ءس = \left[\frac{س^{٣}}{٣} - ٢س^{٢}\right]_{٠}^{٢} = -\left[\frac{-١٦}{٣}\right] = \frac{١٦}{٣}$$

المساحة المطلوبة $م = م_{١} + م_{٢} = \frac{٧}{٣} + \frac{١٦}{٣} = \frac{٢٣}{٣}$

الان لنرى ذلك من خلال الرسم




تدريب : احسب مساحة السطح المحصور بين منحني الاقتران $ق(س) = \text{جتا}س + \sqrt{٣}\,\text{جا}س - ١$

في الفترة $\left[\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٤}\right]$ ومحور السينات

الحل ندرس إشارة الاقتران

نضرب ونقسم الطرف الثاني على ٢ نجد $ق(س) = ٢\left(\frac{١}{٢}\text{جتا}س + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{جا}س\right) - ١$

$$ق(س) = ٢\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٣}\text{جتا}س + \text{جا}\frac{\pi}{٣}\text{جا}س\right) - ١$$

$$ق(س) = ٢\text{جتا}\left(س - \frac{\pi}{٣}\right) - ١$$

$$ق(س) = ٢\text{جتا}\left(س - \frac{\pi}{٣}\right) - ١ = ٠$$

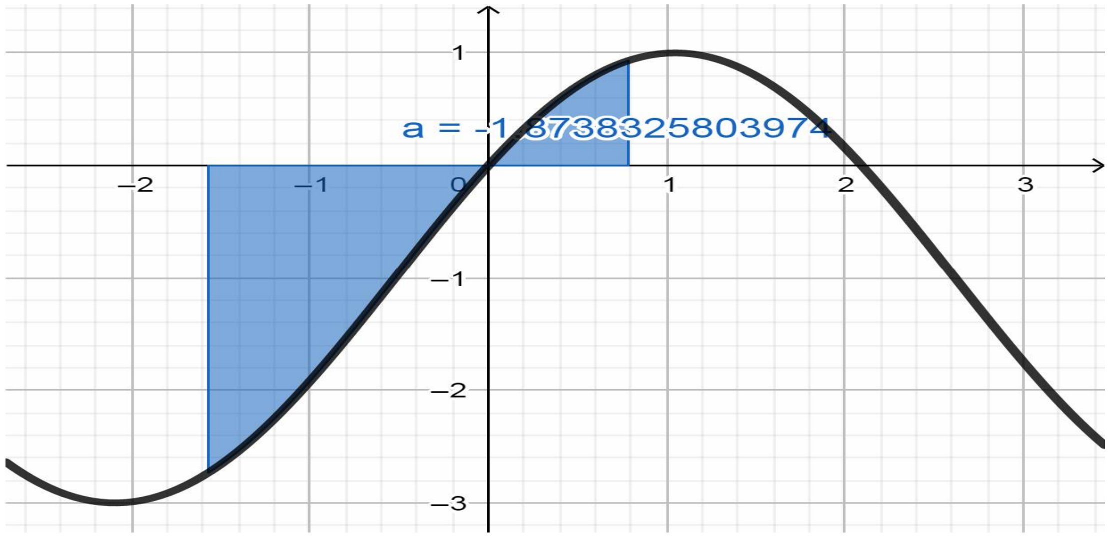
$$٢\text{جتا}\left(س - \frac{\pi}{٣}\right) = ١ \Leftarrow \text{جتا}\left(س - \frac{\pi}{٣}\right) = \frac{١}{٢} \Leftarrow \text{جتا}\left(س - \frac{\pi}{٣}\right) = \text{جتا}\frac{\pi}{٣}$$

$$س - \frac{\pi}{٣} = \frac{\pi}{٣} + ٢\pi ن \Leftarrow س = \frac{٢\pi}{٣} + ٢\pi ن$$

$$ن = ٠ \Leftarrow س = \frac{٢\pi}{٣}$$

$$س - \frac{\pi}{٣} = -\frac{\pi}{٣} + ٢\pi ن \Leftarrow س = ٢\pi ن$$

$$ن = ٠ \Leftarrow س = ٠$$




| س | $\frac{\pi}{٤}$ | ٠ | $\frac{-\pi}{٢}$ |
|---|---|---|---|
| ق(س) | موجب | ٠ | سالب |

المساحة المطلوبة

$$\text{م} = -\int_{\frac{-\pi}{٢}}^{٠} \left(٢\text{جتا}\left(\text{س}-\frac{\pi}{٣}\right)-١\right)\text{ءس} + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \left(٢\text{جتا}\left(\text{س}-\frac{\pi}{٣}\right)-١\right)\text{ءس}$$

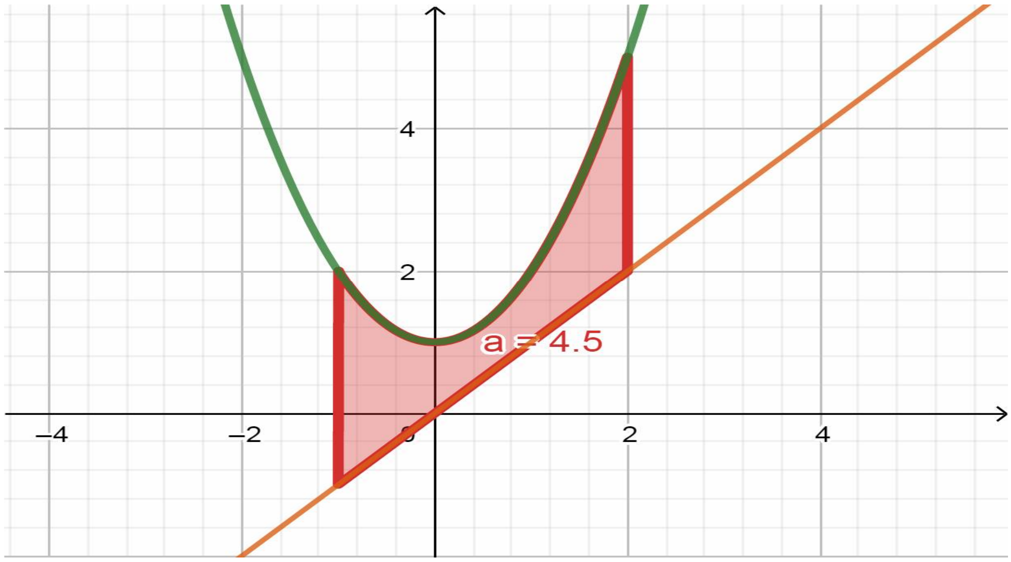
$$\text{م} = -\left[٢\text{جا}\left(\text{س}-\frac{\pi}{٤}\right)-\text{س}\right]_{\frac{-\pi}{٢}}^{٠} + \left[٢\text{جا}\left(\text{س}-\frac{\pi}{٤}\right)-\text{س}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$$

$$= -\left[-\sqrt{٢}+\sqrt{٢}-\frac{\pi}{٢}\right] + \left[-\frac{\pi}{٤}+\sqrt{٢}\right] = \frac{\pi}{٤}+\sqrt{٢}$$

تمارين جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س $^{٢}$ + ١، ل(س) = س+
والمستقيمين س = −١، س=٢

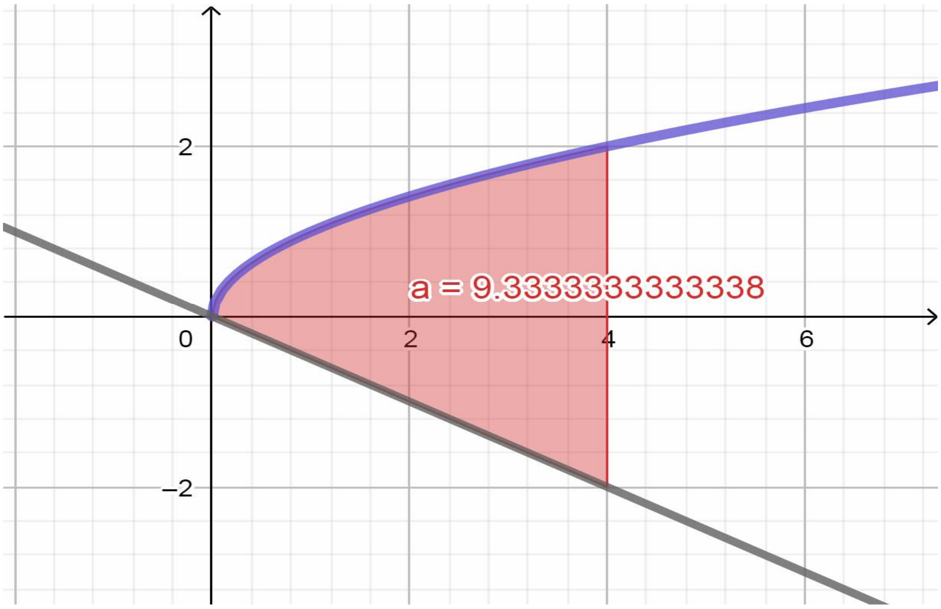
١ -) $\text{م} = \int_{-١}^{٢} \left(\text{س}^{٢}+١-\text{س}\right)\text{ءس} = \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣}+\text{س}-\frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right]_{-١}^{٢} = \frac{٨}{٣}-\left(-\frac{١١}{٦}\right) = \frac{٢٧}{٦}$

نرسم لنجد ان خط ق فوق خط ل




٢- المساحة بين $ق(س) = \sqrt{س}$، $ل(س) = -\frac{١}{٢}س$، $س = ٤$

$$م = \int_{٠}^{٤} \left(\sqrt{س} - \frac{-١}{٢}س\right) ءس = \left[ ٢\frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٤} \right]_{٠}^{٤} = \frac{١٦}{٣} + ٤ - ٠ = \frac{٢٨}{٣}$$

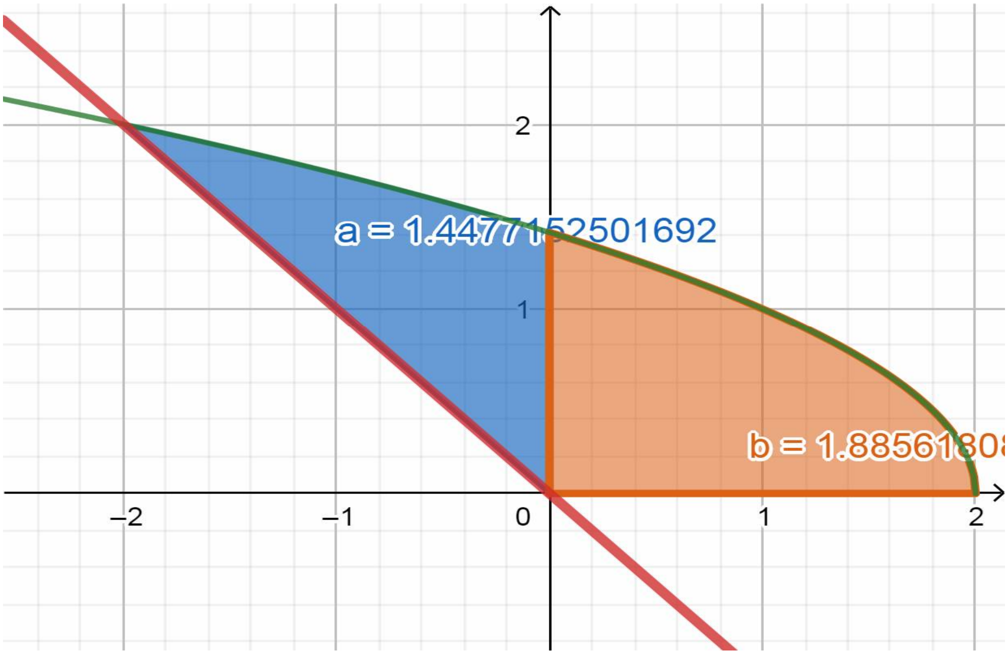



٣-المساحة بين $ق(س)\ \sqrt{٢ - س}$، $ل(س) = -س$، ومحور السينات

$$م = \int_{-٢}^{٠} \left(\sqrt{٢ - س} + س\right) ءس + \int_{٠}^{٢} \sqrt{٢ - س}\, ءس$$

$$\left[ ٢\frac{(٢ - س)^{\frac{٣}{٢}}}{-٣} + \frac{س^{٢}}{٢} \right]_{-٢}^{٠} + \left[ ٢\frac{(٢ - س)^{\frac{٣}{٢}}}{-٣} \right]_{٠}^{٢}$$

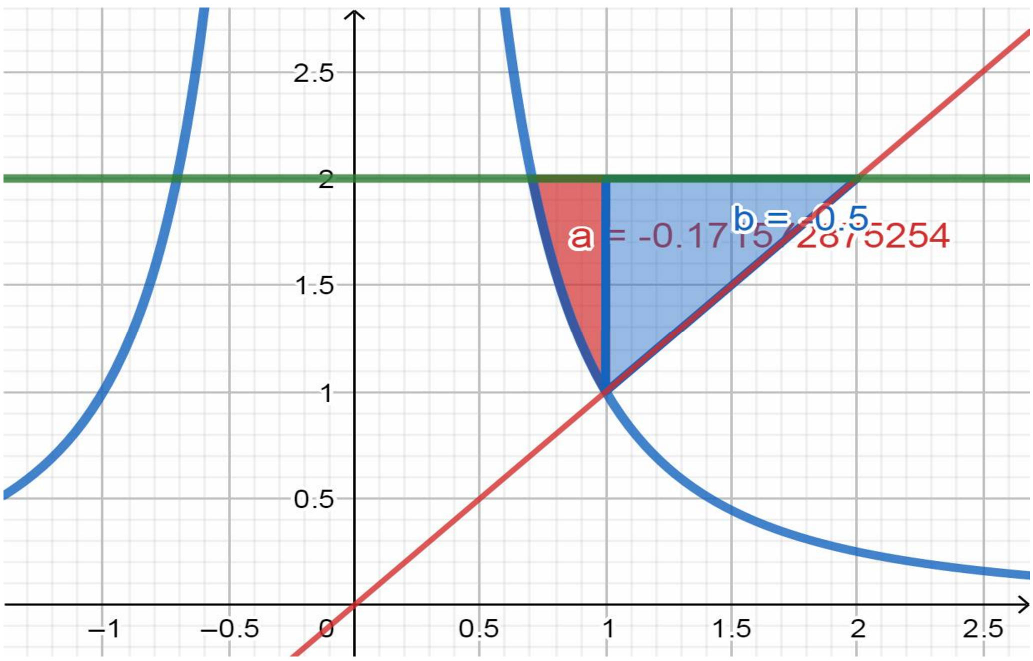
$$= \left[\left(\frac{٤\sqrt{٢}}{-٣} + ٠\right) - \left(\frac{١٦}{-٣} + ٢\right)\right] + \left[٠ - \frac{-٤\sqrt{٢}}{-٣}\right] = \frac{١٠}{٣}$$




٤- $د(س) = \frac{١}{س^{٢}}$ ، ص = ٢ ، ل(س) = س  نرسم ونجد نقط التقاطع وهي $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ١ ، ٢

$$م = \int_{\frac{١}{\sqrt{٢}}}^{١} \left(٢ - \frac{١}{س^{٢}}\right) دس + \int_{١}^{٢} (٢ - س)\, دس = \left[٢س + \frac{١}{س}\right]_{\frac{١}{\sqrt{٢}}}^{١} + \left[٢س - \frac{١}{٢}س^{٢}\right]_{١}^{٢}$$

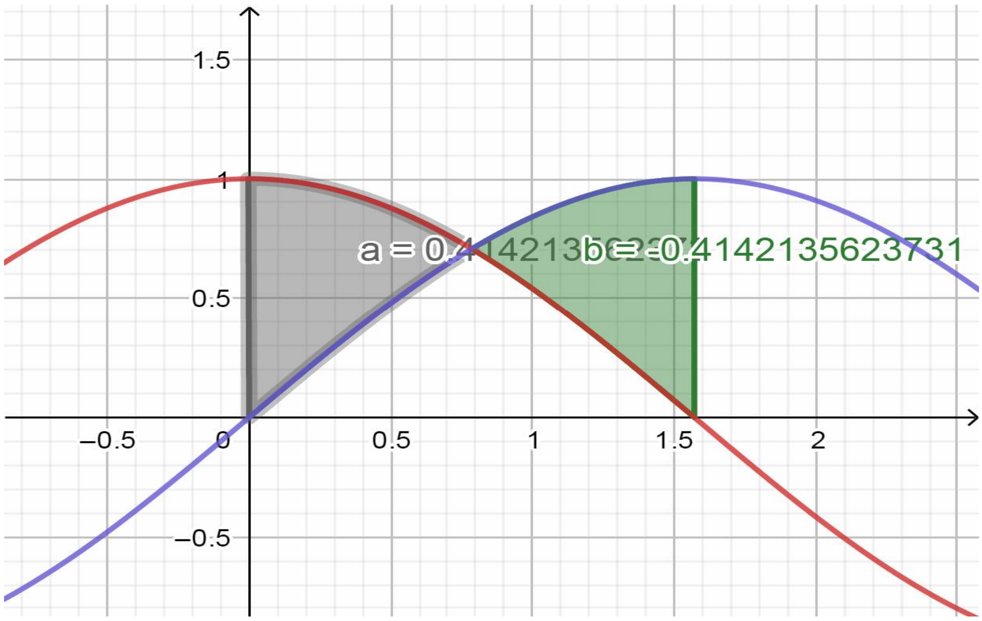
$$= \left(٣ - ٢\sqrt{٢}\right) + \left(٢ - \frac{٣}{٢}\right) = \frac{٧}{٢} - ٢\sqrt{٢}$$



٥-

$$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left( جتاس - جاس \right) ءس + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( جاس - جتاس \right) ءس = \left[ جاس + جتاس \right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} + \left[ -جتاس - جاس \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

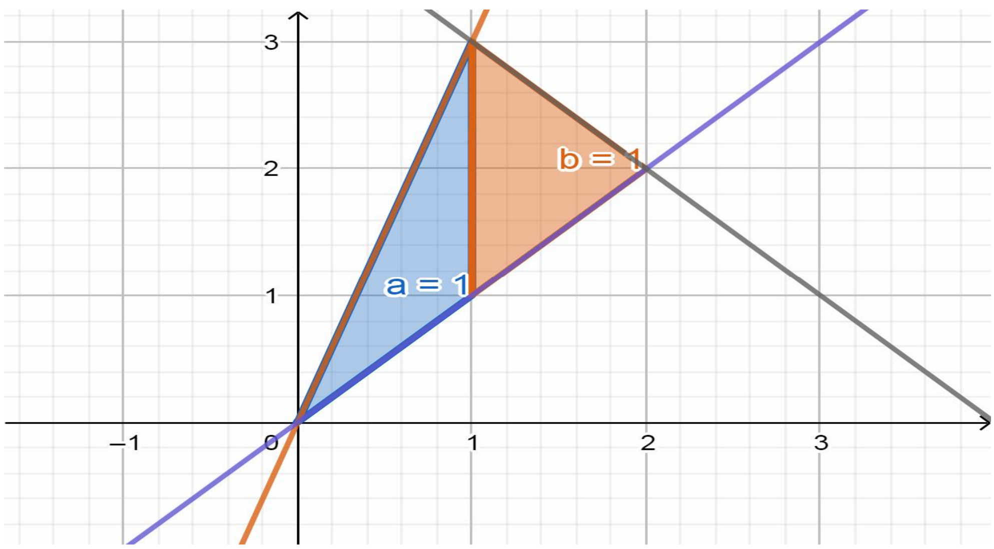
$$= \left( \sqrt{٢} - ١ \right) + \left( -١ + \sqrt{٢} \right) = ٢\sqrt{٢} - ٢$$




٥-

$$م = \int_{0}^{١} \left( ٣س - س \right) ءس + \int_{١}^{٢} \left( ٤ - س - س \right) ءس = \left[ س^{٢} \right]_{0}^{١} + \left[ ٤س - \frac{س^{٢}}{٢} \right]_{١}^{٢}$$

$$= (١) - \left( ٢ - \frac{٧}{٢} \right) = \frac{٥}{٢}$$



٢- جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات والمستقيمين
س = أ،س = ب

١- ق(س) = ٢س + ٤ ، أ = ٠ ،ب = ٢

اشارة ق ينعدم عندما س= -٢

$$م = \int_{٠}^{٢} (٢س + ٤)ءس = [س^{٢} + ٤س]_{٠}^{٢} = ١٢$$

٢- ق(س) = س$^{٣}$،س$^{٣}$ = ٠ ⟸ س = ٠

$$م = -\int_{-٢}^{٠} س^{٣}ءس + \int_{٠}^{٢} س^{٣}ءس = -\left[\frac{س^{٤}}{٤}\right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{س^{٤}}{٤}\right]_{٠}^{٢} = ٨$$

ج -ق(س) = س$^{٢}$ +١ ، أ = -١ ، ب = ٣

لاحظ ان الاقتران دوما موجب لانه مجموع موجبين الخط فوق محور السينات

$$م = \int_{-١}^{٣} (س^{٢} + ١)ءس = \left[\frac{س^{٣}}{٣} + س\right]_{-١}^{٣} = ١٢ - \left(\frac{-٤}{٣}\right) = \frac{٤٠}{٣}$$

د- ق(س) =جتا٢س ،أ= $\frac{\pi}{٤}$ ، ب = $\frac{\pi}{٢}$

$$جتا٢س = ٠ ⟸ ٢س = \frac{\pi}{٢} + \pi ن ⟸ س = \frac{\pi}{٤} + \frac{\pi}{٢}ن$$

$$ن = ٠ ⟸ س = \frac{\pi}{٤}،ن = ١ ⟸ س = \frac{٣\pi}{٤}$$

تستطيع اخذ قيمة ما بين الجذرين وتعوض في الاقتران لنأخذ $\frac{\pi}{٣}$ نجد ق$\left(\frac{\pi}{٣}\right) < ٠$

مما يعني ان الخط يقع تحت محور السينات

$$م = -\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} جتا٢سءس = -\left[\frac{١}{٢}جا٢س\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} = -\frac{١}{٢}(٠ - ١) = \frac{١}{٢}$$

٣- جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني ق ومنحني هـ

ق(س) = س + ١ ، هـ(س) = -٢س + ١ ، [٠،٢]

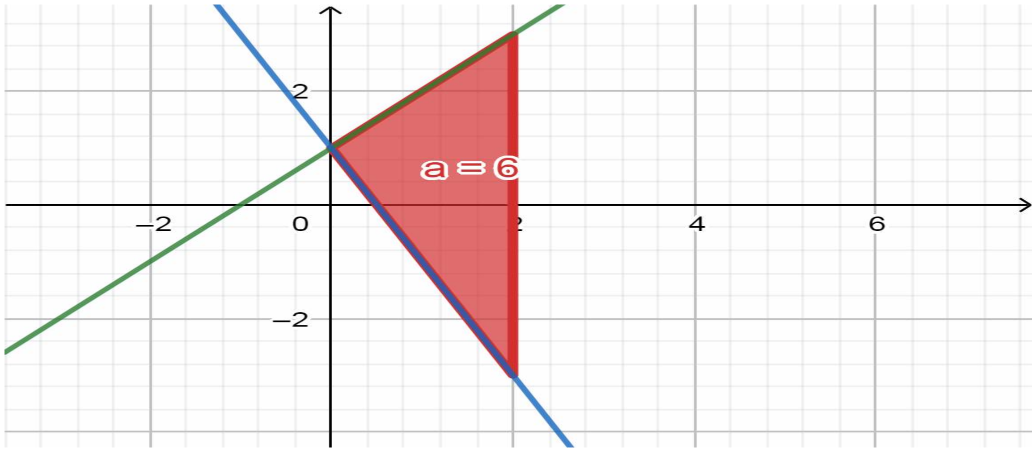
في حالة اقترانيين يهمنا الوضع النسبي لهما في الفترة المعطاة
نأخذ الفرق بينهما

ق(س) - هـ(س) = (س + ١)-(-٢س + ١) = ٣س

ينعدم الفرق عندما س = ٠

إذا

$$\int_{٠}^{٢}\left(\text{ق}(\text{س})-\text{هـ}(\text{س})\right)\text{دس}=\int_{٠}^{٢}\left((\text{س}+١)-(-٢\text{س}+١)\right)\text{دس}=\int_{٠}^{٢}٣\text{س}\,\text{دس}=\left[\frac{٣\text{س}^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٢}=٦$$




ب) $\text{ق}(\text{س})=\text{س}^{٢}$ ، $\text{هـ}(\text{س})=٤\text{س}$ ، [٠،٢]

التقاطع $\text{س}^{٢}=٤\text{س} \Leftrightarrow \text{س}^{٢}-٤\text{س}=٠ \Leftrightarrow \text{س}(\text{س}-٤)=٠ \Leftrightarrow \text{س}=٠ \vee \text{س}=٤$

تستطع ان تعوض قيمة بين الجذرين ولتكن ٣ في كل من الاقترانين

$\text{ق}(٣)=٩$ ، $\text{هـ}(٣)=١٢$ اذا خط $\text{هـ}(\text{س})$ فوق خط $\text{ق}(\text{س})$ وبالتالي

| س | ٢ | ٠ | |
|---|---|---|---|
| $\text{ق}(\text{س})-\text{هـ}(\text{س})$ | سالب | ٠ | موجب |
| الوضع النسبي | ق تحت هـ | | ق فوق هـ |

$$\text{م}=\int_{٠}^{٢}\left(٤\text{س}-\text{س}^{٢}\right)\text{دس}=\left[٢\text{س}^{٢}-\frac{\text{س}^{٣}}{٣}\right]_{٠}^{٢}=١٦-\frac{٨}{٣}-٠=\frac{٤٠}{٣}$$

ج- $\text{ق}(\text{س})=\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{هـ}(\text{س})=-\text{س}$ ، [١،٤]

الحل التقاطع في هذه الفترة $\sqrt{\text{س}}=-\text{س}$

لاحظ الشرط ان ما تحت الجذر موجب اذا $\text{س}\geq ٠$ والشرط الاخر هو قيمة الجذر التربيعي موجبة

أي ان $-\text{س}\geq ٠ \Leftrightarrow \text{س}\leq ٠$

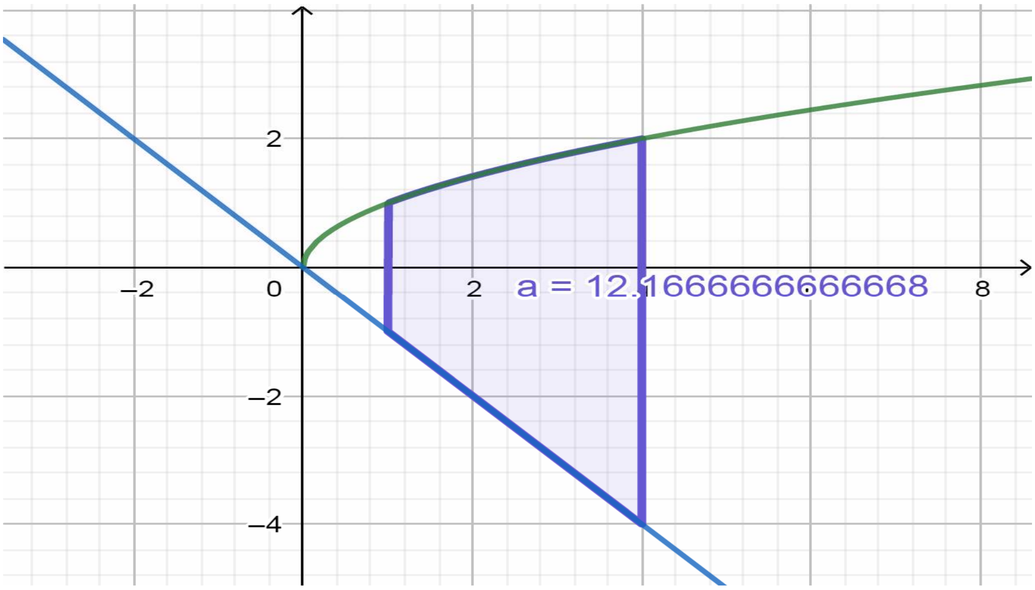
وكل من الشرطين معا يحقق س = ٠

لحل المعادلة نربع الطرفين $\sqrt{\text{س}}=-\text{س} \Leftrightarrow \text{س}=\text{س}^{٢} \Leftrightarrow \text{س}(١-\text{س})=٠$

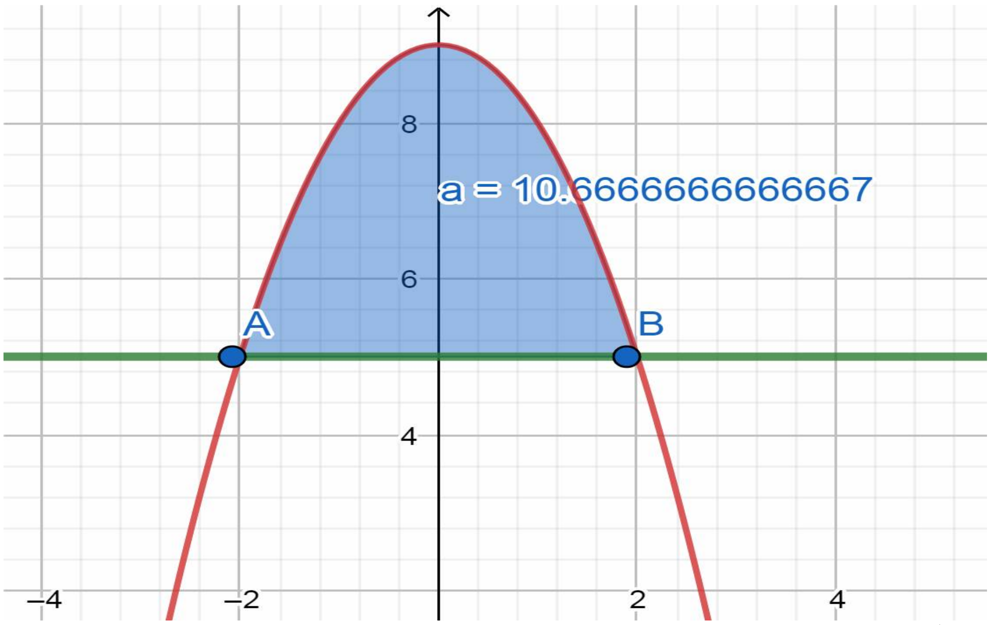
س=٠ مقبول او س=١ مرفوض

ناخذ قيمة في الفترة المعطاة ولتكن ١ نعوض $\text{ق}(١) = \sqrt{١} = ١$ ، $\text{هـ}(١) = -١$ اذا ق فوق هـ

$$\text{م} = \int_{١}^{٤} \left(\sqrt{\text{س}} - (-\text{س})\right) \text{ءس} = \left[\frac{٢\,\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٤} = \left(\frac{١٦}{٣} + ٨\right) - \left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢}\right) = \frac{٤٠}{٣} - \frac{٥}{٦} = \frac{١١٥}{٦}$$




٤ - $\text{ق}(\text{س}) = ٩ - \text{س}^{٢}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٥$ ، $[-٢،٢]$




التقاطع

$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س}) \Leftrightarrow ٩ - \text{س}^{٢} = ٥ \Leftrightarrow \text{س}^{٢} = ٤ \Leftrightarrow \text{س} = ٢ \vee \text{س} = -٢$ ، $[-٢،٢]$

$$\text{م} = \int_{-٢}^{٢} \left(٩ - \text{س}^{٢} - ٥\right) \text{ءس} = \left[٤\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\right]_{-٢}^{٢} = \left(٨ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(-٨ + \frac{٨}{٣}\right) = \frac{٣٢}{٣}$$

ب- $ن(س) = س^٣ + س^٢$ ، $هـ(س) = س^٣ + ١$

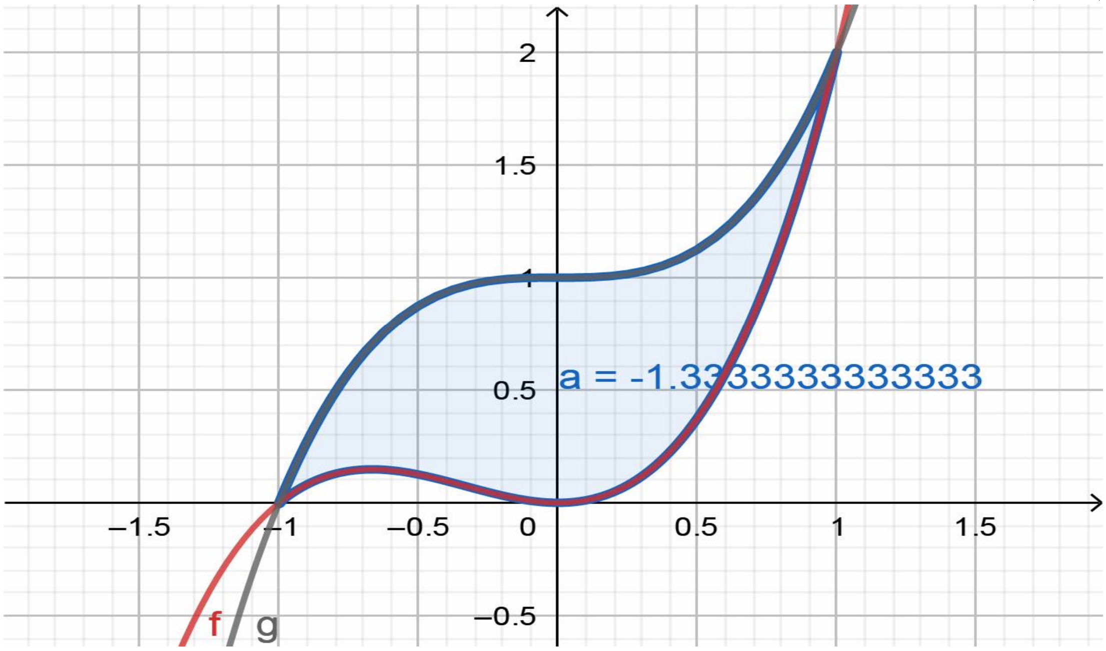
نقط التقاطع $ن(س) = هـ(س)$، $س^٣ + س^٢ = س^٣ + ١ \Leftrightarrow س = ١ \vee س = -١$

من اجل س=٠ نجد $ن(٠) = ٠$ ، $هـ(٠) = ١$ هـ فوق ق في الفترة $[-١،١]$

اذا المساحة المطلوبة هي

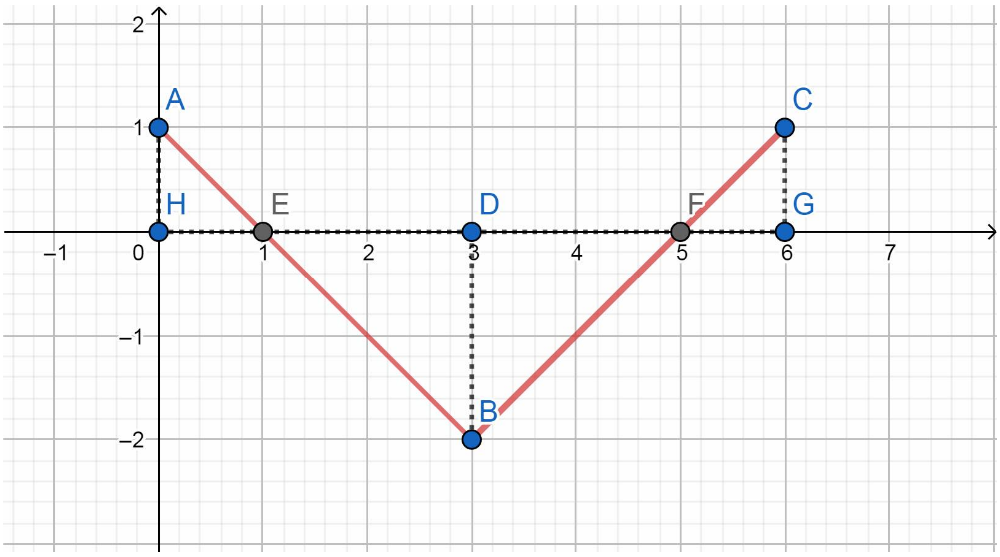
$$م = \int_{-١}^{١} \left( (س^٣ + ١) - (س^٣ + س^٢) \right) ءس = \int_{-١}^{١} (١ - س^٢) ءس = \left[ س - \frac{س^٣}{٣} \right]_{-١}^{١}$$

$$= \frac{٢}{٣} - \left( \frac{-٢}{٣} \right) = \frac{٤}{٣}$$




الرسم

٤- اعتمد على الشكل



من الملاحظ انها زاوية قائمة والمثلثات الموجودة هي مثلثات قائمة مساحاتها على الترتيب والاخير مربع

$$\frac{١\times١}{٢}=\frac{١}{٢}،\ \frac{٢\times٢}{٢}=٢،\ \frac{٢\times٢}{٢}=٢،\ \frac{١\times١}{٢}=\frac{١}{٢}،\ ١\times١=١$$

تذكر هنا لا نحسب مساحة لذلك المساحة فوق محور السينات اشارتها موجبة وتحت محور السينات اشارتها سالبة

$$\int_{٠}^{٧} ن(س)\,ءس=\frac{١}{٢}-٢-٢+\frac{١}{٢}+١=-٢$$

او قد نجد معادلة كل خط من الخطوط المستقيمة المارة بنقطتين وهي

$$ن(س)=-س+١\quad[٠،٣]،\quad هـ(س)=س-٥\quad[٣،٦]\quad،\quad ل(س)=١\quad[٦،٧]$$

$$\int_{٠}^{٧} ن(س)\,ءس=\int_{٠}^{٣}(-س+١)\,ءس+\int_{٣}^{٦}(س-٥)\,ءس+\int_{٦}^{٧}١\,ءس$$

$$=\left[-\frac{س^{٢}}{٢}+س\right]_{٠}^{٣}+\left[\frac{س^{٢}}{٢}-٥س\right]_{٣}^{٦}+\left[س\right]_{٦}^{٧}$$

$$=\frac{-٣}{٢}-\frac{٣}{٢}+١=-٢$$

ب ) $\int_{٠}^{٧}|ن(س)|\,ءس$ هذه القيمة هي المساحة

$$\int_{٠}^{٧}|ن(س)|\,ءس=\frac{١}{٢}+٢+٢+\frac{١}{٢}+١=٦$$

او تحسب من خلال التكامل بالشكل التالي

$$\int_{٠}^{٧} ن(س)\,ءس=\int_{٠}^{١}(-س+١)\,ءس-\int_{١}^{٣}(-س+١)-\int_{٣}^{٥}(س-٥)\,ءس+$$

$$+\int_{٥}^{٦}(س-٥)\,ءس+\int_{٦}^{٧}(١)\,ءس$$

$$=\left[-\frac{س^{٢}}{٢}+س\right]_{٠}^{١}-\left[-\frac{س^{٢}}{٢}+س\right]_{١}^{٣}-\left[\frac{س^{٢}}{٢}-٥س\right]_{٣}^{٥}+\left[\frac{س^{٢}}{٢}-٥س\right]_{٥}^{٦}+\left[س\right]_{٦}^{٧}$$

$$=\left(\frac{١}{٢}\right)-(-٢)-(-٢)+\left(\frac{١}{٢}\right)+١=٦$$

ج- $\left|\int_{٠}^{٧} ن(س)\,ءس\right|=|-٢|=٢$

٦- الشكل المجاور $م_{١}=٦$ ، $م_{٢}=٤$

الاولى فوق محور السينات والثانية تحت المحور

١- $\int_{٠}^{٥} ق(س)\,ءس = ٦ - ٤ = ٢$

٢- المساحة

$$\int_{٠}^{٥} |ق(س)|\,ءس = ٦ + ٤ = ١٠$$

تدريبات

١ - جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني $ق(س) = (س-١)هـ^{س}$ ومحوري الإحداثيات

الحل نجد نقط التقاطع مع محور السينات $ق(س) = (س-١)هـ^{س} = ٠$ لاحظ ان $هـ^{س} \neq ٠$ لأنه موجب تماما اذا $(س-١) = ٠ \Leftrightarrow س = ١$

وقلنا ان الحد الاخر وهو محور الصادات اذا $س = ٠$ لنجد الوضع النسبي للخط فوق او تحت محور السينا ت لذلك نختار قيمة بين الواحد والصفر ونعوض فنجد $ق\left(\frac{١}{٢}\right) = \left(\frac{١}{٢} - ١\right)هـ^{س} \prec ٠$

اذا الخط يقع تحت محور السينات

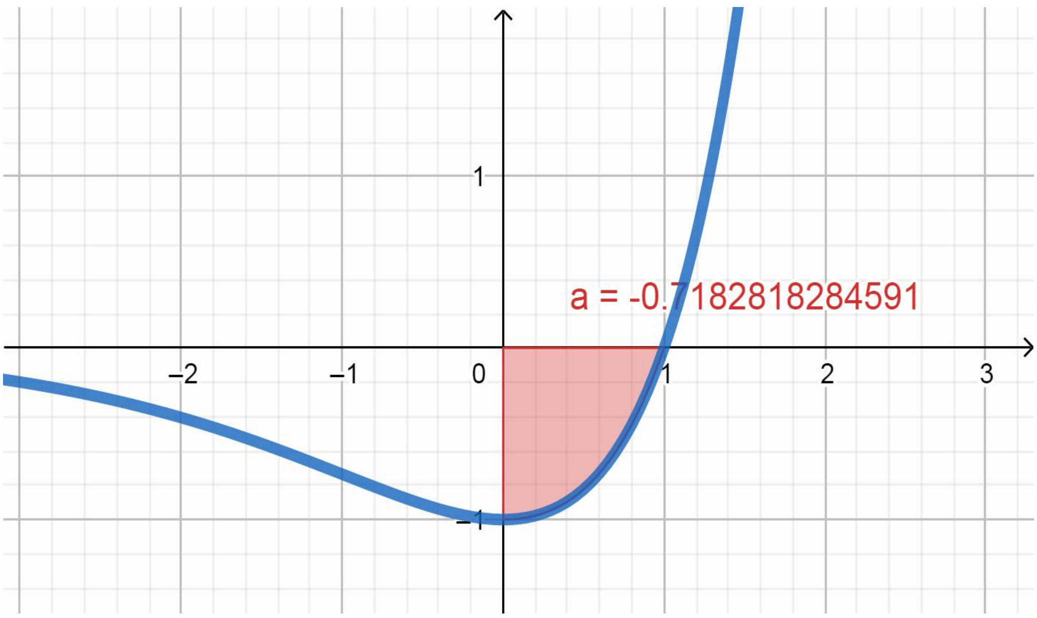
وبالتالي المساحة المطلوبة $م = -\int_{٠}^{١} (س-١)هـ^{س}\,ءس$ تذكر هذا التكامل بالتجزئة

$$ق = س - ١ \Leftarrow ءق = ءس \quad ، \quad ءك = هـ^{س}\,ءس \Leftarrow ك = هـ^{س}$$

$$م = -\int_{٠}^{١} (س-١)هـ^{س}\,ءس = -\left\{\left[(س-١)هـ^{س}\right]_{٠}^{١} - \int_{٠}^{١} هـ^{س}\,ءس\right\}$$

$$م = -\left[٠ - (-١)هـ^{٠}\right] + \left[هـ^{س}\right]_{٠}^{١} = ١ + (هـ - ١) = هـ$$

اذا حاولنا ان نرسم



هذه مجموعة المسائل التالية قدمتها في الفصل الأول وتم حذفها من قبل البعض

اوجد المساحات في كل من المسائل التالية

١- مساحة بين منحنى ومحور السينات

عليك أن تجد تقاطع المنحنى مع محور السينات من خلال حل المعادلة $ق(س) = ٠$ أصفارها حدود التكامل

وعليك ان تحدد وضع الخط فوق او تحت محور السينات اذا كان الاقتران متصل اختار قيم وعوضها بين أصفار المعادلة السابقة ان كانت موجبة الخط فوق محور السينات واذا كانت سالبة الخط تحت محور السينات

تطبيق

١- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى الاقتران $ق(س) = س^٢ - ٤س$ ومحور السينات

الحل : الحل :نحل المعادلة $\boxed{\begin{array}{l} ق(س) = ٠ \Leftrightarrow س^٢ - ٤س = ٠ \\ س(س - ٤) = ٠ \Leftrightarrow س = ٠ \vee س = ٤ \end{array}}$

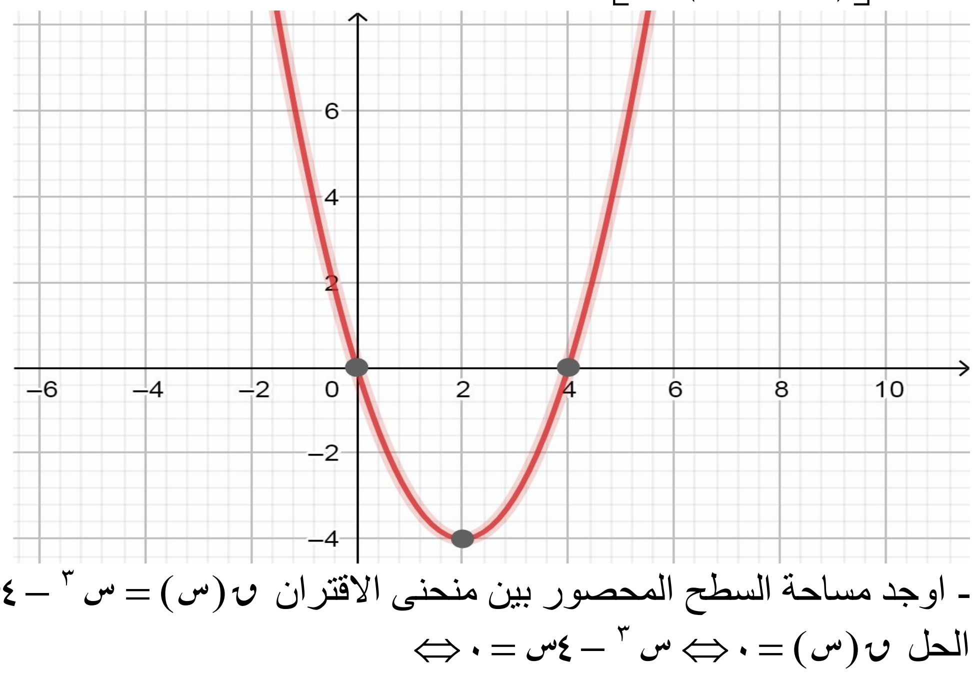
الخط يقطع محور السينات في نقطتين

لنأخذ قيمة بين ٠،٤ ولتكن ١،ق(١) = −٣ ≺ ٠ الخط في هذه الفترة يقع تحت محور السينات

$$م = -\int_{٠}^{٤} (س^٢ - ٤س) \, ءس$$

$$م = -\left[\frac{س^٣}{٣} - ٢س^٢\right]_{٠}^{٤}$$

$$م = -\left[\left(\frac{٦٤}{٣} - ٣٢\right) - ٠\right] = \frac{٣٢}{٣}$$




٢- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى الاقتران $ق(س) = س^٣ - ٤س$ ومحور السينات

الحل $ق(س) = ٠ \Leftrightarrow س^٣ - ٤س = ٠ \Leftrightarrow$

الحل :نحل المعادلة

$ق(س) = ٠ \Leftrightarrow س^٣ - ٤س = ٠$

$س\left(س^٢ - ٤\right) = ٠ \Leftrightarrow س(س - ٢)(س + ٢) = ٠ \Leftrightarrow س = ٠ \vee س = ٢ \vee س = -٢$

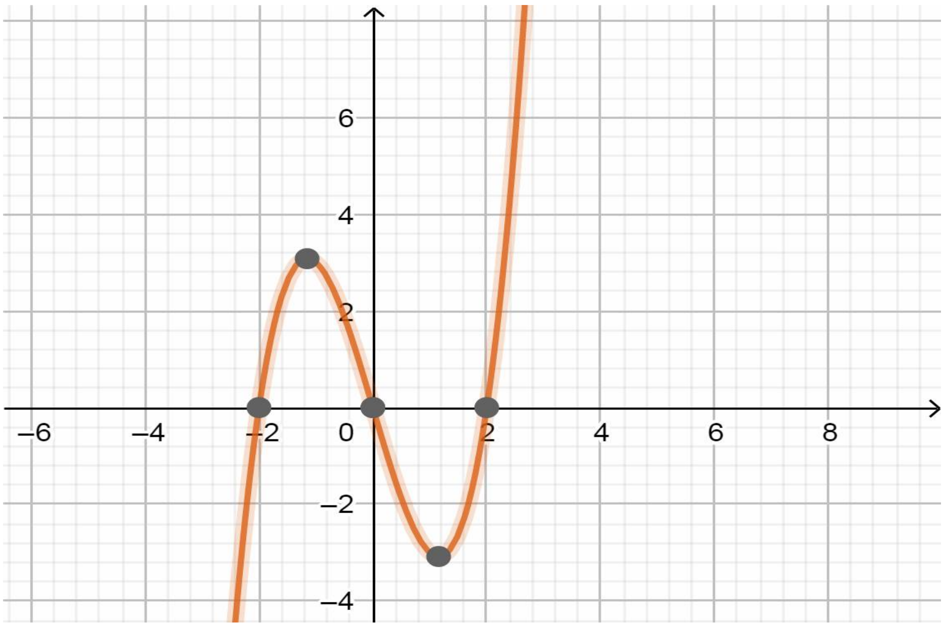
الخط يقطع محور السينات في ثلاثة نقط

لناخذ قيمة بين −٢،٠ ولتكن −١، ق(−١) = ٥ $>$ ٠ الخط في هذه الفترة يقع فوق محور السينات
لناخذ قيمة بين ٠،٢ ولتكن ١، ق(١) = −٣ $<$ ٠ الخط في هذه الفترة يقع تحت محور السينات
وبالتالي المساحة المطلوبة

$$\text{م} = \int_{-٢}^{٠} \left(\text{س}^{٣} - ٤\text{س}\right) \text{ءس} - \int_{٠}^{٢} \left(\text{س}^{٣} - ٤\text{س}\right) \text{ءس}$$

$$\text{م} = \left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - ٢\text{س}^{٢}\right]_{-٢}^{٠} - \left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - ٢\text{س}^{٢}\right]_{٠}^{٢}$$

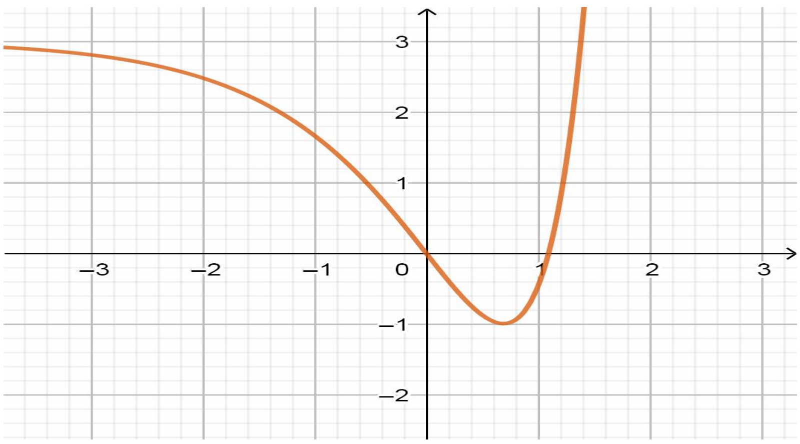
$$\text{م} = \left[٠ - (٤ - ٨)\right] - \left[(٤ - ٨) - ٠\right] = ٨$$




٣- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى الاقتران ق(س) = $\text{هـ}^{٢\text{س}} - ٤\text{هـ}^{\text{س}} + ٣$ ومحور السينات

$$\text{ق(س)} = ٠ \Leftrightarrow \text{هـ}^{٢\text{س}} - ٤\text{هـ}^{\text{س}} + ٣ = ٠ \Leftrightarrow \left(\text{هـ}^{\text{س}} - ١\right)\left(\text{هـ}^{\text{س}} - ٣\right) = ٠$$

$$\text{هـ}^{\text{س}} - ١ = ٠ \Leftrightarrow \text{س} = ٠،\ \text{هـ}^{\text{س}} - ٣ = ٠ \Leftarrow \text{هـ}^{\text{س}} = ٣ \Leftarrow \text{س} = \text{لـو}٣$$



لنأخذ

ق(١) = هـ$^{٢}$ − ٤هـ + ٣ ≺ ٠

الخط يقع تحت محور السينات

م = $\int_{٠}^{\text{لـو}٣}$ (هـ$^{٢س}$ − ٤هـ$^{س}$ + ٣) ءس = $\left[\frac{١}{٢}\right.$هـ$^{٢س}$ − ٤هـ$^{س}$ + ٣س$\left.\right]_{٠}^{\text{لـو}٣}$

= $\left(\frac{١}{٢}\right.$هـ$^{٢\text{لـو}٣}$ − ٤هـ$^{\text{لـو}٣}$ + ٣لـو٣$\left.\right)$ − $\left(\frac{١}{٢}\right.$ − ٤ + ٠$\left.\right)$ = $\frac{٩}{٢}$ − ١٢ + لـو٢٧ + $\frac{٧}{٢}$ = (لـو٢٧) − ٤

٤- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى الاقتران ق(س) = لـو(٥ − س$^{٢}$) ومحور السينات

ق(س) = ٠ ⇐ لـو(٥ − س$^{٢}$) = ٠ ⇐ ٥ − س$^{٢}$ = ١ ⇔ س = ٢ ∨ س = −٢

ق(٠) = لـو(٥ − ٠) = لـو٥ ≻ ٠ الخط فوق محور السينات

م = $\int_{-٢}^{٢}$ لـو(٥ − س$^{٢}$) ءس = $\int_{-٢}^{٢}$ لـو(٥ − س)(٥ + س) ءس = $\int_{-٢}^{٢}$ لـو(٥ − س) ءس + $\int_{-٢}^{٢}$ لـو(٥ + س) ءس

تكامل بالتعويض ثم أجزاء

م = $\int_{-٢}^{٢}$ لـو(٥ − س) ءس + $\int_{-٢}^{٢}$ لـو(٥ + س) ءس

م = $\big[$−(٥ − س)لـو(٥ − س) + (٥ − س)$\big]_{-٢}^{٢}$ + $\big[$(٥ + س)لـو(٥ + س) − (٥ + س)$\big]_{-٢}^{٢}$

م = $\big[$(−٣لـو٣ + ٣) − (−٧لـو٧ + ٧)$\big]$ + $\big[$(٧لـو٧ − ٧) − (٣لـو٣ − ٣)$\big]$

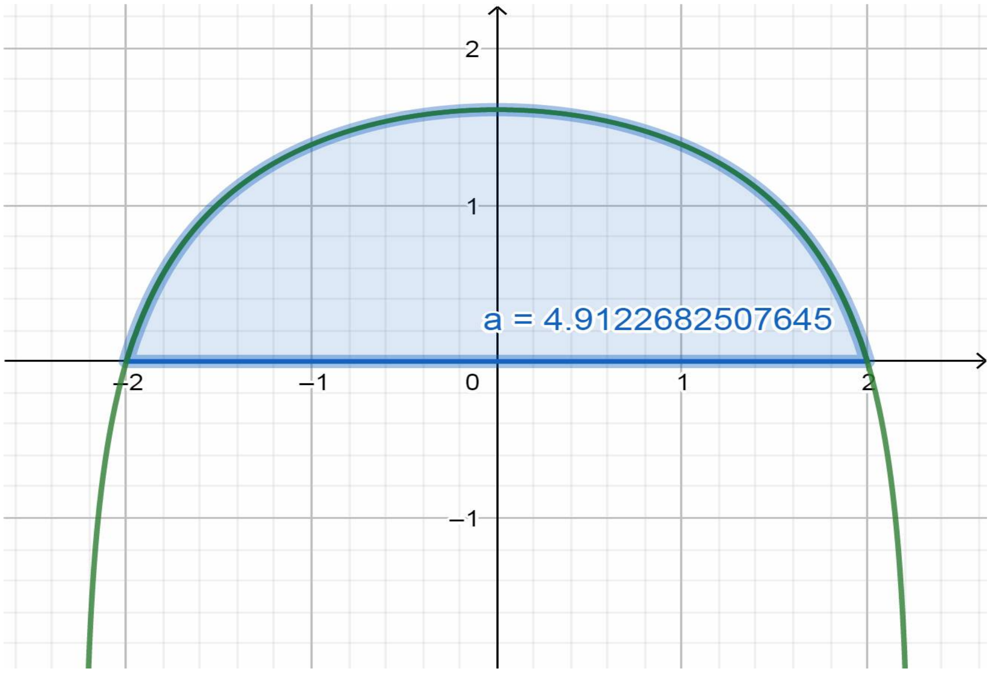
م = ١٤لـو٧ − ٦لـو٣ − ٨

لنكامل احد التكاملين بالتجزئة وليكن $\int_{-٢}^{٢}$ لـو(٥ − س) ءس

٥ − س = ص ⟸ −ءس = ءص

نفرض س = −٢ ⟸ ص = ٧

س = ٢ ⟸ ص = ٣




$\int_{\text{٧}}^{\text{٣}}$ −لـوص ءص

ق = لـوص ⟸ ءق = $\frac{\text{ءص}}{\text{ص}}$

ءف = ١ءس ⟸ ف = س

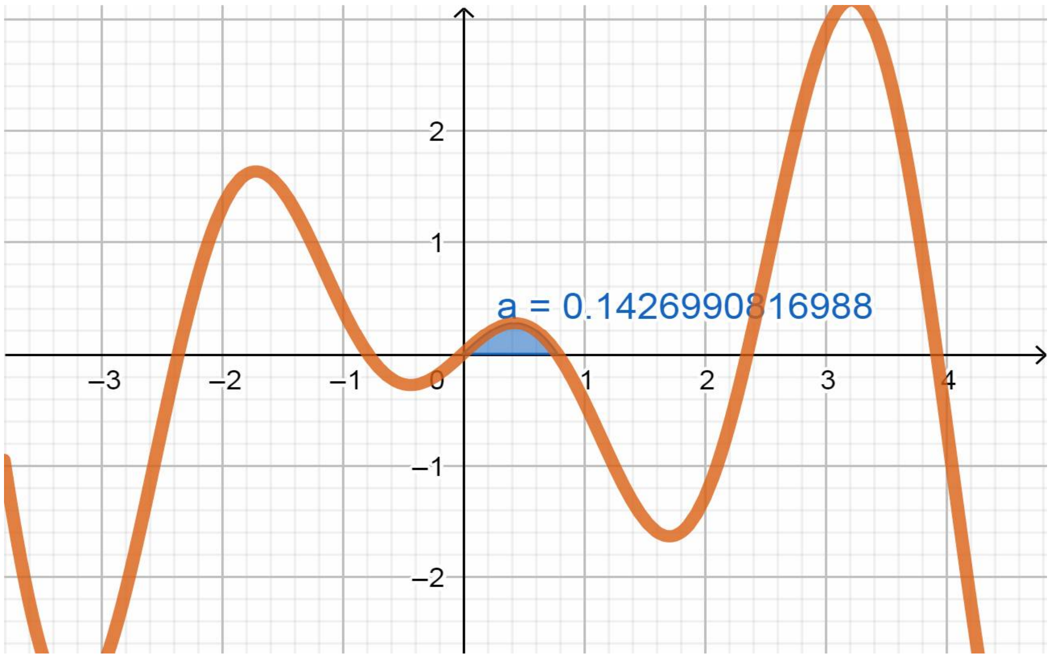
$\int_{\text{٧}}^{\text{٣}}$ −لـوص ءص = − $\left\{ [\text{ص لـوص}] - \int_{\text{٧}}^{\text{٣}} \text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ص}} \right\}$

= − $\left\{ [\text{ص لـوص}]_{\text{٧}}^{\text{٣}} - [\text{ص}]_{\text{٧}}^{\text{٣}} \right\}$ = −(٣لـو٣ − ٧لـو٧) + (٣ − ٧) = ٧لـو٧ − ٣لـو٣ − ٤

٥- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى الاقتران ق(س) = سجتا٢س ومحور السينات في فترة طولها $\frac{\pi}{\text{٤}}$

ق(س) = ٠ ⟺ سجتا٢س = ٠ ⟺ س = ٠ ∨ س = $\frac{\pi}{\text{٤}}$

ق$\left(\frac{\pi}{\text{٦}}\right)$ = $\frac{\pi}{\text{٦}}$جتا٢$\frac{\pi}{\text{٦}}$ = $\frac{\pi}{\text{١٢}}$ ≻ ٠ الخط فوق محور السينات في الفترة $\left[\text{٠}، \frac{\pi}{\text{٤}}\right]$




المساحة

$$\text{م} = \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{٤}} \text{س جتا٢س ءس}$$

$$\text{ق} = \text{س} \Leftarrow \text{ءق} = \text{ءس}$$

$$\text{ءهـ} = \text{جتا٢س ءس} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{١}{٢}\text{جا٢س}$$

$$\text{م} = \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{٤}} \text{س جتا٢س ءس} = \left[\frac{١}{٢}\text{س جا٢س}\right]_{\cdot}^{\frac{\pi}{٤}} - \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{١}{٢}\text{جا٢س ءس} = \left[\frac{١}{٢}\text{س جا٢س}\right]_{\cdot}^{\frac{\pi}{٤}} + \frac{١}{٤}\left[\text{جتا٢س}\right]_{\cdot}^{\frac{\pi}{٤}}$$

$$\frac{\pi}{٨} + \left(\frac{-١}{٤}\right) = \frac{\pi}{٨} - \frac{١}{٤}$$

السؤال الثاني : المساحة بين منحنى اقتران ومحوري الاحداثيات

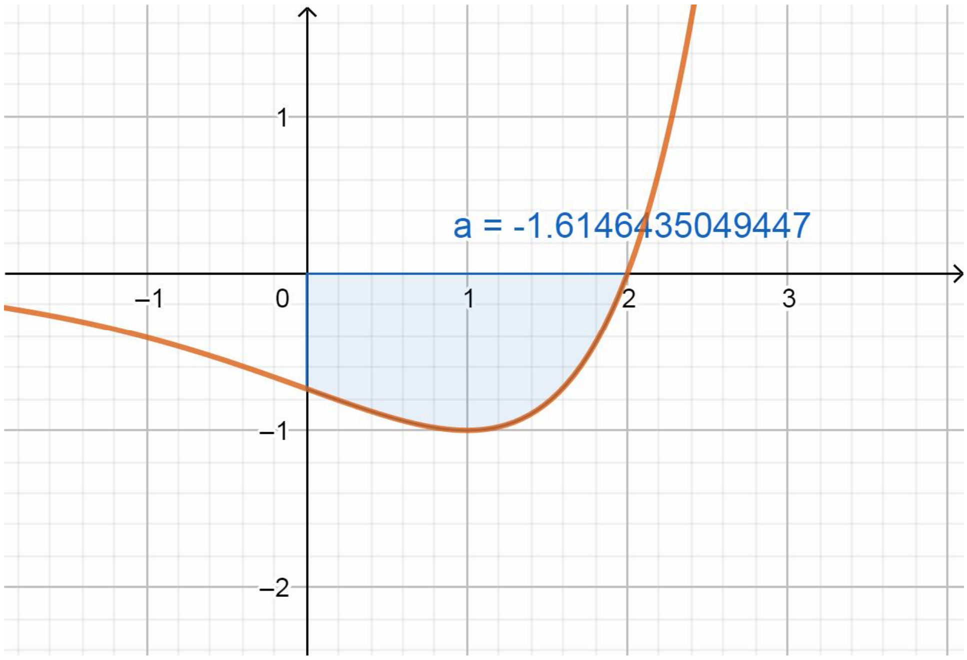
احد حدود التكامل هو صفر المعادلة $\text{ق(س)} = ٠$ الأقرب الى الصفر والحد الثاني هو الصفر حتما طبعا الحدود دوما مرتبة الأصغر فالأكبر

لمعرفة الوضع النسبي للخط ناخذ قيمة بين الحدين السابقين ونعوض في معادلة المنحنى اذا كان موجب الخط فوق محور السينات

١- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى الاقتران $\text{ق(س)} = (\text{س} - ٢)\text{هـ}^{\text{س}-١}$ ومحور السينات ومحور الصادات

$\text{ق(س)} = ٠ \Leftarrow (\text{س} - ٢)\text{هـ}^{\text{س}-١} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٢$ والحد الاخر هو $\text{س} = ٠$

الوضع النسبي $\text{ق(١)} = (١ - ٢)\text{هـ}^{١-١} = -١ < ٠$ الخط تحت محور السينات




$$\text{م} = -\int_{٠}^{٢} (\text{س} - ٢)\,\text{هـ}^{\text{س}-١}\,\text{ءس}$$

$$\text{ن} = \text{س} - ٢ \Leftarrow \text{ءن} = \text{ءس}$$

المساحة $\text{ءف} = \text{هـ}^{\text{س}-١}\,\text{ءس} \Leftarrow \text{ف} = \text{هـ}^{\text{س}-١}$

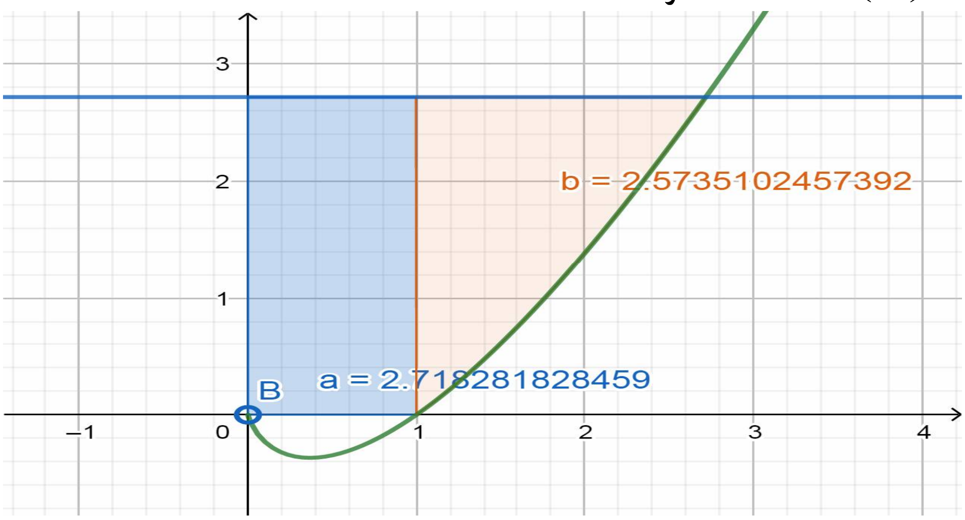
$$\text{م} = -\int_{٠}^{٢} (\text{س} - ٢)\,\text{هـ}^{\text{س}-١}\,\text{ءس} = -\left\{ \left[(\text{س} - ٢)\,\text{هـ}^{\text{س}-١}\right]_{٠}^{٢} - \int_{٠}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}-١}\,\text{ءس} \right\}$$

$$= -\left[(\text{س} - ٢)\,\text{هـ}^{\text{س}-١}\right]_{٠}^{٢} + \left[\text{هـ}^{\text{س}-١}\right]_{٠}^{٢}$$

$$= -\left[٠ - (-٢)\,\text{هـ}^{-١}\right] + \left[\text{هـ}^{١} - ١\right] = \text{هـ} - \frac{٢}{\text{هـ}} - ١$$

٢- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى الاقتران $\text{ن}(\text{س}) = \text{س}\,\text{لـو}\,\text{س}$ ومحور السينات ومحور الصادات والمستقيم $\text{ص} = \text{هـ}$

$$\text{ن}(\text{س}) = ٠ \Leftarrow \text{س}\,\text{لـو}\,\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ١$$



لناخذ $ق\left(\frac{١}{٢}\right) = \frac{١}{٢} لو \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٢} لو ٢ < ٠$ في الفترة (٠،١) يقع الخط تحت محور السينات

$ق(هـ) = هـ لو هـ = هـ > ٠$ يقع الخط في الفترة (١،∞) فوق محور السينات

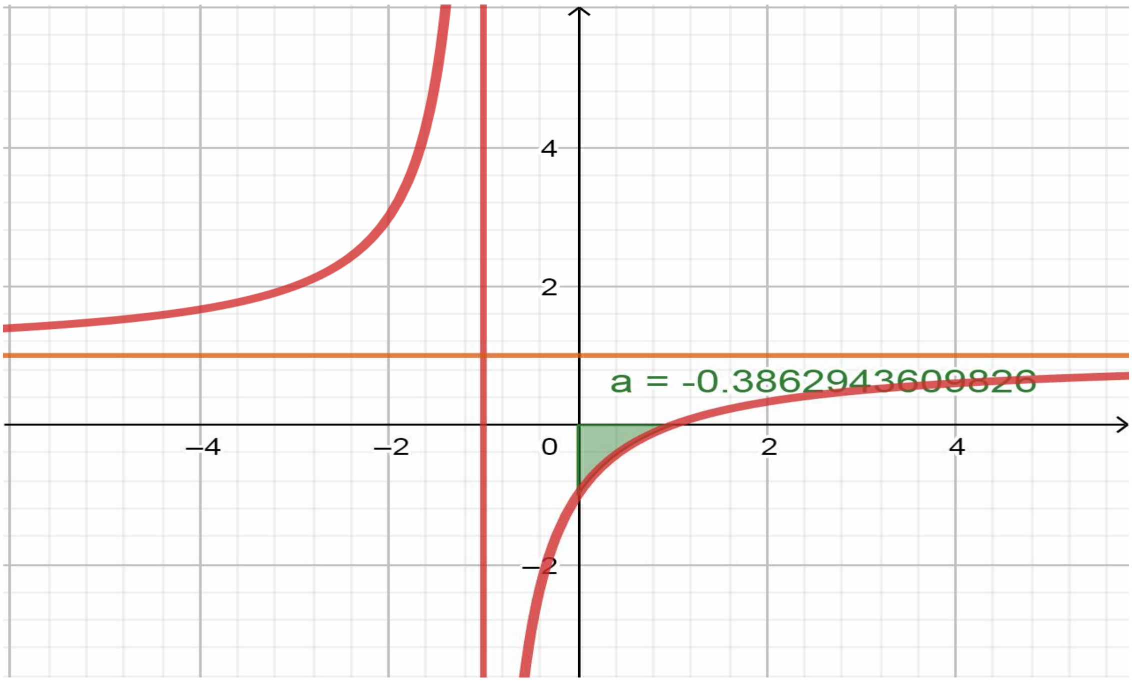
التقاطع مع $ص = هـ$ و $ق(س) = س لو س$

$هـ = س لو س \Leftarrow س = هـ$

المساحة $م = \int_{٠}^{هـ} هـ ءس - \int_{١}^{هـ} س لو س ءس = هـ^{٢} - [س لو س - س]_{١}^{هـ} = هـ^{٢} - (-١) = هـ^{٢} + ١$

تكامل اجزاء عليك ان تقوم به

٣- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى الاقتران $ق(س) = \frac{س - ١}{س + ١}$ ومحور السينات ومحور الصادات




$ق(س) = ٠ \Leftarrow \frac{س - ١}{س + ١} = ٠ \Leftarrow س = ١$

$ق\left(\frac{١}{٢}\right) = -١ < ٠$ الخط تحت محور السينات في الفترة

$م = -\int_{٠}^{١} \frac{س - ١}{س + ١} ءس = -\int_{٠}^{١} \frac{س + ١ - ٢}{س + ١} ءس = -\int_{٠}^{١} ١ - \frac{٢}{س + ١} ءس = -[س - ٢لو(س + ١)]_{٠}^{١}$

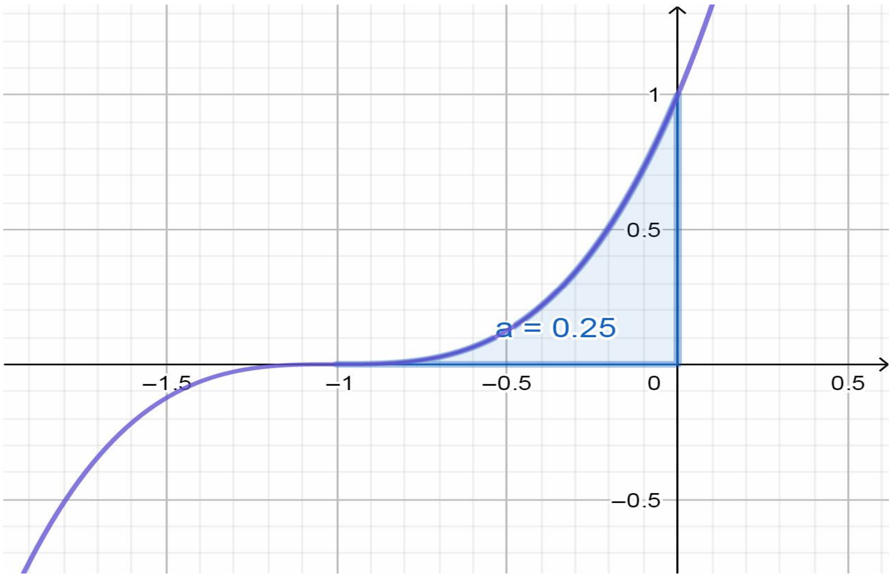
$= -(١ - ٢لو٢) - (٠) = -١ + لو٤$

٤- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى الاقتران $ق(س) = (س + ١)^{٣}$ ومحور السينات ومحور الصادات

$$ق(س) = ٠ \Leftarrow (س+١)^{٣} = ٠ \Leftarrow س = -١$$

الخط فوق

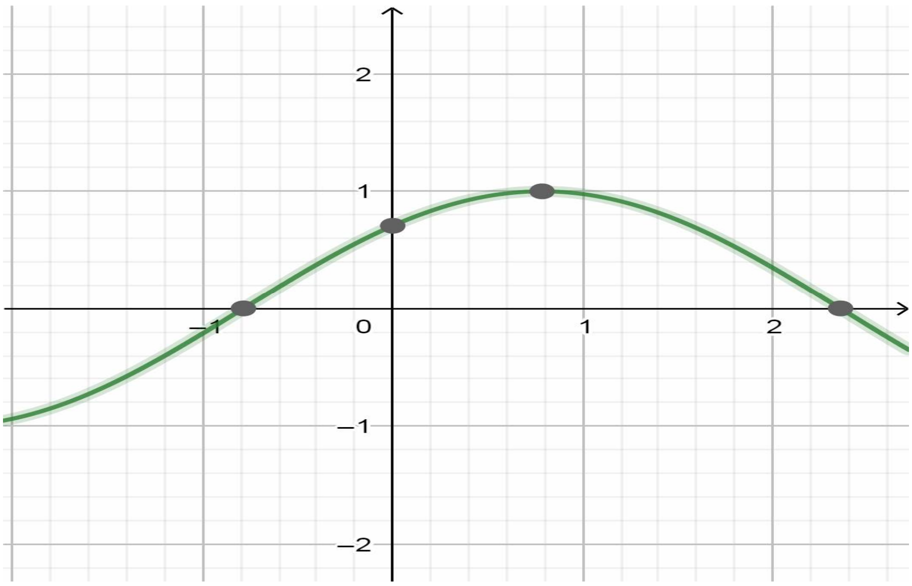
$$ق\left(-\frac{١}{٢}\right) = \frac{١}{٨} > ٠$$




$$م = \int_{-١}^{٠} (س+١)^{٣}\, ءس = \left[\frac{(س+١)^{٤}}{٤\times ١}\right]_{-١}^{٠} = \frac{١}{٤}$$

٥- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى الاقتران $ق(س)=جتا\left(س-\frac{\pi}{٤}\right)$ ومحور السينات ومحور الصادات

$$ق(س) = ٠ \Leftarrow جتا\left(س-\frac{\pi}{٤}\right) = ٠ \Leftarrow س - \frac{\pi}{٤} = \frac{\pi}{٢} \Leftarrow س = \frac{٣\pi}{٤}$$




$ق\left(\frac{\pi}{٢}\right)=جتا\left(\frac{\pi}{٢}-\frac{\pi}{٤}\right) = \frac{\sqrt{٢}}{٢} > ٠$ الخط فوق محور السينات في الفترة

$$م=\int_{٠}^{\frac{٣\pi}{٤}} جتا\left(س-\frac{\pi}{٤}\right) ءس = \left[جا\left(س-\frac{\pi}{٤}\right)\right]_{٠}^{\frac{٣\pi}{٤}} = ١-\left(-\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right) = ١+\frac{\sqrt{٢}}{٢}$$

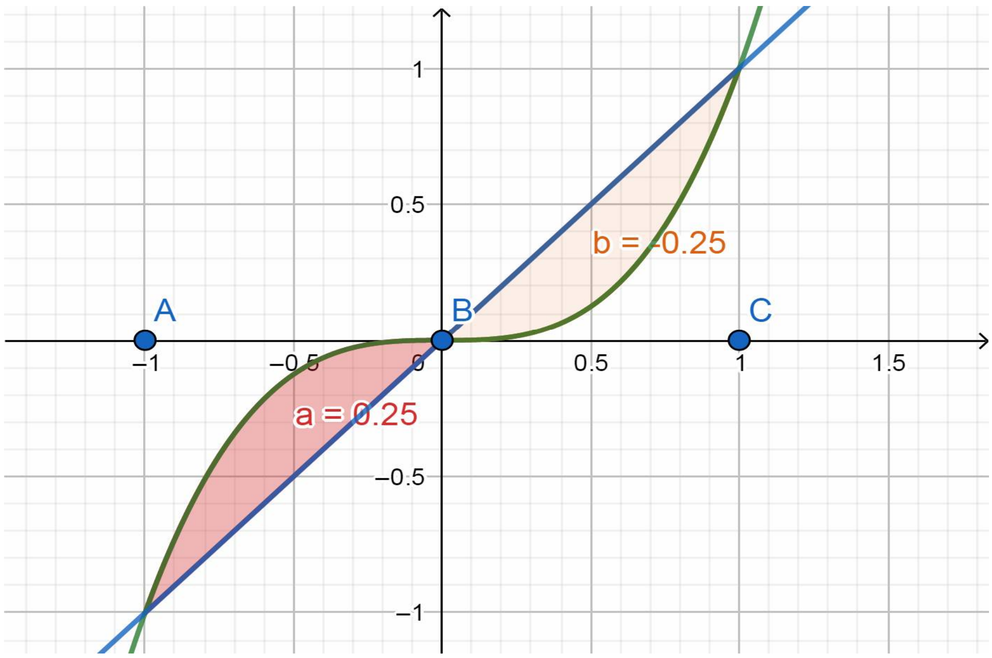
السؤال الثالث : المساحة بين منحنيين متقاطعين

علينا ان نجد نقط التقاطع من خلال الحل المشترك لمعادلتي الاقترانين فاذا وجد فقط جذران فهنالك مساحة واحدة فقط نحدد الوضع النسبي للمنحنيين بتعويض قيمة بين الجذرين القيمة الاكبر تدل على وجود خطه فوق الخط الاخر واذا كان للمعادلة ثلاثة جذور هنالك مساحتين نحدد الوضع النسبي لكل خط

١- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى الاقتران $\text{ں}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$ ومنحنى الاقتران $\text{ه}(\text{س}) = \text{س}$

$\text{س} = \text{س}^{٣} \Leftarrow \text{س} - \text{س}^{٣} = ٠ \Leftrightarrow \text{س}\left(١ - \text{س}^{٢}\right) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠ \vee \text{س} = ١ \vee \text{س} = -١$ نقط تقاطع المنحنيين

$\text{ه}\left(-\frac{١}{٢}\right) = -\frac{١}{٢}$، $\text{ں}\left(-\frac{١}{٢}\right) = \frac{-١}{٨}$، ں فوق ه في الفترة (−١،٠)



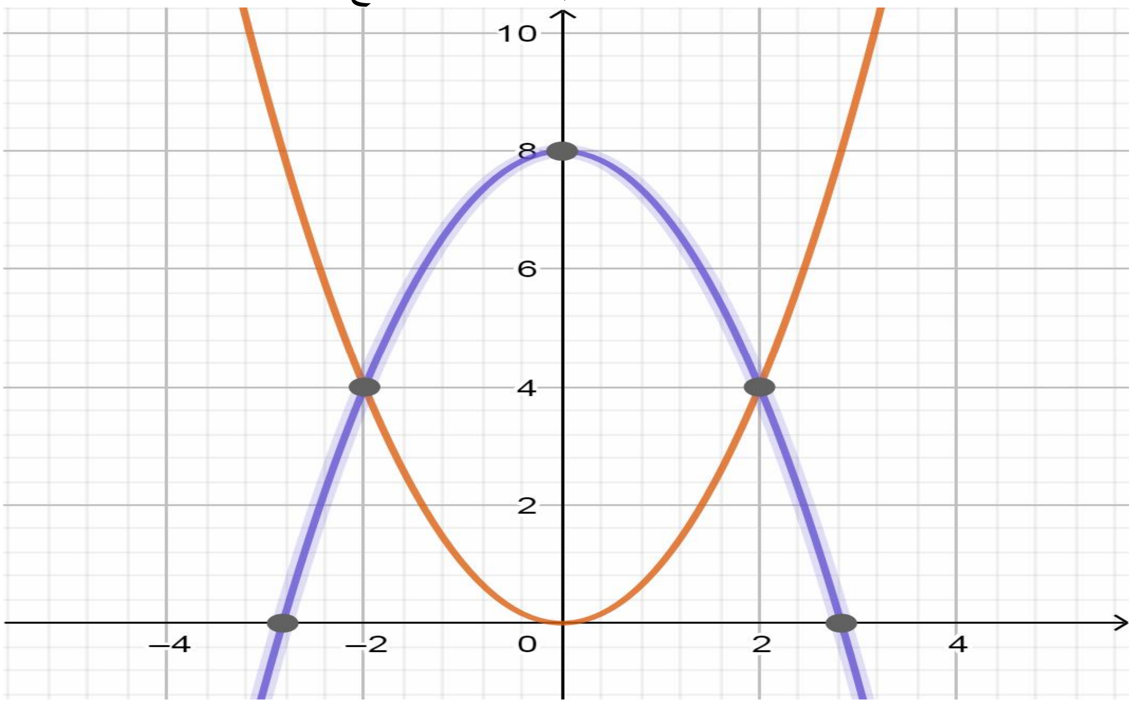

$\text{ه}\left(\frac{١}{٢}\right) = \frac{١}{٢}$، $\text{ں}\left(\frac{١}{٢}\right) = \frac{١}{٨}$، ں تحت ه في الفترة (٠،١)

المساحة

$$\text{م} = \int_{-١}^{٠} \left(\text{س}^{٣} - \text{س}\right) \text{ءس} + \int_{٠}^{١} \left(\text{س} - \text{س}^{٣}\right) \text{ءس} = \left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right]_{-١}^{٠} + \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{\text{س}^{٤}}{٤}\right]_{٠}^{١} = \frac{١}{٢}$$

٢- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى الاقتران $\text{ں}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$ ومنحنى الاقتران $\text{ه}(\text{س}) = ٨ - \text{س}^{٢}$

$\text{س}^{٢} = ٨ - \text{س}^{٢} \Leftrightarrow \text{س} = ٢ ، \text{س} = -٢$ سينات نقط التقاطع




$\text{ق}(٠) = ٠ ، \text{هـ}(٠) = ٨$ ق تحت هـ في الفترة $[-٢ ، ٢]$

$$\text{م} = \int_{-٢}^{٢} \left(٨ - \text{س}^{٢} - \text{س}^{٢}\right) \text{ءس} = \text{م} = \int_{-٢}^{٢} \left(٨ - ٢\text{س}^{٢}\right) \text{ءس} = \left[٨\text{س} - \frac{٢\text{س}^{٣}}{٣}\right]_{-٢}^{٢}$$

$$= \left(١٦ - \frac{١٦}{٣}\right) - \left(-١٦ + \frac{١٦}{٣}\right) = \frac{٦٤}{٣}$$

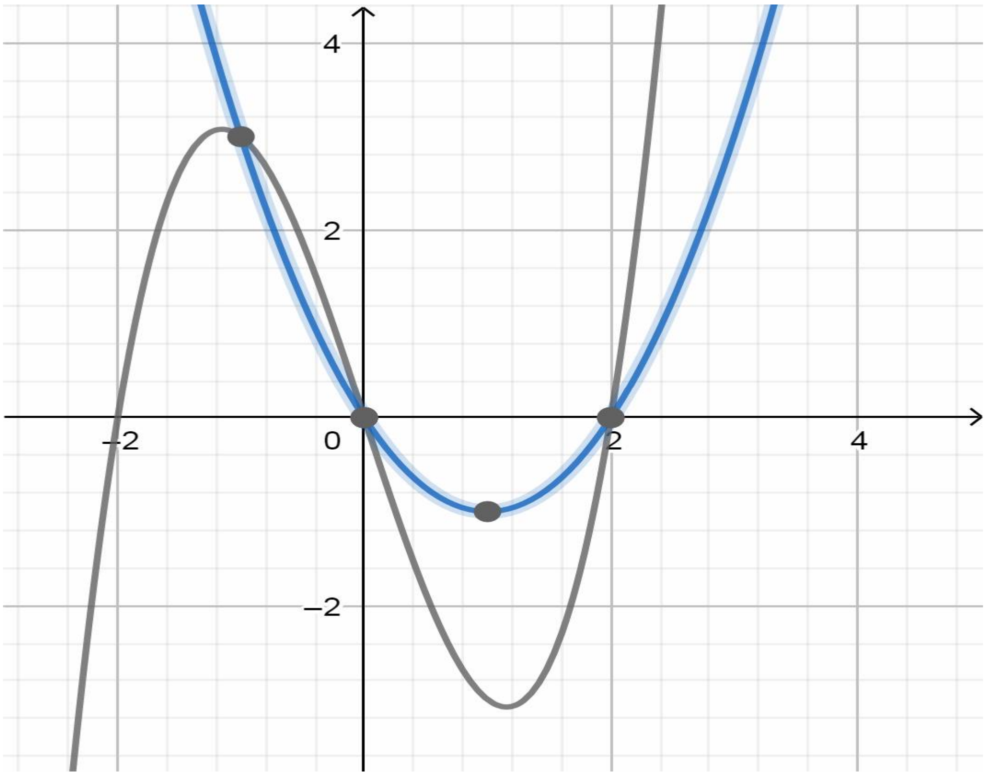
٣- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٤\text{س}$ ومنحنى الاقتران $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٢\text{س}$

$$\text{س}^{٢} - ٢\text{س} = \text{س}^{٣} - ٤\text{س} \Leftrightarrow \text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٢\text{س} = ٠ \Leftrightarrow \text{س}\left(\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢\right) = ٠$$

$$\text{س} = ٠ \vee \text{س} = ٢ \vee \text{س} = -١$$

$\text{ق}\left(-\frac{١}{٢}\right) = \frac{١٥}{٨} ، \text{هـ}\left(-\frac{١}{٢}\right) = \frac{-٣}{٤}$ ق فوق هـ في الفترة $[-١ ، ٠]$

$\text{ق}(١) = -٣ ، \text{هـ}(١) = -١$ ق تحت هـ في الفترة $[٠ ، ٢]$




$$\text{م} = \int_{-1}^{0} \left(\text{س}^{3} - 4\text{س} - \text{س}^{2} + 2\text{س}\right) \text{ءس} + \int_{0}^{2} \left(\text{س}^{2} - 2\text{س} - \text{س}^{3} + 4\text{س}\right) \text{ءس}$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\text{س}^{3} - \text{س}^{2} - 2\text{س}\right) \text{ءس} - \int_{0}^{2} \left(-\text{س}^{3} + \text{س}^{2} + 2\text{س}\right) \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{4}}{4} - \frac{\text{س}^{3}}{3} - \text{س}^{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{\text{س}^{4}}{4} + \frac{\text{س}^{3}}{3} + \text{س}^{2}\right]_{0}^{2}$$

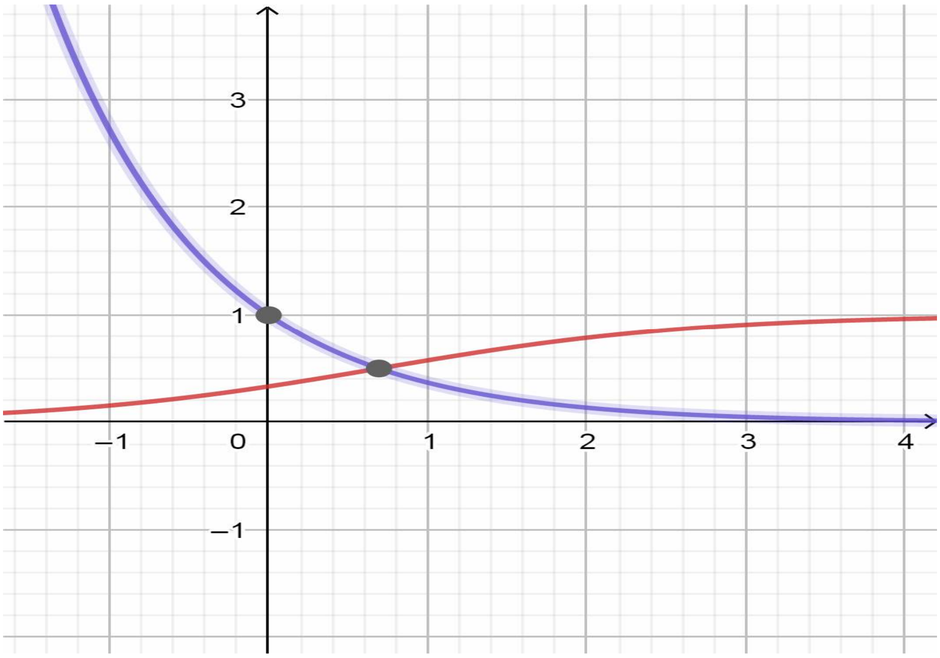
$$= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$$

السؤال الرابع مساحة بين خطين ويحدد حدود التكامل من خلال المستقيمين $\text{س} = \text{ا}، \text{ص} = \text{ب}$
او يمكن ان يعطي معادلة خط واحد فقط مثلا الخط $\text{س} = \text{ا}$
في كل من الحالتين علينا ان نحل المعادلتين فإذا كان احد الاصفار يقع بين ا،ب فالخط يغير وضعه النسبي ان كان الحل جذر بسيط اما اذا كان مضاعف فهي حالة تماس والخط لا يغير وضعه النسبي
واذا كانت المعادلة مستحيلة بين الجذري $\text{س} = \text{ا}، \text{ص} = \text{ب}$ فلا تتقاطع الخطوط بين الجذرين تطبيق
١- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى الاقتران $\text{ن}(\text{س}) = \text{هـ}^{-\text{س}}$ ومنحنى الاقتران

$\text{ل}(\text{س}) = \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + 2}$ ومحور الصادات

$$\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + 2} = \text{هـ}^{-\text{س}} \Leftrightarrow \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + 2} = \frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}}} \Leftrightarrow \text{هـ}^{2\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} - 2 = 0$$

$$\left(\text{هـ}^{\text{س}} - 2\right)\left(\text{هـ}^{\text{س}} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \text{هـ}^{\text{س}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \text{هـ}^{\text{س}} = 2 \Leftrightarrow \text{س} = \text{لـو}2$$



$$ن(لو(٢،١)) = هـ^{-(لو٢،١)} = \frac{١٠}{١٢} \quad ل(لو٢،١) = \frac{هـ^{لو٢،١}}{هـ^{لو٢،١}+٢} = \frac{٢،١}{٢،١+٢} = \frac{٢،١}{٣،٢} = \frac{١٢}{٣٢}$$

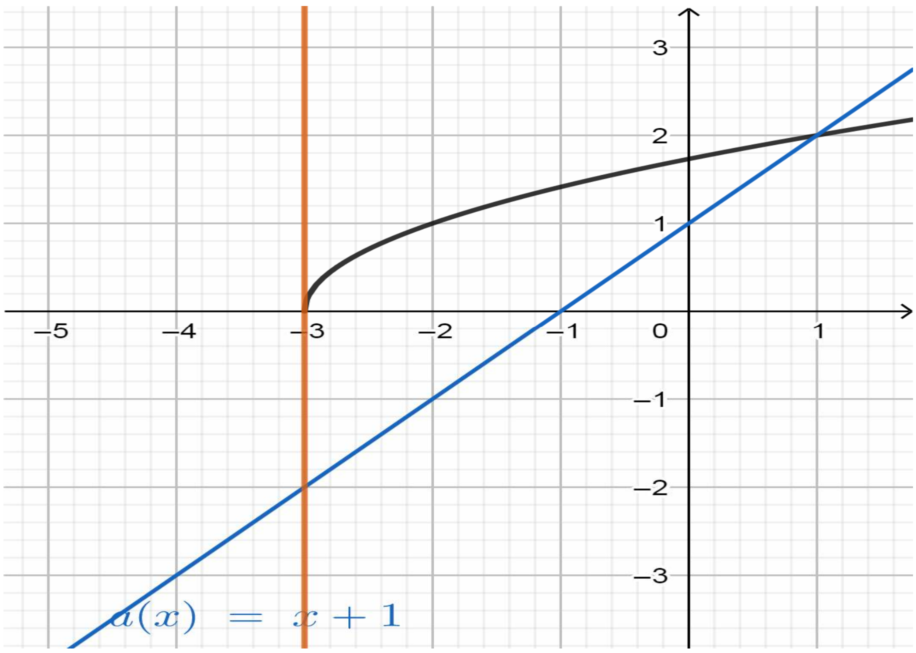
ن فوق ل في الفترة

$$م = \int_{٠}^{لو٢} \left( هـ^{-س} - \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}+٢} \right) ءس = \left[ -هـ^{-س} - لو(هـ^{س}+٢) \right]_{٠}^{لو٢}$$

$$\left( -هـ^{-لو٢} - لو(هـ^{لو٢}+٢) \right) - \left( \left( -هـ^{٠} - لو(هـ^{٠}+٢) \right) \right) = -\frac{١}{٢} - لو٤ + ١ + لو٣ = \frac{١}{٢} + لو\frac{٣}{٤}$$

٢-اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى الاقتران $ن(س) = \sqrt{س+٣}$ ومنحنى الاقتران $هـ(س) = س+١$ والمستقيم $س = -٣$

$\sqrt{س+٣} = س+١$ الشرط $س \geq -١$ ونربع الطرفين




س = −٢ مرفوض او س = ١ مقبول

التقاطع مع $س = -٣$

$ق(-٢) = \sqrt{-٢+٣} = ١$ $\quad$ $هـ(-٢) = -٢+١ = -١$ $\quad$ ق فوق هـ

$$م = \int_{-٣}^{١} \left(\sqrt{س+٣} - س - ١\right) ءس = \left[ \frac{٢(س+٣)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} - \frac{س^٢}{٢} - س \right]_{-٣}^{١}$$

$$= \left[ \frac{٢(س+٣)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} - \frac{س^٢}{٢} - س \right]_{-٣}^{١} = \left(\frac{١٦}{٣} - \frac{٣}{٢}\right) - \left(\frac{-٩}{٢} + ٣\right) = \frac{٧}{٣} + ٢$$

٣-اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى الاقتران $ق(س) = ٢\sqrt{٤ - س^٢}$ ومنحنى الاقتران $هـ(س) = ٤ - س^٢$

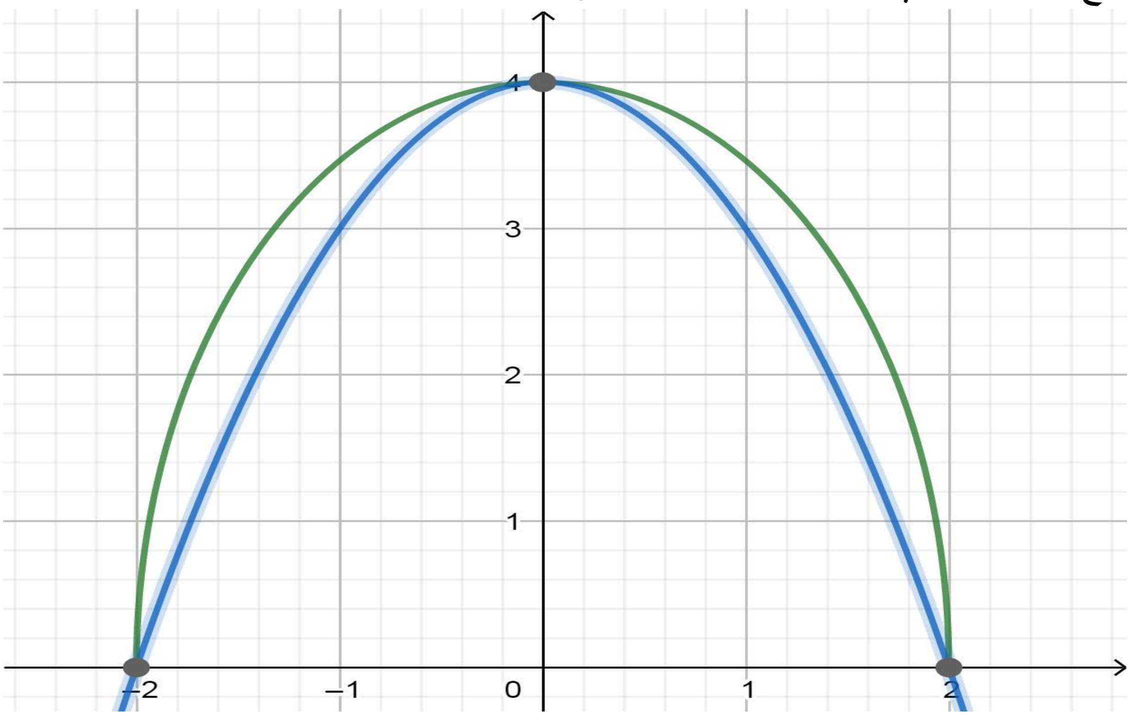
فكرة هذا التمرين انها قطع ناقص واخر مكافئ

$$ق(س) = ٢\sqrt{٤ - س^٢} \Leftrightarrow ص = ٢\sqrt{٤ - س^٢} \Rightarrow ص^٢ = ٤\left(٤ - س^٢\right)$$

$$\frac{ص^٢}{٤} + س^٢ = ٤ \Leftrightarrow \frac{ص^٢}{١٦} + \frac{س^٢}{٤} = ١$$

$أ = ٤، ب = ٢$

مساحة القطع الناقص $\pi أب = \pi \times ٤ \times ٢ = ٨\pi$ ومساحة نصف




القطع $٤\pi$

لنجد التقاطع $٢\sqrt{٤ - س^٢} = ٤ - س^٢$ الشرط $س \in [-٢،٢]$

$$٢\sqrt{٤ - س^٢} = ٤ - س^٢ \Leftrightarrow \left(\sqrt{٤ - س^٢}\right)\left(٢ - \left(\sqrt{٤ - س^٢}\right)\right) = ٠ \Leftrightarrow س = ٠، س = ٢، س = -٢$$

وبعد الرسم ستجد ان القطع المكافئ تحت لقطع الناقص

وبالتالي المساحة المطلوبة هي نصف القطع الناقص ناقص مساحة المافئ المحدودة بمحور السينات

$$م = ٤\pi - \int_{-٢}^{٢} \left(٤ - س^{٢}\right) ءس = ٤\pi - \left(٤س - \frac{س^{٣}}{٣}\right)\Big|_{-٢}^{٢} = ٤\pi - \left(\frac{٣٢}{٣} - \frac{-٨}{٣}\right) = ٤\pi - \frac{٤٠}{٣}$$

السؤال الخامس: قد يعطى ثلاثة خطوط وأكثر وهذا أمر صعب عليك هنا ان تحاول مقاطعة الخطوط مثنى مثنى وتجد نقط التقاطع وتعين النقاط على المحورين

ارسم المستقيمات والخطوط البيانية للاقتران التربيعي وهذا امر سهل

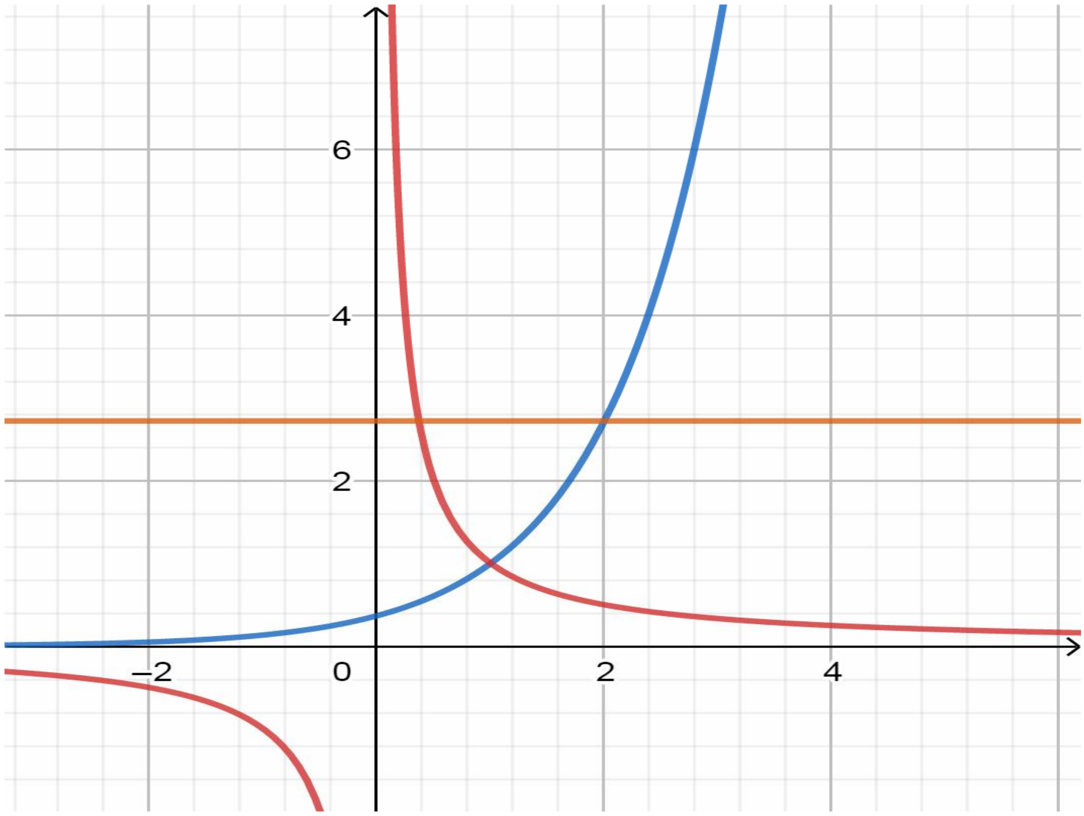
اما بالنسبة للاقترانات التي تحوي جذر تربيعي اعزل الجذر وربع الطرفين قد تحصل على معادلة احد القطوع فاختر الفرع الموافق الواقع فوق او تحت المحور التماثلي الافقي

اما بالنسبة للاقترانات الاسي واللوغاريتمي وغيرها والتي يجد الطالب صعوبة في رسمها فاستعن بجدول التزايد والتناقص للرسم

مثال(١) اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى كل من الاقترانات التالية $ق(س) = هـ^{س-١}$ والاقتران

$ل(س) = \frac{١}{س}$ والمستقيم ص = هـ ومحور الصادات

التقاطع $هـ^{س-١} = \frac{١}{س} \Leftrightarrow س = ١$




التقاطع بين $ق(س) = هـ^{س-١}$، $ص = هـ \Leftrightarrow هـ^{س-١} = هـ \Leftrightarrow س = ٢$

$ل(س) = \frac{١}{س}$، $ص = هـ$، $\frac{١}{س} = هـ \Leftarrow س = \frac{١}{هـ}$

حدود التكامل $\frac{١}{هـ} \approx \frac{٣٧}{١٠٠}$، ١، ٢

الوضع النسبي $\text{ق}\left(\frac{1}{2}\right)=\text{هـ}^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{\text{هـ}^{\frac{1}{2}}}\approx ٠،١٣$ ق تحت ص

$\text{ل}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}\prec \text{هـ}$ ل تحت ص

$$\text{م}=\int_{\frac{1}{\text{هـ}}}^{1}\left(\text{هـ}-\text{هـ}^{\text{س}-1}\right)\text{ءس}+\int_{1}^{2}\left(\text{هـ}-\frac{1}{\text{س}}\right)\text{ءس}=\left[\text{هـس}-\text{هـ}^{\text{س}-1}\right]_{\frac{1}{\text{هـ}}}^{1}+\left[\text{هـس}-\text{لوس}\right]_{1}^{2}$$

$$\left[(\text{هـ}-1)-\left(1-\text{هـ}^{\frac{1}{\text{هـ}}-1}\right)\right]+\left(2\text{هـ}-\text{لو}2-[\text{هـ}]\right)=2\text{هـ}-2+\text{هـ}^{-0.63}-\text{لو}2$$

مثال (٢)اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى كل من الاقترانات التالية $\text{ق}(\text{س})=\sqrt{\text{س}+4}$ والاقتران

$\text{هـ}(\text{س})=\text{س}\sqrt{2-\text{س}}$ والاقتران $\text{ص}=\frac{1}{4}\text{س}^{2}+\text{س}-3$ والمستقيم $\text{س}=-4$ ومحور الصادات

هنا عليك ان تسترشد بالرسم وان تجد من نص السؤال $\text{هـ}(0)$ ،$\text{هـ}(2)$ ،$\text{هـ}(-2)$

$\text{ق}(\text{س})=\sqrt{\text{س}+4}\Leftarrow \text{ص}=\sqrt{\text{س}+4}\Leftarrow \text{ص}^{2}=(\text{س}+4)$ وهو قطع مكافئ نأخذ الجز الواقع فوق المحور التماثلي ويتجه نحو السينات الموجبة

$$\text{ص}=\frac{1}{4}\text{س}^{2}+\text{س}-3\Leftarrow 4\text{ص}=\text{س}^{2}+4\text{س}-12\Leftrightarrow 4\text{ص}=\text{س}^{2}+4\text{س}+4-16$$

$$\Leftrightarrow(\text{س}+2)^{2}=4(\text{ص}+4)$$

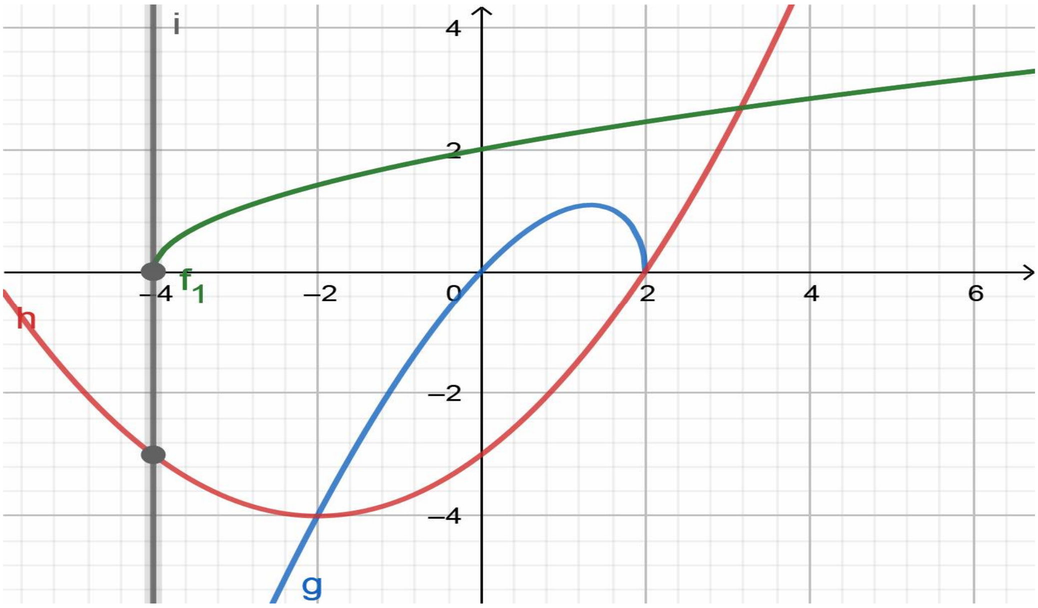
قطع مكافئ يتجه نحو الصادات الموجبة

التقاطع بعد ان تجد $\text{هـ}(-2)=-4$ ستجد ان $\text{ص}=-4$ وبالتالي سينات التقاطع $\text{س}=-2$

المساحة

$$\text{م}=\int_{-4}^{-2}\left(\sqrt{\text{س}+4}-\left(\frac{1}{4}\text{س}^{2}+\text{س}-3\right)\right)\text{ءس}+\int_{-2}^{0}\left(\sqrt{\text{س}+4}-\text{س}\sqrt{2-\text{س}}\right)\text{ءس}$$

$$\int_{-4}^{-2}\left(\sqrt{\text{س}+4}-\left(\frac{1}{4}\text{س}^{2}+\text{س}-3\right)\right)\text{ءس}=\left[\frac{2(\text{س}+4)^{\frac{3}{2}}}{3}-\left(\frac{1}{12}\text{س}^{3}+\frac{1}{2}\text{س}^{2}-3\text{س}\right)\right]_{-4}^{-2}=$$




$$\int_{-٤}^{-٢}\left(\sqrt{\text{س}+٤}-\left(\tfrac{١}{٤}\text{س}^{٢}+\text{س}-٣\right)\right)\text{ءس}=\left[\frac{٢(\text{س}+٤)^{\frac{٣}{٢}}}{٣}-\left(\frac{١}{١٢}\text{س}^{٣}+\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}-٣\text{س}\right)\right]_{-٤}^{-٢}=$$

$$\left[\frac{٢}{٣}\sqrt{٨}-\left(٨-\frac{٢}{٣}\right)\right]-\left[-٢٠+\frac{١٦}{٣}\right]=\frac{٢}{٣}\sqrt{٨}-٨-\frac{٢}{٣}+٢٠-\frac{١٦}{٣}=\frac{٢}{٣}\sqrt{٨}+٦$$

$$\int_{-٢}^{٠}\left(\sqrt{\text{س}+٤}-\text{س}\sqrt{٢-\text{س}}\right)\text{ءس}=\int_{-٢}^{٠}\left(\sqrt{\text{س}+٤}+(٢-\text{س}-٢)\sqrt{٢-\text{س}}\right)\text{ءس}$$

$$\int_{-٢}^{٠}\left(\sqrt{\text{س}+٤}+(٢-\text{س})\sqrt{٢-\text{س}}-٢\sqrt{٢-\text{س}}\right)\text{ءس}$$

$$\int_{-٢}^{٠}\left((\text{س}+٤)^{\frac{١}{٢}}+(٢-\text{س})^{\frac{٣}{٢}}-٢(٢-\text{س})^{\frac{١}{٢}}\right)\text{ءس}=$$

$$\left[\frac{٢(\text{س}+٤)^{\frac{٣}{٢}}}{٣}+\frac{٢(٢-\text{س})^{\frac{٥}{٢}}}{-٥}-\frac{٤(٢-\text{س})^{\frac{٣}{٢}}}{-٣}\right]_{-٢}^{٠}$$

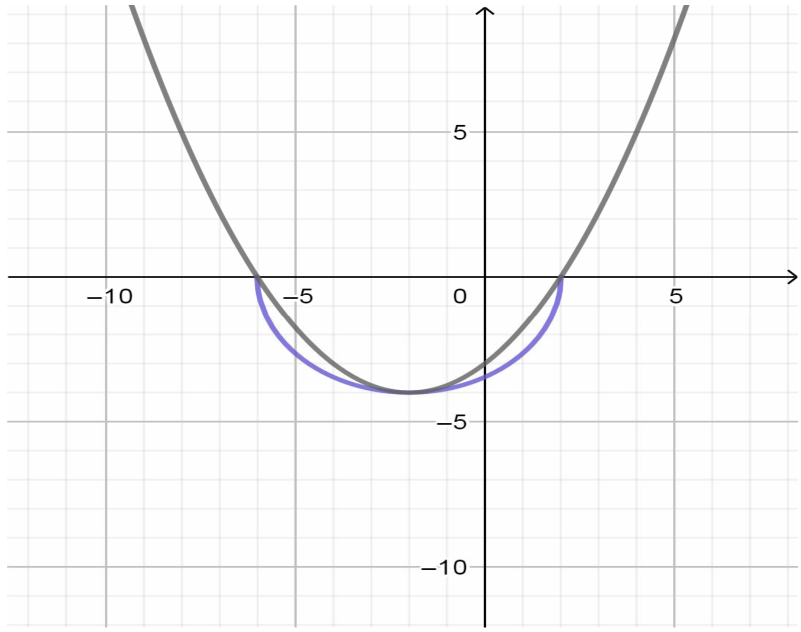
نعوض ونجمع مع قيمة التكامل السابق لنجد المساحة المطلوبة

ملاحظة التكامل الاخير كان يجب ان يكون بالاجزاء الا انني غيرت الطريقة

مثال(٣) اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنى كل من الاقترانات

التالية $\text{ن}(\text{س})=-\sqrt{١٢-\text{س}^{٢}-٤\text{س}}$ والاقتران

$$\text{ص}=\frac{١}{٤}\text{س}^{٢}+\text{س}-٣$$




$$\text{ص} = -\sqrt{١٢ - \text{س}^{٢} - ٤\text{س}} \Leftarrow \text{ص}^{٢} = ١٢ - \text{س}^{٢} - ٤\text{س} \Leftarrow \text{ص}^{٢} = -\left(\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤ - ٤\right) + ١٢$$

$$\text{ص}^{٢} = -(\text{س}+٢)^{٢} + ١٦ \Leftarrow \text{ص}^{٢} + (\text{س}+٢)^{٢} = ١٦$$

وهي معادلة دائرة اما الاقتران فهو نصف الدائرة الواقعة تحت محور السينات ومساحته

$$\frac{١٦\pi}{٢} = ٨\pi$$

$\text{ص} = \frac{١}{٤}\text{س}^{٢} + \text{س} - ٣$ قطع مكافئ

نجد نقط التقاطع وهي -٦ و ٢

المساحة المطلوبة

فرق مساحتين

لنجد مساحة القطع المكافئ مع محور السينات

$$\text{م} = -\int_{-٦}^{٢} \left(\frac{١}{٤}\text{س}^{٢} + \text{س} - ٣\right) ء\text{س} = -\left[\frac{\text{س}^{٣}}{١٢} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٣\text{س}\right]_{-٦}^{٢} =$$

$$-\left[\left(\frac{٢}{٣} - ٤\right) - (-١٨ + ١٨ + ١٨)\right] = ٢٢ - \frac{٢}{٣}$$

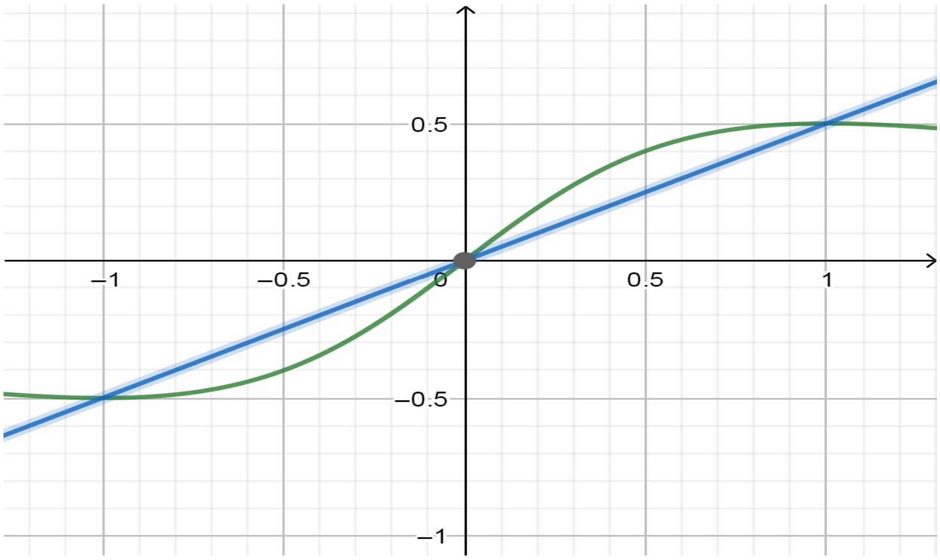
المساحة المطلوبة $٨\pi - ٢٢ + \frac{٢}{٣}$

السؤال السادس : قد يتكرم علينا ويعطي الرسم ويطلب حساب المساحة وهذا امر اسهل نسبيا

١- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنيات الاقترانات $\text{ص} = \frac{١}{٢}\text{س}$ ومنحنى الاقتران

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$ الموضح بالرسم

التقاطع $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$، $\text{ص} = \frac{١}{٢}\text{س}$، $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+١} = \frac{١}{٢}\text{س} \Leftarrow \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+١} - \frac{١}{٢}\text{س} = ٠$




$\text{س}\left(\frac{١}{\text{س}^{٢}+١} - \frac{١}{٢}\right) = ٠ \Leftrightarrow \text{س} = ٠ \vee \text{س} = ١ \vee \text{س} = -١$

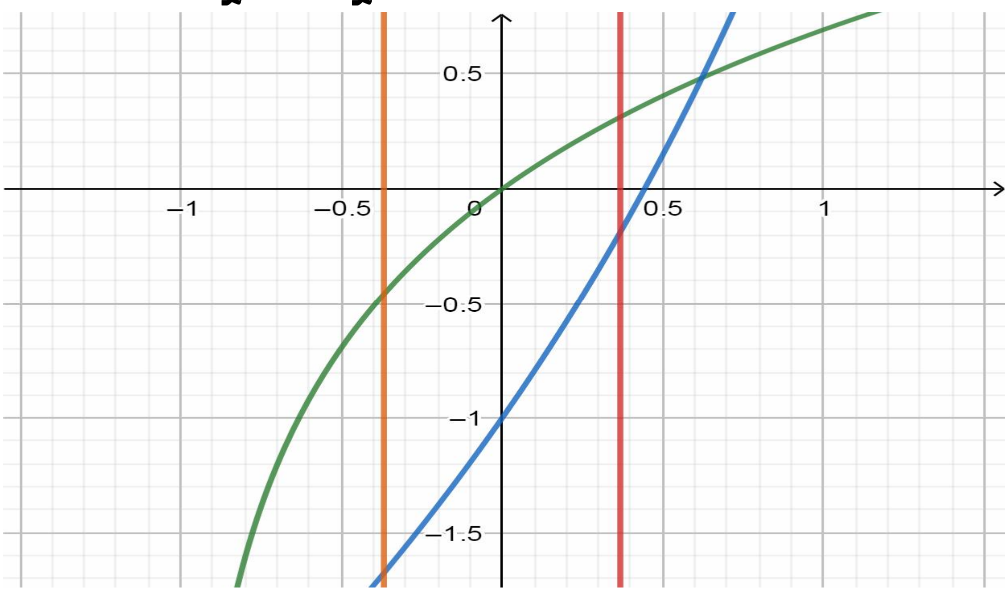
المساحة

$$\text{م} = \int_{-١}^{٠}\left(\frac{١}{٢}\text{س} - \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}\right)\text{ءس} + \int_{٠}^{١}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+١} - \frac{١}{٢}\text{س}\right)\text{ءس}$$

$$= \left[\frac{١}{٤}\text{س}^{٢} - \frac{١}{٢}\text{لو}(\text{س}^{٢}+١)\right]_{-١}^{٠} + \left[\frac{١}{٢}\text{لو}(\text{س}^{٢}+١) - \frac{١}{٤}\text{س}^{٢}\right]_{٠}^{١}$$

$$\left(٠ - \frac{١}{٤} + \frac{١}{٢}\text{لو}٢\right) + \left(\frac{١}{٢}\text{لو}٢ - \frac{١}{٤}\right) = \text{لو}٢ - \frac{١}{٢}$$

٢- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنيات الاقترانات $\text{ص} = \text{لو}(\text{س}+١)$ ومنحنى الاقتران $\text{ن}(\text{س}) = \text{س} + \text{هـ}^{\text{س}} - ٢$ والمستقيمين $\text{س} = \frac{-١}{\text{هـ}}$، $\text{س} = \frac{١}{\text{هـ}}$



$م = \int_{-\frac{١}{هـ}}^{\frac{١}{هـ}} \left(\text{لو}(س+١) - س - هـ^{س} + ٢\right) ءس =$

$= \left[(س+١)\text{لو}(س+١) - (س+١) - \frac{١}{٢}س^{٢} - هـ^{س} + ٢س\right]_{-\frac{١}{هـ}}^{\frac{١}{هـ}}$

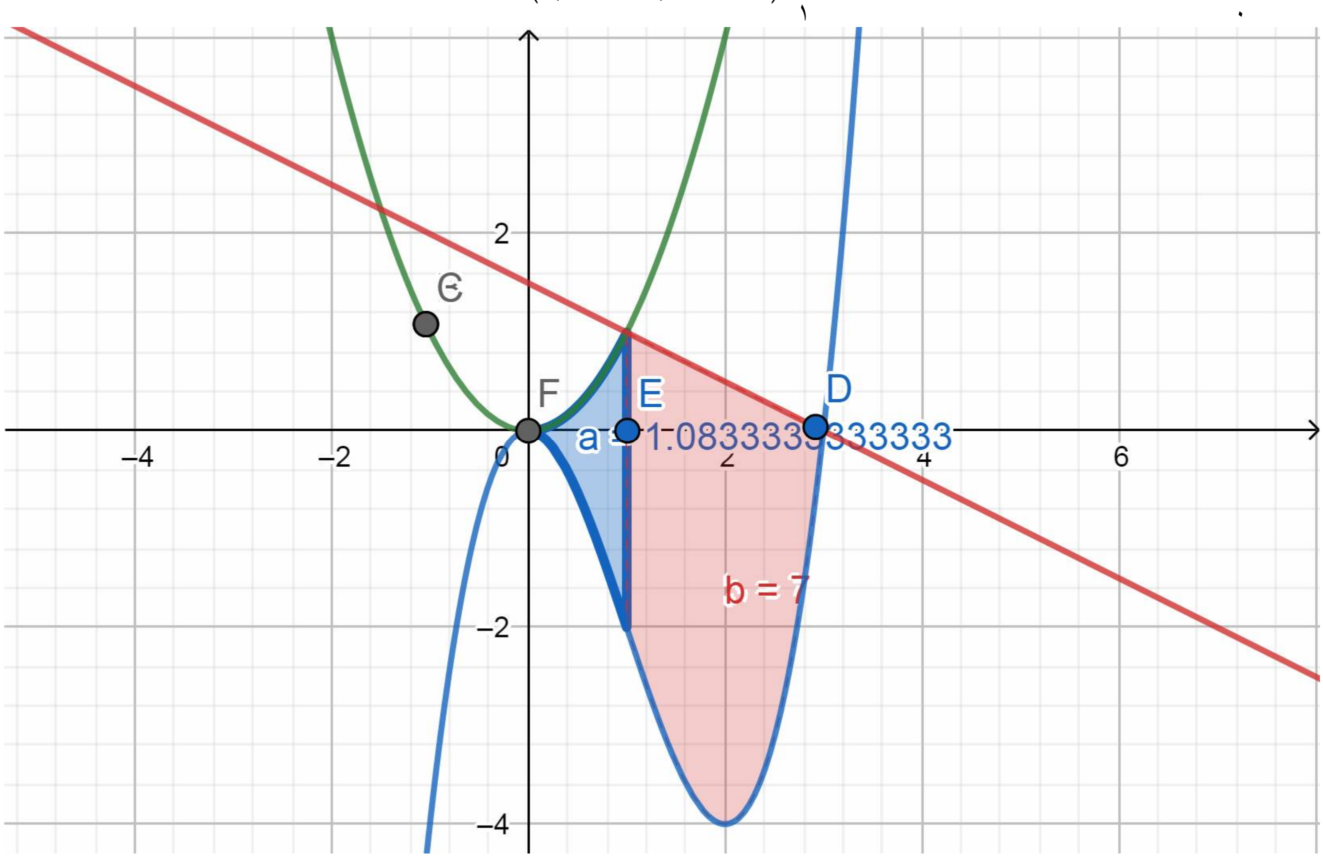
$= \left[\left(\frac{١}{هـ}+١\right)\text{لو}\left(\frac{١}{هـ}+١\right) - \left(\frac{١}{هـ}+١\right) - \frac{١}{٢}\frac{١}{هـ^{٢}} - هـ^{\frac{١}{هـ}} + \frac{٢}{هـ}\right]$

$- \left[\left(-\frac{١}{هـ}+١\right)\text{لو}\left(-\frac{١}{هـ}+١\right) - \left(-\frac{١}{هـ}+١\right) - \frac{١}{٢}\frac{١}{هـ^{٢}} - هـ^{\frac{١}{هـ}} + ٢\frac{١}{هـ}\right]$

٣- اوجد مساحة السطح المحصور بين منحنيات الاقترانات $ق(س) = س^{٢}$ ومنحنى الاقتران $٢ص + س - ٣ = ٠$ والمستقيمين $هـ(س) = س^{٣} - ٣س^{٢}$

$٢ص + س - ٣ = ٠ \Leftarrow ص = -\frac{١}{٢}س + \frac{٣}{٢}$

$م = \int_{٠}^{١} \left(س^{٢} - س^{٣} + ٣س^{٢}\right) ءس + \int_{١}^{٣} \left(س^{٢} + \frac{١}{٢}س - \frac{٣}{٢}\right) ءس$



$$م = \left(-\frac{س^{٤}}{٤} + \frac{٤س^{٣}}{٣}\right)\Big|_{٠}^{١} + \left(\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{١}{٤}س^{٢} - \frac{٣}{٢}س\right)\Big|_{١}^{٣}$$

$$= \left(-\frac{١}{٤} + \frac{٤}{٣}\right) + \left(٩ + \frac{٩}{٤} - \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٢}\right) =$$

مثال : جد قيمة التكامل $\int_{-٢}^{٤} ق(س)\,ءس$ اذا علمت ان مساحة السطح المظلل الواقع فوق محور السينات

يساوي ٨وحدات مربعة ومساحة السطح الواقع تحت محور السينات ٤وحدات مربعة حيث يمثل الخط المرسوم منحنى الاقتران ق(س)

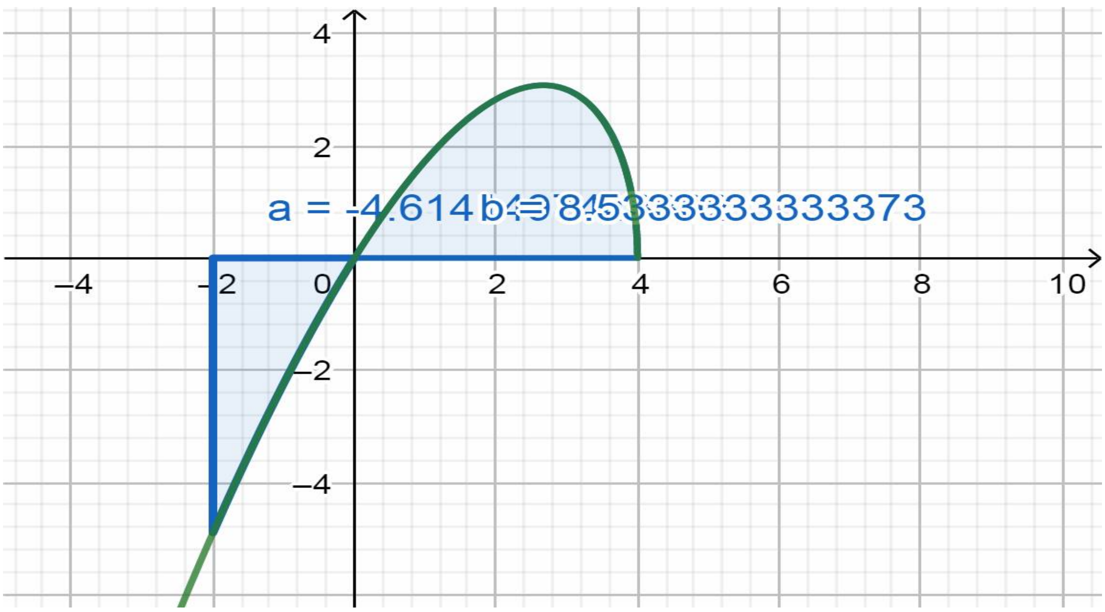
ثم جد $\int_{-٢}^{٤} |ق(س)|\,ءس$ وقيمة التكامل $\left|\int_{-٢}^{٤} ق(س)\,ءس\right|$ وقيمة التكامل $\int_{٤}^{-٢} ٢ق(س)\,ءس$

الحل

$$\int_{-٢}^{٤} ق(س)\,ءس = \int_{-٢}^{٠} ق(س)\,ءس + \int_{٠}^{٤} ق(س)\,ءس = -٤ + ٨ = ٤$$

$$\int_{-٢}^{٤} |ق(س)|\,ءس = -\int_{-٢}^{٠} ق(س)\,ءس + \int_{٠}^{٤} ق(س)\,ءس = +٤ + ٨ = ١٢$$

$$\left|\int_{-٢}^{٤} ق(س)\,ءس\right| = \left|\int_{-٢}^{٠} ق(س)\,ءس + \int_{٠}^{٤} ق(س)\,ءس\right| = |-٤ + ٨| = ٤$$



$$\int_{4}^{-2} ٢ق(س)\,ءس = -٢\int_{-2}^{4} ق(س)\,ءس = -٢\times٤ = -٨$$

وقيمة لتكامل $\int_{-1}^{5}\left(٣ق(س-١)+س\right)ءس$

$$\int_{-1}^{5}\left(٣ق(س-١)+س\right)ءس$$

$س-١ = ص، ءس = ءص$

$س = -١ \Leftarrow ص = -٢$

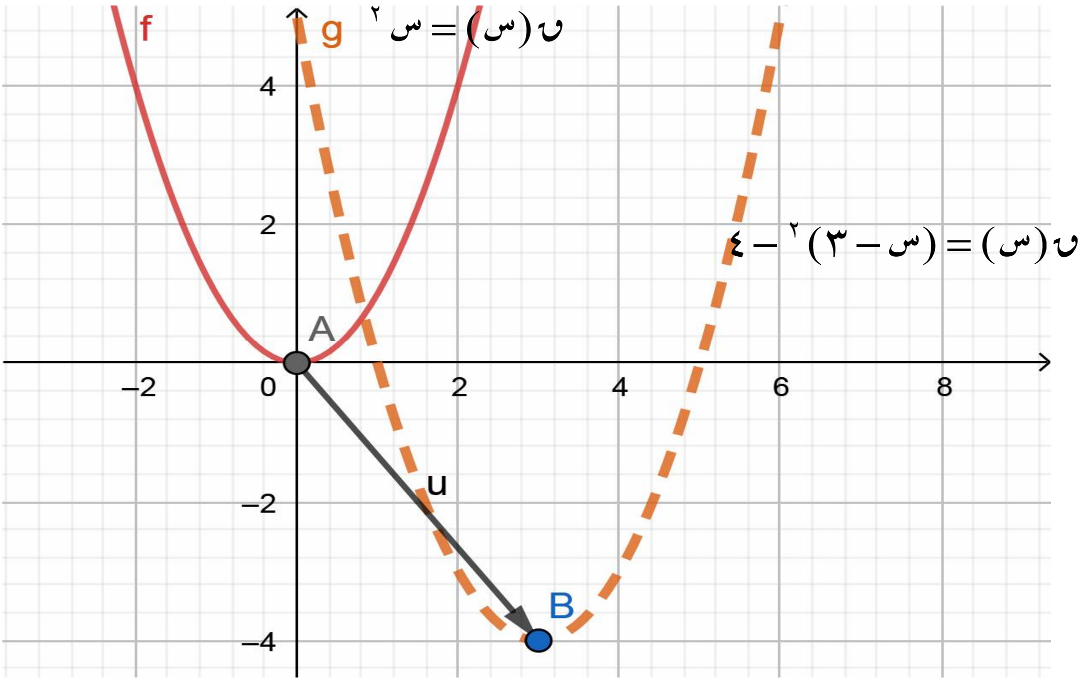
$س = ٥ \Leftarrow ص = ٤$

$$\int_{-1}^{5}\left(٣ق(س-١)+س\right)ءس = ٣\int_{-1}^{5} ق(س-١)\,ءس + \int_{-1}^{5} س\,ءس = ٣\int_{-2}^{4} ق(ص)\,ءص + \left[\frac{س^{2}}{٢}\right]_{-1}^{5}$$

$$= ٣\times٤ + [١٢] = ٢٤$$

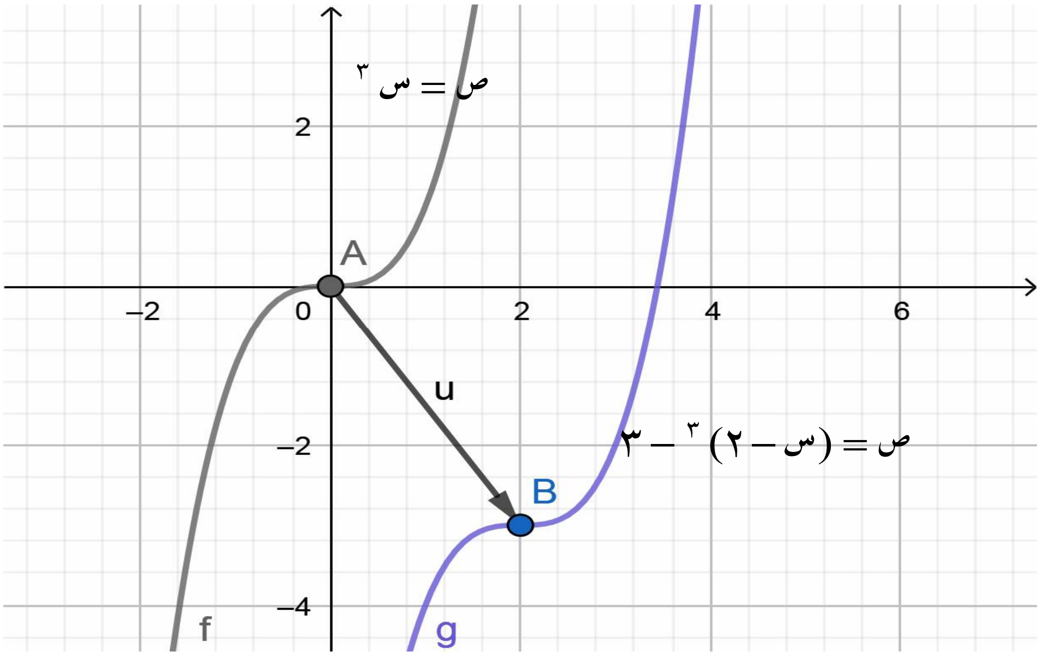
بعد أن أنهيت تذكرت أن الخطوط البيانية والمساحات قد ضللت بشكل غامق وهذا يستهلك حبر كثير أثناء التصوير لذلك اعتذر منكم جميعا وإنشاء الله سأخذ هذه الملاحظة بالاعتبار في المرات القادمة

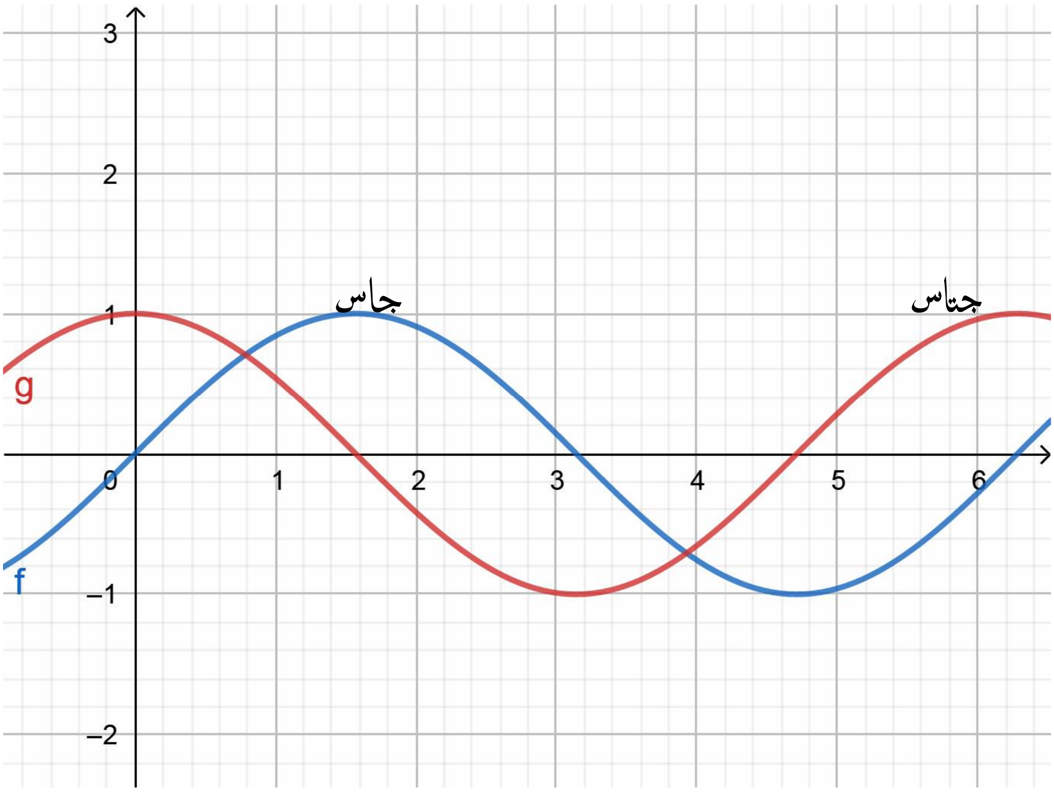
بعض الخطوط الشهيرة للاقترانات

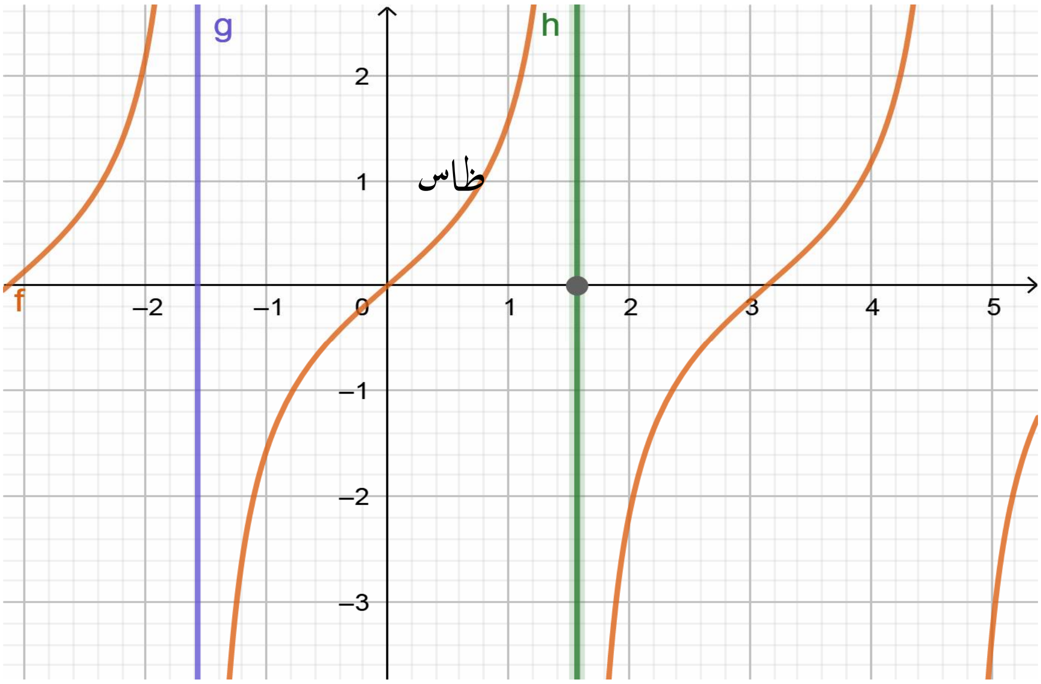


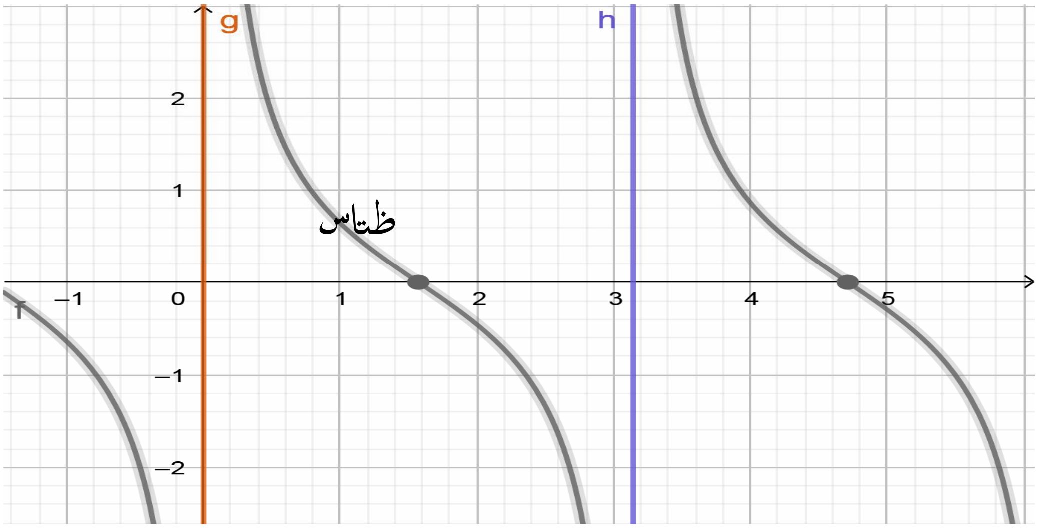

استنتاج قطع مكافئ من المعادلة التربيعية $ق(س) = س^{2}$ نكتب المعادلة بالشكل

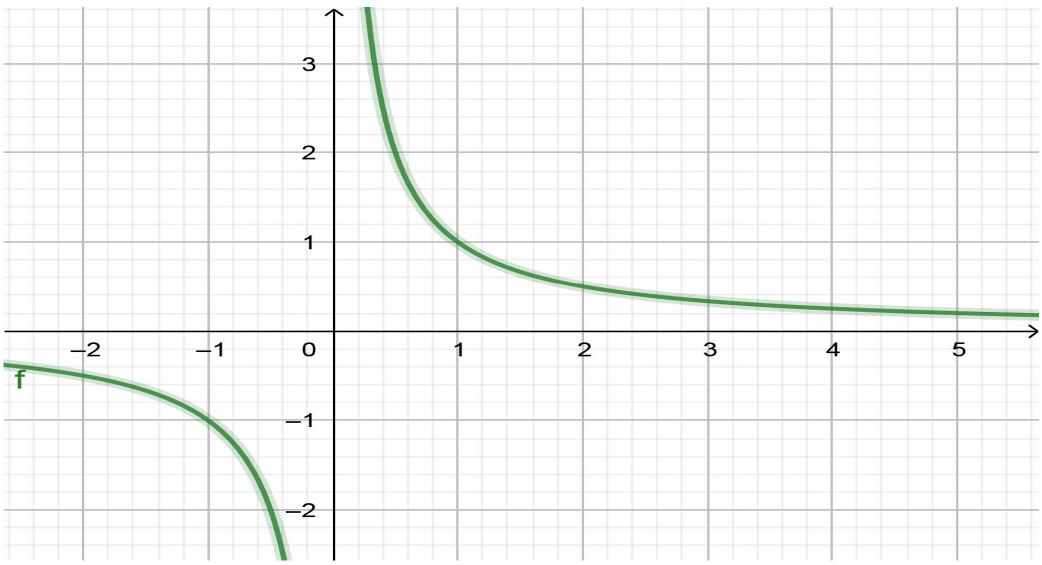
ل(س) = (س – ى) ^٢^ + هـ ينتج الخط البياني لهذا الاقتران بانسحاب وفق المتجه
ش←(ى،هـ)
الخط البياني
ص = س ^٣^



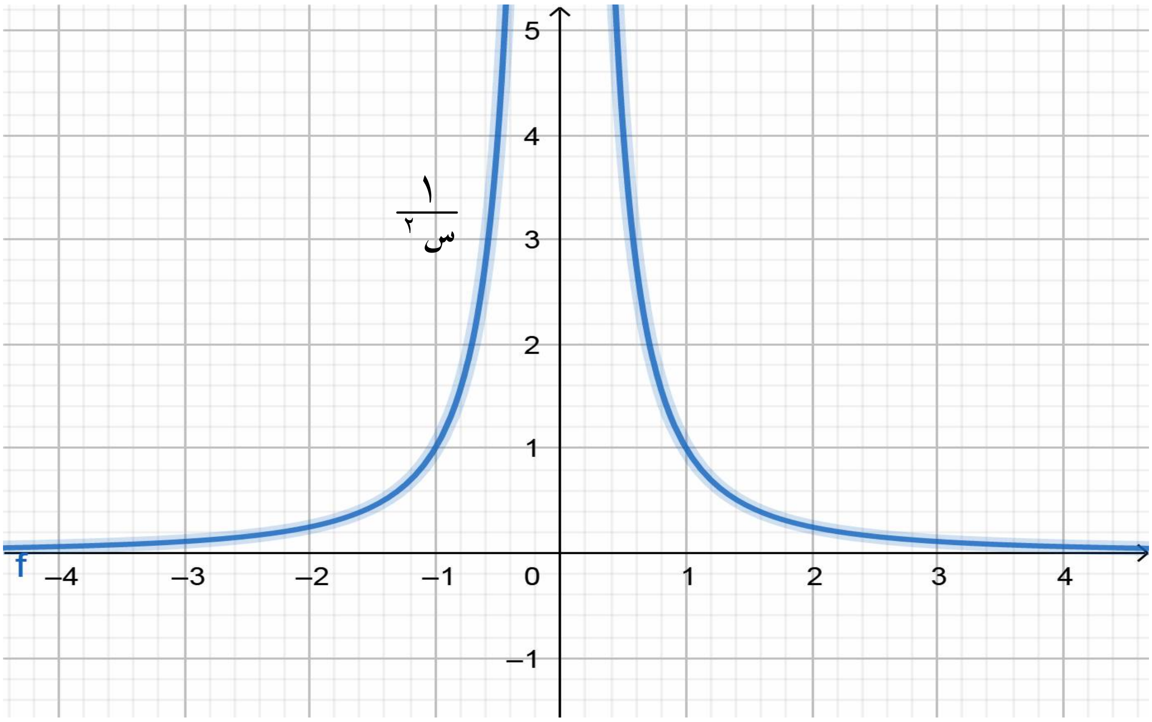





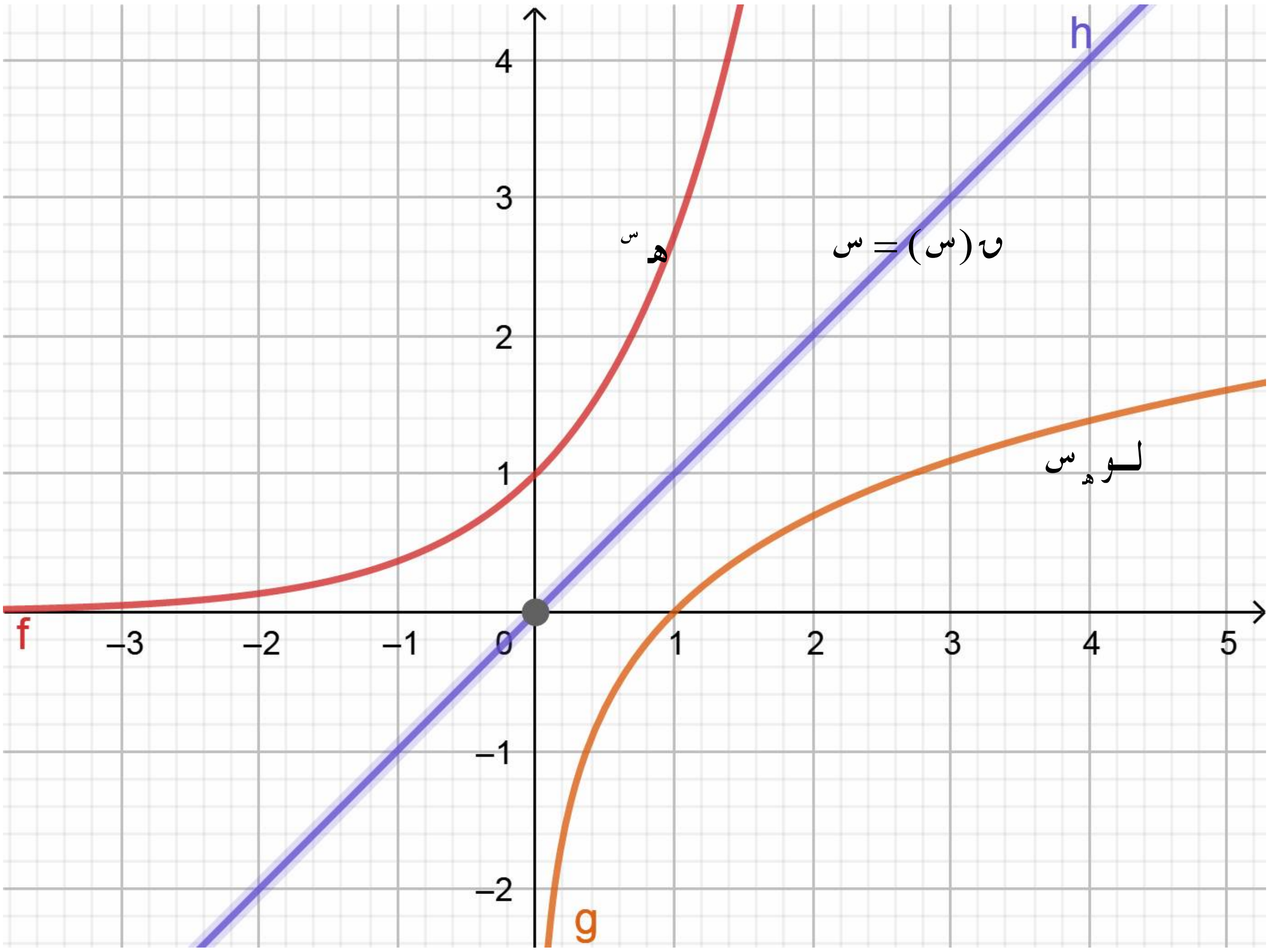



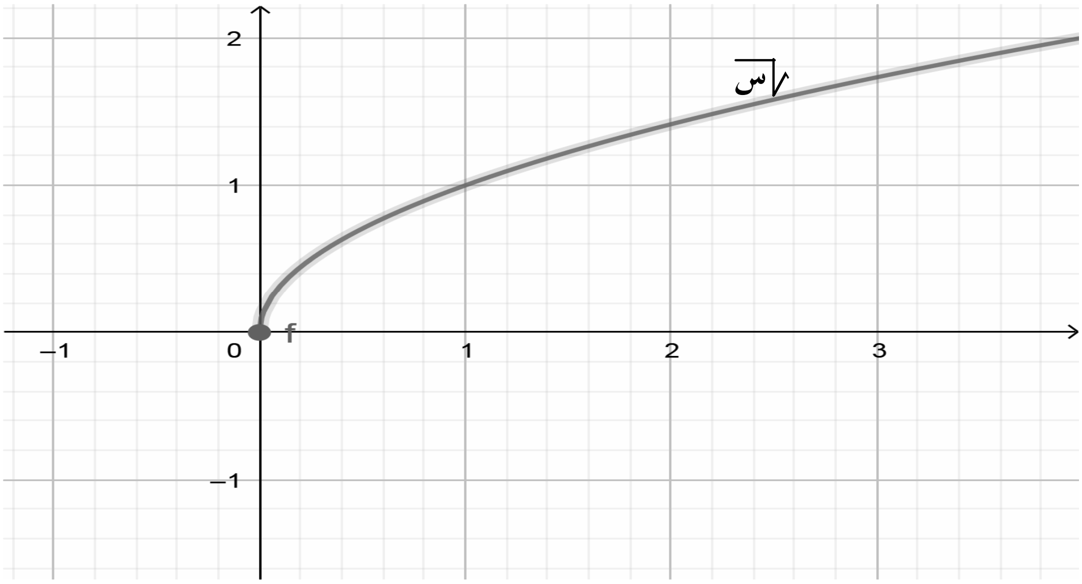

$\frac{١}{س}$



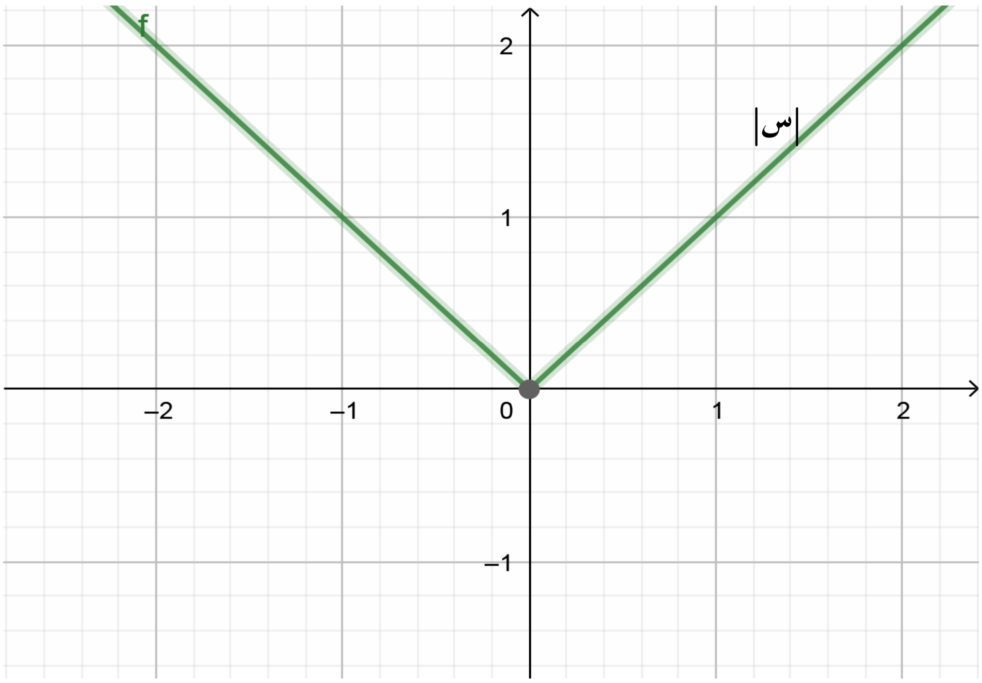
١
س٢
f
5
4
3
2
1
−1
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

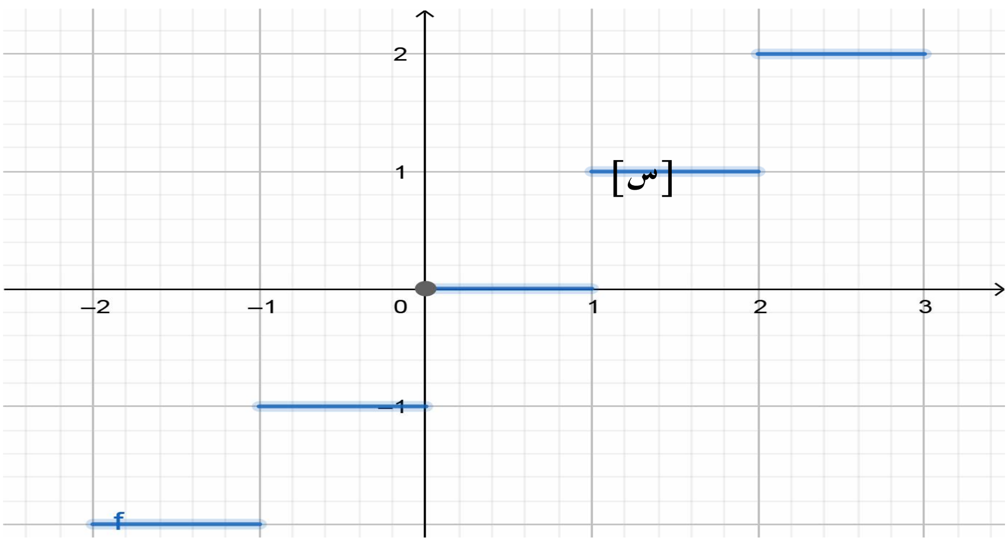
h
هـس
ن(س) = س
لـوهس
f
g
4
3
2
1
−1
−2
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5



√س
f

|س|
f

[س]
f