معكوس المشتقة

إذا كان

$$\text{ص} = \int \text{هـ(س)}\ \text{دس}$$

فإن

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ(س)}$$

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \text{هـ}'\text{(س)}$$

$$\frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{دس}^3} = \text{هـ}''\text{(س)} \qquad \text{وهكذا} \ldots.$$

وبصيغة أخرى

إذا كان

$$\text{ق(س)} = \int \text{هـ(س)}\ \text{دس}$$

فإن

$$\text{ق}'\text{(س)} = \text{هـ(س)}$$

$$\text{ق}''\text{(س)} = \text{هـ}'\text{(س)}$$

$$\text{ق}'''\text{(س)} = \text{هـ}''\text{(س)} \qquad \text{وهكذا} \ldots$$

مثال

إذا كان

$$\text{ص} = \int \sqrt[5]{3\text{س}^2 - 4\text{س} + 12}\ \text{دس}$$

فجد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=-2}$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt[5]{3\text{س}^2 - 4\text{س} + 12}$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=-2} = \sqrt[5]{3\times 4 - 4\times -2 + 12}$$

$$= \sqrt[5]{12 + 8 + 12} = \sqrt[5]{32} = 2$$

* $\frac{د}{دس}$ ($\int$ ق(س) دس) = ق(س)

أو مشتقة $\int$ ق(س) دس = ق(س)

* إذا كان

$\int$ ق(س) دس = هـ(س)

فإن

ق(س) = هـَ(س)

قَ(س) = هـً(س)

قً(س) = هـ‴(س) وهكذا

مثال

إذا كان

$\int$ ق(س) دس = س^{٢} ـ جتاس + ٢

فجد ق(س) ، قَ(س)

الحل:

ق(س) = ٢س + جاس

قَ(س) = ٢ + جتاس

مثال

إذا كان

$\int$ ق(س) دس = س^{٣} ـ س^{٢} + ٢س + ١

فجد قَ(−٣) .

الحل:

ق(س) = ٣س^{٢} ـ ٢س + ٢

قَ(س) = ٦س ـ ٢

قَ(−٣) = ٦×−٣ ـ ٢

= −١٨ ـ ٢ = −٢٠

مثال

إذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله وكان

$\int$ ق(س) جا $\frac{٣\pi}{٢}$ دس = ١ + س^{٣}

فجد ق(س) .

الحل:

$\int$ ق(س) × −١ دس = ١ + س^{٣}

⟸ ـ ق(س) = ٣س^{٢}

ق(س) = −٣س^{٢}

مثال + ٢٠١٢ شتوي

إذا كان ق اقتراناً متصلاً على ح وكان

$\int$ (ق(س) + ٢) دس = س^{٣} + ب س^{٢} + ٩

وكان ق(١) = ٧ فجد قيمة الثابت ب

الحل:

ق(س) + ٢ = ٣س^{٢} + ٢ب س

ق(١) + ٢ = ٣ + ٢ب

٧ + ٢ = ٣ + ٢ب

٩ ـ ٣ = ٢ب

٦ = ٢ب ⟸ ب = ٣

مثال

إذا كان

∫ ق(س) دس = جاس − جتاس + ٣

فأثبت أن

ق($\frac{\pi}{2}$) − قَ($\frac{\pi}{2}$) = ٢

الحل:

ق(س) = جتاس + جاس

← ق($\frac{\pi}{2}$) = جتا$\frac{\pi}{2}$ + جا$\frac{\pi}{2}$

= ٠ + ١ = ١

قَ(س) = − جاس + جتاس

← قَ($\frac{\pi}{2}$) = − جا$\frac{\pi}{2}$ + جتا$\frac{\pi}{2}$

= − ١ + صفر = − ١

←

ق($\frac{\pi}{2}$) − قَ($\frac{\pi}{2}$) = ١ − (−١) = ١+١ = ٢

٢٠٠٨ شتوي

إذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله وكان

∫ ق(س) دس = جتا²س − ٢س + جـ

فإن قَ($\frac{\pi}{2}$)

أ) ٢ ب) صفر ج) −٢ د) ٣ − π

الحل:

ق(س) = −٢جتاس جاس − ٢

ق(س) = − جا٢س − ٢

قَ(س) = − جتا٢س × ٢

قَ($\frac{\pi}{2}$) = − جتا π × ٢

= −١ × ٢ = −٢

٢٠٠٨ صيفي

إذا كان ق اقتراناً متصلاً على ح وكان

∫ ق(س) دس = س² − جتاس + ٢

فإن قَ(٠) =

أ) ٣ ب) ٢ ج) ١ د) صفر

الحل:

ق(س) = ٢س + جاس

قَ(س) = ٢ + جتاس

قَ(٠) = ٢ + جتا٠

= ٢ + ١ = ٣

٢٠٠٩ شتوي

إذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله وكان

∫ (ظا²س − قا²س) ق(س) دس = ٣ − س²

فإن ق(س) =

أ) −٢س ب) ٣ − س²

ج) ٢س د) س² − ٣

الحل:

ظا²س − قا²س = −١

∫ − ق(س) دس = ٣ − س²

− ق(س) = −٢س

← ق(س) = ٢س

رياضيات (العلمي) الوحدة (التكامل وتطبيقاته)	عصام محمد الشيخ
الفصل (الثاني) العنوان (معكوس المشتقة)	ماجستير رياضيات

٢٠١٠ شتوي

إذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله وكان

$\int$ جا$(\frac{3\pi}{2})$ ق(س) دس = ١ + س²

فإن ق(س) =

أ) ٢س   ب) ١ + س²

ج) $\boxed{-٢س}$ د) -١ - س²

الحل:

$\int$ -١ ق(س) دس = ١ + س²

⟸ -ق(س) = ٢س

ق(س) = -٢س

٢٠١٣ صيفي

إذا كان

$\int$ ق(س) دس = س² + ٤س - ٤

فإن

قَ(٢) تساوي

$\boxed{٢}$ ٤   ٨ $\frac{٥٦}{٣}$

الحل:

ق(س) = ٢س + ٤

قَ(س) = ٢

قَ(٢) = ٢

٢٠١٨ شتوي قديم

إذا كان

$\int$ (ق(س) - ١) دس = س جا$(\frac{\pi}{2}$ س$)$

فإن

ق(٢) تساوي

أ) $\boxed{1-\pi}$ ب) $1+\pi$

ج) $-\pi$ د) ٣

الحل:

ق(س) - ١ = س جتا$\frac{\pi}{2}$س × $\frac{\pi}{2}$ + جا$\frac{\pi}{2}$س × ١

ق(٢) - ١ = $\cancel{٢}$ جتاπ × $\frac{\pi}{\cancel{2}}$ + جاπ × ١

ق(٢) = ١ + جتاπ × π + جاπ

= ١ + -١ × π + ٠

= ١ - π

*

إذا كان

∫ قَ(س) دس = هـ(س)

فإن

قَ(س) = هـَ(س)

قً(س) = هـً(س)

قَّ(س) = هـَّ(س) وهكذا.

مثال

إذا كان

∫ قَ(س) دس = جا²س − أ جتاس + ١

وكان قَ($\frac{\pi}{4}$) = صفر فجد قيمة الثابت أ

الحل:

قَ(س) = ٢جاس جتاس + أ جاس

= جا٢س + أ جاس

قَ($\frac{\pi}{4}$) = جا $\frac{\pi}{2}$ + أ جا $\frac{\pi}{4}$

٠ = ١ + أ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$

−١ = $\frac{أ}{\sqrt{2}}$

⟸ أ = −$\sqrt{2}$

٢٠١٦ صيفي

إذا كان

∫ ٢ قَ(س) دس = ٢س + جاس − ∫ جتاس قَ(س) دس

فجد قَ(٠)

الحل:

٢قَ(س) = ٢ + جتاس − جتاس قَ(س)

٢قَ(٠) = ٢ + جتا٠ − جتا٠ × قَ(٠)

٢قَ(٠) = ٢ + ١ − ١ × قَ(٠)

٢قَ(٠) = ٣ − قَ(٠)

٢قَ(٠) + قَ(٠) = ٣

٣قَ(٠) = ٣

⟸ قَ(٠) = ١

٢٠١٧ شتوي

إذا كان

س ق(س) − ∫ ٣س ق(س) دس = ∫ قَ(س) دس

وكان ق(٢) = ٤ فجد قَ(٢)

الحل:

س قَ(س) + ق(س) × ١ − ٣س ق(س) = قَ(س)

٢قَ(٢) + ق(٢) − ٦ ق(٢) = قَ(٢)

٢قَ(٢) + ٤ − ٦ × ٤ = قَ(٢)

٢قَ(٢) + ٤ − ٢٤ = قَ(٢)

٢قَ(٢) − قَ(٢) = ٢٠

قَ(٢) = ٢٠

٢٠١٨ شتوي جديد

إذا كان

∫ (قَ(س) + س) دس = س³ + ك س² + ١

وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (١،٣) يساوي ٥ فإن قيمة ك

أ) ١　　ب) ٦و٠　　ج) $\boxed{١و٥}$　　د) ٥و٤

الحل:

قَ(س) + س = ٣س² + ٢ك س

لكن قَ(١) = ٥

قَ(١) + ١ = ٣ × ١² + ٢ × ك × ١

٥ + ١ = ٣ + ٢ك

٦ = ٣ + ٢ك

٦ - ٣ = ٢ك

٣ = ٢ك

⇐ ك = $\frac{٣}{٢}$ = ١,٥

٢٠١٨ صيفي جديد

إذا كان

$\int$ ق(س) دس = جتاس - ٢جاس

فإن قيمة $\frac{\text{ق}(\frac{\pi}{4})}{\text{ق}'(\frac{\pi}{4})}$ تساوي

أ) ٣ ب) $-\frac{1}{3}$ ج) ١ $\boxed{\text{د) } -3}$

الحل:

ق(س) = -جاس - ٢جتاس

⇐ ق($\frac{\pi}{4}$) = - جا$\frac{\pi}{4}$ - ٢ جتا$\frac{\pi}{4}$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{-3}{\sqrt{2}}$

ق'(س) = - جتاس + ٢جاس

ق'($\frac{\pi}{4}$) = - جتا$\frac{\pi}{4}$ + ٢ جا$\frac{\pi}{4}$

$= \frac{-1}{\sqrt{2}} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

⇐ $\frac{\text{ق}(\frac{\pi}{4})}{\text{ق}'(\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{-3}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{1}$

$= -3$

تعريف

إذا كان ق اقتراناً متصلاً على الفترة $[\text{أ}، \text{ب}]$ فإن

م(س) يسمى معكوساً للمشتقة للاقتران ق(س)

إذا كان

$$\text{م}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$$

لكل $\text{س} \in (\text{أ}، \text{ب})$

مثال

بين أن الاقتران $\text{م}(\text{س}) = \text{س}^5 + 4\text{س}^2 + 3$ هو معكوس لمشتقة الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = 5\text{س}^4 + 8\text{س}$

الحل:

$$\text{م}'(\text{س}) = 5\text{س}^4 + 8\text{س}$$

$$= \text{ق}(\text{س})$$

← م معكوس المشتقة لـ ق(س)

مثال

بين أن الاقتران $\text{م}(\text{س}) = \text{س}^4 - \text{جاس} - \frac{1}{3}$ هو معكوس لمشتقة الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = 4\text{س}^3 - \text{جتاس}$

الحل:

$$\text{م}'(\text{س}) = 4\text{س}^3 - \text{جتاس}$$

$$= \text{ق}(\text{س})$$

← م معكوس المشتقة لـ ق(س)

مثال

بين أن الاقتران $\text{م}(\text{س}) = \text{جا}^2\text{س}$ هو معكوس لمشتقة الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}2\text{س}$

الحل:

$$\text{م}'(\text{س}) = 2\ \text{جاس}\ \text{جتاس}$$

$$= \text{جا}2\text{س}$$

$$= \text{ق}(\text{س})$$

← م(س) معكوس المشتقة للاقتران ق(س)

مثال

بين أن الاقتران $\text{م}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+1}$ هو معكوس المشتقة للاقتران

$$\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}+1)^{-2} \qquad \text{س} \neq -1$$

الحل:

$$\text{م}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}+1)(1) - (\text{س})(1)}{(\text{س}+1)^2}$$

$$= \frac{\text{س}+1 - \text{س}}{(\text{س}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(\text{س}+1)^2}$$

$$= (\text{س}+1)^{-2}$$

$$= \text{ق}(\text{س})$$

← م(س) معكوس المشتقة لـ ق(س)

رياضيات (العلمي) الوحدة (التكامل وتطبيقاته) عصام محمد الشيخ

الفصل (الثاني) العنوان (معكوس المشتقة) ماجستير رياضيات

مثال

إذا كان م(س) = $\text{س}^3 + 5\text{س}^2 - 3\text{س} + \text{جـ}$ معكوساً لمشتقة الاقتران ق فجد ق(-٢)

الحل:

ق(-٢) = م′(-٢)

$\text{م}'(\text{س}) = 3\text{س}^2 + 10\text{س} - 3$

$\text{م}'(-2) = 3\times 4 + 10\times -2 - 3$

$= 12 - 20 - 3$

$= -8 - 3 = -11$

$\Leftarrow$ ق(-٢) = -١١

مثال

إذا كان م(س) = $2\text{س}^4 + \sqrt{\text{س}^2+3}$ معكوساً لمشتقة الاقتران ق فجد ق(١)

الحل:

ق(١) = م′(١)

$$\text{م}'(\text{س}) = 8\text{س}^3 + \frac{2\text{س}}{2\sqrt{\text{س}^2+3}}$$

$$\text{م}'(1) = 8 + \frac{2}{2\sqrt{1+3}}$$

$$= 8 + \frac{2}{2\times 2}$$

$$= 8 + \frac{2}{4}$$

$$= 8 + \frac{1}{2}$$

$$= 8\tfrac{1}{2}$$

مثال

إذا كان م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران ق حيث

ق(س) = ظتاس + ١

فجد م″$(\frac{\pi}{4})$

الحل:

م′(س) = ق(س)

$\Leftarrow$ م″(س) = ق′(س)

$\Leftarrow$ ق′(س) = - قتا^2 س

م″$(\frac{\pi}{4})$ = - قتا^2 $\frac{\pi}{4}$ = -٢

مثال

إذا كان الاقترانان م(س)، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) وكان

ل(س) = ٣ م(س) - ٥ هـ(س)

فجد ل′(س) بدلالة ق(س)

الحل:

ل′(س) = ٣ م′(س) - ٥ هـ′(س)

= ٣ ق(س) - ٥ ق(س)

$\Leftarrow$ ل′(س) = -٢ ق(س)

٢٠١١ شتوي

إذا كان م(س)، هـ(س) اقترانان بدائيان للاقتران المتصل ق(س) فإن

(٢م - هـ)′(س) =

أ) $\boxed{\text{ق(س)}}$ ب) ق′(س) ج) صفر د) ٢

الحل:

٢ م َ(س) ـ هـَ(س)

= ٢ هـ(س) ـ هـ(س) = هـ(س)

٢٠١٣ شتوي

إذا كان م(س) اقتران بدائي لـ هـ(س) بحيث م(س) = ظتاس + ١ فإن هـ($\frac{\pi}{4}$) =

أ) -٤ $\boxed{\text{ب) -٢}}$ جـ) ٢ د) ٤

الحل:

م َ(س) = ـ قتا ٢ س

هـ(س) = ـ قتا ٢ س

هـ($\frac{\pi}{4}$) = ـ قتا ٢ $\frac{\pi}{4}$

= ـ ٢

رياضيات (العلمي) الوحدة (التكامل وتطبيقاته)	عصام محمد الشيخ
الفصل (الثاني) العنوان (معكوس المشتقة)	ماجستير رياضيات

ملاحظة (١)

للاقتران ق يوجد أكثر من معكوس للمشتقة كما يلي

$ق(س) = ٣ س^٢$

$م_١(س) = س^٣$

$م_٢(س) = س^٣ + ٥$

$م_٣(س) = س^٣ - ٥$

$م_٤(س) = س^٣ + جـ$

ملاحظة (٢)

الفرق بين أي معكوسين لمشتقة اقتران معين يساوي عدداً ثابتاً.

مثال

إذا كان الاقترانان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) وكان

$ل(س) = م(س) - هـ(س)$

فجد $ل'(٤)$

الحل:

$ل(س) = م(س) - هـ(س)$

$= جـ$

$\Leftarrow ل'(س) = صفر$

$\Leftarrow ل'(٤) = صفر$

مثال

إذا كان الاقترانان $م_١(س)$ ، $م_٢(س)$ معكوسين لمشتقة الاقتران ق وكان

$م_١(س) = ٣س^٢ - ٢س + ٥$

وكان $م_٢(٢) = ٤$

فجد قاعدة $م_٢(س)$

الحل:

$م_٢(س) = ٣س^٢ - ٢س + جـ$

$م_٢(٢) = ٣ \times ٤ - ٢ \times ٢ + جـ$

$٤ = ١٢ - ٤ + جـ$

$٤ = ٨ + جـ$

$\Leftarrow جـ = ٤ - ٨ = -٤$

$\Leftarrow م_٢(س) = ٣س^٢ - ٢س - ٤$

٢٠١٠ صيفي

إذا كانت ل ، م ، هـ ثلاثة اقترانات متصلة بحيث

ل َ(س) = م(س) ، مَ(س) = هـ(س)

فأي العبارات الآتية صحيحة

أ) $\int$ لً(س) دس = هـ(س) + جـ

$\boxed{\text{ب)}}$ $\int$ هـ(س) دس = لَ(س) + جـ

جـ) $\int$ ل(س) دس = م(س) + جـ

د) ل(س) ـ هـ(س) = جـ