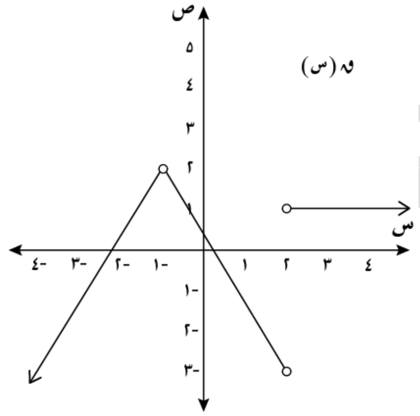
الوحدة الأولى : النهايات والاتصال :

مثال (١) :

اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) ، فجد قيمة كل مما يأتي :



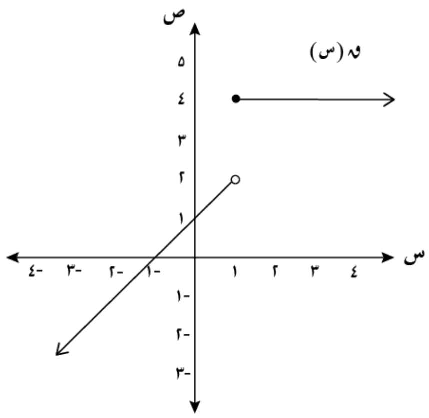
١) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}}$ ق(س) =

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) =

٣) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) =

مثال (٢) :

اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) ، فجد قيمة كل مما يأتي :



١) قيمة الثابت (أ) ، حيث $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = -١

٢) قيمة الثابت (ب) ، حيث $\underset{س \to ب}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٠

٣) الثابت (جـ) ، حيث $\underset{س \to جـ}{\text{نهـا}}$ ق(س) غير موجودة

مثال (٣) :

بالاعتماد على الجدول التالي ، جد $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س)

(س)	٢,٩	٢,٩٩		٣,٠١	٣,١
ق(س)	٧,١	٧,٠١		٥,٩٩	٥,٩

الحل :

مثال (٤) :

اذا علمت ان $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٥ ، $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ٧ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

١) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ (٤ق(س) + هـ(س))

الحل :

مثال (٥) :

اذا كانت $\lim_{س \to ٤} ٢ق(س) = ١٠$ ، $\lim_{س \to ٤} ٢هـ(س) + س^٢ = ٢٠$ ، فجد :

$\lim_{س \to ٤} (٢ق(س) + ٣هـ(س) + ٥س - ٤)$

الحل :

مثال (٦) :

اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٥س + ١ & ، س < ٢ \\ س^٢ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

جد قيمة كل مما يلي :

أ) ق(٢) =

ب) $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

ج) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

د) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

مثال (٧) :

اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٧س + ٢ & ، س \neq ٤ \\ ٩ & ، س = ٤ \end{cases}$

جد قيمة كل مما يلي :

أ) ق(٤) =

ب) $\lim_{س \to ٤}$ ق(س)

ج) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

مثال (٨) :

١٦) اذا كان ق(س) = $\begin{cases} س + ٦ & ، س \in ص \\ ٤س + ١ & ، س \notin ص \end{cases}$

حيث (ص) مجموعة الاعداد الصحيحة ، فجد:

١) $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

٢) $\lim_{س \to \frac{١}{٢}}$ ق(س)

٣) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

مثال (٩) :

١) اذا كانت $\lim_{س \to ٢} (مس - ١) = ٩$ ، فجد قيمة (م)

الحل :

٢) اذا كانت $\lim\limits_{س \to 1} \sqrt[3]{س^{2} - ج} = 16$ ، فجد (جـ)

الحل :

---

٣) اذا كـــان $ق(س) = \begin{cases} جس + 4 & ، \ س < 2 \\ 6 - س^{2} & ، \ س \geq 2 \end{cases}$

فجد قيمة الثابت (جـ) اذا كانت $\lim\limits_{س \to 2} ق(س)$ موجودة

الحل :

---

٤) اذا كـــان $ق(س) = \begin{cases} 7س^{2} - أ & ، \ س < 1 \\ 1 + 2أ & ، \ س \geq 1 \end{cases}$

فجد قيمة الثابت (أ) اذا كانت $\lim\limits_{س \to 1} ق(س)$ موجودة

الحل :

---

٥) اذا كـــان $ق(س) = \begin{cases} 25أس - 20 & ، \ س > 1 \\ 20 & ، \ س = 1 \\ 6س + 24 & ، \ س < 1 \end{cases}$

فجد قيمة (أ) التي تجعل $\lim\limits_{س \to 1} ق(س)$ موجودة

الحل :

---

٦) اذا كـــان $ق(س) = \begin{cases} 6س - 4 & ، \ س > أ \\ 4س + 12 & ، \ س < أ \end{cases}$

فجد قيمة الثابت (أ) اذا كانت $\lim\limits_{س \to أ} ق(س)$ موجودة

الحل :

---

٧) اذا كـــان $ق(س) = \begin{cases} أس + ب & ، \ س > 2 \\ أس^{2} + 4 & ، \ س < 2 \end{cases}$

وكانـــــــت $\lim\limits_{س \to 2} ق(س) = 24$ موجـــــــودة ،

فجد قيم (أ ، ب)

الحل :

مثال (١٠) :

جد قيمة كل من النهايات الآتية :

١) $\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{س^{٢} - ٩}{٢س - ٦}$

٢) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{٥س^{٢} - ١٠س}{٣س^{٢} - ٦س}$

٣) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س^{٢} + ٣س - ١٠}{س^{٢} + س - ٦}$

٤) $\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{س^{٣} - ٩س}{٣س - س^{٢}}$

٥) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{(س + ٢)^{٢} - ٩}{س - ١}$

٦) $\lim\limits_{س \to -٢} \dfrac{س^{٣} + ٥س^{٢} + ٦س}{س^{٢} - ٤}$

٧) اذا كانـــــت $ق(س) = س$ ، احســـــب

$$\lim\limits_{س \to -٣} \dfrac{ق^{٢}(س) - ق(٩)}{س + ٣}$$

٨) $\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{\dfrac{١}{٣س - ٥} - \dfrac{١}{٤}}{٣ - س}$

٩) $\lim\limits_{س \to -١} \dfrac{\dfrac{١}{س + ٢} - \dfrac{٣}{س + ٤}}{س + ١}$

١٠) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{٤ - \sqrt{\text{س}^{٢} - ٩}}{\text{س}^{٢} - ٢٥}$

١١) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٢ - \text{س}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{س}^{٢} - ١}$

١٢) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{٤ - \text{س}}{٣ - \sqrt{\text{س} + ٥}}$

مثال (١١) :

ابحث الاتصال في كل من الاقترانات التالية :

١) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ٤ & ، \ \text{س} \geq ١ \\ ٣\text{س} + ٣ & ، \ \text{س} < ١ \end{cases}$ عند س = ١

الحل :

٢) $\text{ع}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} & ، \ \text{س} \neq ٣ \\ ٥\text{س} - ٩ & ، \ \text{س} = ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

الحل :

مثال (١٢) :

١) اذا كـــان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} + ٢\text{س} & ، \ \text{س} \leq -٢ \\ ٣\text{س} + ٢\text{أ} & ، \ \text{س} > -٢ \end{cases}$

فجد قيمة (أ) التي تجعل الاقتران متصلا عند س = ٢

الحل :

٢) اذا كـــان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٣\text{س} - ١٢}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤} & ، \ \text{س} \neq ٤ \\ \text{م} & ، \ \text{س} = ٤ \end{cases}$

جد قيمة (م) التي تجعل ق(س) متصلا عند س = ٤

الحل :

٣) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} أس^٢ + ب & ، س < ٢ \\ ١٣ & ، س = ٢ \\ ٣أس + ١ & ، س > ٢ \end{cases}$

وكان ق(س) متصل عند س = ٣ ، فما قيمة أ ، ب

الحل :

٤) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢أس + ب & ، س < ٢ \\ ٨ & ، س = ٢ \\ أس^٢ + ٣بس & ، س > ٢ \end{cases}$

وكان ق(س) متصلا عند س = ٢ ، فما قيم أ ، ب

الحل :

مثال (١٣) :

١) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س < ٢ \\ ٢س & ، س \geq ٢ \end{cases}$

وكان هـ(س) = $س^٢ + ٥س$ ابحث في اتصال ق + هـ عند س = ٢

الحل :

٢) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٥ - س & ، س < ٥ \\ س - ٥ & ، س \geq ٥ \end{cases}$

وكان $هـ(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٢٥}$ ابحث في اتصال (ق × هـ)(س) عند س = ٥

الحل :

مثال (١٤) :

١) جـد نقاط عدم الاتصال للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}$

الحل :

٢) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٧}{\text{س} - ٢} + \frac{٥}{\text{س}^{٢} - ٩}$ ، ما نقاط الانقطاع ؟

الحل :

مثال (١٥) :

اذا كان ق ، هـ كثيري حدود وكان $\lim_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(\text{س}) = ١٢$ ، $\lim_{\text{س} \to ٢} \text{هـ}(\text{س}) = ١٠$ ، جد :

أ) $\lim_{\text{س} \to ٢} \left(\frac{\text{ق}(\text{س})}{١ - \text{س}^{٢}} ٨\text{هـ}(\text{س}) \right)$

ب) قيمة (م) اذا كان

$$\left(\text{م}(\text{هـ}(\text{س}))^{٢} - ٦\text{ق}(\text{س}) \right) = ٢٨$$

الحل :

مثال (١٦) :

في الشكل الذي يمثل ق(س) ، جد :

أ) $\lim_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ق}(\text{س})$

ب) $\lim_{\text{س} \to ١} \left((\text{ق}(\text{س}) - ٤)^{٢} + \frac{٥\text{س} - ٣}{٢} \right)$

ج) قيم (س) التي عندما ق غير متصل

الحل :

مثال (١٧) :

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٦ - ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١٠}$ ، جد :

أ) قيم (س) التي عندما ق غير متصل

ب) $\lim_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س})$

الحل :

الوحدة الثانية : التفاضل :

مثال (١) :

١) جد مقدار التغير في (س) اذا تغيرت (س) من (٥) الى (−٣)

الحل :

٢) اذا كان مقدار التغير في (س) يساوي (٧) وكانت $س_٢$ = ٤ ، فجد ($س_١$)

الحل :

مثال (٢) :

١) اذا كان ق(س) = س ^{٢} − ١ وكانت $س_١$ = ١، $س_٢$ = ٦ ، فجد مقدار التغير في ق(س)

الحل :

٢) اذا علمت ان مقدار التغير في الاقتران ق(س) = ١٨ عندما تتغير (س) من (٢) الى (٤) وكانت ق(٤) = ٥ ، اوجد ق(٢)

الحل :

مثال (٣) :

١) اذا كان ق(س) = ٣س − ٥ ، فجد معدل التغير للاقتران عندما تتغير (س) من (٢) الى (٧)

الحل :

٢) اذا كان معدل التغير للاقتران ق(س) يساوي (٥) وكانت (س) تتغير من (٣) الى (٥) وكانت ق(٥) = ٨ ، فجد ق(٣)

الحل :

٣) اذا كان معدل التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [−١،٣] يساوي (٧) وكان هـ(س) = ٢ق(س) − س ^{٢} ، فجد معدل التغير في هـ(س) في الفترة [−١،٣]

الحل :

٤) اذا كـان ق(س) = $\begin{cases} ٢س & ، \quad ٢ \leq س \leq ٤ \\ ١ - س & ، \quad ٤ < س \leq ٦ \end{cases}$

فجد معدل التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير (س) من (٣) الى (٦)

الحل :

٤) اذا كـان ق(س) = أس + ٢ وكان معدل التغير في ق(س) = ٣ عندما تتغير (س) من (صفر) الى (٢) ، فجد قيمة الثابت (أ)

الحل :

مثال (٤) :

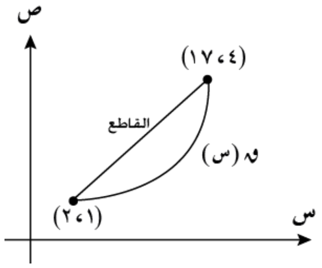
٣) اذا كان ق(س) = س^{٢} − ٣ ، فجد ميل القاطع المار بالنقطتين (١، −٢) ، (٣، ٦)

الحل :

٤) اذا كان ق(س) = س^{٣} − ٥ ، فجد ميل القاطع المار بالنقطتين (٠، ق(٠)) ، (٢، ق(٢))

الحل :

٣) اعتمادا على الشكل المجاور ، جد معدل التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [١، ٤]



الحل :

مثال (٥) :

٣) اذا كانت المسافة التي يقطعها جسم في اثناء سقوطه الى الاسفل بالعلاقة : ف(ن) = ٣٠ن − ٥ن^{٢} ، احسب السرعة المتوسطة في الفترة [١، ٣]

الحل :

مثال (٦) :

١) باستخدام تعريف المشتقة الاولى ، اوجد ق$'$(س) للاقتران ق(س) = ٣س − ٧

الحل :

٢) اذا كان ق(س) = ٣س^{٢} + ٥ ، جد المشتقة الاولى باستخدام تعريف المشتقة

الحل :

٣) اذا كان ق(س) = ٣س^{٣} + ٧ ، جد المشتقة الاولى باستخدام تعريف المشتقة عند س = −٣

الحل :

٤) اذا كان ق(س) = $\sqrt{٤ - س}$ ، فجد المشتقة الاولى باستخدام التعريف العام

الحل :

٥) باستخدام تعريف المشتقة الاولى ، اوجد ق$'$(س) للاقتران ق(س) = −٧

الحل :

٦) اذا كانت △ص = ٣هـ^{٢}س^{٢} + ٤هـس^{٢} + ٩هـ ، احسب ق$'$(٢)

الحل :

مثال (٧) :

٥) اذا كان ق(س) = س^{٣} – ٢$\sqrt{س}$ ، فجـــــــد :

أ) $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ}$

ب) $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{هـ}$

ج) $\underset{ع \leftarrow ١}{نهـا} \frac{ق(ع) - ق(١)}{ع - ١}$

الحل :

مثال (٨) :

اذا كـــان ق(س) = أ^{٣} س^{٣} – ٢ أ س^{٢} ، فجــد قيمـــة الثابت (أ) التي تجعل ق$'$(١) = ٠

الحل :

مثال (٩) :

اذا كـــان ق(٢) = ٣ ، ق$'$(٢) = ٤ ، وكانـــت ل(س) = ٢س + ق(س) + ٩ ، فجد ل$'$(٢)

الحل :

مثال (٩) :

٣) اذا كانـــــت ق(١) = ٥ ، ق$'$(١) = –٢ ، هـ(١) = ٤ ، هـ$'$(١) = ٢ ، احسب ما يلي :

أ) $(ق \times هـ)'(١)$

ب) $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(١)$

ج) $\left(\frac{٣}{ق}\right)'(١)$

د) $\left(\frac{هـ}{٥}\right)'(١)$

هـ) $\sqrt{ق(س)}$

و) $(ق + هـ)'(١)$

ز) $(ق^{٣})'(١)$

ح) $(س^{٣} هـ(س))'(١)$

الحل :

مثال (١٠) :

جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يلي :

١) $ص = ع^{٤} + ٣ع^{٢}$ ، $ع = س^{\frac{٧}{٢}} + س$

الحل :

٢) $ص = ٢ع^{٣} + ع$ ، $ع = \sqrt{٢س^{٣} + ٢}$

الحل :

١٠) $ص = ٣ + ع^{٢}$ ، $ع = (س^{٢} - ٢س)^{٣}$

الحل :

مثال (١١) :

جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يلي :

١) $ق(س) = ٥س^{٤} - ٢س^{٣} - س^{٢} - س + ٢$

٢) $ق(س) = ٥س^{٣} + ٢\sqrt{س} + \frac{٣}{س^{٥}}$

٣) $ق(س) = (٣س^{٢} + ٩)(٦س^{-٢} + \sqrt{س})$

٤) $ق(س) = -٥س^{٢}\,جتاس + ٣ظاس$

٥) $ق(س) = \frac{جاس}{١ + جتاس}$

٦) $ق(س) = \frac{-٢}{س^{٢} - س + ٣س}$

٧) $ق(س) = \frac{٢س^{-٥}\,جتاس}{-١٤}$

٨) $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٥} + ٩}$

٩) $\text{ص} = \text{س}^{٢} + \sqrt{\text{س}} + \text{س}^{-٣} - ٣\text{س}^{٢} + \frac{٦}{\text{س}^{٢}}$

١٠) $\text{ق}(\text{س}) = (٥ - \text{س}^{٢})^{٤}$

١١) $\text{ق}(\text{س}) = (٢\text{س} - ٣)^{٧}$ ، عندما $\text{س} = ١$

١٢) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٦)^{\frac{٧}{٦}}$

١٣) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}^{٣} - ٥}$

١٤) $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}^{٥}\text{س}$

١٥) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}(٣\text{س}^{٣} - ٤)^{٥}$

الوحدة الثالثة : تطبيقات التفاضل :

مثال (١) :

١) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{٢} + ٧$ ، فجد ميل المماس لمنحنى $\text{ق}(\text{س})$ عند $\text{س} = ٢$

الحل :

٢) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (٣\text{س} + ٢)^{٤}$ ، فجد ميل المماس عند $(٠ ، ١٦)$

الحل :

مثال (٢) :

١) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + \sqrt{\text{س}}$ ، جد معادلة المماس عند $\text{س} = ١$

الحل :

٢) اذا كان ق(س) = $\frac{٢س^٢}{١+٣س}$ ، جد معادلة المماس عند النقطة (١، $\frac{١}{٢}$)

الحل :

مثال (٣) :

١) اذا كان ق(س) = ٤س^٢ + ٥س ، فجد قيمة (س) عندما يكون ميل المماس يساوي (٣)

الحل :

٢) اذا كان ق(س) = أس^٢ + ٢س + ٥ ، حيث (أ) عدد ثابت وكان ميل المماس عندما س = −٢ يساوي (٢٨) ، فما قيمة الثابت (أ)

الحل :

مثال (٤) :

١) يتحرك جسيم حسب العلاقة : ف(ن) = ن^٣ − ٦ن^٢ + ٧ن + ١ ، جد السرعة عندما التسارع = ٢٦م / ث^٢

الحل :

٢) يتحرك جسيم حسب العلاقة : ف(ن) = $\frac{١}{٣}$ن^٣ − $\frac{٣}{٢}$ن^٢ + ن + ١ ، جد التسارع عندما السرعة = −١م / ث

الحل :

٣) يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة : ف(ن) = ٣ن^٢ + ٢ن + ١ ، حيث (ف) المسافة بالامتار ، (ن) الزمن بالثواني ، جد سرعة الجسيم بعد مرور (٣) ثواني من بدء الحركة

الحل :

مثال (٥) :

تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الاصل بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة : ف(ن) = ٢ن^{٢} ، اذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠، م] تساوي سرعته اللحظية بعد مرور (٣) ثوان ، فجد قيمة (م)

الحل :

مثال (٦) :

جد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى لكل من الاقترانات التالية :

١) ق(س) = س^{٢} + ٢س + ١

الحل :

٢) ق(س) = (س + ١)(س + ٢)

الحل :

٣) ق(س) = $\frac{١}{٣}$س^{٣} − ٤س

الحل :

٤) ق(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س + ٣

الحل :

٥) ق(س) = ٦س^{٢} − ٢س^{٣}

الحل :

٦) ق(س) = $س^{٢}$ (س − ١)

الحل :

٧) ق(س) = $س^{٢}$ (٣ − س)

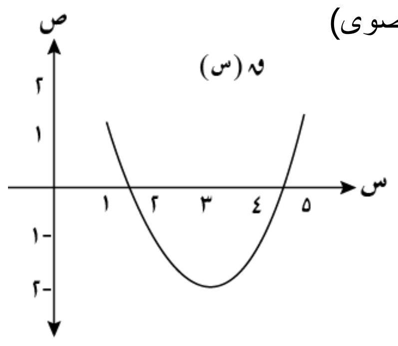
الحل :

٨) ق(س) = $س^{٣}$ + ١

الحل :

مثال (٧) :

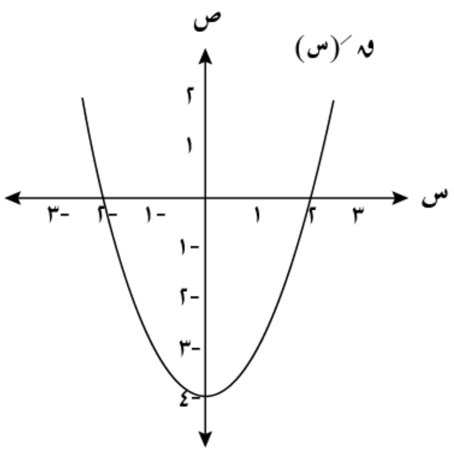
معتمدا على الرسمة التالية والتي تمثل منحنى الاقتران ق(س) جد خواص الاقتران (فترات التزايد والتناقص ، القيم الحرجة ،القيم القصوى)



فترات التزايد :
فترات التناقص :
القيم الحرجة :
القيم القصوى :

مثال (٨) :

معتمدا على الرسمة التالية والتي تمثل منحنى ق′(س) جد خواص الاقتران ق′(س) (فترات التزايد والتناقص ، القيم الحرجة ، القيم القصوى)



فترات التزايد :
فترات التناقص :
القيم الحرجة :
القيم

مثال (٩) :

٢) اذا كان للاقتران ق(س) = أ$س^{٢}$ + ١٢س − ١٥ قيمة حرجة عندما س = ١ ، جد قيمة الثابت (أ)

الحل :

مثال (١٠) :

١) ينتج مصنع للثلاجات (س) ثلاجة شهريا ، فاذا كانت التكلفة للانتاج تعطى بالعلاقة : ك(س) = ٣٦٠٠٠٠ + ٤س + س ٢ وكان بيع الثلاجة الواحدة بسعر (٥٠٠) دينار ، فجد :

أ) اقتران الايراد الكلي

ب) عدد الثلاجات التي يجب ان يبيعها المصنع شهريا لتحقيق اكبر ربح ممكن

الحل :

٢) ينتج مصنع اجهزة تلفاز وكان يبيع الوحدة بسعر (٧٠) دينار ، فاذا كانت التكلفة الكلية بالدينار لانتاج (س) وحدة من هذه السلعة هي ك(س) = ٦٠٠٠٠ + ٥٠س + ٠,٠٠٢٥س ٢ فجد :

أ) اقتران الايراد الكلي

ب) عدد الوحدات التي يجب انتاجها حتى يحقق اكبر ما يمكن

الحل :

٤) اذا كان ع = (٧٨ – ٢١س) تمثل معادلة السعر وكان ك(س) = ٣٦س ٢ + ٦س + ٢٠ تمثل التكلفة فجد عدد الوحدات اللازم انتاجها حتى يكون الربح اكبر ما يمكن

الحل :

٤) اذا كانت ع = $\frac{٣٠٠}{س + ٢}$ تمثل معادلة العرض والطلب اوجد الايراد الحدي عندما ينتج (٨) وحدات

الحل :