

الوحدة الرابعة : التكامل وتطبيقاته :

مثال (١) :

جد التكاملات الآتية :

$$(١) \int (٣س٣ + ٩س٢ + ٩س + ٨س + ١٨) دس$$

$$(٢) \int (٣س٣ - ٢س٢ + ٤س + ٤) دس$$

$$(٣) \int (٥س + ٢)(١ - س) دس$$

$$(٤) \int (٣ - س٣) دس$$

$$(٥) \int \frac{٥ - س٢}{س٣} دس \text{ (مهم)}$$

$$(٦) \int \frac{٢٥ - س٢}{٥ - س} دس$$

$$(٧) \int \frac{٢٧ - س٣}{٣ - س} دس$$

$$(٨) \int \frac{٢٤ - س٥ - س٢}{١٦ - س٢} دس$$

$$(٩) \int (٤س٢ + ٤س + ٣) دس$$

$$(١) \int (٣ - س٢) دس$$

$$(٢) \int \frac{٥(٣ - س)٣}{س} دس$$

$$(٣) \int (٢س + ٧س) دس$$

مثال (٢) :
 (١) اذا كان $صه (س) = ص \left[\frac{٣}{١+٧س+٢س} \right]$ ،
 جد $صه (١)$

جد $صه (٢)$

الحل :

مثال (٣) :
 (٢) اذا كان $صه (س) = ص \left[٥ - ٣س + ٢س + ٣س \right]$ ، فما قيمة $صه (٢)$

(٢) اذا كان $صه (س) = ص \left[٥ - ٣س + ٢س + ٣س \right]$ ، فما قيمة $صه (٢)$

الحل :

(٣) اذا كان $صه (س) = ص \left[٥ + ٢س + ٣س \right]$ ، فما قيمة $صه (٣)$

الحل :

(٢) اذا كان $صه (س) = ص \left[٥ + ٢س + ٣س \right]$ ، فما قيمة $صه (٣)$

الحل :

(٣) اذا كان $صه (س) = ص \left[٥ + ٢س + ٣س \right]$ ، فما قيمة $صه (٣)$

الحل :

(٢) اذا كانت هـ (س) = ٦س هي مشتقة (هـ) المعرف على $[-٢, ٣]$ ، فما قيمة هـ (٣) - هـ (٢)

الحل :

(٣) اذا كان $\int_{١-١}^{٥+١٥}$ هـ (س) = ٥س ، فما قيم (٢)

الحل :

مثال (٤) :

(٣) $ص = \int_{٢+س}^{١-س} ص + \int_{٩+٢س}^{٥س} ص + \int_{٢+س}^{١-س} ص$
 اوجد $\frac{ص}{ص}$ علم بأن $٢=س$
 هـ (٢) = ٩ ، هـ (٢) = ٣

الحل :

مثال (٦) :

(١) اذا كان $\int_{٧}^{٤}$ هـ (س) = ٨- ،

فإن $\int_{٤}^{٧}$ هـ (س) = ٣س - ٢س + ١س =

الحل :

مثال (٥) :

(١) اذا كانت هـ (س) هي مشتقة الاقتران هـ المعرف على $[٢, ٩]$ وكان هـ (٢) = ١١ ، هـ (٩) = ٢٥

احسب $\int_{٢}^{٩}$ هـ (س) = ٩س

الحل :

(٢) اذا كان $\int_{٧}^{٤}$ هـ (س) = ٥س = ،

$\int_{٧}^{٤}$ هـ (س) = ٩س ، جد $\int_{١}^{٤}$ هـ (س) = ٩س

الحل :

(٢) اذا كـ _____ ان $\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{\text{وه (س)}} - 3 \text{ س} = 8$ ،

جد $\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{\text{وه (س)}} + 5 \text{ س} + 7 \text{ س}$

الحل :

(٣) اذا كـ _____ ان $\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{\text{وه (س)}} - 2 \text{ س} = 8$ ،

جد $\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{\text{وه (س)}} = 2$ ، $\left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_{\text{وه (س)}} + 3 \text{ س} = 2 \text{ س}$

الحل :

(٣) اذا كـ _____ ان $\left[\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right]_{\text{وه (س)}} - 2 \text{ س} = 8$ ،

جد ما يلي : $\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{\text{وه (س)}} = 2$ ، $\left[\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right]_{\text{وه (س)}} = 1$ ،

(أ) $\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{\text{وه (س)}} + 3 \text{ س} = 2 \text{ س}$ (ب) $\left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_{\text{وه (س)}} + 3 \text{ س} = 2 \text{ س}$

الحل :

مثال (٧) :

(١) اذا كـ _____ ان $\left[\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right]_{\text{وه (س)}} - 6 = 6$ ،

جد ما يلي : $\left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right]_{\text{ع (س)}} = 5$ ،

(أ) $\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{\text{ع (س)}} - \text{ع (س)} = 3 \text{ س}$

(ب) $\left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_{\text{ع (س)}} - 2 \text{ ع} + 3 \text{ س} = 2 \text{ س}$

الحل :

مثال (٨) :

(١) اذا كـ _____ ان $\text{وه (١)} = 5$ ، $\text{وه (٢)} = 19$ ،

جد $\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{\text{وه (س)}} + 3 \text{ س} - 7 \text{ س}$

الحل :

$$(3) \left[(4s+6) \sqrt{s^2+s+9} - (s^3+s^2+s+8) \sqrt{s} \right]$$

الحل :

$$(2) \text{ اذا كان } \int_{1+2}^0 (s) \sqrt{s} = 0, \text{ فما قيم (ب)}$$

الحل :

$$(3) \text{ اذا كان } \int_1^2 (s^2 - 9) \sqrt{s} = 10, \text{ فما قيم (ج)}$$

الحل :

$$(4) \left[\frac{s^2+1}{s^2+s+9} \sqrt{s} \right]$$

الحل :

مثال (9) :

جد قيمة التكاملات الآتية :

$$(1) \int \frac{6-s^4}{1+s^3-s^2} \sqrt{s}$$

الحل :

(5) اذا كان $\int (4s+6) \sqrt{s^2+s+9} - (s^3+s^2+s+8) \sqrt{s} = 2$ ،

$$\text{جد قيمة } \int (4s+6) \sqrt{s^2+s+9} - (s^3+s^2+s+8) \sqrt{s}$$

الحل :

$$(2) \int \frac{(1+s^2) \sqrt{s^2+s+9} + s - 4}{s}$$

الحل :

مثال (١٠) :

إذا كانت $v = (س)$ ، $(س + ١) = ٣$ ، احسب قاعدة
الاقتران المار بالنقطة (١٣،٠)

الحل :

مثال (١٢) :

(١) احسب المساحة المحصورة بين $v = ٤ - ٢س$
ومحور السينات عندما $س = ١$ ، $س = ٣$

الحل :

مثال (١١) :

(١) يتحرك جسم $س$ حسب العلاقة :
 $٤ = ٢(٤ + ٧س) / ت$ ، احسب المسافة بعد مرور
(٣) ثواني علما بأن الموقع الابتدائي $ف(٠) = ٦$

الحل :

(٢) احسب المساحة المحصورة بين $v = ٦س - ٣س٣$
ومحور السينات

الحل :

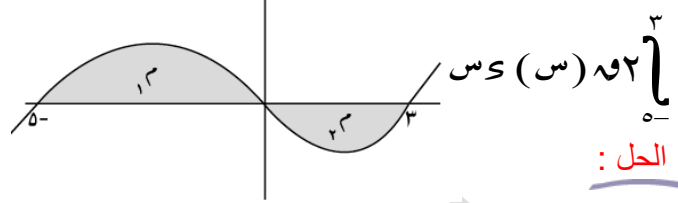
(٦) احسب المساحة المحصورة بين
 $v = ٣س + ٢س٢ - ٣س٣$ ومحور السينات

الحل :

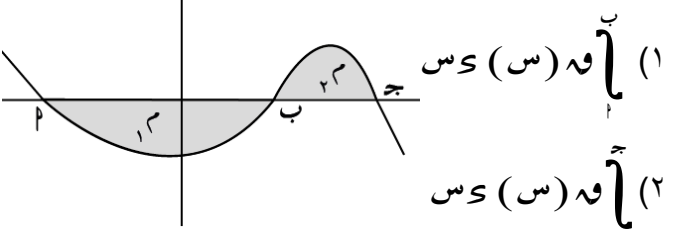
(٢) إذا كان تسارع جسم $س$ معطى بالعلاقة :
 $٦ = ٢٧٦ / ت٢$ ، احسب المسافة علما بأن
 $٢٥ = ٠$ ، $٢٢ = ٠$ ، $٢٥ = ٠$

الحل :

مثال (١٣) :

إذا كانت $\sqrt{2} = 1.414$ ، $\sqrt{3} = 1.732$ ، احسب قيمة

مثال (١٤) :

في الشكل المجاور إذا كانت $\sqrt{2} = 1.414$ ، $\sqrt{3} = 1.732$ ،
اوجد ما يلي :

(١) $\int_0^{\pi/3} \sin(x) dx$

(٢) $\int_{\pi/3}^{\pi} \sin(x) dx$

(٣) $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$

(٤) المساحة المحصورة على $[0, \pi]$ [ج، د]الحل:

الوحدة الخامسة : الاحصاء والاحتمالات :

أمثلة على مبدأ العد والتباديل والنوافيق :

(١) اوجد قيمة ما يلي :

$$= \frac{!8}{!4} \text{ (أ)}$$

$$= \frac{!3}{!3} \text{ (ب)}$$

$$= \binom{!0}{!6} \text{ (ج)}$$

$$= \binom{!0}{!1, !0, !0} \text{ (د)}$$

$$= \binom{!1}{!1} \text{ (هـ)}$$

(٤) بكم طريقة يمكن جلوس (٧) طلاب على (٧) مقاعد مرقمة

الحل :

(٥) كم كلمة مكونة من (٤) احرف يمكن تكوينها من الحروف {١، ب، ج، د، هـ، و} مع عدم ضرورة ان يكون

للکلمة معنى

الحل :(٧) اذا كانت $!n = ٧٢$ ، فما قيمة (٧)الحل :(٨) اذا كانت $!n = ٧٢٠$ ، فما قيمة (٨)الحل :(٩) اذا كانت _____ $!n = ٣٤٠$ ،

فما قيمة (٩)

الحل :

(٢) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من رئيس ونائب رئيس وعضو من مجلس الادارة المكون من (١٠) اشخاص

الحل :

(٣) دخل رجل الى معرض ثلاجات فوجد (٥) انواع و(٤) احجام وكل حجم (٥) اللون ، بكم طريقة يمكن اختيار ثلاجة واحدة

الحل :

١٥) يراد تكوين عدد من (٣) منازل من الاعداد
 $\{٩٤٨٤٧٤٦\}$ بحيث لا يسمح التكرار

الحل :

١٠) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من (٣) اشخاص من
 اصل (٥) طلاب و (٣) معلمين على ان يكون في اللجنة
 (أ) معلم واحد فقط (ب) معلمين على الاقل

الحل :

١٦) اذا كانت $٥(n!) = ٣٠$ ما قيمة (n) :

الحل :

١١) اذا كان $\binom{٩}{س} = \binom{٩}{س٢+١}$ فما قيمة (س)

الحل :

١٧) اوجد قيمة (n) لكل مما يلي :

(أ) $٥٦ = \binom{٢٤}{ن}$

(ب) $\binom{٣٤}{ن} = \binom{٢٤}{ن٩}$

الحل :

١٢) ما عدد طرق اختيار (٦) اسئلة من (٨) اسئلة في
 الامتحان

الحل :

١٣) اذا كان $\binom{٧}{٨} = \binom{٧}{٢}$ فما قيمة (n)

الحل :

١٨) احسب ما يلي: $\binom{١٠}{٦}$

الحل :

١٤) كم عدداً مكون من منزلتين يمكن تكوينه من الارقام
 $\{٣٤٢٤١\}$ اذا سمح التكرار

الحل :

(١٩) اوجد قيمة ما يلي :

$$(أ) \binom{س}{٥} = \binom{س}{٨}$$

الحل :

$$(ب) \binom{١٢}{١٢} = \binom{١٢}{س٢}$$

(٢٢) بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة من (٤) طلاب على الاقل

من بين (٦) طلاب

الحل :

(٢٣) ما عدد طرق اختيار (٣) كتب على الاكثر من بين (٧)

كتب مختلفة

الحل :

(٢٠) ما عدد طرق اجراء المباراة النهائية لكرة المضرب من

بين (٦) لاعبين

الحل :

(٢٤) بكم طريقة يمكن اختيار كرتين دفعة واحدة من صندوق

يحتوي (٣) كرات حمراء و(٧) بيضاء

الحل :

(٢١) مجموعة مكونة من (٧) معلمين و(٣) اداريين ، احسب

عدد الطرق التي يمكن تكوين لجنة ثلاثية في الحالات

التالية :

(أ) تتكون من معلمين واداري

(ب) معلمين على الاقل

(ج) رئيس اللجنة ونائبه من المعلمين والباقي اداري

الحل :

(٢٥) عدد اعضاء مجلس ادارة شركة (٨) اعضاء من

ضمنهم (٣) سيدات :

(أ) بكم طريقة يمكن تكوين لجنة ثلاثية من الاعضاء

(ب) بكم طريقة يمكن تكوين اللجنة على ان يكون بينهم سيدة

واحدة

الحل :

أمثلت على المتغير العشوائي المنفصل ونوزع زي أكدين :

(٤) رمي حجر نرد (٤) مرات ما احتمال ظهور العدد (٥) في الرمية الثالثة .

الحل :

(١) يحتوي صندوق على (٤) كرات بيضاء و (٦) كرات حمراء سحب من الصندوق (٣) كرات مع الارجاع إذا دل (س) على الكرات البيضاء اكتب التوزيع الاحتمالي

الحل :

(٥) إذا كان احتمال أن يصيب شخص هدف ما في كل طلقة يساوي (٠,٧) إذا اطلق (٥) طلقات فما احتمال :

(أ) اصابة الهدف (٣) مرات
(ب) اصابة الهدف مرة على الأكثر

الحل :

(٢) إذا كان التوزيع الاحتمالي $\{(٠,٣,٥٠), (٠,٤,٤١), (٠,٢,٤٢)\}$ فما قيمة (ب)

الحل :

(٣) إذا كان (س) متغير عشوائي وكانت $٣ = ٥$ ، $٢ = ٣$ ، كون جدول التوزيع الاحتمالي .

الحل :

(٦) إذا كانت $٥ = ٥$ ، $٢ = ٢$ ، احسب :

(أ) $ل(س \geq ١)$ (ب) $ل(س \leq ١)$

الحل :

٢) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في اللغة الانجليزية (٩٠) والانحراف المعياري لها (١٠) ، فجد :
 أ) العلامة (س) التي قيمتها المعيارية (١,٥)
 ب) العلامة التي تنحرف فوق الوسط انحرافين معيارين
 ج) العلامة التي تنحرف تحت الوسط انحرافاً معيارياً واحداً

الحل :

٧) إذا دل المتغير العشوائي (س) على مرات وجود طفل ذكر لدى عائلة مكونة من (٣) أطفال اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير

الحل :

أمثلة على العلامة المعيارية :

١) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات شعبة الادبي في الرياضيات (٦٠) والانحراف المعياري لها (٥) والوسط الحسابي لعلامات شعبة العلمي في الرياضيات يساوي (٧٠) والانحراف المعياري لها (٤) وحصل احد طلاب الادبي على علامة (٦٤) واحد طلاب العلمي على علامة (٦٢) ، فأَي العلامتين افضل

الحل :

أمثلة على التوزيع الطبيعي :

(١) اذا كانت رواتب (١٠٠٠٠) موظف في احدى الوزارات تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٣٠٠) دينار شهريا وانحراف معياري (١٠) دنائير ، فما عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين (٢٨٠) دينار و(٣٢٠) دينار

ملاحظة : يمكن الاستفادة من الجدول التالي :

٠,٢	١,٥	٢	٢,٥	٣	(ز)
٠,٨٧٩٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٣٨	٠,٩٩٨٧	ل(ز)

الحل :

(٢) تتخذ اعمار (١٠٠٠٠) شخص شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٢) سنة وانحراف معياري (٨) سنوات ، ما عدد الاشخاص الذين تزيد اعمارهم عن (٦٠) سنة

ملاحظة : يمكن الاستفادة من الجدول التالي :

١,٣	١,٢	١,١	١	٠,٩	٠,٨	(ز)
٠,٩٠٣٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٦٤٣	٠,٨٤١٣	٠,٨١٥٩	٠,٧٨٨١	ل(ز)

الحل :

(٣) اختر رمز الاجابة الصحيحة لكل مما يلي :

(١) اذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم (٦٥) والانحراف المعياري لها (٤) فإن القيمة التي تنحرف (٣) انحرافات تحت الوسط الحسابي هي :

(أ) ٧٧ (ب) ٥٣ (ج) ١٢ (د) ١٢-

(٢) اذا كان الفرق بين علامتي طالبين من الصف نفسه في احد الاختبارات هو (١٢) والفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين لهما هو (١,٢) فإن الانحراف المعياري لعلامات الطلاب في هذا الاختبار يساوي

(أ) ١,٤ (ب) ٦ (ج) ١٠ (د) ١٢

(٣) اذا كانت علامتا طالبين في الصف نفسه في الرياضيات (٨٥ ، ٧٠) والعلامتان المعياريتان المقابلتان لهاتين العلامتين ها (١ ، ٢) على الترتيب فإن الانحراف المعياري لعلامات الرياضيات يساوي

(أ) ١٠ (ب) ٥ (ج) ٣ (د) ١

(٤) اذا كان الوسط الحسابي لعلامات اللغة العربية يساوي (٦٠) والانحراف المعياري (٥) فإن العلامة المعيارية للعلامة (٥٨) هي :

(أ) ٦ (ب) ١٢ (ج) ٠,٤- (د) ٨

أمثلة على الارتباط والانحدار :

(أ) يبين الجدول التالي علامات مبحثي الرياضيات (س) واللغة الانجليزية (ص) لخمسة طلاب وكانت العلامة العظمى (٢٠)

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
س	٤	٣	٦	٧	٥
ص	٥	٤	٨	٨	٥

(أ) أوجد معامل الارتباط بيرسون بين المبحثين

(ب) جد معادلة الانحدار لقيم (ص) بدلالة (س)

(ج) ما الخطأ بالتنبؤ عندما $s = 6$

(د) جد القيمة المتوقعة عندما $s = 2$

(هـ) احسب الخطأ عندما $s = 4$

الحل :

(٢) إذا كان (س، ص) متغيرين عدد

قيم كل منهما (٦) ، وكان

$$\sum_{i=1}^6 (s_i - \bar{s}) = 20, \quad \sum_{i=1}^6 (v_i - \bar{v}) = 20$$

$$\sum_{i=1}^6 (s_i - \bar{s})(v_i - \bar{v}) = -28, \quad \text{احسب}$$

معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س، ص)

الحل :

(٣) إذا كان معامل بيرسون $r = 0.8$ ،

وتغيرت قيم (س، ص) حسب المعادلة

$$s^* = 3s + 5, \quad v^* = 3 - 2v, \quad \text{فكم يصبح}$$

المعامل الجديد

الحل :

٤) إذا كان $\sum_{r=1}^n s = 20$ ، $\sum_{r=1}^n v = 25$ وعدد قيم كل منهما (٥) قيم وكانت

$$\sum_{r=1}^n (s_r - \bar{s})(v_r - \bar{v}) = 18$$

، اوجد معادلة خط الانحدار لقيم (ص) بدلالة (س)

الانحدار لقيم (ص) بدلالة (س)

الحل :

٥) إذا كانت معادلة خط الانحدار $\hat{v} = 0.5 + 0.3s$

(أ) جد قيم ٢ ، ب

(ب) قدر قيمة (ص) عندما تكون س = ٣٠

الحل :