نموذج امتحان رياضيات ٢٠١٩ جزء رابع الدورة الصيفية

** اجب عن جميع الأسئلة الآتية **

السؤال الأول : جد كل من التكاملات الآتية

١- $\int \frac{\sqrt{\text{س}-٢}+١}{\sqrt{٤\text{س}-٨}-٢}\,\text{ءس}$

٢- $\int \frac{١}{\text{س}\left(\text{لــو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢}-٤\text{س}}\,\text{ءس}$

٣- $\int \text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{جا}^{٤}\text{س}\,\text{ءس}$

٤- $\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٢+\text{ظاس}}\,\text{ءس}$

٥- $\int \left(\text{لــو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢}\,\text{ءس}$

السؤال الثاني :

١- جد مشتقة كل من الاقترانين التاليين

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لــو}_{\text{هـ}}\text{س}\left(\text{س}+\text{لــو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)$ و $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{لــو}_{١٠}\text{س}}$

٢- جد قيمة التكامل $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{لــو}_{\text{هـ}}\left((\text{س})(\text{جاس})\right)\,\text{ءس}$

٣- جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\,\text{لــو}_{\text{هـ}}\text{س}$ وكل من المستقيمين

$\text{ص} = \text{س}$ ، $\text{ص} = -\text{س}+١$

٤- ما الشكل الناتج إذا رسمنا دائرة في مستو منسوب لمحورين س م ص وكانت وحدة الطول على محور السينات اكبر من واحدة الطول على محور الصادات

السؤال الثالث :

١- قذفت كرتان رأسيا نحو الأعلى الأولى من سطح الأرض وبسرعة ابتدائية ٤٠م/ث والثانية من سطح بناية ترتفع عن سطح الأرض ٨٠م وبسرعة ابتدائية ٢٠م/ث فإذا علمت أن تسارع الجاذبية الأرضية يساوي (-١٠ م / ث^{٢}) والمطلوب جد لحظة وموضع تلاقي الكرتان وسرعة كل منهما حينذاك ثم جد أقصى ارتفاع تصل إليه كل منهما

٢- جد معادلة الدائرة الماسة للمستقيم $\text{ص} = \sqrt{٣}\,\text{س}$ ومحور السينات وتمر من النقطة $\left(٣، \sqrt{٣}\right)$

٣- اوجد اكبر قيمة للعدد م واصغر قيمة للعدد ك حيث

$\text{م} \le \int_{-\sqrt{٢}}^{\sqrt{٢}} \sqrt{٤-٢\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} \le \text{ك}$ واحسب القيمة الحقيقية لهذا التكامل

السؤال الرابع :

١- جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات ق(س) = $س^{٢}$ − ١، هـ(س) = ١ − س، ل(س) = ٣

٢- بين أن مجموعة النقط ن(س،ص) حيث س = $-\frac{١}{٤}$ $ص^{٢}$ + ص − ٢ هي قطع مكافئ وعين كل من البؤرة والدليل وارسمه

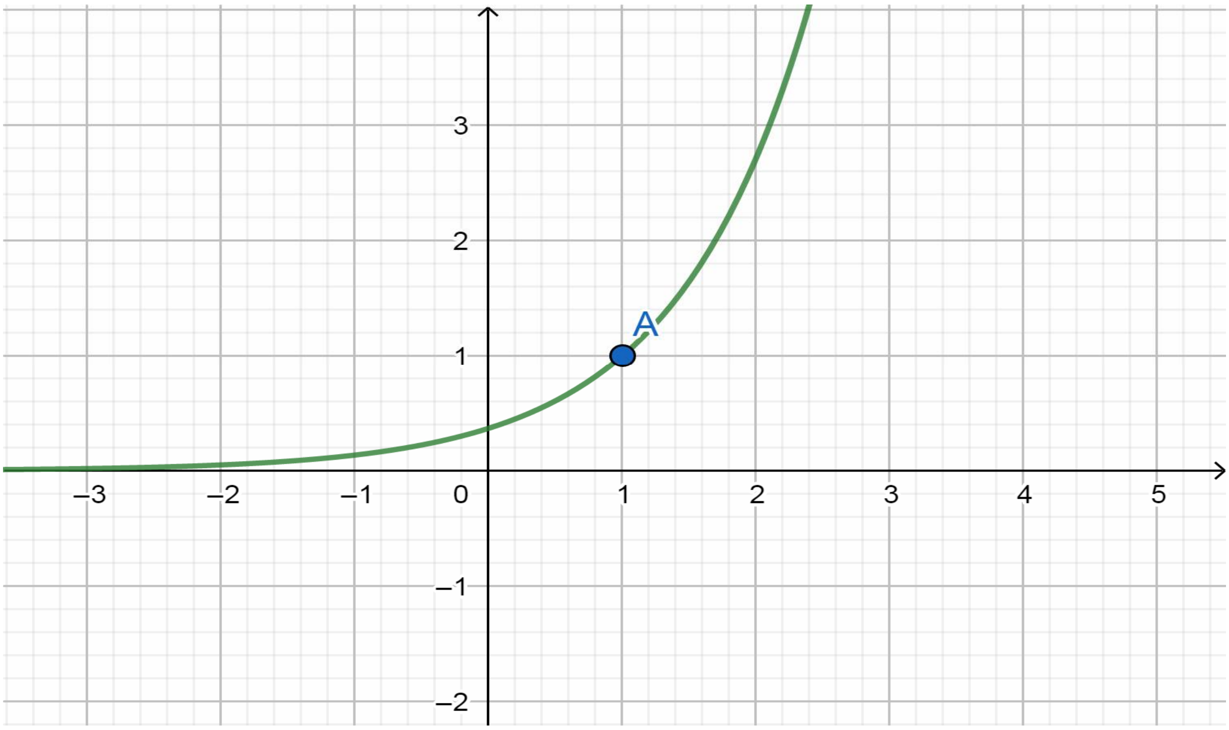
٣- اوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته ب(١،٨) واقرب رأس إليه (١،٩) ونصف القطر الصغير يساوي ٣

٤- اثبت أن المعادلة ٤$س^{٢}$ − ٩$ص^{٢}$ + ١٦س + ١٨ص − ٢٩ = ٠ هي معادلة قطع زائد عين عناصره وارسمه

٥- لتكن معادلة القطع الناقص $س^{٢}$ + ٢$ص^{٢}$ = ٦ ولتكن ن(س،ص) نقطة منه
والمطلوب عين قياس الزاوية ∠$ب_{١}$ن$ب_{٢}$ عندما ن$ب_{١}$ × ن$ب_{٢}$ = ٤ حيث $ب_{١}$،$ب_{٢}$ بؤرتي القطع

السؤال الخامس :

في الرسم البياني التالي يبين انطباق منحنى الاقتران ق(س) على منحنى المشتقة ق′(س) والمطلوب جد قاعدة الربط لهذا الاقتران



انتهت الأسئلة ٢٠-٥-٢٠١٩

عبدالرؤوف شطناوي ٠٧٨٥٤٢٧٤٦٠

************ السؤال الأول : *************

جد كل من التكاملات الآتية

$$١-\ \int \frac{\sqrt{س-٢}+١}{\sqrt{٤س-٨}-٢}\,ءس = \int \frac{\sqrt{س-٢}+١}{٢\sqrt{س-٢}-٢}\,ءس = \frac{١}{٢}\int \frac{\sqrt{س-٢}+١}{\sqrt{س-٢}-١}\,ءس$$

نقسم البسط على المقام

$$\sqrt{س-٢} = ص \Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{س-٢}}\,ءس = ءص \Leftarrow ءس = ٢ص\,ءص$$

$$\frac{١}{٢}\int \frac{\sqrt{س-٢}+١}{\sqrt{س-٢}-١}\,ءس = \frac{١}{٢}\int \frac{ص+١}{ص-١}\,٢ص\,ءص = \int \frac{ص^{٢}+ص}{ص-١}\,ءص$$

$$= \int \frac{ص^{٢}+ص}{ص-١}\,ءص = \int \left(ص+٢+\frac{٢}{ص-١}\right)ءص = \frac{١}{٢}ص^{٢}+٢ص+٢\text{لو}_{هـ}|ص-١|+\text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٢}(س-٢)+٢\sqrt{س-٢}+٢\text{لو}_{هـ}\left|\sqrt{س-١}-١\right|+\text{جـ}$$

$$٢-\ \int \frac{١}{س(\text{لو}_{هـ}س)^{٢}-٤س}\,ءس$$

$$\int \frac{١}{س(\text{لو}_{هـ}س)^{٢}-٤س}\,ءس =$$

نفرض ان

$$\text{لو}_{هـ}س = ص \Leftarrow س = هـ^{ص} ،\ \frac{١}{س}\,ءس = ءص \Leftarrow ءس = هـ^{ص}\,ءص$$

$$\int \frac{١}{هـ^{ص}ص^{٢}-٤هـ^{ص}}\,هـ^{ص}\,ءص = \int \frac{١}{ص^{٢}-٤}\,ءص = \int \frac{١}{(ص+٢)(ص-٢)}\,ءص$$

نفرق الكسر

$$\frac{١}{(ص+٢)(ص-٢)} = \frac{أ}{ص+٢}+\frac{ب}{ص-٢}$$

$$١ \equiv أ(ص-٢)+ب(ص+٢)$$

$$ص=٢ \Leftarrow ب=\frac{١}{٤}$$

$$ص=-٢ \Leftarrow أ=-\frac{١}{٤}$$

$$\int \frac{١}{(ص+٢)(ص-٢)}\,ءص = \frac{-١}{٤}\int\frac{١}{ص+٢}\,ءص+\frac{١}{٤}\int\frac{١}{ص-٢}\,ءص = \frac{-١}{٤}\text{لو}|ص+٢|+\frac{١}{٤}\text{لو}|ص-٢|+\text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٤}\text{لو}_{هـ}\left|\frac{ص-٢}{ص+٢}\right|+\text{جـ} = \frac{١}{٤}\text{لو}_{هـ}\left|\frac{\text{لو}_{هـ}س-٢}{\text{لو}_{هـ}س+٢}\right|+\text{جـ}$$

$$٣-\ \int \text{جتا}^{٢}س\,\text{جا}^{٤}س\,ءس$$

$$\int \text{جتا}^{٢}س\,\text{جا}^{٤}س\,ءس = \int \text{جتا}^{٢}س\,\text{جا}^{٢}س\,\text{جا}^{٢}س\,ءس = \frac{١}{٤}\int \text{جا}^{٢}٢س\,\text{جا}^{٢}س\,ءس$$

$$= \frac{١}{٤}\,\frac{١}{٢}\int(١-\text{جتا}٤س)\,\frac{١}{٢}(١-\text{جتا}٢س)\,ءس = \frac{١}{١٦}\int\left(١-\text{جتا}٢س-\text{جتا}٤س+\text{جتا}٤س\,\text{جتا}٢س\right)ءس$$

$$= \frac{1}{16}\int\left(1-\text{جتا}2\text{س}-\text{جتا}4\text{س}+\frac{1}{2}\left(\text{جتا}6\text{س}+\text{جتا}2\text{س}\right)\right)\text{ءس}$$

$$= \frac{1}{16}\int\left(1-\frac{1}{2}\text{جتا}2\text{س}-\text{جتا}4\text{س}+\frac{1}{2}\text{جتا}6\text{س}\right)\text{ءس}$$

$$= \frac{1}{16}\left(\text{س}-\frac{1}{4}\text{جا}2\text{س}-\frac{1}{4}\text{جا}4\text{س}+\frac{1}{12}\text{جا}6\text{س}\right)+\text{جـ}$$

٤- $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{قا}^2\text{س}}{2+\text{ظاس}}\text{ءس}$

$$\text{ظاس} = \text{ص} \Leftarrow \left(1+\text{ظا}^2\text{س}\right)\text{ءس} = \text{قا}^2\text{س}\text{ءس} = \text{ءص}$$

$$\text{س} = \frac{-\pi}{4} \Leftarrow \text{ص} = -1،\ \text{س} = \frac{\pi}{4} \Leftarrow \text{ص} = 1$$

$$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{قا}^2\text{س}}{2+\text{ظاس}}\text{ءس} = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\text{ص}+2}\text{ءص} = \left[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+2|\right]_{-1}^{1} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,3$$

٥- $\int\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^2\text{ءس}$

بفرض $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = \text{ص} \Leftarrow \text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}}،\ \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص}$

$$\int\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^2\text{ءس} = \int\text{ص}^2\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص}$$

$$\text{ن} = \text{ص}^2 \Leftarrow \text{ءن} = 2\text{ص}\text{ءص}$$

$$\text{ءل} = \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص} \Leftarrow \text{ل} = \text{هـ}^{\text{ص}}$$

$\int\text{ن}\text{ءل} = [\text{ن}\text{ل}] - \int\text{ل}\text{ءن}$ تكامل أجزاء

$$\int\text{ص}^2\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص} = \left[\text{ص}^2\text{هـ}^{\text{ص}}\right] - \int 2\text{ص}\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص}$$

$$\int 2\text{ص}\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص}$$

$$\text{ف} = 2\text{ص} \Leftarrow \text{ءف} = 2\text{ءف}$$

$$\text{ءم} = \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص} \Leftarrow \text{م} = \text{هـ}^{\text{ص}}$$

$$\int 2\text{ص}\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص} = \left[2\text{ص}\text{هـ}^{\text{ص}}\right] - \int 2\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص} = \left[2\text{ص}\text{هـ}^{\text{ص}}\right] - 2\text{هـ}^{\text{ص}}$$

$$\int\text{ص}^2\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص} = \left[\text{ص}^2\text{هـ}^{\text{ص}}\right] - \left[2\text{ص}\text{هـ}^{\text{ص}}\right] + 2\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$= \text{هـ}^{\text{ص}}\left(\text{ص}^2 - 2\text{ص} + 2\right) + \text{جـ}$$

$$= \text{س}\left(\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^2 - 2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + 2\right) + \text{جـ}$$

********************السؤال الثاني: *****************

١- جد مشتقة كل من الاقترانين التاليين

$ق(س) = لـو_{هـ} س(س + لـو_{هـ} س)$ و $ق(س) = هـ^{لـو_{١٠} س}$

$ق(س) = لـو_{هـ} س(س + لـو_{هـ} س) = لـو_{هـ} س + لـو_{هـ}(س + لـو_{هـ} س)$

$$ق'(س) = \frac{١}{س} + \frac{١ + \frac{١}{س}}{س + لـو_{هـ} س} = \frac{١}{س} + \frac{١}{س} \times \frac{١ + س}{س + لـو_{هـ} س}$$

$ق(س) = هـ^{لـو_{١٠} س}$

$$لـو_{١٠} س = \frac{لـو_{هـ} س}{لـو_{هـ} ١٠}$$

$$ق(س) = هـ^{\frac{لـو_{هـ} س}{لـو_{هـ} ١٠}}$$

$$ق'(س) = \frac{١}{لـو_{هـ} ١٠} \frac{١}{س} هـ^{لـو_{١٠} س}$$

٢-جد قيمة التكامل $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} لـو_{هـ}(س(جاس))ءس$

الحل: $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} لـو_{هـ}(س(جاس))ءس = ٠$ خاصة لا تنسى ذلك

٣-جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = س لـو_{هـ} س$ وكل من المستقيمين

ص = س ، ص = −س + ١

نجد التقاطعات

ص = س ، ص = −س + ١

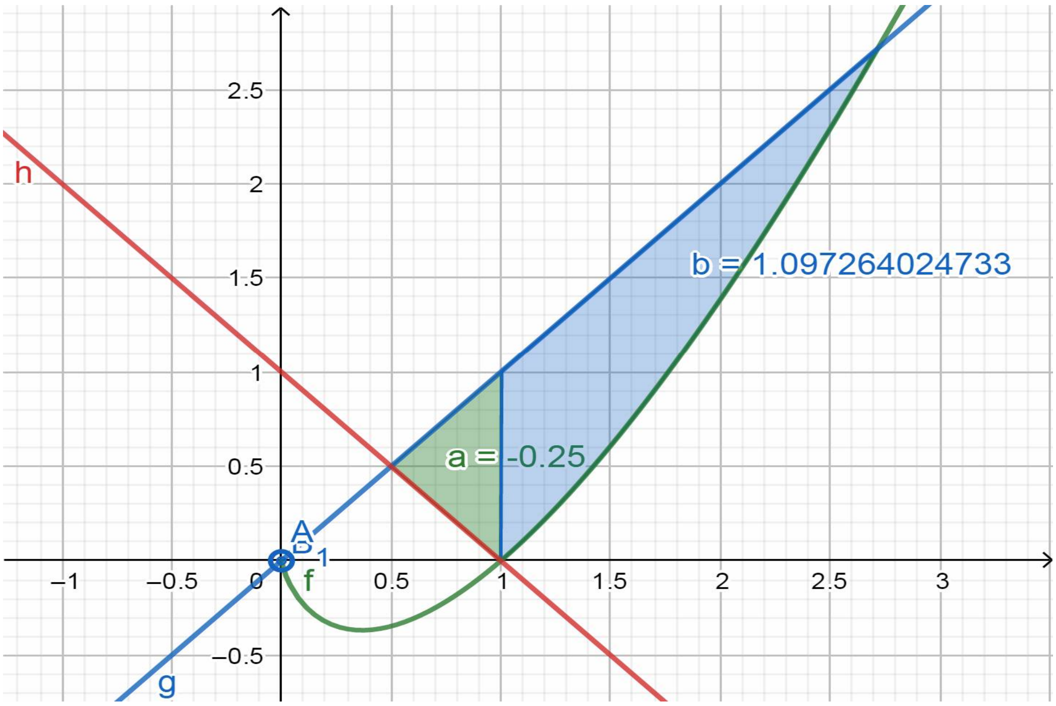
$س = -س + ١ \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

$ق(س) = س لـو_{هـ} س ، ص = س$

$س لـو_{هـ} س = س \Leftarrow لـو_{هـ} س = ١ ، س = هـ$

$ق(س) = س لـو_{هـ} س ، ص = -س + ١$

$-س + ١ = س لـو_{هـ} س \Leftarrow س = ١$



المساحة المطلوبة

$$\text{م} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\text{س} + \text{س} - ١)\,\text{ءس} + \int_{1}^{\text{هـ}} (\text{س} - \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{ءس}$$

لنحسب التكامل $\boxed{\int \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{ءس}}$ بالاجزاء

$$\int \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{ءس}$$

$$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \text{ءق} = \frac{\text{ءس}}{\text{س}}$$

$$\text{ءهـ} = \text{س ءس} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$$

$$\int \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{ءس} = \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right] - \int \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\,\frac{\text{ءس}}{\text{س}} = \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right] - \frac{\text{س}^{٢}}{٤} + \text{جـ}$$

$$\text{م} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\text{س} + \text{س} - ١)\,\text{ءس} + \int_{1}^{\text{هـ}} (\text{س} - \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \left[\frac{٢\text{س}^{٣}}{٣}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٤}\right]_{1}^{\text{هـ}}$$

$$\text{م} = \left[\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣}\right] + \left(\frac{\text{هـ}^{٢}}{٢} - \frac{\text{هـ}^{٢}}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} + \frac{\text{هـ}^{٢}}{٤}\right) - \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}١ + \frac{١}{٤}\right)$$

$$\text{م} = \left[\frac{١}{٣}\right] + \left(\frac{\text{هـ}^{٢}}{٤}\right) - \left(\frac{٣}{٤}\right)$$

٤- ما الشكل الناتج إذا رسمنا دائرة في مستو منسوب لمحورين س م ص وكانت وحدة الطول على محور السينات اكبر من واحدة الطول على محور الصادات

الحل : الشكل الناتج هو قطع ناقص محوره البؤري يوازي محور السينات

*******************: السؤال الثالث ****************

١- قذفت كرتان رأسيا نحو الأعلى الأولى من سطح الأرض وبسرعة ابتدائية ٤٠م/ث والثانية من سطح بناية ترتفع عن سطح الأرض ٨٠م وبسرعة ابتدائية ٢٠م/ث فإذا علمت ان تسارع الجاذبية الأرضية يساوي ($\text{-١٠ م / ث}^{\text{٢}}$) والمطلوب جد لحظة وموضع تلاقي الكرتان وسرعة كل منهما حينذاك ثم جد أقصى ارتفاع تصل إليه كل منهما

الحل : لنجد القانون الزمني للحركة باعتبار أن نقطة الأصل لمحور الحركة المتجه نحو الأعلى هي الأرض

الكرة الأولى

$\text{ت} = -\text{١٠}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -\text{١٠} \Leftarrow \text{دع} = -\text{١٠دن} \Leftarrow \text{ع} = -\text{١٠ن+جـ}$

$\text{ن} = \text{٠} \Leftarrow \text{ع} = \text{٤٠،}$

اذا جـ = ٤٠

$\text{ع} = -\text{١٠ن} + \text{٤٠}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = -\text{١٠ن} + \text{٤٠} \Leftarrow \text{دف} = (-\text{١٠ن} + \text{٤٠})\text{دن}$

$\text{ف} = -\text{٥ن}^{\text{٢}} + \text{٤٠ن} + \text{هـ}$

سطح الارض هو المبدأ وبالتالي هـ = ٠

القانون الزمني لحرة الكرة الأولى هو

$\boxed{\text{ف} = -\text{٥ن}^{\text{٢}} + \text{٤٠ن}}$

الكرة الثانية

$\text{ت} = -\text{١٠}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -\text{١٠} \Leftarrow \text{دع} = -\text{١٠دن} \Leftarrow \text{ع} = -\text{١٠ن+جـ}$

$\text{ن} = \text{٠} \Leftarrow \text{ع} = \text{٢٠،}$

اذا جـ = ٢٠

$\text{ع} = -\text{١٠ن} + \text{٢٠}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = -\text{١٠ن} + \text{٢٠} \Leftarrow \text{دف} = (-\text{١٠ن} + \text{٢٠})\text{دن}$

$\text{ف} = -\text{٥ن}^{\text{٢}} + \text{٢٠ن} + \text{هـ}$

ن = ٠، ف= ٨٠

اذا القانون الزمني للكرة الثانية هو $\boxed{\text{ف} = -\text{٥ن}^{\text{٢}} + \text{٢٠ن} + \text{٨٠}}$

لحظة التلاقي

نأخذ التساوي بين القانونين

$$ف = -٥ن^٢ + ٢٠ن + ٨٠ ، ف = -٥ن^٢ + ٤٠ن$$
$$-٥ن^٢ + ٢٠ن + ٨٠ = -٥ن^٢ + ٤٠ن$$
$$٨٠ = ٢٠ن$$
$$ن = ٤$$

اذا يتم التلاقي بعد ٤ ثواني

موضع التلاقي نعوض في أي من المعادلتين ن = ٤ فنجد ف = ٨٠م

سرعة الكرة الأولى عند التلاقي ع = -١٠ن + ٤٠

ع = -١٠ × ٤ + ٤٠ = ٠

ع = -١٠ن + ٢٠

ع = -١٠ × ٤ + ٢٠ = -٢٠م/ث

تتوقف الكرة الأولى عند التلاقي والكرة الثانية تكون بحالة نزول بسرعة ٢٠م/ث

أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة الأولى عندما تنعدم السرعة ع = ٠ ⟸ -١٠ن + ٤٠ = ٠ ⟸ ن = ٤

وأقصى ارتفاع لها هو $\boxed{ف = -٥ × ١٦ + ٤٠ × ٤ = ٨٠}$ سبق ان وجدنا ذلك

وأقصى ارتفاع للكرة الثانية ع = ٠ ⟸ -١٠ن + ٢٠ = ٠ ⟸ ن = ٢

$\boxed{ف = -٥ × ٤ + ٢٠ × ٢ + ٨٠ = ١٠٠م}$

٢- جد معادلة الدائرة الماسة للمستقيم ص = $\sqrt{٣}$س ومحور السينات وتمر من النقطة $(٣ ، \sqrt{٣})$

الحل :من الأفضل أن ترسم شكل ابتدائي للحل

معادلة الدائرة من الشكل $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ر^٢$ وبما أنها تمس محور السينات فان

ر = |هـ| وعليه نجد $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = هـ^٢$

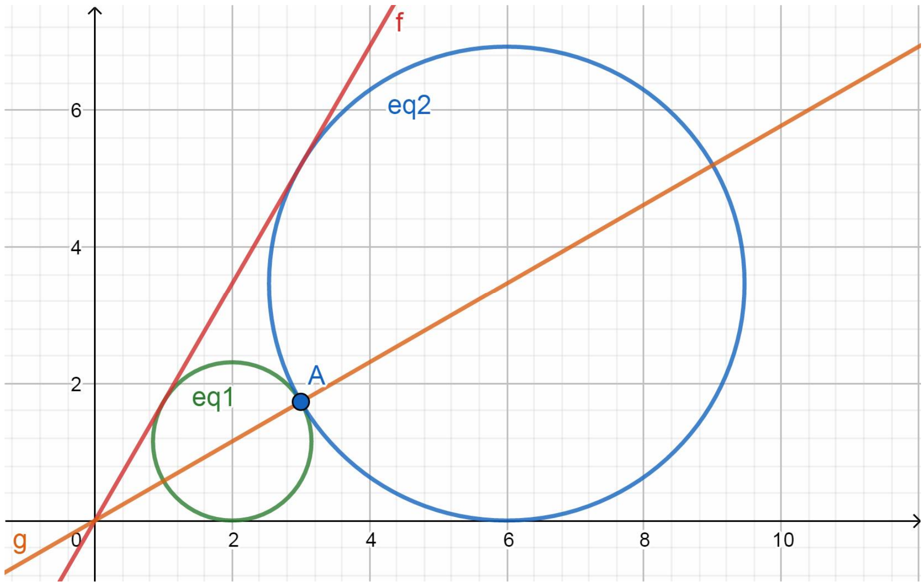
وهذه الدائرة تمس محور السينات والمستقيم ص = $\sqrt{٣}$س الذي يصنع زاوية ٦٠ درجة مع محور السينات وبالتالي فان مركزها (د،هـ)يقع على المستقيم المنصف والذي يصنع زاوية ٣٠ درجة مع محور السينات ومعادلته ص = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$س اذا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$د

وبالتالي معادلة الدائرة تصبح $(س - د)^٢ + \left(ص - \frac{١}{\sqrt{٣}}د\right)^٢ = \frac{د^٢}{٣}$ لكن الدائرة تمر من $(٣ ، \sqrt{٣})$ وعليه

$$(٣ - د)^٢ + \left(\sqrt{٣} - \frac{١}{\sqrt{٣}}د\right)^٢ = \frac{د^٢}{٣}$$
$$٩ - ٦د + د^٢ + ٣ - ٢د + \frac{١}{٣}د^٢ = \frac{د^٢}{٣}$$
$$د^٢ - ٨د + ١٢ = ٠$$
$$(د - ٢)(د - ٦) = ٠$$

اما د = ٢ ⟸ هـ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ومعادلة الكرة $(س - ٢)^٢ + \left(ص - \frac{٢}{\sqrt{٣}}\right)^٢ = \frac{٤}{٣}$

او د = ٦ ومعادلة الدائرة الثانية $(س - ٦)^٢ + \left(ص - ٢\sqrt{٣}\right)^٢ = ١٢$



٢- اوجد اكبر قيمة للعدد م واصغر قيمة للعدد ك حيث

$م \le \int_{-\sqrt{٢}}^{\sqrt{٢}} \sqrt{٤-٢س^{٢}}\, ءس \le ك$ واحسب القيمة الحقيقية لهذا التكامل

الحل : $س \in \left[-\sqrt{٢}, \sqrt{٢}\right] \Leftarrow س^{٢} \in [٠،٢] \Leftarrow -٢س^{٢} \in [-٤،٠] \Leftarrow ٤-٢س^{٢} \in [٠،٤]$

$\Leftarrow \sqrt{٤-٢س^{٢}} \in [٠،٢]$

$٠ \le \sqrt{٤-٢س^{٢}} \le ٢$ نكامل فنجد $\int_{-\sqrt{٢}}^{\sqrt{٢}} ٠ ءس \le \int_{-\sqrt{٢}}^{\sqrt{٢}} \sqrt{٤-٢س^{٢}}\, ءس \le \int_{-\sqrt{٢}}^{\sqrt{٢}} ٢ءس$

وبالتالي $٠ \le \int_{-\sqrt{٢}}^{\sqrt{٢}} \sqrt{٤-٢س^{٢}}\, ءس \le ٤\sqrt{٢}$

أذا $م = ٠، ك = ٤\sqrt{٢}$

الآن حساب القيمة الحقيقية لهذا التكامل

لنأخذ الاقتران $ص = \sqrt{٤-٢س^{٢}}$ نربع نجد

$ص^{٢} = ٤-٢س^{٢} \Leftrightarrow ٢س^{٢} + ص^{٢} = ٤ \Leftrightarrow \frac{ص^{٢}}{٤} + \frac{س^{٢}}{٢} = ١$

وهي معادلة قطع ناقص محوره محور البؤري محور الصادات فيه $أ = ٢، ب = جـ = \sqrt{٢}$

أما الاقتران فهو الجز الواقع فوق محور السينات من القطع والتكامل وهو نصف مساحة القطع الناقص

وبالتالي $\int_{-\sqrt{٢}}^{\sqrt{٢}} \sqrt{٤-٢س^{٢}}\,ءس = \frac{١}{٢}\pi \times ٢\sqrt{٢} = \sqrt{٢}\,\pi$

*************** **السؤال الرابع** *****************:

١- جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات $ن(س) = س^{٢} - ١$، $هـ(س) = ١ - س$، $ل(س) = ٣$

نجد نقط التقاطع

$ن(س) = هـ(س) \Leftarrow س^{٢} - ١ = ١ - س \Leftrightarrow س^{٢} + س - ٢ = ٠ \Leftrightarrow (س+٢)(س-١) = ٠$

$س = -٢،\ س = ١$

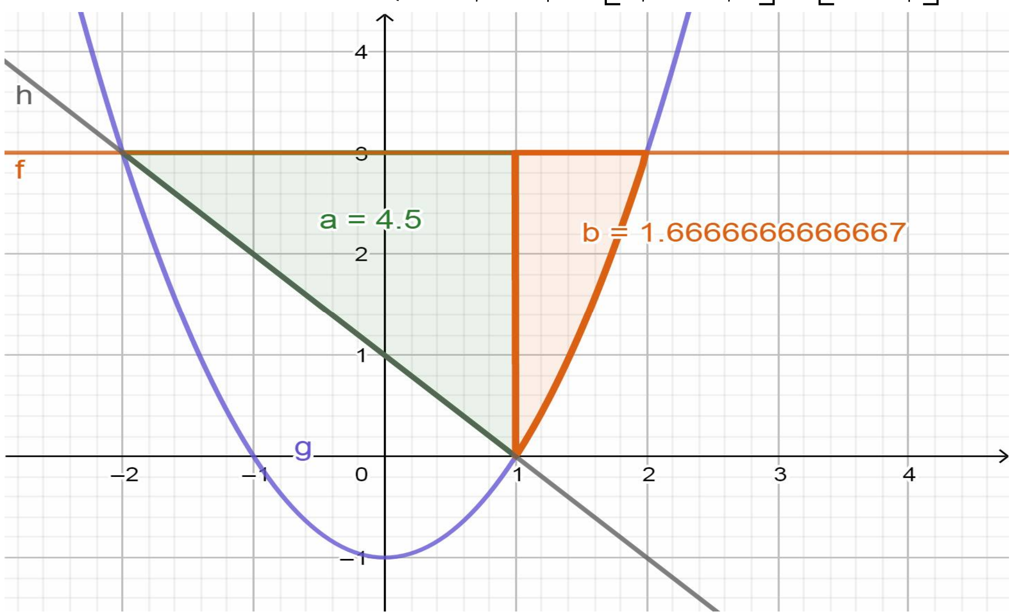
$ن(س) = ل(س) = س^{٢} - ١ = ٣ \Leftrightarrow س = ٢،\ س = -٢$

$هـ(س) = ١ - س = ل(س) = ٣$

$س = -٢$

$$م = \int_{-٢}^{١} (٣ - ١ + س)\,ءس + \int_{١}^{٢} (٣ - س^{٢} + ١)\,ءس = \left[٢س + \frac{س^{٢}}{٢}\right]_{-٢}^{١} + \left[٤س - \frac{س^{٣}}{٣}\right]_{١}^{٢}$$

$$م = \left[\frac{٥}{٢} + ٢\right] + \left[\frac{١٦}{٣} - \frac{١١}{٣}\right] = \frac{٩}{٢} + \frac{٥}{٣} = \frac{٣٧}{٦}$$



٢- بين ان مجموعة النقط $\nu(س،ص)$ حيث $س = -\frac{١}{٤}ص^{٢} + ص - ٢$ هي قطع مكافئ وعين كل من البؤرة والدليل وارسمه

الحل :

$س = -\frac{١}{٤}ص^{٢} + ص - ٢ \Leftarrow ٤س = -ص^{٢} + ٨ص - ٨ \Leftarrow -٤س = ص^{٢} - ٨ص + ٨$

$-٤س = ص^{٢} - ٨ص + ٨ + ٨ - ٨$

$-٤س + ٨ = (ص - ٤)^{٢}$

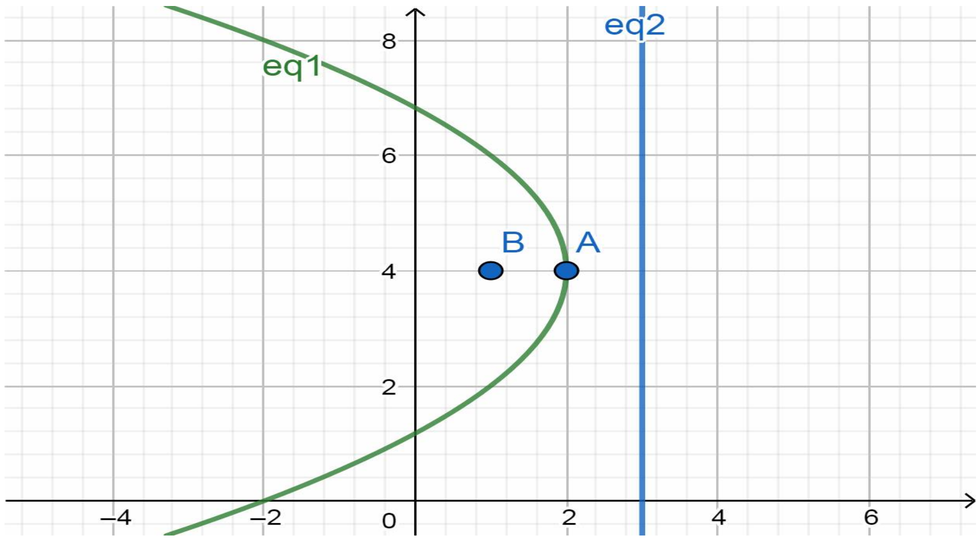
$(ص - ٤)^{٢} = -٤(س - ٢)$

وهي معادلة قياسية للقطع المكافئ من الشكل $(\text{ص} - \text{هـ})^{٢} = -٤\text{جـ}(\text{س} - \text{د})$

الراس (٢،٤) محوره البؤري يوازي السينات تقعره (يتجه)نحو السينات السالبة

جـ = ١ البؤرة ب(د−جـ،هـ) = ب(٢ − ١،٤) = ب(١،٤)

الدليل س = د+جـ ⟸ د = ٢ + ١ = ٣



الرسم

٣- اوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته ب(٨،١) واقرب رأس إليه (٩،١) ونصف القطر الصغير يساوي ٣

الحل : بما ان صادات البؤرة تساوي صادات الراس فان المحور البؤري معادلتة ص = ١ وهو موازٍ لمحور السينات وكذلك نجد هـ = ١

ومعادلة القطع من الشكل $\frac{(\text{س} - \text{د})^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

البؤرة $\boxed{\begin{matrix}\text{ب(د+جـ،هـ) = ب(٨،١)} \\ \text{د+جـ = ٨}\end{matrix}}$ والراس $\boxed{\begin{matrix}\text{(د+أ،هـ) = (٩،١)} \\ \text{د+أ = ٩}\end{matrix}}$ ومنه بالطرح نجد أ−جـ = ١ (١)

لكن ب = ٣

أ^{٢} = ب^{٢}+جـ^{٢} ⟸ أ^{٢}−جـ^{٢} = ٩ ⟸ (أ+جـ)(أ−جـ) = ٩ ⟸ أ+جـ = ٩ (٢)

بجمع ١و٢ نجد ٢أ = ١٠ ⟸ أ = ٥ و د = ٤ و جـ = ٤

وبالتالي معادلة القطع $\frac{(\text{س} - ٤)^{٢}}{٢٥} + \frac{(\text{ص} - ١)^{٢}}{٩} = ١$

٤-اثبت أن المعادلة ٤س^{٢} − ٩ص^{٢} + ١٦س + ١٨ص − ٢٩ = ٠ هي معادلة قطع زائد عين عناصره وارسمه

الحل : بالاتمام الى مربعين كاملين

٤س^{٢} − ٩ص^{٢} + ١٦س + ١٨ص − ٢٩ = ٠

٤س^{٢} + ١٦س − ٩ص^{٢} + ١٨ص − ٢٩ = ٠

٤(س^{٢} + ٤س) − ٩(ص^{٢} − ٢ص) − ٢٩ = ٠

٤(س^{٢} + ٤س + ٤ − ٤) − ٩(ص^{٢} − ٢ص + ١ − ١) − ٢٩ = ٠

٤(س + ٢)^{٢} − ١٦ − ٩(ص − ١)^{٢} + ٩ − ٢٩ = ٠

$$٤(\text{س}+٢)^{٢}-٩(\text{ص}-١)^{٢}=٣٦$$

$$\frac{(\text{س}+٢)^{٢}}{٩}-\frac{(\text{ص}-١)^{٢}}{٤}=١$$

وهو شكل نموذجي لمعادلة قطع زائد المركز (−٢،١) المحور البؤري(القاطع)يوازي السينات

الوسطاء ا = ٣،ب = ٢،جـ = $\sqrt{١٣}$

طول المحور القاطع ٢ا = ٦ والمحور المرافق طوله ٢ب = ٤ والبعد البؤري ٢جـ = ٢$\sqrt{١٣}$

البؤرتين

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{ب}_{١}(\text{د}+\text{جـ}،\text{هـ})=\text{ب}_{١}\left(-٢+\sqrt{١٣}،١\right)\\ \text{ب}_{٢}(\text{د}-\text{جـ}،\text{هـ})=\text{ب}_{٢}\left(-٢-\sqrt{١٣}،١\right)\end{array}}$$

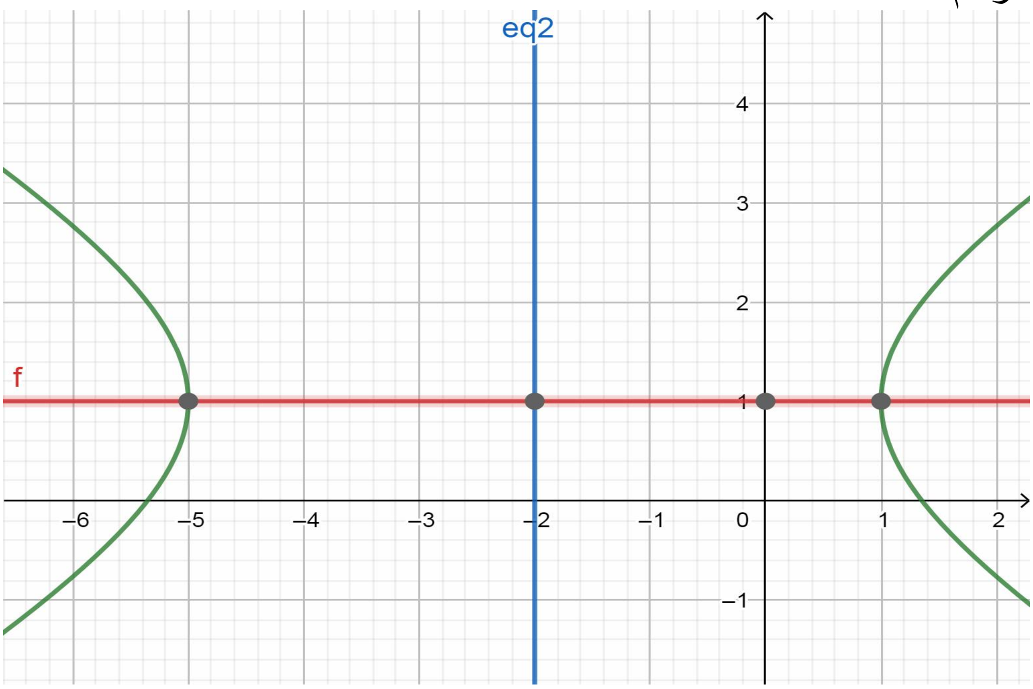
الرأسين على المحور البؤري (القاطع)

$$\boxed{\begin{array}{l}(\text{د}+\text{ا}،\text{هـ})=\text{ر}_{١}(-٢+٣،١)=\text{ر}_{١}(١،١)\\ (\text{د}-\text{ا}،\text{هـ})=\text{ر}_{٢}(-٢-٣،١)=\text{ر}_{٢}(-٥،١)\end{array}}$$

ونهايتا المحور المرافق هما

$$\boxed{\begin{array}{l}(\text{د}،\text{هـ}+\text{ب})=(-٢،١+٢)=(-٢،٣)\\ (\text{د}،\text{هـ}-\text{ب})=(-٢،١-٢)=(-٢،-١)\end{array}}$$

الرسم



٥- لتكن معادلة القطع الناقص س ^{٢} + ٢ص ^{٢} = ٦ ولتكن ن(س،ص)نقطة منه
والمطلوب عين قياس الزاوية ∠ب$_{١}$ن ب$_{٢}$ عندما ن ب$_{١}$ × ن ب$_{٢}$ = ٤ حيث ب$_{١}$،ب$_{٢}$ بؤرتي القطع

الحل :

$$\text{س}^{٢}+٢\text{ص}^{٢}=٦$$

$$\frac{\text{س}^{٢}}{٦}+\frac{\text{ص}^{٢}}{٣}=١$$

قطع ناقص المركز (٠،٠) المحور البؤري محور السينات

الوسطاء $\text{أ} = \sqrt{٦}$، $\text{جـ} = \text{ب} = \sqrt{٣}$

البعد البؤري $٢\text{جـ} = ٢\sqrt{٣}$

بفرض $\angle \text{ب}_١\text{ن}\text{ب}_٢ = \theta$ و $\text{ن}\text{ب}_١ = \text{ل}$، $\text{ن}\text{ب}_٢ = \text{م}$ ولدينا $\text{ب}_١\text{ب}_٢ = ٢\text{جـ}$

لنطبق علاقة ال جتا على المثلث $\text{ب}_١\text{ن}\text{ب}_٢$

$٤\text{جـ}^٢ = \text{ل}^٢ + \text{م}^٢ - ٢\text{م}\text{ل}\,\text{جتا}\,\theta$ نضيف ونطرح $٢\text{م}\text{ل}$

$$٤\text{جـ}^٢ = \text{ل}^٢ + \text{م}^٢ + ٢\text{م}\text{ل} - ٢\text{م}\text{ل} - ٢\text{م}\text{ل}\,\text{جتا}\,\theta$$

$$٤\text{جـ}^٢ = (\text{ل} + \text{م})^٢ - ٢\text{م}\text{ل}\left(١ + \text{جتا}\,\theta\right)$$

وحسب تعريف القطع الناقص $\text{ل} + \text{م} = ٢\text{أ}$

$$٤\text{جـ}^٢ = ٤\text{أ}^٢ - ٢\text{م}\text{ل}\left(١ + \text{جتا}\,\theta\right)$$

$$٤\text{جـ}^٢ = ٤\text{أ}^٢ - ٢\text{م}\text{ل}\left(٢\,\text{جتا}^٢\frac{\theta}{٢}\right)$$

$$\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ - \text{م}\text{ل}\left(\text{جتا}^٢\frac{\theta}{٢}\right)$$

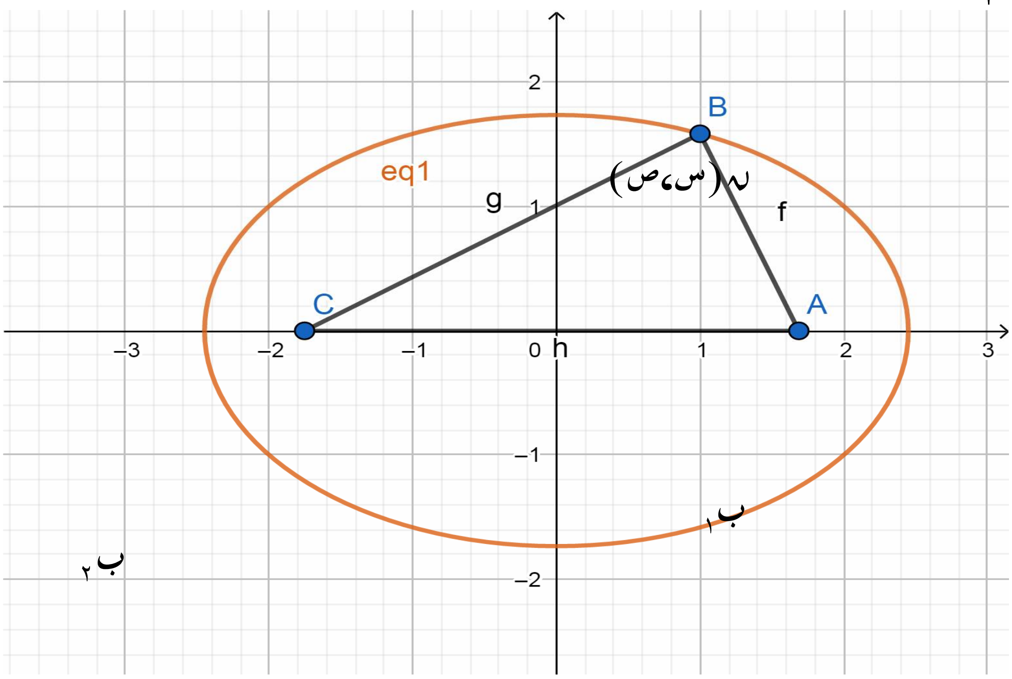
$$\text{جتا}^٢\frac{\theta}{٢} = \frac{\text{أ}^٢ - \text{جـ}^٢}{\text{م}\text{ل}}$$

$$\text{جتا}^٢\frac{\theta}{٢} = \frac{\text{ب}^٢}{\text{م} \times \text{ل}}$$

$$\text{جتا}^٢\frac{\theta}{٢} = \frac{٣}{٤}$$

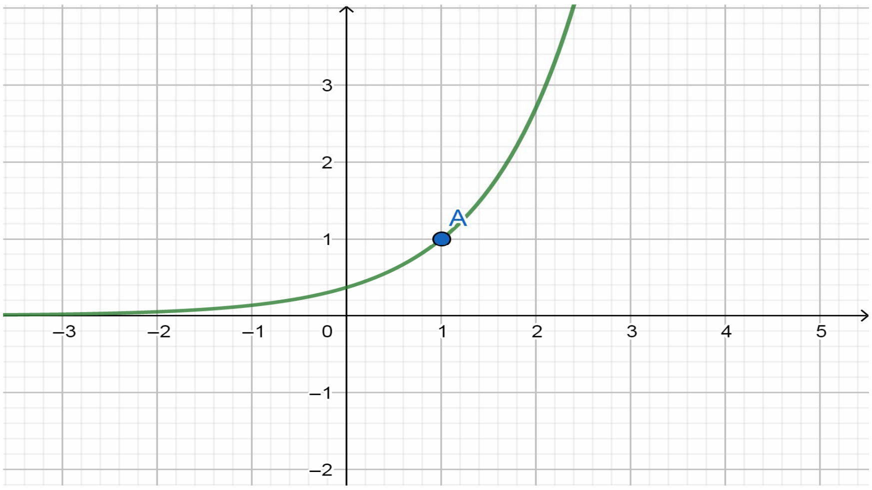
$\text{جتا}\frac{\theta}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ وما يوافق الحل المطلوب هو

$\frac{\theta}{٢} = ٣٠ \Leftarrow \theta = ٦٠$ والحل الاخر مرفوض



**************السؤال الخامس*****************

في الرسم البياني التالي يبين انطباق منحنى الاقتران ق(س) على منحنى المشتقة ق′(س)
والمطلوب جد قاعدة الربط لهذا الاقتران
الحل :
نلاحظ ان ق(س) = ق′(س) وليكن ص = ق(س)



الحل :
نلاحظ ان ق(س) = ق′(س) وليكن ص = ق(س)
اذا لنحل المعادلة التفاضلية

$\text{ص}' = \text{ص}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص}$

$\int \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \int \text{دس} + \text{جـ}$

$\text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص} = \text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}+\text{جـ}}$

لكن الخط يمر من النقطة (١،١) اذا

$١ = \text{هـ}^{١+\text{جـ}} \Leftarrow \text{هـ}^{٠} = \text{هـ}^{١+\text{جـ}} \Leftrightarrow ١+\text{جـ} = ٠ \Leftrightarrow \text{جـ} = -١$

اذا الاقتران هو $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{س}-١}$

انتهى الحل ٢٠-٥-٢٠١٩

تمنياتي لكم بالتوفيق

عبدالرؤوف شطناوي ٠٧٨٥٤٢٧٤٦٠