نموذج امتحان رياضيات مستوى ثالث الدورة الصيفية ٢٠١٩

اجب عن جميع الأسئلة آلاتية

السؤال الأول :

١- عين الثابت أ لتكون النهاية $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^2 - 2\text{أس} + 4}{\text{س}^2 - 4}$ موجودة واحسبها

٢- اذا كان $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \text{ق(س)} = 1$ وكانت $\text{ق}'(1) = 1$ جد $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س ق(س)} - 1}{\text{س} - 1}$

٣- اذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} - [\text{س}] + \text{أ} & \text{س} \geq 0 \\ \frac{\text{جاس}}{2\text{س}} & \text{س} < 0 \end{cases}$ جد أ اذا علمت ان $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \text{ق(س)}$ موجودة

٤- جد $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}} - 2\text{س} + 1}{\text{س}^2 - 1}$

٥- جد $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جاس}}{(\pi - 2\text{س})^2}$

السؤال الثاني:

١- ادرس اتصال الاقتران على مجاله $\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} - 1} & \text{س} < 1 \\ \text{س}^2 - \text{س} + 2 & \text{س} \geq 1 \end{cases}$

٢- عين الثابت أ اذا علمت ان الاقتران ق(س) متصل عند الصفر

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} + \text{أ} & \text{س} \leq 0 \\ \frac{\text{ظا}2\text{س}}{3\text{س}} & 0 < \text{س} < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

٣- جد مشتقة الاقتران $\text{ق(س)} = \frac{\text{س جاس}}{\text{س} - 1}$

٤- اوجد وفق التعريف مشتقة الاقتران $\text{ق(س)} = \sqrt{\text{س}}\,\text{جاس}$

٥- اذا كان $\text{ق(س)} = \text{س}^3 - \text{س}^2$، $\text{هـ(س)} = \frac{8}{\text{س}}$ جد $(\text{ق} \circ \text{هـ}')'(2)$

٦- اذا علمت أن $\text{ص} = \frac{1}{2}\text{ق}(2\text{س}^2 - \text{س})$، $\text{ق}'(6) = 4$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند $\text{س} = 2$

السؤال الثالث :

١- جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $(\text{س} - 1)^2 - (\text{ص} + 2)^2 = 5$ عند نقطة سينها يساوي -٢

٢- إذا كان $\text{ص} - \text{س ص} = \text{جاس}$ اثبت أن $\text{ص}'' + \text{ص} = \frac{2\text{ص}'}{1 - \text{س}}$

٣- ادرس جهة تقعر الخط البياني لمنحنى الاقتران $\text{ق(س)} = |\text{س}^2 - 4\text{س}|$

٤- إذا كان $\text{ص} = \text{ن}^2 + 2\text{ن}$، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 4\text{ن}$ جد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ عند $\text{ن} = 1$

٥- جد كل من ب،جـ بحيث يكون المستقيم ص – س – ٢ = ٠ مماسا لمنحنى الاقتران
$ق(س) = س^٢ + ب س + جـ$ عند النقطة (٠،٢)

السؤال الرابع :

١-اسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها ٨ سم وارتفاعها ١٦ سم صب فيها سائل بمعدل ١٦π سم مكعب/د جد معدل تغير ارتفاع السائل في الاسطوانة

٢- إذا كان

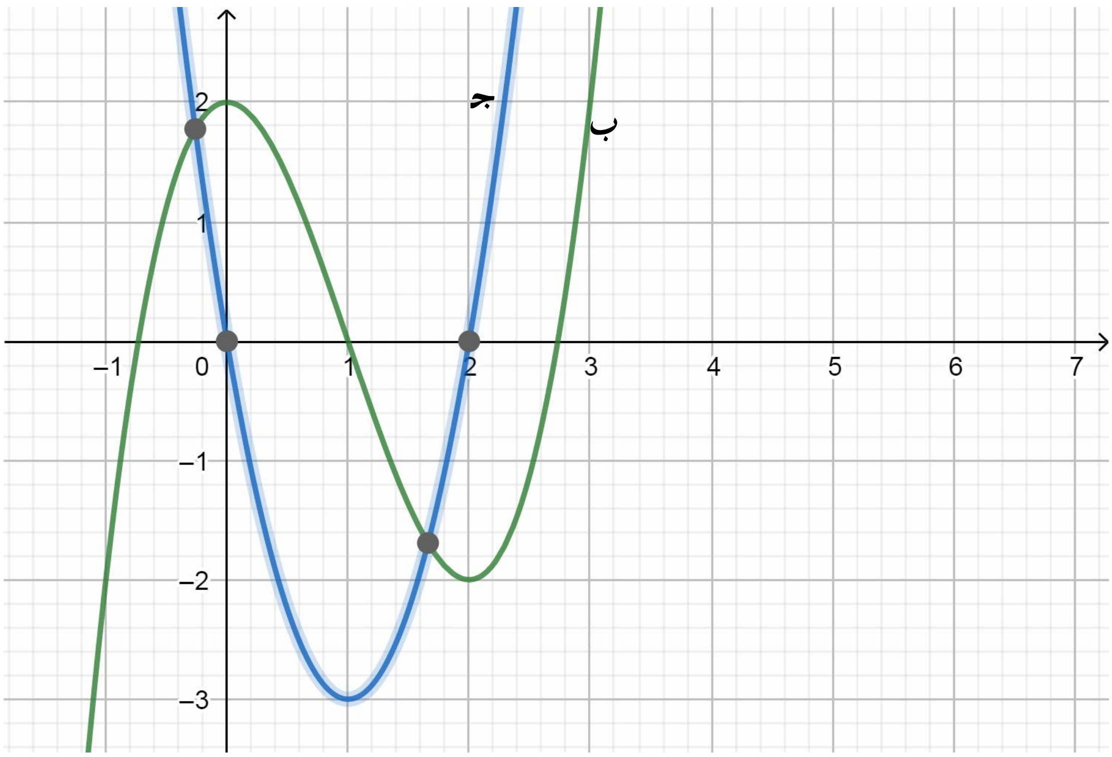
$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٦س + ٤ & س \leq ٠ \\ [س + ٤] & ٠ < س < ١ \\ |٣س + ١| & س \geq ١ \end{cases}$$

جد فترات التزايد والتناقص ثم عين ما للاقتران من نقاط حرجة وقيم محلية وقصوى ان وجدت

٣- مثلث متطابق الساقين طول ساقه ٨ سم وزاوية الرأس متغيرة قياسها هـ جد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة المثلث اكبر ما يمكن

٤- في الرسم التالي خطان بيانيان ب،جـ احدهما للاقتران ق(س) والآخر لمشتقة الاقتران ق′(س) دون ترتيب

قدم خمسة تبريرات لاختيار خط الاقتران ق(س) وخط الاقتران ق′(س)



انتهت الأسئلة تمنياتي لكم بالتفوق والتوفيق

٢٠ _ ٥ _٢٠١٩

عبدالرؤوف شطناوي ٠٧٨٥٤٢٧٤٦٠

الحل :

<u>السؤال الاول</u>

١-١)عين الثابت أ لتكون النهاية $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{أس} + ٤}{\text{س}^{٢} - ٤}$ موجودة واحسبها

الحل : بما ان النهاية موجودة فهذا يعني ان العدد ٢ هو جذر(صفر) للبسط وجذر للمقام وبالتالي نعوض العدد ٢ في البسط فنجد

$$\text{س}^{٢} - ٢\text{أس} + ٤ = ٠ \Rightarrow ٤ - ٤\text{أ} + ٤ = ٠ \Leftrightarrow \text{أ} = ٢$$

وبالتالي

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{أس} + ٤}{\text{س}^{٢} - ٤} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤}{\text{س}^{٢} - ٤} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{\text{س}^{٢} - ٤} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢} = ٠$$

١-٢) إذا كان $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ١$ وكانت $\text{ق}'(١) = ١$ جد $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{سق}(\text{س}) - ١}{\text{س} - ١}$

الحل : لنأخذ

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{سق}(\text{س}) - ١}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{سق}(\text{س}) - \text{س} + \text{س} - ١}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}(\text{ق}(\text{س}) - ١) + (\text{س} - ١)}{\text{س} - ١}$$

أضفنا وطرحنا س إلى البسط وبما أن الاقتران قابل للاشتقاق عند الواحد فهو متصل عند الواحد وان

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ١ = \text{ق}(١)$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}(\text{ق}(\text{س}) - ١)}{\text{س} - ١} + \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س} - ١)}{\text{س} - ١} \quad \text{بما ان} \quad \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{ق}(\text{س}) - ١)}{\text{س} - ١} = \text{ق}'(١) = ١$$

فان النهاية المطلوبة تساوي $= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}(\text{ق}(\text{س}) - ١)}{\text{س} - ١} + \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س} - ١)}{\text{س} - ١} = ١\times١ + ١ = ٢$

٣- ١)إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - [\text{س}] + \text{أ} & \text{س} \geq ٠ \\ \frac{\text{جاس}}{٢\text{س}} & \text{س} < ٠ \end{cases}$ جد أ إذا علمت أن $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$ موجودة

الحل :بما ان النهاية $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$موجودة فان $\underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$

نعيد تعريف الاقتران في جوار الصفر $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٠ + \text{أ} & \text{س} \geq ٠ \\ \frac{\text{جاس}}{٢\text{س}} & \text{س} < ٠ \end{cases}$

$$\underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{٢س} = \underset{س \to ٠^+}{\text{نهـا}} \left(س - [س] + أ\right)$$

$$\frac{١}{٢} = أ$$

١-٤) جد $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س\sqrt{س} - ٢س + ١}{س^{٢} - ١}$

الحل : هنا نجد حالة عدم تعين $\frac{٠}{٠}$ علينا أن نحلل البسط والمقام وهذه حالة خاصة علينا أن نضيف ونطرح س

$$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س\sqrt{س} - ٢س + ١}{س^{٢} - ١} = \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س\sqrt{س} - س - س + ١}{س^{٢} - ١} = \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س\left(\sqrt{س} - ١\right) - (س - ١)}{(س - ١)(س + ١)}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س\left(\sqrt{س} - ١\right)}{(س - ١)(س + ١)} - \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(س - ١)}{(س - ١)(س + ١)}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س\left(\sqrt{س} - ١\right)}{\left(\sqrt{س} - ١\right)\left(\sqrt{س} + ١\right)(س + ١)} - \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(س - ١)}{(س - ١)(س + ١)}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س}{\left(\sqrt{س} + ١\right)(س + ١)} - \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{١}{(س + ١)}$$

$$= \frac{١}{٢ \times ٢} - \frac{١}{٢} = \frac{-١}{٤}$$

١-٥) جد $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جاس}}{(\pi - ٢س)^{٢}}$

الحل : نجد حالة عدم تعين $\frac{٠}{٠}$ وبالتالي نفرض

$$\pi - ٢س = ص \Leftarrow \pi - ص = ٢س \Leftarrow س = \frac{\pi - ص}{٢}$$

$$س \to \frac{\pi}{٢} \Leftarrow ص \to ٠$$

نعوض في النهاية

$$\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جاس}}{(\pi - ٢س)^{٢}} = \underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{ص}{٢}\right)}{(ص)^{٢}} = \underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}\left(\frac{ص}{٢}\right)}{(ص)^{٢}} = \underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{جا}^{٢}\left(\frac{ص}{٤}\right)}{(ص)^{٢}}$$

$$= \underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} ٢\left(\frac{\text{جا}\frac{١}{٤}ص}{ص}\right)^{٢} = ٢ \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{٢} = \frac{١}{٨}$$

السؤال الثاني :

٢-١)ادرس اتصال الاقتران على مجاله $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢}-١}{س-١} & س \prec ١ \\ س^{٢}-س+٢ & س \geq ١ \end{cases}$

الحل: نقسم المجال وهو ح إلى $(-\infty،١) \cup \{١\} \cup (١،\infty)$

الاقتران $\frac{س^{٢}-١}{س-١}$ هو اقتران نسبي معرف على الفترة $(-\infty،١)$ ولا ينعدم المقام فيها فهو متصل على هذه الفترة

هذا الاقتران $س^{٢}-س+٢$ كثير حدود معرف على الفترة $(١،\infty)$ فهو متصل عليها

لندرس الاتصال عند الواحد

$$\lim_{س \to ١^{-}} \frac{س^{٢}-١}{س-١} = \lim_{س \to ١^{-}} \frac{(س-١)(س+١)}{س-١} = \lim_{س \to ١^{-}} (س+١) = ٢$$

$$\lim_{س \to ١^{+}} \left(س^{٢}-س+٢\right) = ٢$$

و $ق(١) = ١-١+٢ = ٢$

اذا

$\lim_{س \to ١^{-}} ق(س) = \lim_{س \to ١^{+}} ق(س) = ق(١) = ٢$ وبالتالي الاقتران متصل عند الواحد

مما سبق نجدان الاقتران متصل على مجاله ع

٢-٢) عين الثابت أ اذا علمت ان الاقتران $ق(س)$ متصل عند الصفر

$$ق(س) = \begin{cases} س+أ & س \leq ٠ \\ \frac{ظا٢س}{٣س} & ٠ \prec س \prec \frac{\pi}{٤} \end{cases}$$

الحل : بما ان الاقتران متصل عند الصفر عندئذ يتحقق

$$\lim_{س \to ٠^{-}} (س+أ) = \lim_{س \to ٠^{+}} \frac{ظا٢س}{٣س} = ق(٠)$$

$$أ = \frac{٢}{٣} = أ$$

والاقتران هو $ق(س) = \begin{cases} س+\frac{٢}{٣} & س \leq ٠ \\ \frac{ظا٢س}{٣س} & ٠ \prec س \prec \frac{\pi}{٤} \end{cases}$

٣-٢) جد مشتقة الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س جاس}}{\text{س} - ١}$

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س جاس}}{\text{س} - ١}$ مجاله $\text{ع} - \{١\}$ وهو قابل للاشتقاق على كل من الفترتين $(-\infty،١)،(١،\infty)$

$$\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س جاس}}{\text{س} - ١}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{\left(\text{جاس} + \text{س جتاس}\right)(\text{س} - ١) - ١ \times \text{س جاس}}{(\text{س} - ١)^{٢}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{\text{س جاس} - \text{جاس} + \text{س}^{٢}\,\text{جتاس} - \text{س جتاس} - ١ \times \text{س جاس}}{(\text{س} - ١)^{٢}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{-\text{جاس} + \text{س}^{٢}\,\text{جتاس} - \text{س جتاس}}{(\text{س} - ١)^{٢}}$$

٤- ٢) اوجد وفق التعريف مشتقة الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}}\,\text{جاس}$

الحل مجال الاقتران $[٠،\infty)$ لندرس قابلة الاشتقاق على الفترة المفتوحة $(٠،\infty)$

لتكن $\text{س}،\text{ع} \in (٠،\infty)$ اختياريتين ولنشكل

$$\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\sqrt{\text{ع}}\,\text{جاع} - \sqrt{\text{س}}\,\text{جاس}}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\sqrt{\text{ع}}\,\text{جاع} - \sqrt{\text{س}}\,\text{جاع} + \sqrt{\text{س}}\,\text{جاع} - \sqrt{\text{س}}\,\text{جاس}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\text{جاع}\left(\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}\right) + \sqrt{\text{س}}\left(\text{جاع} - \text{جاس}\right)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\text{جاع}\left(\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}\right)}{\text{ع} - \text{س}} + \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\sqrt{\text{س}}\left(\text{جاع} - \text{جاس}\right)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\text{جاع}\left(\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}\right)}{\left(\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}\right)\left(\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}\right)} + \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\sqrt{\text{س}}\left(٢\,\text{جتا}\dfrac{\text{ع} + \text{س}}{٢}\,\text{جا}\dfrac{\text{ع} - \text{س}}{٢}\right)}{\text{ع} - \text{س}}$$

لما كانت $\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\left(\text{جا}\dfrac{\text{ع} - \text{س}}{٢}\right)}{\dfrac{\text{ع} - \text{س}}{٢}} = ١$

$$\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\text{جاع}}{\left(\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}\right)} + \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \sqrt{\text{س}} \times ٢\,\text{جتا}\dfrac{\text{ع} + \text{س}}{٢}\,\dfrac{\left(\text{جا}\dfrac{\text{ع} - \text{س}}{٢}\right)}{\text{ع} - \text{س}} = \dfrac{\text{جاس}}{٢\sqrt{\text{س}}} + ٢\sqrt{\text{س}}\,\text{جتاس} \times \dfrac{١}{٢}$$

اذا $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{جاس}}{2\sqrt{\text{س}}} + \sqrt{\text{س}}\,\text{جتاس}$ مجاله $(\infty ,0)$

٥-٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3 - \text{س}^2$، $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{8}{\text{س}}$ جد $\left(\text{ق} \circ \text{هـ}'\right)'(2)$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{8}{\text{س}} \Leftarrow \text{هـ}'(\text{س}) = \frac{-8}{\text{س}^2}$$

$$\left(\text{ق} \circ \text{هـ}'\right)(\text{س}) = \text{ق}\left(\text{هـ}'(\text{س})\right) = \text{ق}\left(\frac{-8}{\text{س}^2}\right) = \left(\frac{-8}{\text{س}^2}\right)^3 - \left(\frac{-8}{\text{س}^2}\right)^2 = \frac{-512}{\text{س}^6} - \frac{64}{\text{س}^4}$$

$$\left(\text{ق} \circ \text{هـ}'\right)'(\text{س}) = \left(\frac{-512}{\text{س}^6} - \frac{64}{\text{س}^4}\right)' = \left(\frac{3072}{\text{س}^7} + \frac{256}{\text{س}^5}\right)$$

$$\left(\text{ق} \circ \text{هـ}'\right)'(2) = \left(\frac{3072}{128} + \frac{256}{32}\right) = 24 + 8 = 32$$

طريقة أخرى

$$\left(\text{ق} \circ \text{هـ}'\right)'(2) = \left(\text{ق}\left(\text{هـ}'(2)\right)\right)'(2) = \text{هـ}''(2)\,\text{ق}'\left(\text{هـ}'(2)\right)$$

$$\text{هـ}'(\text{س}) = \frac{-8}{\text{س}^2}،\ \text{ق}'(\text{س}) = 3\text{س}^2 - 2\text{س}،\ \text{هـ}''(\text{س}) = \frac{16}{\text{س}^3}$$

$$\text{هـ}''(2) = 2،\ \text{هـ}'(2) = -2،\ \text{هـ}(2) = 4$$

$$\text{هـ}''(2)\,\text{ق}'\left(\text{هـ}'(2)\right) = 2\,\text{ق}'(-2) = 2(16) = 32$$

٦-٢) إذا علمت أن $\text{ص} = \frac{1}{2}\text{ق}\left(2\text{س}^2 - \text{س}\right)$، $\text{ق}'(6) = 4$ جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند $\text{س} = 2$

الحل :

$$\text{ص} = \frac{1}{2}\text{ق}\left(2\text{س}^2 - \text{س}\right)$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{2}(4\text{س} - 1)\,\text{ق}'\left(2\text{س}^2 - \text{س}\right)$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}(2) = \frac{1}{2}(8 - 1)\,\text{ق}'(8 - 2) = \frac{7}{2}\text{ق}'(6) = \frac{7}{2} \times 4 = 14$$

<u>السؤال الثالث</u> :

١-٣) جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $(\text{س} - 1)^2 - (\text{ص} + 2)^2 = 5$ عند نقطة سينها يساوي -٢

الحل : لنجد صادات نقطة التماس

$$(-2 - 1)^2 - (\text{ص} + 2)^2 = 5 \Leftarrow (\text{ص} + 2)^2 = 4$$

اما $\text{ص} + 2 = 2 \Leftarrow \text{ص} = 0$ والنقطة هي $(-2، 0)$ وهنالك نقطة أخرى لكن المطلوب نقطة واحدة

نشتق العلاقة $(\text{س} - 1)^2 - (\text{ص} + 2)^2 = 5$

$$2(\text{س} - 1) - 2(\text{ص} + 2)\text{ص}' = 0 \Leftarrow (\text{ص} + 2)\text{ص}' = (\text{س} - 1) \Leftarrow \text{ص}' = \frac{(\text{س} - 1)}{(\text{ص} + 2)}$$

إذا الميل عند النقطة $(\cdot ، -٢)$ هو $م = \frac{(-٢-١)}{(\cdot+٢)} = \frac{-٣}{٢}$

ومعادلة المماس في هذه النقطة

$$(ص - \cdot) = \frac{-٣}{٢}(س + ٢) \Leftarrow ص = \frac{-٣}{٢}(س + ٢) \Leftarrow ٣س + ٢ص + ٦ = \cdot$$

٢-٣) ذا كان ص – سص =جاس اثبت أن $ص'' + ص = \frac{٢ص'}{١ - س}$

الحل :نشتق العلاقة ص – سص =جاس نجد

$$ص' - ص - سص' = جتاس$$

$$ص'' - ص' - ص' - سص'' = -جاس$$

$$ص'' - سص'' - ٢ص' = -(ص - سص)$$

$$ص'' - سص'' - ٢ص' = -ص + سص$$

$$(١ - س)ص'' - ٢ص' = -(١ - س)ص$$

$$(١ - س)\left(ص'' + ص\right) = ٢ص'$$

$$\left(ص'' + ص\right) = \frac{٢ص'}{(١ - س)}$$

٣-٣) ادرس جهة تقعر الخط البياني لمنحنى الاقتران $ق(س) = |س^٢ - ٤س|$

نعيد تعريف الاقتران $ق(س) = |س^٢ - ٤س| = \begin{cases} س^٢ - ٤س & س < \cdot \\ -س^٢ + ٤س & \cdot \le س \le ٤ \\ س^٢ - ٤س & س > ٤ \end{cases}$

وهذا الاقتران قابل للاشتقاق مرتين على كل من الفترات المفتوحة المقابلة

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س - ٤ & س < \cdot \\ -٢س + ٤ & \cdot < س < ٤ \\ ٢س - ٤ & س > ٤ \end{cases}$$

$$ق''(س) = \begin{cases} ٢ & س < \cdot \\ -٢ & \cdot < س < ٤ \\ ٢ & س > ٤ \end{cases}$$

لما كان $ق''(س) > \cdot$ على الفترة $(-\infty ، \cdot)$ فالخط البياني يتقعر في هذه الفترة نحو لسينات الموجبة

ولما كان $ق''(س) < \cdot$ على الفترة $(\cdot ، ٤)$ فالخط البياني يتقعر في هذه الفترة نحو لسينات السالبة

وبما ان الاقتران متصل على الفترة المغلقة كثير حدود فالتقعر يكون نحو السينات السالبة على الفترة $[\cdot ، ٤]$

لما كان $ق''(س) > \cdot$ على الفترة $(٤ ، \infty)$ فالخط البياني يتقعر في هذه الفترة نحو السينات الموجبة

(يمكن أن نشكل جدول وندرس فيه إشارة المشتقة الثانية)

٤-٢) اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{٢} + ٢\text{هـ}،\ \frac{\text{دس}}{\text{دهـ}} = ٤\text{هـ}$ جد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ عند $\text{هـ} = ١$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دهـ}} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دس}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دهـ}} = ٢\text{هـ} + ٢،\ \frac{\text{دهـ}}{\text{دس}} = \frac{١}{٤\text{هـ}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دهـ}} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دس}} = \frac{٢\text{هـ} + ٢}{٤\text{هـ}} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢\text{هـ}}$$

$$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right) = \frac{\text{د}}{\text{دهـ}}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right) \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دس}} = \frac{\text{د}}{\text{دهـ}}\left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢\text{هـ}}\right) \times \frac{١}{٤\text{هـ}} = \frac{-١}{٢\text{هـ}^{٢}} \times \frac{١}{٤\text{هـ}} = \frac{-١}{٨\text{هـ}^{٣}}$$

عندما $\text{هـ} = ١$ نجد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}(١) = \frac{-١}{٨}$

٥-٣) جد كل من ب،جـ بحيث يكون المستقيم $\text{ص} - \text{س} - ٢ = ٠$ مماسا لمنحنى الاقتران

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{جـ}$ عند النقطة (٠،٢)

الحل : احداثيا النقطة (٠،٢) تحقق معادلة الاقتران لأنها نقطة تماس $\text{ق}(٠) = ٢$

$\text{ق}(٠) = ٠^{٢} + \text{ب} \times ٠ + \text{جـ}$

$٢ = \text{جـ}$

والمشتق عند هذه النقطة هو ميل المماس

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س} + \text{ب}$

وميل المماس هو $\text{م} = ١$ هو ميل المستقيم $\text{ص} - \text{س} - ٢ = ٠$ نشتق $\text{ص}' - ١ = ٠ \Leftarrow \text{م} = ١$

اذا $\text{م} = ١ = \text{ق}'(٠) = ٢(٠) + \text{ب} \Leftarrow \text{ب} = ١$

ومعادلة الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + \text{س} + ٢$

<u>السؤال الرابع</u> :

٤-١) اسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها ٨ سم وارتفاعها ١٦ سم صب فيها سائل بمعدل ١٦πسم مكعب/د جد معدل تغير ارتفاع السائل في الاسطوانة

الحل :بفرض ارتفاع السائل في الاسطوانة هو س اذا حجم الاسطوانة المائية هو

$\text{ع} = \pi \text{نق}^{٢}\text{س}$

$\text{ع} = ٦٤\pi\text{س}$ نشتق بالنسبة للزمن

$$\frac{\text{دع}}{\text{دهـ}} = ٦٤\pi \frac{\text{دس}}{\text{دهـ}}$$

$$١٦\pi = ٦٤\pi \frac{\text{دس}}{\text{دهـ}}$$

$\frac{\text{دس}}{\text{دهـ}} = \frac{١}{٤}$سم/د وهو مقدار ثابت وهذا يعني ان حركة الارتفاع منتظمة

٢-٤) اذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٤ & \text{س} \le ٠ \\ [\text{س} + ٤] & ٠ < \text{س} < ١ \\ |٣\text{س} + ١| & \text{س} \ge ١ \end{cases}$$

جد فترات التزايد والتناقص ثم عين ما للاقتران من نقاط حرجة وقيم محلية وقصوى ان وجدت

الحل :نعيد تعريف الاقتران

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٤ & \text{س} \le ٠ \\ ٤ & ٠ < \text{س} < ١ \\ ٣\text{س} + ١ & \text{س} \ge ١ \end{cases}$$

من الأفضل أن نكتب الخطوات بشكل مفصل

هذا الاقتران متصل على كل من الفترات المفتوحة $(-\infty،٠)،(٠،١)،(١،\infty)$ والتبرير كل منها كثير حدود معرف على فترة مفتوحة فهو متصل عليها

لندرس الاتصال عند نقط التفرع

$$\lim_{\text{س}\to ٠^-}\left(\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٤\right) = ٤،\ \lim_{\text{س}\to ٠^+}\text{ق}(\text{س}) = ٤،\ \text{ق}(٠) = ٤$$

وعليه الاقتران متصل عند الصفر

عند الواحد $\lim_{\text{س}\to ١^-}\text{ق}(\text{س}) = ٤،\ \text{ق}(١) = ٤$ و $\lim_{\text{س}\to ١^+}(٣\text{س} + ١) = ٤$ ومن تساوي هذه العلاقات الثلاث

نجد ان الاقتران متصل عند الواحد الاقتران متصل على ح

نشتق مع فتح الفترات $\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ٦ & \text{س} < ٠ \\ ٠ & ٠ < \text{س} < ١ \\ ٣ & \text{س} > ١ \end{cases}$

ولندرس قابلية الاشتقاق عند نقط التشعب

$$\lim_{\text{س}\to ٠^-}\frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٠)}{\text{س} - ٠} = \lim_{\text{س}\to ٠^-}\frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٤ - ٤}{\text{س}} = \lim_{\text{س}\to ١^-}\frac{\text{س}(\text{س} + ٦)}{\text{س}} = ٦$$

$$\lim_{\text{س}\to ٠^+}\frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٠)}{\text{س} - ٠} = \lim_{\text{س}\to ٠^+}\frac{٤ - ٤}{\text{س}} = ٠$$

طبعا غير قابل للاشتقاق عند الصفر

عند الواحد يجب أن يدرس وفق التعريف ولا يجوز أن نعوض بقاعدتي المشتق عند الواحد

$$\lim_{\text{س}\to ١^-}\frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س}\to ١^-}\frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س}\to ١^-}\frac{٤ - ٤}{\text{س} - ١} = ٠$$

وهي قيمة المشتقة من اليسار

عند الواحد

$$\lim_{\text{س}\to ١^+}\frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س}\to ١^+}\frac{٣\text{س} + ١ - ٤}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س}\to ١^+}\frac{٤(\text{س} - ١)}{\text{س} - ١} = ٤$$

المشتقة من اليمين

وعدم التساوي يعني الاقتران غير قابل للاشتقاق عند الواحد

ينعدم المشتق عندما $٢س + ٦ = ٠ \Leftrightarrow س = -٣ \in (-\infty، ٠)، ق(-٣) = -٥$

من الأفضل أن نشكل جدول لدراسة الاطراد

س	$+\infty$	١	٠	-٣	$-\infty$
$ق'(س)$	+++++	‖	. . . ‖ +++	. ----	
$ق(س)$	متزايد	٤ ‖ ٤	ثابت	٤ ‖ ٤ متزايد	متناقص
		٤		٤ -٥	

$ق'(س) < ٠$ لأجل كل س من $(-\infty، -٣)$ اذا الاقتران متناقص على الفترة $(-\infty، -٣)$
$ق'(س) > ٠$ لأجل كل س من $(-٣، ٠)،(١، \infty)$ وبالتالي متزايد عل كل من الفترات
$(-٣، ٠)،(١، \infty)$ ولأنه متصل فهو متزايد على $[-٣، ٠]،[١، \infty)$ وثابت على الفترة $[٠، ١]$ لان المشتق معدوم وهو متصل عليها
هنالك نقط حرجة وهي $(-٣، ٠)$ انعدم عندها المشتق الأول مغيرا إشارته
وكل من $(٠، ٤)،(١، ٤)$ غير قابل للاشتقاق عندها نقط حرجة
كما أن للاقتران نقط حرجة في كامل الفترة $(٠، ١)$ فالمشتق ينعدم عند كل نقطة من هذه الفترة
$ق(-٣) = -٥$ قيمة صغرى محلية انعدم المشتق عنده مغيرا إشارته من سالب إلى موجب
كما أن للاقتران قيمة محلية عند كل نقطة من الفترة $(٠، ١)$ هي ٤ اما $ق(٠) = ٤$ قيمة كبرى محليا
و $ق(١) = ٤$ قيمة صغرى محليا
وله قيمة قصوى صغرى(قيمة مطلقة صغرى) هي $ق(-٣) = -٥$
٣ـ ٤)مثلث متطابق الساقين طول ساقه ٨ سم زاوية الرأس متغيرة قياسها هـ جد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة المثلث اكبر ما يمكن
الحل : مساحة هذا المثلث (مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب ضلعين ب جيب الزاوية بينهما)

$م = \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٨ \times$ جاهـ

$م = ٣٢$ جاهـ

نشتق بالسبة للزاوية

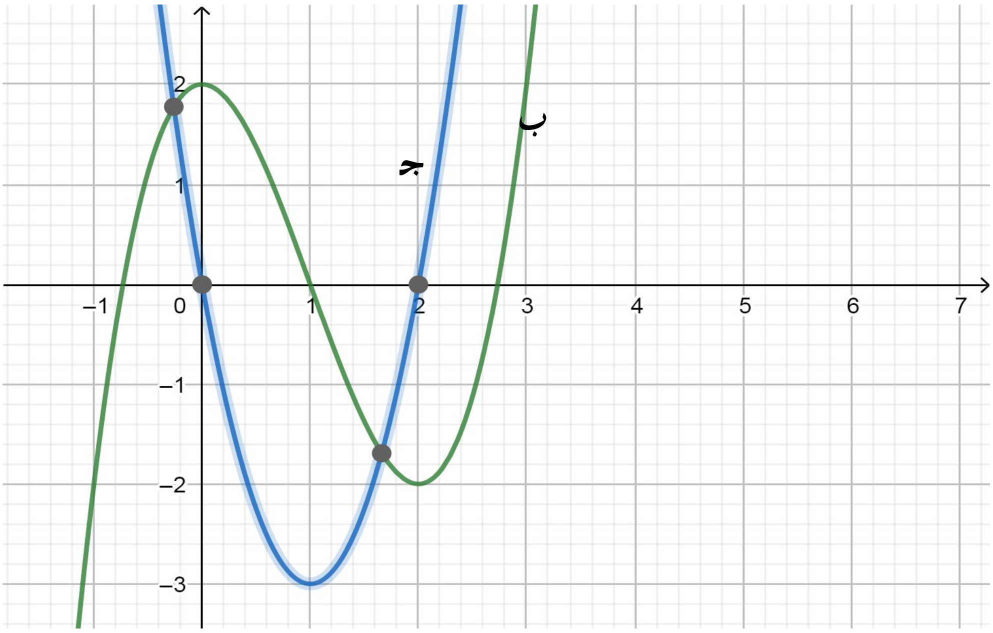
$م' = ٣٢$ جتاهـ ينعدم المشتق عندما جتاهـ $= ٠$ وما يناسب الحل هو هـ $= \frac{\pi}{٢}$ اذا $م\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ٣٢$

$م'' = -٣٢$ جاهـ

$م''\left(\frac{\pi}{٢}\right) = -٣٢ < ٠$

اذا للاقتران قيمة قصوى كبرى مطلقة عند هـ $= \frac{\pi}{٢}$ وعندها تكون المساحة اكبر ما يمكن وتساوي ٣٢ وحدة مربعة
٤ـ٤) في الرسم التالي خطان بيانيان ب،جاحدهما للاقتران $ق(س)$ والآخر لمشتقة الاقتران $ق'(س)$ دون ترتيب

قدم خمسة تبريرات لاختيار خط الاقتران ن(س) وخط الاقتران ن′(س)



الحل :

الخط ب هو للاقتران ن(س) والخط ج هو للمشتقة ن′(س) لان

١- لاحظ الخط ج موجب عندما يكون فوق محور السينات وهذا يعني انه موجب في كل من الفترتين (−∞،٠)،(٢،∞) وفي هاتين الفترتين نجد الخط ب يتجه نحو الأعلى مما يعني أن الاقتران متزايد في كل منهما

٢- في الفترة (٠،٢) يقع الخط ج تحت محور السينات فهو سالب إذا الخط ب يتجه نحو الأسفل مما يدل على تناقص الاقتران في هذه الفترة

٣- يقطع الخط ج محور السينات عند الصفر وهذا يعني ان المشتق انعدم مغيرا اشارتة عند الصفر وبالتالي سيكون للاقتران قيمة كبرى محلية ونقطة حرجة عن س = ٠ وهذا يعني وجود مماس للخط ب موازيا لمحو السينات

٤- كذلك نجد أن الخط ج يقطع محور السينات عند ال ٢ مما يدل أن للخطب قيمة محلية أيضا عند ال٢ ونقطة حرجة

٥- الخط ج يقبل مماس موازيا لمحور السينات عند س = ١

مما يعني انعدام المشتقة الثانية عند هذه النقطة وهذا وافق قبول الخط ب نقطة انعطاف عند هذه النقطة

تمنياتي لكم بالنجاح

عبدالرؤوف شطناوي **0785427460**