اقتران الجيب (جا) واقتران جيب التمام (جتا)

ما هي ال π هو عدد حقيقي غير نسبي قيمته التقريبية تساوي ٣،١٤ قسمه العشري غير منته وغير دوري

الراديان : هو قياس زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسا طولها نصف قطر الدائرة لاحظ طول القوس يساوي $نق$ وليس طول الوتر لو كان طول الوتر يساوي $نق$ لكان قياس الزاوية المركزية المقابلة يساوي ستون درجة

نعلم ان قوس الدائرة طوله ٢πنق وهو مقسم الى ٢π قوسا طول كل منها نق وكل نق هي واحد راديان اذا قياس الزاوية التي تقابل قوس الدائرة كاملا هو ٢π راديان

اما تحويل الراديان الى درجات

كل ٣٦٠ درجة تقابل ٢π راديان

وكل ع درجة تقابل واحد راديان

وعليه $ع = \frac{٣٦٠}{٢\pi} = \frac{١٨٠}{\pi} = \frac{١٨٠}{٣،١٤} \approx ٥٧،٣٢$ درجة

اذا قيمة واحد راديان تساوي تقريبا ٥٧،٣٢ درجة

الدائرة المثلثية دائرة موجهة نصف قطرها يساوي واحدة (وحدة) الاطوال الاتجاه الموجب عكس عقارب الساعة

الان سنقوم بتمثيل الاعداد الحقيقية على الدائرة المثلثية بمعنى سنلف محور الاعداد الحقيقية على الدائرة المثلثية الجزء الموجب بالاتجاه الموجب للدوران والسالب بالاتجاه السالب مع عقارب الساعة على ان يقابل الصفر النقطة (١،٠) من الدائرة المثلثية وهي تقع على محور السينات

وبالتالي العدد واحد من المحور سيقابل نقطة من الدائرة بحيث يكون طول القوس الناتج الذي مبدؤه النقطة (١،٠) يساوي الواحد لاحظ ان هذا القوس يقابل زاوية مركزية قياسها واحد راديان

لان طول القوس = قياس الزاوية بالراديان ضرب نصف القطر وبما ان نصف القطر في الدائرة المثلثية يساوي الواحد فان طول القوس يساوي الزاوية بالراديان فاذا كان طول القوس يساوي ٣ لكانت الزاوية المركزية التي تحصره قياسها ٣ راديان

(اما مصطلح قياس قوس في دائرة فهو قياس الزاوية المركزية التي تحصر هذا القوس)

الان سنعرف اقتران مجاله مجموعة الاعداد الحقيقية ومجاله المقابل ايضا مجموعة الاعداد الحقيقية ومداه الفترة [−١،١]

وقاعدة ربط الاقتران هي فاصلة نقطة متحركة على الدائرة المثلثية

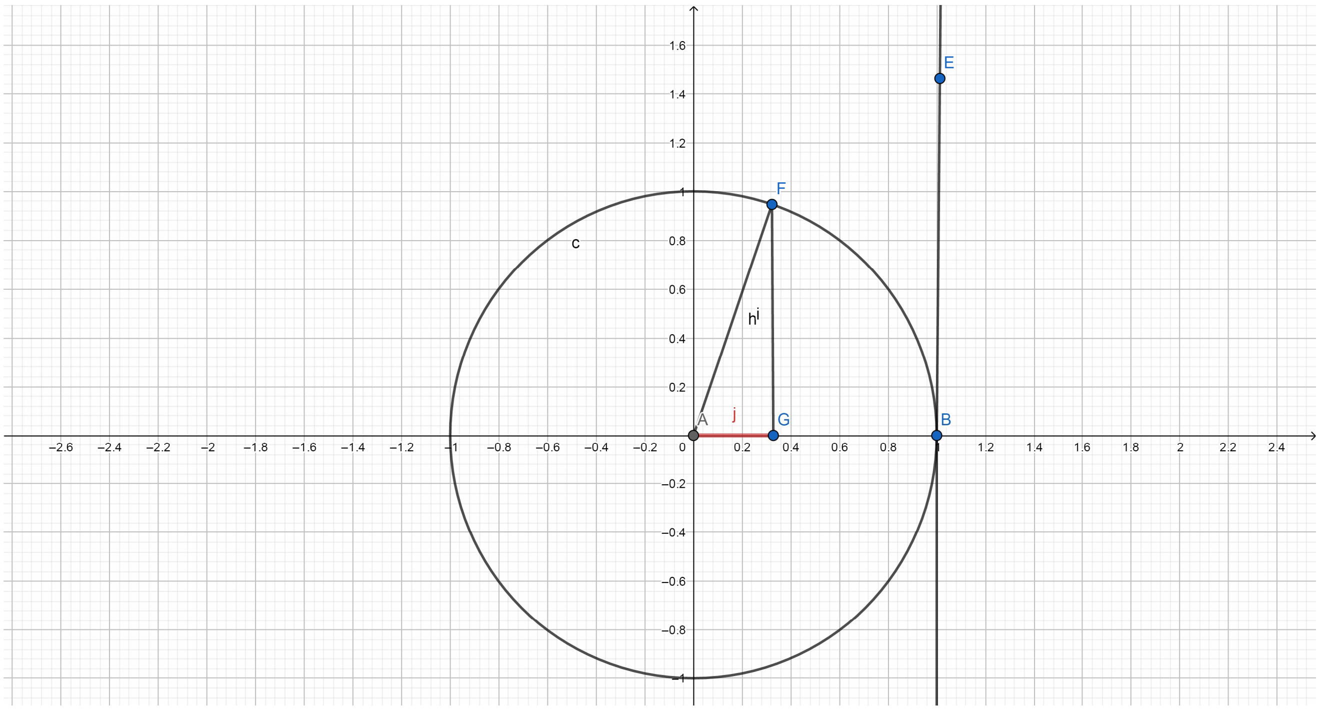
فمثلا صورة العدد الحقيقي ٢ نجدها بالشكل التالي

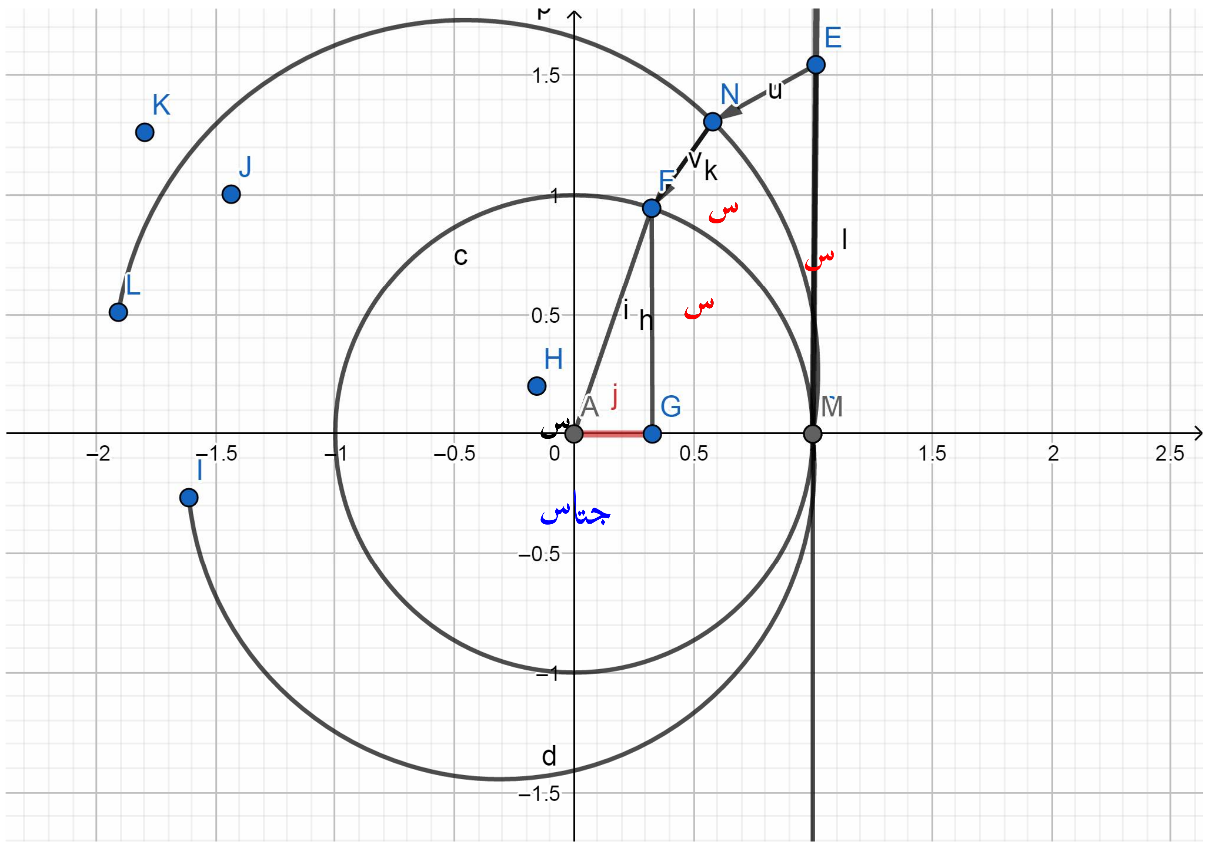
العدد٢ يقابل قوسا من الدائرة المثلثية طولها ٢ وهذه القوس تقابل زاوية مركزية قياسها ٢ راديان وفاصلة النقطة المقابلة للعدد ٢ ما هي الا جتا الزاوية ٢ راديان وقيمتها

جتا$(٢ \times ٥٧،٣٢)^\circ$ = جتا$(١١٤،٦٤)^\circ = −٠،٥٨$

مما يعني ان جتا:ع ← [−١،١]:س ← ق(س) = فاصلة النقطة س من الدائرة المثلثية وهذه الفاصلة تساوي جتا الزاوية المركزية التي قياسها س راديان

وبالتالي ق(س) = جتاس





مثال جد صورة كل من الاعداد التالية ٠، $\frac{\pi}{٣}$، ٣، -١، -٤، ٢، ١، $\frac{٣٣\pi}{٤}$ لاحظ ان هذه الاعداد كلها اعداد حقيقية

الحل

ن(٠) = سنمثل النقطة صفر على الدائرة المثلثية وهي نقطة تقاطع الدائرة مع محور السينات وفاصلة هذه النقطة تساوي واحد وما هي الا جتا الزاوية صفر راديان

$\text{ق}(\text{٠}) = \text{جتا}\,\text{٠} = \text{١}$

$\text{ق}\left(\frac{\pi}{\text{٣}}\right) = \text{ق}\left(\frac{\text{٣،١٤}}{\text{٣}}\right) = \text{ق}(\text{١،٠٤٦})$ لاحظ اننا نبحث عن صورة عدد حقيقي

نمثل هذا العدد على الدائرة المثلثية بنقطة $\frac{\pi}{\text{٣}}$ المقابل لزاوية مركزية قياسها $\frac{\pi}{\text{٣}}$ راديان وفاصلة هذه النقطة هو $\text{جتا}\frac{\pi}{\text{٣}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

وبالتالي $\text{ق}\left(\frac{\pi}{\text{٣}}\right) = \text{جتا}\frac{\pi}{\text{٣}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

وبشكل مختصر

$\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس}$ صورة العدد الحقيقي س ما هي الا جتا الزاوية س راديان

مدى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس}$ هو $[-\text{١}،\text{١}]$

والسؤال كيف نجد مدى اقتران مثلثي

مثال جد مدى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٣}$

الحل مجال الاقتران هو ح

ولدينا $\text{جتاس} \in [-\text{١}،\text{١}] \Leftarrow \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} \in [\text{٠}،\text{١}]$ وبالتالي

$\text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} \in [\text{٠}،\text{٢}]$ تكافئ $\text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٣} \in [-\text{٣}،-\text{١}]$

اذا $\text{ق}(\text{س}) \in [-\text{٣}،-\text{١}] \Leftrightarrow -\text{٣} \le \text{ق}(\text{س}) \le -\text{١}$ يمكن ان توظيف هذه النتيجة في بحث التكامل

او في القيم القصوى فالاقتران $\text{ق}(\text{س})$ محدود من الادنى والاعلى ويبلغ كل من حديه فا $-\text{٣}$ قيمة مطلقة صغرى و $-\text{١}$ قيمة مطلقة عظمى

اما الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاهـ}(\text{س})$ له نفس مجال الاقتران $\text{هـ}(\text{س})$

كما ان هذا الاقتران متصل حيث الاقتران $\text{هـ}(\text{س})$ متصل وقابل للاشتقاق حيث $\text{هـ}(\text{س})$ قابل للاشتقاق

ومشتقه $\text{ق}'(\text{س}) = -\text{هـ}'(\text{س})\,\text{جاهـ}(\text{س})$

اما حلول المعادلة

$$\text{جتاس} = \text{جتا}\,\theta \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{س} = \theta + \text{٢}\pi\text{ن} : \text{ن} \in \text{ص} \\ \text{س} = -\theta + \text{٢}\pi\text{ن} : \text{ن} \in \text{ص}\end{array}\right.$$

$$\text{جتاس} = -\text{جتا}\,\theta \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{س} = \pi - \theta + \text{٢}\pi\text{ن} : \text{ن} \in \text{ص} \\ \text{س} = \pi + \theta + \text{٢}\pi\text{ن} : \text{ن} \in \text{ص}\end{array}\right.$$

الحالات الخاصة

$\text{جتاس} = \text{٠} \Leftrightarrow \text{س} = \frac{\pi}{\text{٢}} + \pi\text{ن}$

$\text{جتاس} = \text{١} \Leftrightarrow \text{س} = \text{٢}\pi\text{ن}$

$\text{جتاس} = -\text{١} \Leftrightarrow \text{س} = \pi + \text{٢}\pi\text{ن}$

الاقتران ق(س) =جتاس دوري دوره ٢π بمعنى ان

ق(س + ٢π) =جتا(س + ٢π) =جتاس = ق(س)

او ان خطه البياني يكرر نفسة في فترات طول كل منها يساوي ٢π

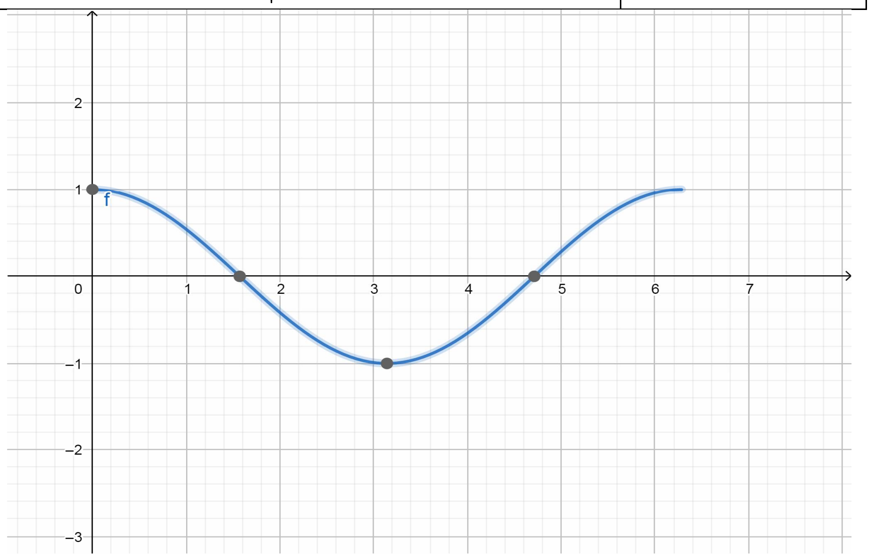
طبعا فيزيائيا الدور هو الزمن اللا زم لاتمام دورة كاملة للمتحرك

جدول اشارته

س	٢π	رابع	$\frac{٣\pi}{٢}$	ثالث	π	ثاني	$\frac{\pi}{٢}$	ربع اول	٠
ق(س) =جتاس	١	++	٠	--	١-	--	٠	+	١

وجدول التزايد والتناقص

س	٢π	رابع	$\frac{٣\pi}{٢}$	ثالث	π	ثاني	$\frac{\pi}{٢}$	ربع اول	٠
ق$'$(س)		++	++	++	٠	--	-----	-	
ق(س) =جتاس	٢π	↗	$\frac{٣\pi}{٢}$	↗	π	↘	$\frac{\pi}{٢}$	↘	٠



اما جا:ع ← [-١،١]

ق(س) =جاس = هي ترتيب النقطة التي تقابل العدد الحقيقي س وما هي الا جيب الزاوية س راديان

وما اريد ان اقوله لنفهم حقيقة الاشياء ثم نبحث عن الطريق المختصر ولا نريد أي ممارسات خاطئة تؤدي الى صح ، صحيح ان المحصلة صحيحة لكن العقل البشري لا يتقبلها ولا يقتنع الانسان ان لل π سلوك مزدوج

كنت اتمنى ان اشرح هذه الاشياء من خلال فيديو لكن للاسف ليس لدي امكانية تقنية لذلك