النقط الحرجة

اذا كانت $س = جـ$ تقع في مجال الإقتران $ق$ فإن $(جـ ، ق(جـ))$
تسمى نقطة حرجة للإقتران $ق$ اذا كانت $قَ(جـ) = صفر$ أو
غير موجودة .

تذكر : تكون المشتقة غير موجودة ، عند :

1. نقط عدم الاتصال .
2. أطراف الفترة .
3. الرؤوس المدببة " أصفار القيمة المطلقة " .

مثال: جد النقط الحرجة للإقتران $ق(س) = ٢س^٣ + ٣س^٢ - ١$: $س \geq -٢$

الحل: $قَ(س) = ٦س^٢ + ٦س = ٦س(س + ١)$

$قَ(س) = ٠ \leftarrow ٦س(س+١) = ٠ \leftarrow س = \{٠ ، -١\}$.

$قَ(س)$ غ.م عند $س = -٢$ " لأنها طرف فترة " .

$\leftarrow$ النقط الحرجة $(٠ ، ق(٠))$ ، $(-١ ، ق(-١))$ ، $(-٢ ، ق(-٢))$

$(٠ ، -١)$ $(-١ ، ٠)$ $(-٢ ، -٥)$

مثال: جد النقط الحرجة للإقتران $ق(س) = جاس - جتاس$: $س \in [٠ ، \pi]$.

الحل: $قَ(س) = جتاس + جاس$.

$قَ(س) = ٠ \leftarrow جتاس = -جاس \leftarrow ظاس = -١$

$\leftarrow س = \frac{٣\pi}{٤} \in (٠ ، \pi)$

$قَ(س)$ غ.م عند $س = \{٠ ، \pi\}$ لأنهما أطراف فترة .

$\therefore$ النقط الحرجة $(\frac{٣\pi}{٤} ، ق(\frac{٣\pi}{٤}))$ ، $(٠ ، ق(٠))$ ، $(\pi ، ق(\pi))$.

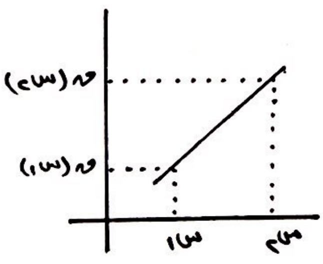
الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

التزايد والتناقص

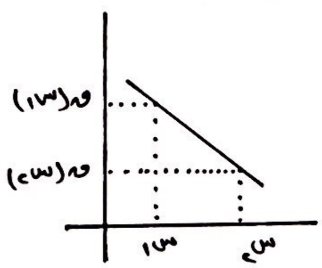
إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على الفترة [أ، ب] وكان :

س١، س٢ ∈ [أ، ب] بحيث س٢ > س١ ، فإن ق(س) :

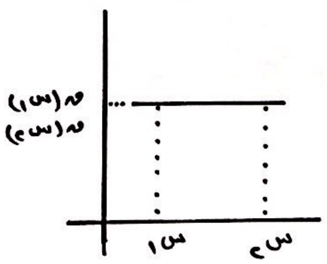
- متزايداً على الفترة [أ، ب] ، اذا كان ق(س٢) > ق(س١)
- متناقصاً على الفترة [أ، ب] ، اذا كان ق(س٢) < ق(س١)
- ثابتاً على الفترة [أ، ب] ، اذا كان ق(س٢) = ق(س١)



« متزايد »



« متناقص »



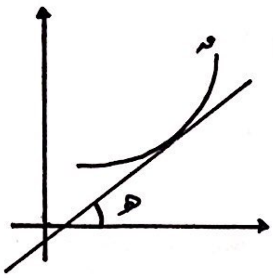
« ثابت »

- أما من خلال التفاضل بإمكاننا إيجاد التزايد والتناقص من خلال المشتقة الأولى ، حيث نشتق الاقتران ثم ندرس اشارة المشتقة فإذا كان :

- ق'(س) > صفر لكل س ∈ (أ، ب) ← ق(س) متزايد على [أ، ب]
- ق'(س) < صفر لكل س ∈ (أ، ب) ← ق(س) متناقص على [أ، ب]
- ق'(س) = صفر لكل س ∈ (أ، ب) ← ق(س) ثابت على [أ، ب]

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

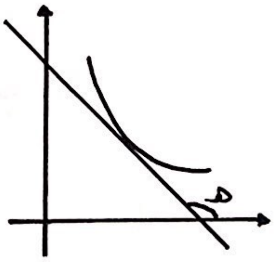
● أما من ناحية هندسية وباستخدام المماس ، فإنه :



• اذا صنع المماس زاوية حادة (هـ) مع محور السينات الموجب فإن ق(س) يكون متزايداً ، وذلك لأنه

ظاهـ > ٠ ← قَ(س) > صفر .

∴ ق(س) متزايد .



• أما إذا صنع المماس زاوية منفرجة (هـ) مع محور السينات الموجب فإن ق(س) يكون متناقصاً ، وذلك لأنه

ظاهـ < ٠ ← قَ(س) < صفر .

∴ ق(س) متناقص .

*   *   *   *   *

مثال: اذا كان ق(س) = س² + ٣ : س ∈ [٢، ٤] حدد فيما إذا كان الاقتران متزايداً أم متناقصاً على نفس الفترة .

الحل: قَ(س) = ٢س

قَ(س) = ٠ ← ٢س = ٠

← س = ٠

قَ : - - - ٠ + + +

لاحظ قَ > صفر لكل س > ٠ ← لكل س ∈ (٢، ٤)

∴ ق(س) متزايداً على الفترة [٢، ٤] .

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

مثال: إذا كانت ق(س) = { ٢س ، ١ < س ≤ ٢
صفر ، ٢ < س ≤ ٣
$-\frac{1}{3}$ س + ٥ ، ٣ < س < ٥

وكان ق(س) متصلاً على الفترة [١، ٥] ، حدد فترات التزايد والتناقص لـ ق(س) على نفس الفترة .

الحل: من خلال دراسة إشارة المشتقة جانباً .

ق'(س) > ٠ : س ∈ (١، ٢) ← ق متزايداً على [١، ٢]

ق'(س) < ٠ : س ∈ (٣، ٥) ← ق متناقصاً على [٣، ٥]

ق'(س) = ٠ : س ∈ (١، ٣) ← ق ثابتاً على [٢، ٣]

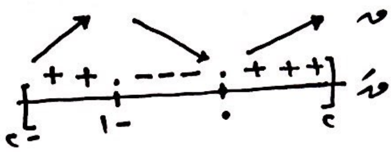
*   *   *   *   *

مثال: ليكن ق(س) = ٢س³ + ٣س² − ١ : س ∈ [−٢، ٢] ، حدد فترات التزايد والتناقص للإقتران ق(س) .

الحل: ق'(س) = ٦س² + ٦س

ق' = ٠ ← ٦س(س + ١) = ٠

← س = {٠ ، −١}



∴ ق(س) متزايداً على [−٢، −١] ، [٠، ٢]

ومتناقصاً على [−١، ٠]

الخلاصة : لإيجاد التزايد والتناقص من خلال المشتقة .

- أولاً نشتق الاقتران ق(س)
- ثانياً نجد القيم الحرجة للاقتران ونعينها على خط الأعداد .
- ثالثاً ندرس اشارة قَ(س) .
- رابعاً نطبق النظرية
  - قَ > ٠ ← ق ↑
  - قَ < ٠ ← ق ↓
  - قَ = ٠ ← ق ثابت .

* * * * *

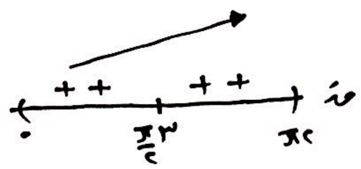
● ليس شرطاً أن تكون اشارة قَ(س) متذبذبة حول القيم الحرجة لذلك احذر عند دراسة الإشارة .

مثال: حدد فترات التزايد والتناقص لـ ق(س) = س - جتاس : س ∈ [٠، ٢π]

الحل: قَ(س) = ١ + جاس

قَ = ٠ ← جاس = -١

∴ س = $\frac{٣π}{٢}$.

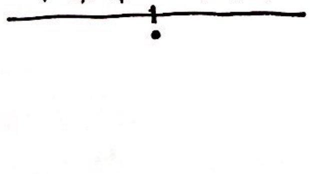


قَ > ٠ لكل س ∈ (٠، ٢π) ← ق(س) متزايداً على [٠، ٢π] .

مثال: حدد فترات التزايد والتناقص لـ ق(س) = س³ + ١ ؛ س ∈ ح .

الحل: قَ(س) = ٣س²

قَ = ٠ ← ٣س² = ٠ ← س = ٠



∴ ق(س) متزايد على ح .

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

مثال: (من الكتاب المدرسي)

إذا كان ق(س) =

$$
\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^2 + ٦\text{س} + ٤ & ، \text{س} \le ٠ \\ [\text{س} + ٤] & ، ٠ < \text{س} < ١ \\ |٣\text{س} + ١| & ، \text{س} \ge ١ \end{cases}
$$

حدد فترات التزايد والتناقص للإقتران على مجاله .

الحل: نعيد تعريف الإقتران ق(س)

$$
\leftarrow \text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^2 + ٦\text{س} + ٤ & ، \text{س} \le ٠ \\ ٤ & ، ٠ < \text{س} < ١ \\ ٣\text{س} + ١ & ، \text{س} \ge ١ \end{cases}
$$

ق(س) متصل على مجاله ← نجد المشتقة ، حيث :

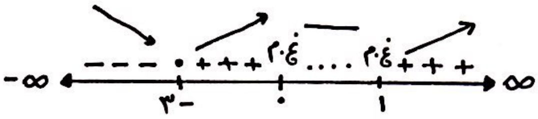
$$
\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ٦ & ، \text{س} < ٠ \\ ٠ & ، ٠ < \text{س} < ١ \\ ٣ & ، \text{س} > ١ \\ \text{غ.م} & ، \text{س} = \{٠ ، ١\} \end{cases}
$$

النقط الحرجة

ق'(س) : غ.م ← س = {٠ ، ١}

ق'(س) = صفر ← ٢س + ٦ = ٠ ← س = -٣

على خط الأعداد ←



ومنها ← ق متزايد على [-٣ ، ٠] ، [١ ، ∞)

متناقص على (-∞ ، -٣]

ثابت على [٠ ، ١]

الاستاذ : شادي خرفان

0797751710

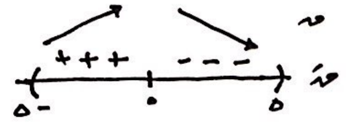
قد لا يعطي السؤال فترة لذلك لا بد من دراسة المجال وخاصة في الجذور والاقترانات الكسرية . وتذكر القيم الحرجة عندما $ق' = 0$. أو غ.م

مثال: حدد فترات التزايد والتناقص لـ $ق(س) = \sqrt{25 - س^2}$.

الحل: مجال $ق(س)$: $25 - س^2 \geq 0 \leftarrow س^2 \leq 25 \leftarrow -5 \leq س \leq 5$

$\therefore$ $ق(س)$ معرف على الفترة $س \in [-5 ، 5]$.

$ق'(س) = \frac{-س}{\sqrt{25 - س^2}}$. $ق'(س) = 0 \leftarrow س = 0 \in (-5 ، 5)$



$\therefore$ $ق(س)$ متزايد على الفترة $[-5 ، 0]$

متناقص على الفترة $[0 ، 5]$

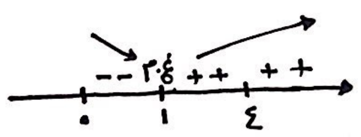
مثال: حدد فترات التزايد والتناقص لـ $ق(س) = \frac{2س}{\sqrt{س} - 1}$.

الحل: مجال $ق(س)$: $س \geq$ صفر $- \{1\}$ "مجال اقتران كسري" .

$$ق'(س) = \frac{2(\sqrt{س} - 1) - 2س\left(\frac{1}{2\sqrt{س}}\right)}{(\sqrt{س} - 1)^2} = \frac{\sqrt{س} - 2}{(\sqrt{س} - 1)^2} .$$

$ق'(س) = 0 \leftarrow \sqrt{س} - 2 = 0 \leftarrow س = 4$

$ق'(س)$ غ.م $\leftarrow س = 1$ "أصفار المقام" .



$\therefore$ $ق(س)$ متناقص على $[0 ، 1)$

متزايد على $(1 ، \infty)$.

وضعت الفترة مفتوحة عند $س = 1$ لأنه ١ أصلاً خارج المجال وليس لأنه $ق'$ عندها غير موجودة .

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

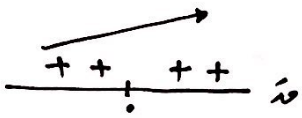
تذكر: القيم الحرجة تكون عندما $قَ$ غ.م أيضاً وليس فقط $قَ = ٠$.

مثال: $ق(س) = \sqrt[3]{س}$ ، حدد فترات التزايد والتناقص على مجاله.

الحل: مجال ق هو $س \in ح$.

$قَ(س) = \frac{1}{3\sqrt[3]{س^2}}$ ،

$قَ \neq ٠$ ، $قَ$ غ.م $\leftarrow س = ٠$



∴ $ق(س)$ متزايد على ح.

* * * * *

تدريبات

• حدد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة لكل من الاقترانات التالية:

1) $ق(س) = 1 + جاس$: $س \in [٠ ، ٢\pi]$.

2) $ق(س) = \frac{1}{2} جا^2س$: $س \in [\frac{\pi}{2} ، \frac{3\pi}{2}]$.

3) $ق(س) = \frac{1}{س}$: $س \in [-5 ، -1]$

4) $ق(س) = \sqrt{4 - س^2}$: $س \in [-1 ، 1]$

5) $ق(س) = جتاس - \frac{1}{2} جتا^2س$: $س \in [٠ ، ٢\pi]$

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

مثال: إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ وقابلاً

للاشتقاق على الفترة $(٠ ، \frac{\pi}{٢})$ ؛ وكان هـ(س) = ٢ق(س) ـ جتاس

فأثبت أن هـ(س) متزايد على الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ ، حيث قَ(س) > ٠

لكل س ∈ (أ ، ب)

الحل: هـَ(س) = ٢ قَ(س) + جاس

وحيث أن ق(س) متزايد على الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

∴ قَ(س) > صفر على $(٠ ، \frac{\pi}{٢})$

وكذلك جاس > ٠ على الفترة $(٠ ، \frac{\pi}{٢})$

∴ هـَ(س) > صفر على الفترة $(٠ ، \frac{\pi}{٢})$

← هـ(س) متزايد على الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$.

تدريب: اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على الفترة [أ ، ب] وقابلاً

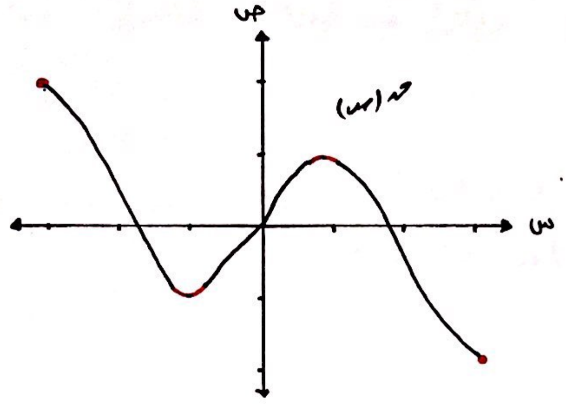
للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) ، وكان قَ(س) < ٠ لكل س ∈ (أ ، ب)

وكان ع(س) = ٢س^{٥} ـ قَ(س) ، فأثبت أن ع(س) متزايد

على الفترة [أ ، ب] .

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

القيم القصوى



(١) ق(١) = ١ هي أكبر قيمة للاقتران ق(س) في فترة مفتوحة حول العدد س = ١ ، ومثل هذه القيمة تسمى قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س).

(٢) ق(-٣) = ٢ هي أكبر قيمة للاقتران ق(س) على الفترة المعرف عليها ق كاملة [-٣ ، ٣] ومثل هذه القيمة تسمى قيمة عظمى مطلقة للاقتران ق(س).

(٣) ق(-١) = -١ تعتبر قيمة صغرى محلية (لماذا ؟)

(٤) ق(٣) = -٢ تعتبر قيمة صغرى مطلقة (لماذا ؟)

◉ العلاقة بين النقط الحرجة للاقتران والقيم القصوى .

كل قيمة قصوى هي في الأساس نقطة حرجة والعكس غير صحيح.

أي اذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على [أ ، ب] وكانت ق(جـ) قيمة قصوى للاقتران ، حيث جـ ∈ [أ ، ب] ، فإن قَ(جـ) = صفر أو غير موجودة

◉ اختبار المشتقة الأولى

اذا كانت (جـ ، ق(جـ)) نقطة حرجة لـ ق فإن :

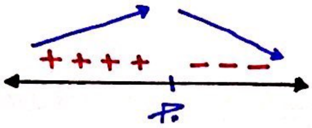
(I) إذا كان قَ(س) ≥ صفر لكل س < جـ وكان قَ(س) ≤ ٠ لكل س > جـ ، فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق .

(II) اذا كان قَ(س) ≤ صفر لكل س < جـ وكان قَ(س) ≥ ٠ لكل س > جـ ، فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق .

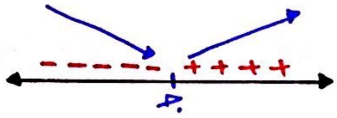
الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

③ شرح اختبار المشتقة الأولى .

" بعد أن نجد النقط الحرجة للإقتران وذلك من خلال قَ(س) . ندرس اشارة المشتقة على خط الأعداد .



(I) في حال اختلفت اشارة قَ كانت موجبة ثم سالبة (أي أن ق كان متزايداً ثم أصبح متناقصاً) فإن ق(جـ) تعتبر عظمى محلية .



(II) أما في حال كانت اشارة قَ سالبة ثم موجبة (أي أن ق كان متناقصاً ثم أصبح متزايداً) فإن ق(جـ) تعتبر صغرى محلية .

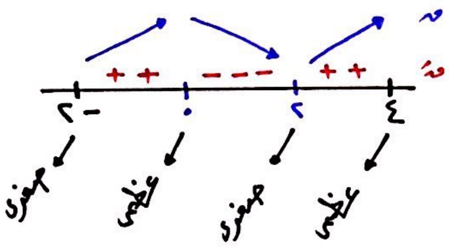
مثال: جد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) لـ ق(س) = س٣ - ٣س٢ + ١
حيث س ∈ [-٢، ٤] .

الحل: قَ(س) = ٣س٢ - ٦س ← قَ(س) = ٠ ← ٣س(س - ٢) = ٠

∴ س = {٠، ٢} .

قَ(س) غير موجودة عند أطراف الفترة ← س = {-٢، ٤}

* وبدراسة اشارة قَ(س) ؛ فإن :



الصغرى { ق(-٢) = (-٢)٣ - ٣(-٢)٢ + ١ = -١٩
ق(٢) = -٣ }

∴ للإقتران قيمة صغرى مطلقة عند س = -٢ ومقدارها -١٩ ، وقيمة صغرى محلية عند س = ٢ ومقدارها -٣

العظمى { ق(٠) = ١ ، ق(٤) = ١٧

∴ للإقتران قيمة عظمى مطلقة عند س=٤ ومقدارها ١٧ ، وقيمة عظمى محلية عند س = صفر ومقدارها ١ .

إذاً وباختصار أعزائي ما سنفعله في هذا الدرس؛ لإيجاد القيم القصوى.

(I) نشتق الاقتران ونجد القيم الحرجة : من خلال مساواة الاقتران بالصفر أو غير موجودة.

(II) ندرس اشارة ق/(س) حول القيم الحرجة، ثم نطبق اختبار المشتقة الأولى.

(III) نقارن القيم العظمى مع بعضها (أكبرها) يكون قيمة مطلقة (ومحلية أيضاً) والبقية عظمى محلية.

ونقارن القيم الصغرى مع بعضها (أصغرها) يكون قيمة مطلقة (ومحلية أيضاً) والبقية صغرى محلية.

" أخطاء شائعة عند الطلبة "

في السؤال السابق مثلاً ق(-٢) = -١٩

* بعض الطلبة يكتب للاقتران ق قيمة صغرى مطلقة عند س=٢ ويتوقف.

أو أن يكتب أحدهم لـ ق قيمة صغرى مطلقة وهي ٢ .

وهذا خاطئ

* والصواب أن يكتب : لـ ق قيمة صغرى مطلقة عند س=٢ ومقدارها -١٩

أو أن يكتب : لـ ق قيمة صغرى مطلقة مقدارها -١٩

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

مثال: جد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت) للاقتران ق حيث:

$ق(س) = جتاس - \frac{1}{3} جتا^3 س$: $س \in [0، 2\pi]$

الحل: $ق'(س) = -جاس + جتا^2 س . جاس$.

$= جاس(جتا^2 س - 1) = جاس(-جا^2 س)$

$= -جا^3 س$

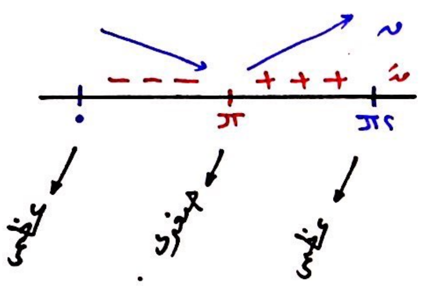
نجد النقط الحرجة : $ق' = 0 \leftarrow جا^3 س = 0 \leftarrow جاس = 0$: $س \in (0، 2\pi)$

$\leftarrow س = \{\pi\}$

وكذلك ق′ غير موجودة عند أطراف الفترة $\leftarrow س = \{0، 2\pi\}$

∴ للاقتران قيم حرجة عند $س = \{0، \pi، 2\pi\}$.

وبدراسة اشارة ق′ :



• للاقتران ق قيمة عظمى مطلقة (ومحلية ؟؟) عند س = 0 و س = 2π ومقدارها $\frac{2}{3}$

• للاقتران ق قيمة صغرى مطلقة عند س = π ومقدارها $-\frac{2}{3}$.

$ق(0) = \frac{2}{3}$

$ق(2\pi) = \frac{2}{3}$

$ق(\pi) = -\frac{2}{3}$

سؤال يراودني ؟؟

متى نكتب محلية ومطلقة ومتى نكتب مطلقة فقط

* لاحظ في المثال السابق عند س = π كتبنا مطلقة ومحلية على عكس س = 0، 2π

مثال: اذا كان ق(س) = |س − ٢| + $\frac{1}{س}$ ، س ≠ ٠ ، فجد القيم القصوى للاقتران ق في الفترة [−٢، ٣] ، إن وجدت .

الحل:

ق(س) =
- س − ٢ + $\frac{1}{س}$ ، ٢ ≤ س ≤ ٣
- ٢ − س + $\frac{1}{س}$ ، −٢ ≤ س < ٢ ، س ≠ ٠

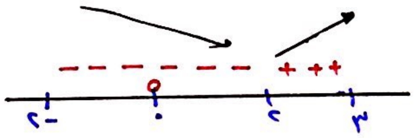
ق(س) متصل عند س = ٢ .

ق'(س) =
- ١ − $\frac{1}{س^2}$ ، ٢ < س < ٣
- −١ − $\frac{1}{س^2}$ ، −٢ < س < ٢
- غ. موجودة ، س = −٢، ٢، ٣، ٠

ق'(س) = ٠ ← ١ − $\frac{1}{س^2}$ = ٠ ← س = ±١ ∉ (٢، ٣)

← −١ − $\frac{1}{س^2}$ = ٠ ← س = ∅ .

ق'(س) غ.م ← س = −٢، ٠، ٢، ٣



- للاقتران ق قيمة صغرى عند س = ٢ ومقدارها ق(٢) = $\frac{1}{2}$
- للاقتران قيمة عظمى عند س = −٢ ومقدارها ق(−٢) = $\frac{7}{2}$

للاقتران قيمة عظمى عند س = ٣ ومقدارها ق(٣) = $\frac{4}{3}$

تدريب: جد القيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س) = $\frac{1}{س^2}$: س ≠ ٠ .

① س ∈ ح .

② س ∈ [−١، ٢]

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

مثال: جد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت) للإقتران :

$ق(س) = |(س - ١)^{٣}|$ ، حيث $س \in [-١ ، ٣]$.

الحل: نعيد تعريف الإقتران ق(س) .

$$ق = \begin{cases} (س - ١)^{٣} & ١ \leq س \leq ٣ \\ (١ - س)^{٣} & -١ \leq س \leq ١ \end{cases}$$

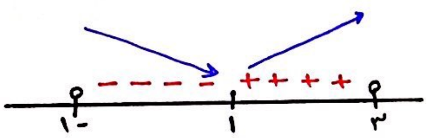
ق متصل عند س = ١ .

$$ق'(س) = \begin{cases} ٣(س - ١)^{٢} & ١ < س < ٣ \\ -٣(١ - س)^{٢} & -١ < س < ١ \\ غ.م & س = -١ ، ٣ \\ صفر & س = ١ \end{cases}$$

$ق'_{+}(١) = صفر$

$ق'_{-}(١) = صفر$

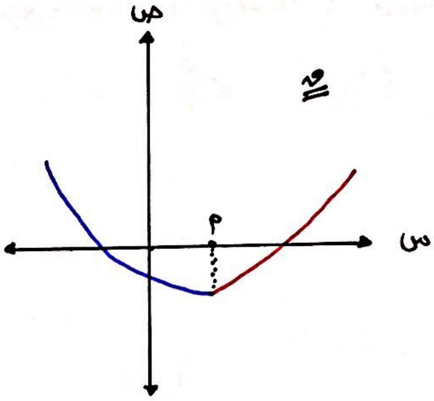
← النقط الحرجة $س = \{-١ ، ١ ، ٣\}$.

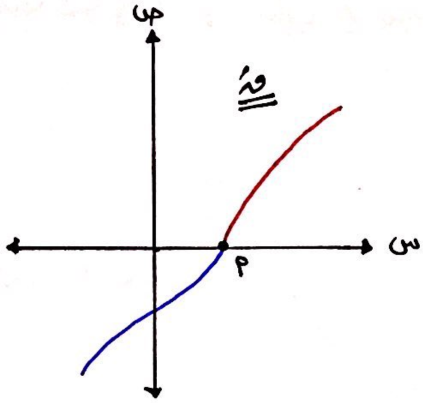


- للإقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة عند س = ١ ومقدارها ق(١) = ٠
- للإقتران قيمة عظمى ومطلقة عند $س = \{-١ ، ٣\}$ وقيمتها ق(−١) = ق(٣) = ٨ .

تدريب: إذا كان للإقتران كثير الحدود ع(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة (١، ٦) بين أن للإقتران $ق(س) = (٢ع(س) - ١٣)^{٣}$ قيمة عظمى محلية عند (١، −١) .

العلاقة بين ق ، قَ بيانياً





■ في الاقتران ق يكون الاقتران متناقصاً من $-\infty$ حتى س = م
أما في قَ فإننا نمثل التناقص "تحت محور السينات" حيث تكون
س = م (نقطة تقاطع منحنى قَ مع المحور السيني).

■ وكذلك لأنه ق تزايد من س = م حتى ∞ ، فإن منحنى قَ يُمثّل فوق محور السينات.

④ في منحنى قَ اذا قطع المحور السيني نطبق اختبار المشتقة الأولى للتزايد والتناقص لإيجاد القيم القصوى.

مثال: في المنحنى أعلاه قَ < ٠ لكل س < م
قَ > ٠ لكل س > م

← عند س = م لـ ق قيمة صغرى ومقدارها ق(م)

* وهذا ما يوضحه منحنى ق.

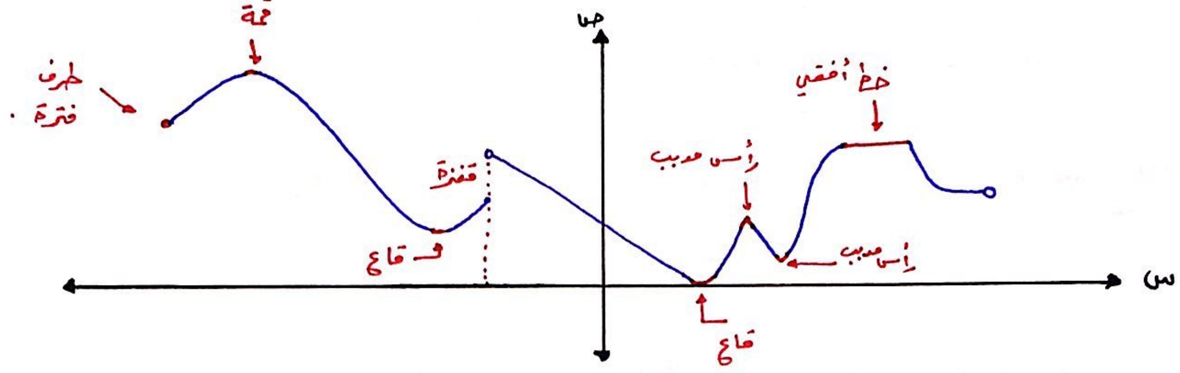
الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

منحنى ق

اذا أعطى منحنى ق فإن النقط الحرجة تكون :

القمة ، القاع ، القفزات ، الرؤوس المدببة ، الخط الأفقي

وأخيراً أطراف الفترة (المغلقة فقط) .



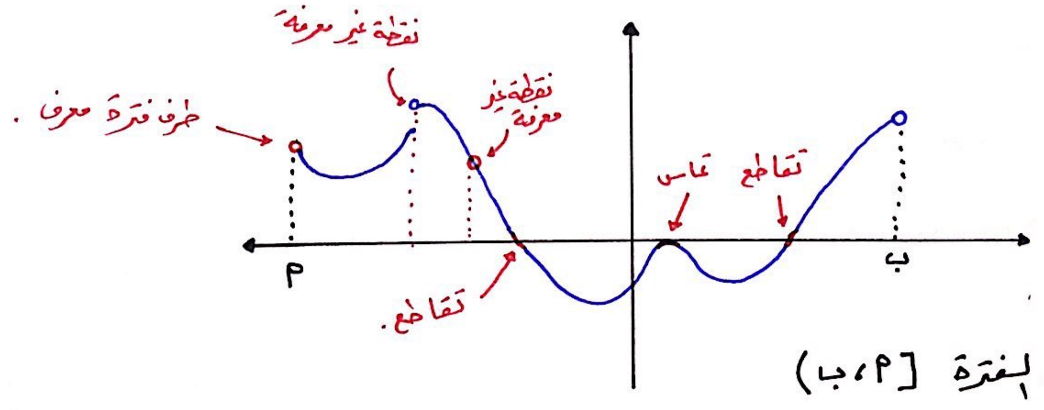
منحنى ق'

اذا أعطى الاقتران منحنى ق' فإن :

① يكون ق متزايد عندما ق' فوق محور السينات .

② يكون ق متناقصاً عندما ق' تحت محور السينات .

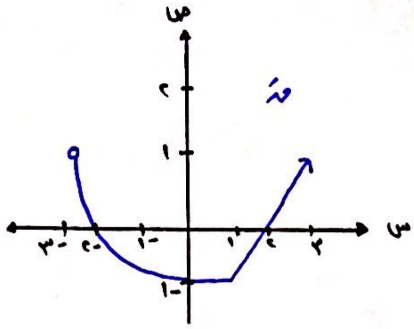
③ تكون النقط الحرجة عند نقط تقاطع وتلاقي (تماس) لمنحنى (ق') مع محور السينات ، وأطراف الفترة (بشرط أن تكون معرفة "مغلقة" في ق) والنقط الغير معرفة في ق' ومعرفة في ق .



▲ ق معرف على الفترة [أ ، ب]

الاستاذ : شادي خرفان 0797751710

مثال: اذا كان ق(س) اقتران معرف على الفترة [-٣ ، ∞) ، وكان الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) :



[١] حدد فترات التزايد والتناقص للإقتران ق .

[٢] حدد القيم القصوى للإقتران ق .

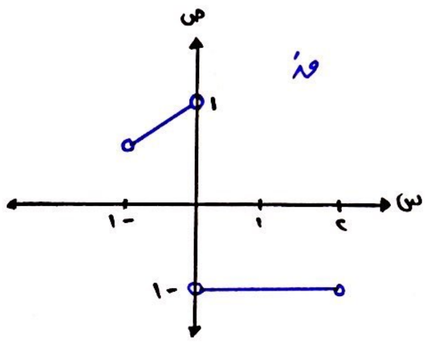
الحل: [١] ق متزايد على الفترة [-٣ ، -٢] ، [٢ ، ∞)

متناقص على الفترة [-٢ ، ٢] .

[٢] للإقتران ق قيمة عظمى مقدارها ق(-٢) .

للإقتران ق قيمة صغرى مقدارها ق(٢) .

تدريب: اذا كان ق(س) اقتران معرف على الفترة [-١ ، ٢] ، وكان الشكل المجاور يمثل ق(س) :



[١] حدد فترات التزايد والتناقص .

[٢] حدد القيم القصوى إن وجدت .

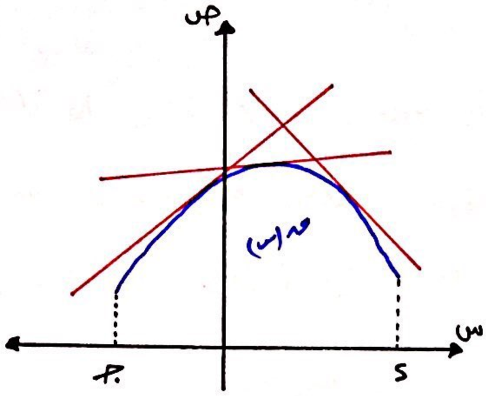
الحل: [١] ق متزايد على الفترة [-١ ، ٠]

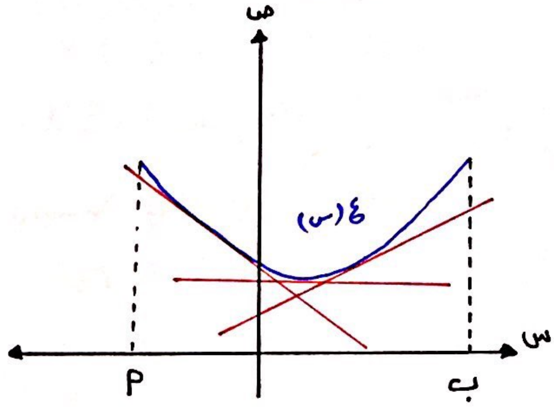
ق متناقص على الفترة [صفر ، ٢]

[٢] للإقتران ق قيمة عظمى محلية عند س = صفر .

الاستاذ : شادي خرفان 0797751710

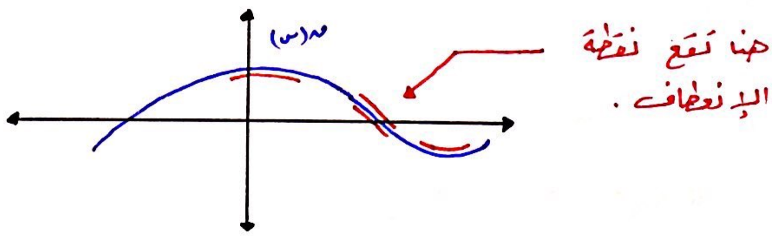
التقعر . "∩ ∪"





- في الإقتران ع(س) نلاحظ أن جميع المماسات ضمن الفترة (أ، ب) تقع جميعها تحت منحنى الإقتران ع(س) . ويقال في هذه الحالة أن منحنى الإقتران ع مقعر للأعلى على الفترة [أ، ب] .

- في الإقتران هـ(س) نلاحظ أن جميع المماسات ضمن الفترة (جـ ، د) تقع جميعها فوق منحنى الإقتران هـ(س) . ويقال في هذه الحالة أن منحنى الإقتران هـ مقعر للأسفل على الفترة [جـ ، د] .



- نقطة الإنعطاف : اذا كان هـ(س) إقتراناً متصلاً على فترة مفتوحة تحوي $س_1$ ، وكان المنحنى يغير اتجاه تقعره عند $س_1$ ، فإن النقطة $(س_1، هـ(س_1))$ تسمى نقطة انعطاف لمنحنى هـ .

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

▲ تذكر: سلوك منحنى ق من حيث التزايد والتناقص مع إشارة المشتقة الأولى.

هون ركزي معي اللشي يرخص عليك

ه) إرجع للشكل بأول الدرس ؛ لاحظ أنه كلما زاد الإحداثي السيني لنقطة التماس نقص ميل المماس عند هذه النقطة ؛ أي أن قَ اقتران متناقص على الفترة (جـ ، د)

← ق'' < صفر على نفس الفترة .

و) وكذلك لاحظ هنا أنه كلما زاد الإحداثي السيني لنقطة التماس زاد ميل المماس عند هذه النقطة ؛ أي أن قَ متزايد على الفترة (أ ، ب)

← ق'' > صفر على نفس الفترة .

اختبار التقعر

اذا كان ق اقتراناً متصلاً على الفترة [أ ، ب] ، وكان كل من قَ ، ق'' معرفين على الفترة (أ ، ب) ؛ فإن :

(I) اذا كان ق'' > صفر : س ∈ (أ ، ب) فإن ق مقعراً للأعلى على الفترة س ∈ [أ ، ب] .

(II) اذا كان ق'' < صفر : س ∈ (أ ، ب) فإن ق مقعراً للأسفل على الفترة س ∈ [أ ، ب] .

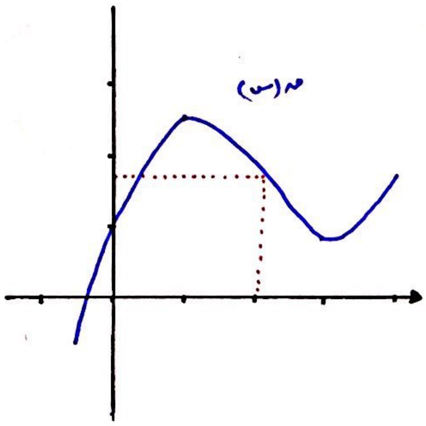
مثال: اذا كان ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٢س^{٢} + ٣س + ١ ، جد :

$\boxed{١}$ القيم الحرجة .

$\boxed{٢}$ نقط الإنعطاف .

$\boxed{٣}$ فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى ق(س) .

الحل: ق$'$(س) = س^{٢} − ٤س + ٣



$\boxed{١}$ ق$'$(س) = صفر ← س^{٢} − ٤س + ٣ = ٠

(س − ١)(س − ٣) = ٠

← س = ١ ← س = ٣

ق$''$(س) = ٢س − ٤

$\boxed{٢}$ ق$''$(س) = ٠ ← ٢س − ٤ = ٠

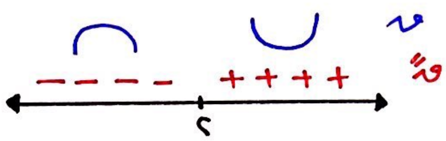
س = ٢

← نقطة الإنعطاف : (٢، ق(٢))

ق(٢) = $\frac{١}{٣}$ (٨) − ٢(٤) + ٣(٢) + ١

= $\frac{٨}{٣}$ − ١ = $\frac{٥}{٣}$

: (٢، $\frac{٥}{٣}$) .



$\boxed{٣}$ فترات التقعر لأعلى [٢، ∞)

فترات التقعر لأسفل (−∞، ٢]

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

سؤال : اذا كانت ق(س) = |س² − ٤| ، س ∈ [-١، ٣]

1. جد نقط الانعطاف .
2. حدد فترات التقعر للأسفل وللأعلى .

الحل : نعيد تعريف القيمة المطلقة

← ق(س) = {
- ٤ − س² ، -١ ≤ س ≤ ٢
- س² − ٤ ، ٢ < س ≤ ٣

حدد القيم الحرجة ؟

← ق′(س) = {
- −٢س ، -١ < س < ٢
- ٢س ، ٢ < س < ٣
- غ موجودة ، س = -١ ، ٢ ، ٣

← ق″(س) = {
- −٢ ، -١ < س < ٢
- ٢ ، ٢ < س < ٣
- غ موجودة ، س = -١ ، ٢ ، ٣

{-١، ٣} أطراف فترة.

1. نقط الانعطاف . (٢ ، ق(٢)) ⟵ (٢ ، ٠)

2.
- ق(س) مقعر للأعلى على الفترة [٢ ، ٣]
- ق(س) مقعر للأسفل على الفترة [-١ ، ٢]

ق : ∩ ∪
ق″ : − − − − − − + + +
-١ ٢ ٣

▲ ملاحظة : أطراف الفترة لا تعتبر ضمن نقط الانعطاف .

الاستاذ : شادي خرفان 0797751710

مثال: إذا كان $ق(س) = جاس - \frac{1}{4} جتا٢س$ ، جد نقط الانعطاف ومجالات التقعر ، حيث $س \in [\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,]$

الحل: $قَ(س) = جتاس + \frac{1}{2} جا٢س$

$قً(س) = -جاس + جتا٢س$.

متطابقة
$جتا٢س = ١ - ٢جا^٢س$

$قً(س) = ٠ \leftarrow جاس - جتا٢س = صفر$

$جاس - (١ - ٢جا^٢س) = صفر$.

$٢جا^٢س + جاس - ١ = ٠$

نفرض $ص = جاس$.

$\leftarrow ٢ص^٢ + ص - ١ = ٠$ عبارة تربيعية مميزها موجب

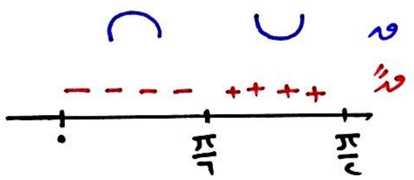
$\leftarrow (٢ص - ١)(ص + ١) = ٠$ ← أو استخدم القانون العام .

$٢ص - ١ = ٠ \leftarrow ص = \frac{1}{2} \leftarrow جاس = \frac{1}{2} \leftarrow س = \frac{\pi}{٦}$

$ص + ١ = ٠ \leftarrow ص = -١ \leftarrow جاس = -١ \leftarrow س = \frac{٣\pi}{٢} \notin [\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,]$

نقطة الانعطاف : $(\frac{\pi}{٦} ، ق(\frac{\pi}{٦}))$

$(\frac{\pi}{٦} ، \frac{٣}{٨})$.



ق(س) مقعر للأعلى على الفترة $[\,\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٢}\,]$

ومقعر للأسفل على الفترة $[\,٠ ، \frac{\pi}{٦}\,]$.

سؤال: اذا كان $ق(س) = \frac{1}{س}$.

$\boxed{1}$ حدد نقط عدم الإتصال .

$\boxed{2}$ جد نقط الانعطاف (إن وجدت) .

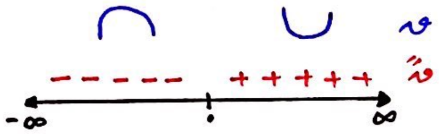
$\boxed{3}$ جد مجالات التقعر للإقتران ق(س) .

الحل: $\boxed{1}$ الإقتران ق غير متصل عند س = ٠ . " لأنه أصفار مقام " .

$\boxed{2}$ $قَ(س) = \frac{-1}{س^2}$ ← $قً(س) = \frac{2}{س^3}$

لا يوجد نقط انعطاف لأنه س = ٠ خارج المجال / ق غير معرفة عندها

$\boxed{3}$ • الإقتران ق مقعر للأعلى على الفترة (٠ ، ∞)



• الإقتران ق مقعر للأسفل على الفترة (−∞ ، ٠)

سؤال: بنفس معطيات السؤال السابق ؛ اذا كان $ق(س) = \sqrt[3]{س}$.

الحل: $\boxed{1}$ ق متصل على س ∈ ح .

$\boxed{2}$ $قَ(س) = \frac{1}{3\sqrt[3]{س^2}}$ ← $قً(س) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{س^5}}$.

← (٠ ، ق(٠)) نقطة انعطاف : (٠ ، ٠)   لاحظ : لأنه س = ٠ معرفة على مجال ق .

$\boxed{3}$ مقعر للأسفل على الفترة (٠ ، ∞) وللأعلى (−∞ ، ٠) .

لماذا ؟

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

إختبار المشتقة الثانية

" للقيم القصوى المحلية " ...

إذا كانتا $ق'(س)$ ، $ق''(س)$ مشتقتا الإقتران $ق(س)$ معرفتان عند $س_1 \in (أ ، ب)$ ؛ عندئذٍ وكانت $ق'(س_1) = 0$

1) إذا كانت $ق''(س_1) > 0$ ؛ فإن للإقتران قيمة صغرى محلية عند $س_1$ وهي $ق(س_1)$

2) إذا كانت $ق''(س_1) < 0$ ؛ فإن للإقتران قيمة عظمى محلية عند $س_1$ وهي $ق(س_1)$

3) أما إذا كانت $ق''(س_1) =$ صفر ؛ فإن الإختبار يفشل فنبحث عن القيم القصوى بإستخدام اختبار المشتقة الأولى .

* * * * *

?? كيف نطبق هذا الإختبار ??

مثال: بإستخدام اختبار المشتقة الثانية جد القيم القصوى المحلية للإقتران

$ق(س) = س^3 - 3س^2 + 2$.

الحل: $ق'(س) = 3س^2 - 6س$ ← نجد المشتقة الأولى .

$ق'(س) = 0$ ← $س = \{0 ، 2\}$ ← نجد القيم الحرجة

$ق''(س) = 6س - 6$ ← نجد المشتقة الثانية .

$ق''(0) = -6 < 0$ ∴ $ق(0)$ عظمى محلية .

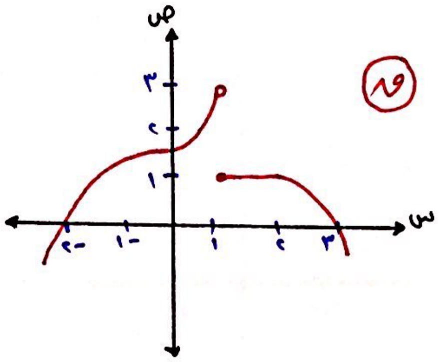
$ق''(2) = 6 > 0$ ∴ $ق(2)$ صغرى محلية .

← نعوض القيم الحرجة في $ق''$ ونطبق قواعد الإختبار السابقة .

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

العلاقة بين ق، قَ، قً بيانياً ...

أولاً : العلاقة بين ق، قً بيانياً .

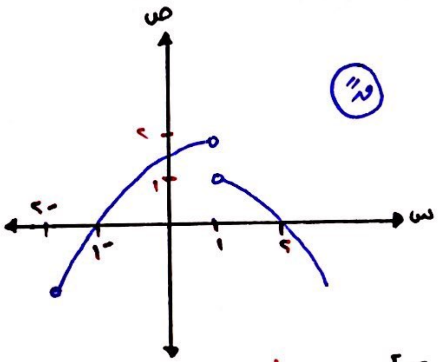


● إذا أعطى منحنى ق وطلب مجالات التقعر فإننا نتعامل مع المنحنى كما درسنا في بداية درس التقعر ، حيث :

(−∞، ٠] ، [٢، ∞) مقعر للأسفل .

[٠، ١) مقعر للأعلى .

(١، ٢] لا تقعر .



● إذا أعطى منحنى قً وطلب مجالات التقعر فإننا نتعامل مع المحور فوق السينات وتحت السينات ؛ حيث :

فوق محور السينات : مقعر للأعلى أي [−١، ٢] ← طيب وال ١ ؟؟

تحت محور السينات : مقعر للأسفل أي [−٢، −١] ، [٢، ∞)

دائماً اتبع تعريف مجال الإقتران ق .

أما بالنسبة لنقطة الإنعطاف :

قً = ٠ ← (−١، ق(−١)) انعطاف وكذلك (٢، ق(٢))

في حال ذكر أن ق معرف على [٢، ∞) ← (١، ق(١)) انعطاف .

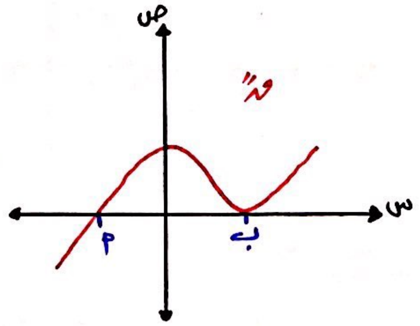
أما اذا ذكر ق معرف على [٢، ∞) − {١} ← (١، ق(١)) ليست انعطاف .

مهمة

الاستاذ : شادي خرفان

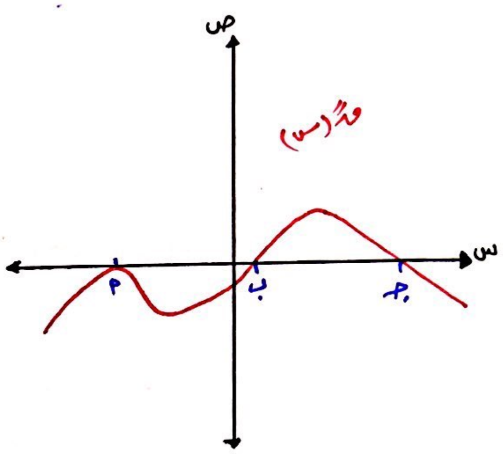
0797751710

كذلك عزيزي الطالب بالنسبة لنقطة الانعطاف إذا كان منحنى مد تمس المحور السيني فقط فإنها لا تعتبر نقطة انعطاف ؛ وذلك لأن الاقتران لم يغير اتجاه تقعره .



- عند (أ ، ق(أ)) تعتبر انعطاف لأنه التقعر اختلف " نقطة قطع للمحور السيني "

- عند (ب، ق(ب)) ليست انعطاف وذلك لأنه التقعر لم يختلف فما قبل ب وبعد ب بقي الاقتران مقعر للأعلى .
" نقطة تماس مع المحور السيني " .



مثال: من خلال الشكل المجاور والذي يمثل المشتقة الثانية للاقتران ق(س) المعرف على ح .

1 جد قيم س التي يكون عندها انعطاف

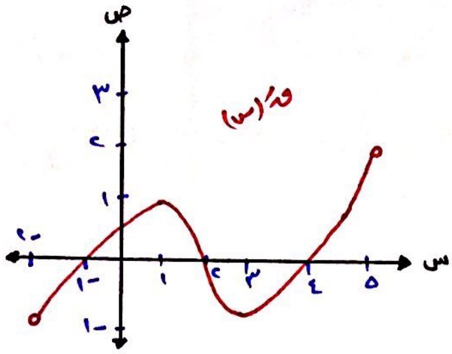
2 حدد مجالات التقعر للاقتران ق .

الحل: 1 س = {ب ، جـ} ← نقط الانعطاف (ب ، ق(ب)) ؛ (جـ ، ق(جـ))

2 (-∞ ، ب] ، [جـ ، ∞) مقعر للأسفل .

[ب ، جـ] مقعر للأعلى .

ثانياً: العلاقة بين ق′ ، ق″ بيانياً .



من خلال الشكل المجاور والذي يوضح منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) المعرف على [−٢، ٥)

- اذا طلب مجالات التقعر للاقتران ق فإننا نبحث في التزايد والتناقص لـ ق′ وكأنها ق .

فإذا كان ق′ متزايد ← فإن ق″ > ٠ (فوق المحور) ← ق ∪ .

ق′ متناقص ← فإن ق″ < ٠ (تحت المحور) ← ق ∩ .

إذاً (−٢، ١] ق′ متزايد ← ق″ > ٠ ← [−٢، ١] ق ∪

[٣، ٥) ق′ متزايد ← ق″ > ٠ ← [٣، ٥) ق ∪

وضعت مفتوحة لأنها خارج مجال ق أصلاً .

[١، ٣] ق′ متناقص ← ق″ < ٠ ← [١، ٣] ق ∩ .

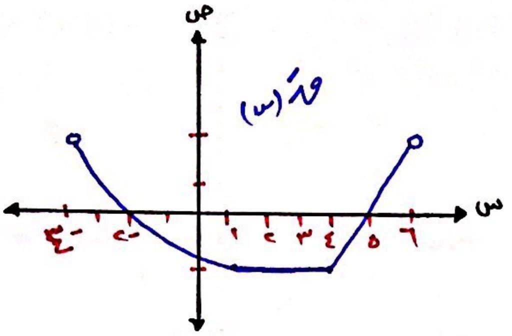
- في حال طلب نقط الانعطاف من خلال ق′ ، فإنها تكون القمة أو القاع . (كما قلنا اعتبر أن ق′ هي ق) .

{ (١، ق(١)) ، (٣، ق(٣)) } ← نقط انعطاف

احذر من أن تكتب (١، ١) ، (٣، −١)

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

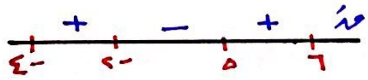
مثال : من خلال الشكل المجاور والذي يمثل المشتقة الأولى للاقتران ق المعرف على الفترة [-٤ ، ٦)



١ جد القيم الحرجة للاقتران .

س = {-٤ ، -٢ ، ٥} ← أطراف الفترة المغلقة ونقط التقاطع مع المحور السيني .

٢ حدد فترات التزايد والتناقص لـ ق(س) .

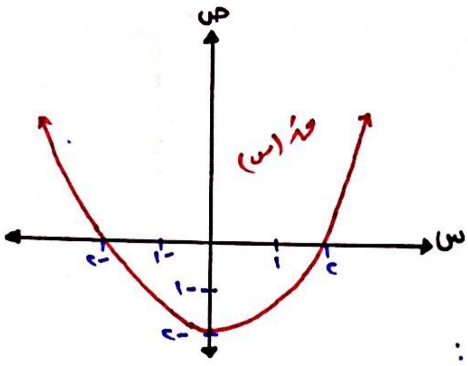


- ق متزايد على الفترة [-٤ ، -٢] ، [٥ ، ٦) .
- ق متناقص على الفترة [-٢ ، ٥] .

٣ حدد مجالات التقعر .

- قَ متزايد على [٤ ، ٦) ∴ قً فوق المحور ← ق مقعر للأعلى على [٤ ، ٦) .
- قَ متناقص (-٤ ، ١) ∴ قً تحت المحور ← ق مقعر للأسفل على [-٤ ، ١]
- ق ثابت على الفترة [١ ، ٤] ؛ لا تقعر .

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710



مثال : من خلال الشكل المجاور
كتاب مدرسي .

والذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للإقتران المعرف على ح .

إذا كان ق أيضاً معرف على ح ؛ جد :

١ القيم الحرجة للإقتران ق.

٢ مجالات التزايد والتناقص للإقتران ق .

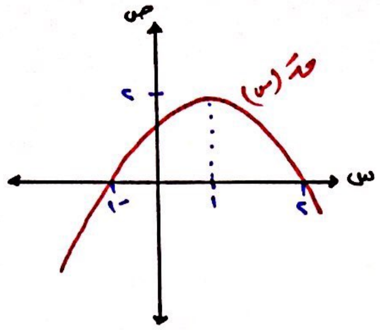
٣ باستخدام اختبار المشتقة الثانية ؛ جد القيم القصوى المحلية .

٤ عين نقط الإنعطاف للإقتران ق (إن وجدت) .

٥ عين مجالات التقعر للإقتران ق.

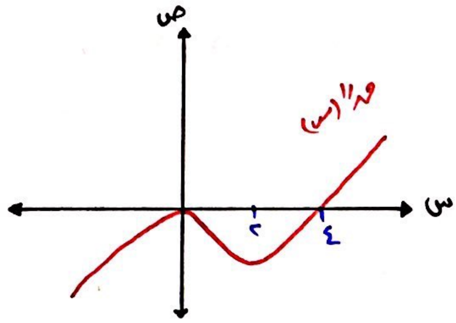
الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

سؤال (1) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق'(س) المعرف على ح ؛ فإن الفترة التي يكون فيها ق''(س) > صفر هي :



أ) $[1 ، 2]$ ب) $[2 ، \infty)$ ج) $[-1 ، 1]$ د) $(-\infty ، 1]$

سؤال (2) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الثانية للاقتران ق المعرف على ح فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها للاقتران نقط انعطاف ، هي :



أ) $\{4\}$ ب) $\{0\}$

ج) $\{0 ، 4\}$ د) $\{0 ، 2 ، 4\}$.

الإجابات : سؤال (1) د

سؤال (2) أ

الاستاذ : شادي خرفان   0797751710

Past Year

٢٠١٠ ش

إذا كان ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - س^{٢} + ٢ ، حيث س ∈ [-٢، ٣) فجد كلاً مما يأتي :

١ الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق متزايداً .

٢ القيم القصوى المطلقة للاقتران وبين نوعها.

٣ الفترة (الفترات) التي يكون فيها منحنى ق مقعراً للأعلى.

٤ زاوية الانعطاف لمنحنى الاقتران ق (إن وجدت).

٢٠١٠ ص

إذا كان ق(س) = س (٤ - س)^{٣} ، س ∈ [-١، ٥] فجد كلاً مما يأتي :

١ الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق متناقصاً .

٢ القيم القصوى المطلقة للاقتران ق وبين نوعها .

٣ الفترة (الفترات) التي يكون فيها منحنى الاقتران ق مقعراً للأعلى .

٤ نقط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق (إن وجدت)

٢٠١١ ش

إذا كان ق(س) = ٦س^{٢} - ٢س^{٣} ؛ س ∈ (٠، ٤] فجد كلاً مما يأتي :

١ الفترة (الفترات) التي يكون فيها الاقتران ق متناقصاً .

٢ القيم القصوى للاقتران ق وبين نوعها .

٣ الفترة (الفترات) التي يكون فيها منحنى الاقتران ق مقعراً للأسفل.

٤ نقط الانعطاف لمنحنى ق (إن وجدت) .

٢٠١١ ص

اذا كان ق(س) = س^{٤} - ٤س^{٣} ، س ∈ [-١، ٤] فجد القيم القصوى للاقتران ق(س) مبيناً نوعها .

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

٢٠١٢ ش

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\,(\text{س} - ٣)^{٢} - ٢$ ، $\text{س} \in [-١ ، ٤]$ جد كلاً مما يأتي:

1) الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق متزايداً .
2) القيم القصوى وبين نوعها.

٢٠١٢ ص

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \dfrac{٩}{\text{س}+٢}$ ، $\text{س} \in [-١ ، ٤]$ جد كلاً مما يأتي :

1) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق .
2) القيم القصوى المحلية والمطلقة للاقتران ق .

٢٠١٣ ش

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} - \frac{١}{٤}\text{س}^{٤}$ ، $\text{س} \in [-٣ ، ٣]$ جد كلاً مما يأتي :

1) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق .
2) القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق (إن وجدت) .

٢٠١٣ ص

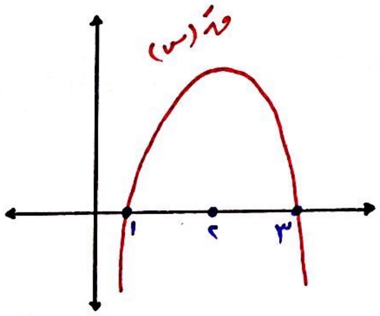
اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \dfrac{٢٥}{\text{س}}$ ، $\text{س} \in [-٨ ، ٨] - \{٠\}$ جد :

1) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق .
2) القيم القصوى المحلية للاقتران ق (إن وجدت) .

٢٠١٤ ش

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}$ ؛ حيث $\text{س} \in ح$ ، جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران ق وبين نوعها.

٢٠١٤ ص



بالاعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى قَ(س) حيث ق(س) كثير حدود ؛ جد :

1) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) .
2) قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) قيم قصوى محلية .

الاستاذ : شادي خرفان

0797751710

٢٠١٥ ص

إذا كان $ق(س) = س - جا٢س$ ، $س \in [٠ ، \pi]$ ، جد ما يأتي :

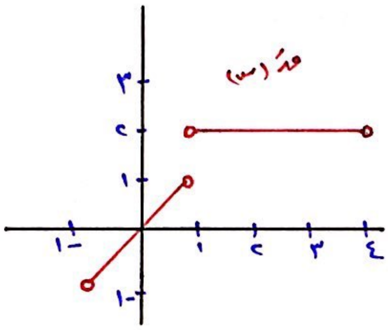
١ مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق .

٢ القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران (إن وجدت) .

٢٠١٥ ص

إذا كان ق(س) اقتران متصل على الفترة [-١ ، ٤] ، حيث :

$$ق(س) = \begin{cases} جـ س^٢ + د س + هـ & ، -١ \le س < ١ \\ أ س + ب & ، ١ \le س \le ٤ \end{cases}$$



وتمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) كما في الشكل المجاور ، جد كلاً مما يأتي :

١ النقط الحرجة للاقتران ق(س) .

٢ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) .

٣ قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) قيم قصوى محلية .

٤ قيم كل من الثوابت أ ، ب ، جـ ، د ، هـ علماً بأن ق(-١) = ٢ ، ق(٤) = ٨

٢٠١٦ ش

إذا كان $ق(س) = \sqrt{س^٣ - ٢٧ س}$ ، $س \in (-١٠ ، ١٠)$ جد كلاً مما يأتي :

١ مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) .

٢ القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) ، (إن وجدت)

٢٠١٦ ص

اذا كان $ق(س) = س^{\frac{١}{٣}} (س - ٢)^{\frac{١}{٣}}$ ، $س \in [-١ ، ٥]$ جد كلاً مما يأتي :-

١ فترات التزايد والتناقص .

٢ القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) .

٢٠١٧ ش

ليكن $ق(س) = س^3 - ١٢س$ ، $س \in [-٤ ، ٤]$ جد كلاً مما يأتي :

١ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٢ القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) (إن وجدت).

٢٠١٧ ص

ليكن $ق(س) = س^3 + \frac{٤٨}{س}$ ، $س \neq ٠$ جد كلاً مما يأتي :

١ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) .

٢ القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) (إن وجدت) .

٢٠١٨ ش

إذا كان $ق(س) = (١ - ٤س)(س - ١)^2$ ، $س \in [٠ ، ٢]$ جد كلاً مما يأتي :

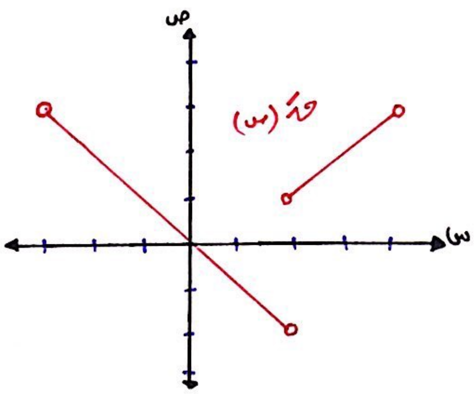
١ مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) .

٢ القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) (إن وجدت)

٢٠١٨ ص

الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) المتصل على $[-٣ ، ٤]$

اعتمد على ذلك في إيجاد كل مما يأتي :



١ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٢ قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) قيم قصوى محلية ، مبيناً نوعها (إن وجدت) .

٣ مجالات التقعر للاقتران ق(س) .

٤ قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) نقط انعطاف .

٥ $ق''(٠)$ ، $ق''(٢)$.

الأستاذ : شادي خرفان
0797751710

٢٠١٩ عام

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٤\,\text{س}^{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{س}^{٤}$ ، $\text{س} \in [-٣ ، ٣]$ جد كلاً مما يأتي :

1. فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق .
2. القيم القصوى للاقتران ق مبيناً نوعها .
3. الفترة (الفترات) التي يكون فيها منحنى ق مقعراً للأعلى .
4. نقط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق (إن وجدت) .

٢٠١٩ تكميلي

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٤} - ٣٢\,\text{س}^{٢}$ ، $\text{س} \in \text{ح}$ ، جد كلاً من :

1. فترات التزايد والتناقص للاقتران ق .
2. القيم القصوى للاقتران ق (إن وجدت) مبيناً نوعها .
3. الفترة (الفترات) التي يكون فيها منحنى الاقتران ق مقعراً للأسفل .
4. نقط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق (إن وجدت) .

تطبيقات القيم القصوى

في كثير من الأمور الحياتية نهتم بإيجاد أكبر أو أصغر قيمة لكميات متغيرة (أي القيم القصوى) .

※ ولحل هذه المسائل نتبع الخطوات التالية :-

١ نرسم شكل توضيحي للمسألة (إن أمكن) ونحدد عليه الثوابت والمتغيرات .

٢ نحدد ما هو مطلوب إيجاد القيمة القصوى له .

٣ نجد علاقة بين المتغير المطلوب ايجاد القيمة القصوى له والمتغيرات الأخرى المعطاة في السؤال . "ونكتب بدلالة متغير واحد فقط" .

٤ نحدد مجال الإقتران اللازم (إن أمكن) ، ثم نستخدم إختبار المشتقة الأولى أو الثانية لتحديد المطلوب .

* * * * *

■ تذكير بإختبار المشتقة الثانية .

• اذا كان ق''(م) > ٠ ← للإقتران قيمة صغرى محلية عند س = م .

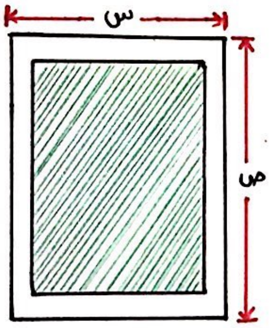
• اذا كان ق''(م) < ٠ ← للإقتران قيمة عظمى محلية عند س = م .

※ أما اذا كان ق''(م) = ٠ فهنا تفشل المشتقة ، وفي هذا الدرس عليك العودة إلى اختبار المشتقة الأولى وتجد القيم القصوى من خلال التزايد والتناقص .

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

مثال: ورقة مستطيلة الشكل مساحتها ٥٠ سم²، يراد طباعة إعلان عليها إذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١ سم، وعرض كل من الجانبين $\frac{1}{2}$ سم، جد بعدي الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن.

الحل: نفرض أن عرض الورقة س وطولها ص



ومساحة المنطقة المطبوعة (م). ← المطلوب ايجاد القيمة القصوى لها.

$$\leftarrow \text{م} = (\text{س}-1)(\text{ص}-2) \quad .... (1)$$

← يجب أن نجعلها متغير واحد فقط.

من المعطى مساحة الورقة ٥٠ سم²

$$\leftarrow \text{س} \times \text{ص} = 50 \leftarrow \text{س} = \frac{50}{\text{ص}} \quad ..... (2)$$

عوض (٢) في (١) $\leftarrow \text{م} = \left(\frac{50}{\text{ص}} - 1\right)(\text{ص} - 2) = \frac{50}{\text{ص}}\text{ص} - \frac{(50)2}{\text{ص}} - \text{ص} + 2$

$$= 52 - \text{ص} - \frac{100}{\text{ص}}$$

← بعد أن أصبحت م بدلالة ص نشتقها ونطبق القيم القصوى.

$$\leftarrow \text{م}' = -1 + \frac{100}{\text{ص}^2} = 0 \leftarrow \frac{100}{\text{ص}^2} = 1 \leftarrow \text{ص}^2 = 100 \leftarrow \boxed{\text{ص} = 10}$$

نهمل الجذر السالب لأن الأطوال موجبة

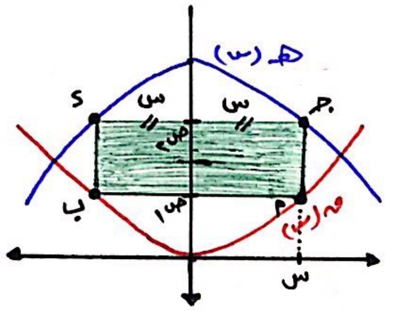
$$\text{م}'' = \frac{-200}{\text{ص}^3} \leftarrow \text{م}''(10) < 0 \quad \therefore \text{قيمة عظمى عند ص} = 10$$

نجد الآن البعد الآخر بتعويض ص في (٢)

$$\leftarrow \text{س} = \frac{50}{10} = 5 \leftarrow \boxed{\text{س} = 5}$$

∴ حتى تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن يجب أن تكون أطوال الورقة ١٠ سم، ٥ سم.

مثال: أ ب جـ د مستطيل يقع داخل المنحنيين ق(س) = ٢س² ، هـ(س) = ٣٦ - س²
بحيث يقع رأساه أ ب على ق ورأساه جـ د يقعان على منحنى هـ ، جد بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن .



الحل: مساحة المستطيل = الطول × العرض

م = ٢س (ص٢ - ص١)

= ٢س (٣٦ - س² - ٢س²)

صورة س في ق

= ٢س (٣٦ - ٣س²)

صورة س في هـ

∴ م = ٧٢ س - ٦ س³ .....(١)

م' = ٧٢ - ١٨س² = ٠ ← ١٨س² = ٧٢ ← س² = ٤ ← س = ±٢

∴ $\boxed{\text{س = ٢}}$ ← نفحص س=٢ باختبار المشتقة الثانية .

م'' = - ٣٦ س ← م''(٢) = -٣٦×٢ < ٠ ∴ قيمة عظمى عند س=٢

نعوض س = ٢ في (١) لإيجاد ص١ وص٢ ثم العرض .

ص٢ = ٣٦ - س² |س=٢ ← ص٢ = ٣٦ - ٤ = ٣٢

ص١ = ٢س² |س=٢ ← ص١ = ٢(٤) = ٨

∴ عرض المستطيل ص٢ - ص١ = ٣٢ - ٨ = ٢٦

∴ أبعاد المستطيل ٤ سم ، ٢٦ سم

ص٢ - ص١ ← ، ← ٢س

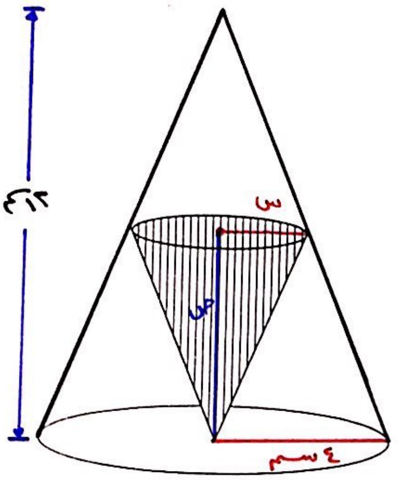
* * * * *

تدريب: اذا كان مجموع عدد مع ثلاثة أمثال الآخر يساوي ٦٠ ، جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن ؟

الحل النهائي : { ١٠ ، ٣٠ } .

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

مثال: جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤ سم، وارتفاعه ١٢ سم، بحيث يقع رأس المخروط على مركز قاعدة المخروط الخارجي



الحل: نفرض أن نصف قطر قاعدة المخروط الداخلي س وارتفاعه ص، وحجمه ح

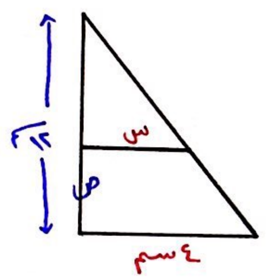
← $ح = \frac{\pi}{٣} س^{٢} . ص$ ......(١)

* نجعل الآن أحد المتغيرين بدلالة الآخر.

← من خلال تشابه المثلثات

$\frac{١٢}{٤} = \frac{١٢ - ص}{س}$ بالضرب التبادلي.

← $س = \frac{١٢ - ص}{٣}$ أو $ص = ١٢ - ٣س$ ......(٢) لأنها أسهل فقط



نعوض (٢) في (١)

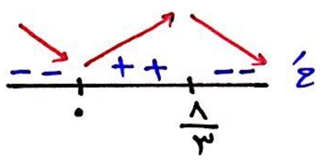
← $ح = \frac{\pi}{٣} س^{٢} (١٢ - ٣س)$

$= ٤\pi س^{٢} - \pi س^{٣}$ .....(٣)

باشتقاق المعادلة (٣)

$ح' = ٨\pi س - ٣\pi س^{٢} = ٠ \rightarrow \pi س(٨ - ٣س) = ٠$

← $س = \{٠، \frac{٨}{٣}\}$.



من خلال اختبار المشتقة الأولى للاقتران قيمة عظمى عند $س = \frac{٨}{٣}$ سم

عوض س في (٢) ← $ص = ١٢ - ٣(\frac{٨}{٣}) = ١٢ - ٨ = ٤$ سم

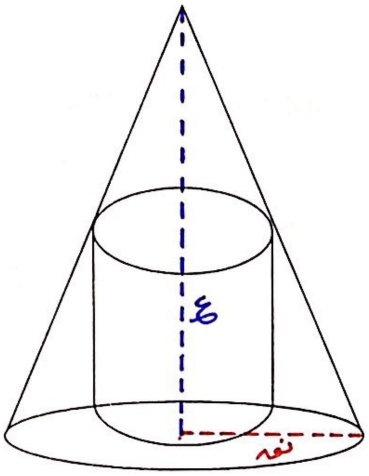
∴ أكبر حجم للمخروط عندما يكون نصف قطر قاعدته $\frac{٨}{٣}$ سم وارتفاعه ٤سم

ومقداره $ح = \frac{٢٥٦ \pi}{٢٧}$ سم^{٣}.

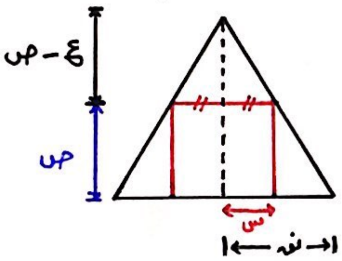
الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

مثال: أثبت أن أكبر حجم لإسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم يساوي $\frac{٤}{٩}$ حجم المخروط .

الحل: $\text{ح} = \pi\ \text{س}^{٢} .\ \text{ص}$ ← حجم الإسطوانة ......(١)



من تشابه المثلثات $\frac{\text{ع} - \text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ع}}{\text{نق}}$



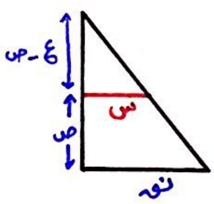
بالضرب التبادلي $\text{نق}(\text{ع} - \text{ص}) = \text{ع}\ \text{س}$

← $\text{ع نق} - \text{ص نق} = \text{ع س}$

$\text{ص نق} = \text{ع نق} - \text{ع س}$

$= \text{ع}(\text{نق} - \text{س})$

$\therefore\ \text{ص} = \frac{\text{ع}(\text{نق} - \text{س})}{\text{نق}}$ .... (٢)



عوض (٢) في (١) لينتج :

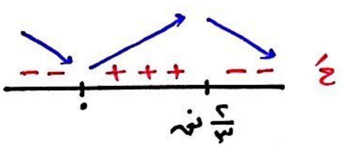
$\text{ح} = \pi\ \text{س}^{٢} .\ \frac{\text{ع}(\text{نق} - \text{س})}{\text{نق}}$

← $\text{ح} = \frac{\pi\ \text{ع}}{\text{نق}}\left(\text{نق س}^{٢} - \text{س}^{٣}\right)$ بإدخال $\text{س}^{٢}$ على (نق − س)

باشتقاق الطرفين $\text{ح}' = \frac{\pi\ \text{ع}}{\text{نق}}\left(٢\text{نق س} - ٣\text{س}^{٢}\right)$

$\text{ح}' = ٠$ ← $٢\text{نق س} - ٣\text{س}^{٢} = ٠$

← $\text{س} = \{٠ ،\ \frac{٢}{٣}\text{نق}\}$



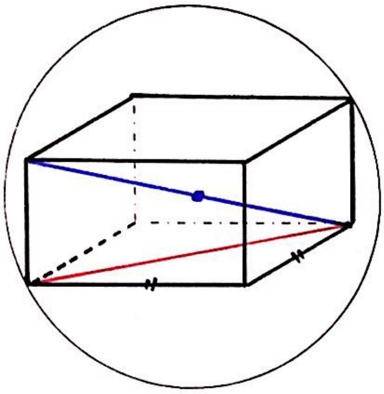
من اختبار المشتقة الأولى أكبر حجم للأسطوانة عندما $\text{س} = \frac{٢}{٣}\text{نق}$.

← $\text{ص} = \frac{\text{ع}(\text{نق} - \frac{٢}{٣}\text{نق})}{\text{نق}}$ بتعويض س في (١) . ← $\text{ص} = \frac{\text{ع}}{\text{نق}} . \frac{\text{نق}}{٣} = \frac{\text{ع}}{٣}$

$\therefore\ \text{ح} = \pi\left(\frac{٢}{٣}\text{نق}\right)^{٢} . \left(\frac{\text{ع}}{٣}\right) = \frac{٤}{٩}\left(\pi\ \text{نق}^{٢} . \frac{\text{ع}}{٣}\right) = \frac{٤}{٩}$ حجم الإسطوانة # .

مثال: كرة مصمتة نصف قطرها ١٠ سم ، حفر بداخلها متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وارتفاع (ع) سم ، جد أبعاد متوازي المستطيلات ليكون حجمه أكبر ما يمكن .

الحل: نفرض ل طول قطر متوازي المستطيلات
وكذلك س طول ضلع القاعدة ، ومن المعطى ع الارتفاع .

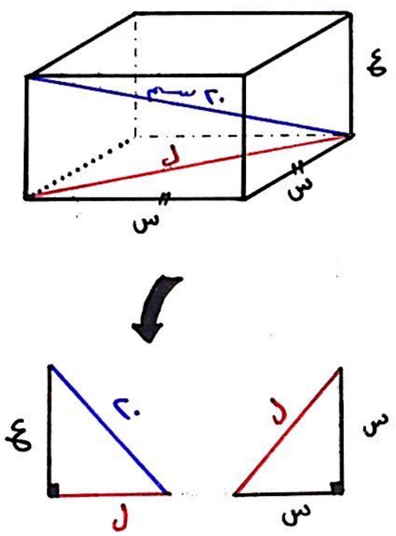


← من فيثاغورس $ل^{٢} = س^{٢} + س^{٢} = ٢س^{٢}$

وكذلك ← $(٢٠)^{٢} = ل^{٢} + ع^{٢}$

$٤٠٠ = ٢س^{٢} + ع^{٢}$

∴ $٢س^{٢} = ٤٠٠ - ع^{٢} \leftarrow س^{٢} = ٢٠٠ - \frac{ع^{٢}}{٢}$ ....(١)



$ح = س^{٢} \times ع = (٢٠٠ - \frac{ع^{٢}}{٢})(ع)$.

$= ٢٠٠ع - \frac{ع^{٣}}{٢}$

$حَ = ٢٠٠ - \frac{٣}{٢}ع^{٢} = صفر \leftarrow ع = \frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$

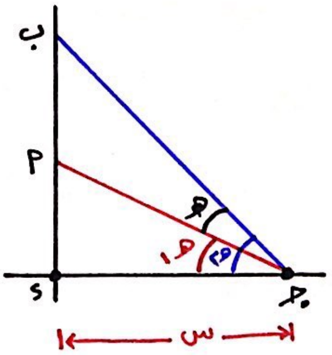
$حً = -٣ع \leftarrow حً(\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}) < صفر$

من اختبار المشتقة الثانية أكبر حجم لمتوازي المستطيلات عندما $ع = \frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$ عوض ع في (١) لإيجاد س

← $س^{٢} = ٢٠٠ - \frac{٤٠٠}{٦} \leftarrow س = \frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$.

∴ أبعاد متوازي المستطيلات (مكعب) طول ضلعه $\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$ سم .

مثال: إذا كان أ(٠،٤) ، ب(٠،٩) نقطتان ثابتتان ، جـ نقطة تتحرك على محور السينات الموجب ، جد الإحداثي السيني للنقطة جـ الذي يجعل قياس الزاوية أجـب أكبر ما يمكن ؟



الحل: نفرض أن ∠ أجـب = هـ ،

وكذلك ∠ أجـد = هـ١ ، ∠ بجـد = هـ٢

$$\text{ظا هـ} = \text{ظا}(\text{هـ}_٢ - \text{هـ}_١)$$

$$= \frac{\text{ظاهـ}_٢ - \text{ظاهـ}_١}{١ + \text{ظاهـ}_٢ \cdot \text{ظاهـ}_١}$$

من خلال الرسم ← $\text{ظا هـ}_١ = \frac{٤}{\text{س}}$ ، $\text{ظاهـ}_٢ = \frac{٩}{\text{س}}$

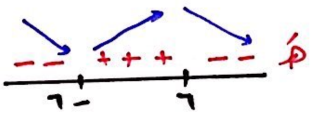
$$\leftarrow \text{ظاهـ} = \frac{\frac{٩}{\text{س}} - \frac{٤}{\text{س}}}{١ + \frac{٩}{\text{س}} \cdot \frac{٤}{\text{س}}} = \frac{\frac{٥}{\text{س}}}{١ + \frac{٣٦}{\text{س}^٢}} = \frac{٥\text{س}}{\text{س}^٢ + ٣٦}$$

$$\therefore \text{قا}^٢\text{هـ} \cdot \text{هـ}' = \frac{٥(\text{س}^٢ + ٣٦) - ٥\text{س}(٢\text{س})}{(\text{س}^٢ + ٣٦)^٢}$$

$$\leftarrow \text{هـ}' = \frac{٥\text{س}^٢ + ١٨٠ - ١٠\text{س}^٢}{\text{قا}^٢\text{هـ} \cdot (\text{س}^٢ + ٣٦)^٢} = \text{صفر} .$$

$$\leftarrow ١٨٠ - ٥\text{س}^٢ = ٠ \leftarrow \text{س}^٢ = ٣٦ \leftarrow \text{س} = ٦$$

لـ أهملنا الجذر السالب لأنه س تعبر عن طول.



من خلال اختبار المشتقة الأولى يكون الإحداثي السيني لـ جـ أكبر ما يمكن عندما

س = ٦

أي ∠هـ تكون أكبر ما يمكن عندما س = ٦

Past Year's

٢٠١٠ ش إذا كان الإنتاج اليومي لمصنع حديد ص طناً من نوع الحديد الجيد وكذلك س طناً من نوع الحديد الأقل جودة ، فإذا كانت $ص = \frac{٤٠ - ٥س}{١٠ - س}$ ، س $\neq$ ١٠ ، وكان سعر الطن من الحديد الجيد يساوي مثلي سعر الطن من الحديد الأقل جودة ، فجد الكمية التي ينتجها المصنع يومياً من كل نوع حتى يحقق أكبر إيراد .

٢٠١٠ ص جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣ ، ٥) ويقطع من الربع الأول في المستوى الديكارتي مثلثاً مساحته أقل ما يمكن .

٢٠١١ ش جد بعدي أكبر مستطيل من حيث المساحة يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث تكون احدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى ق(س) = ٣٦ − س^٢ .

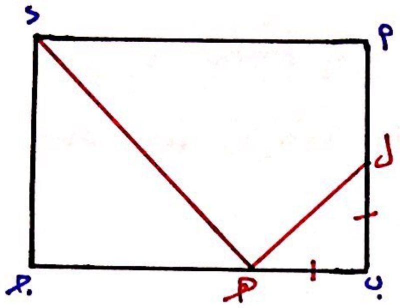
٢٠١١ ص مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ٦سم وارتفاعه ٨سم ، يراد قطع مستطيل منه على قاعدة المثلث ويقع كل من رأسيه الآخرين على ساقي المثلث ، جد بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن .

٢٠١٢ ش صندوق معدني على شكل متوازي مستطيلات قاعدته على شكل مستطيل طوله مثلي عرضه ، اذا كان مجموع ارتفاع الصندوق ومحيط قاعدته يساوي ٧٢ سم ، جد أبعاده التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن .

الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

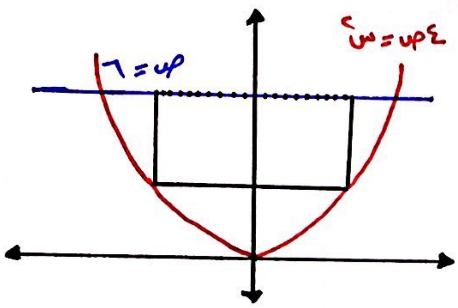
٢٠١٢ ص

في الشكل المجاور أ ب جـ د مستطيل فيه أب = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، عينت النقطتين ل ، هـ على الضلعين $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ على الترتيب . بحيث كان ب ل = ب هـ .
جد طول $\overline{بل}$ الذي يجعل مساحة الشكل الرباعي أ ل هـ د أكبر ما يمكن .



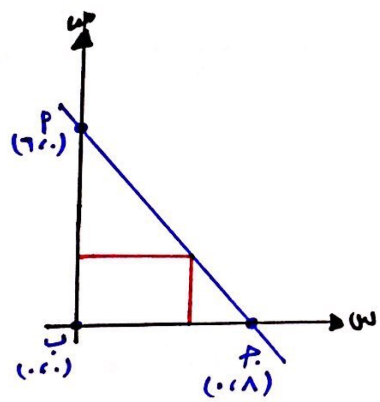
٢٠١٣ ش

جد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل في الشكل المجاور الذي يقع رأسان منه على منحنى العلاقة ٤ص = س² ويقع رأسا الآخران على المستقيم ص = ٦



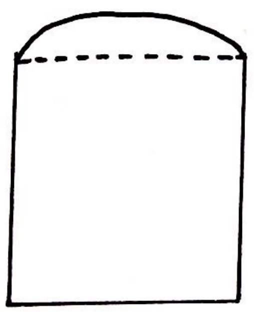
٢٠١٣ ص

إعتماداً على الشكل المجاور والذي يمثل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب ، جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث .



٢٠١٤ ش

حافظة للماء الساخن تتكون من جزئين ، الأول : وعاء اسطواني الشكل نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع) والثاني غطاء على شكل نصف كرة نصف قطرها يساوي نصف قطر الأسطوانة (كما في الشكل المجاور) ، إذا كان حجم الحافظة (٣٦٠ π) دسم³ ، جد كلاً من نصف القطر والارتفاع لجعل المساحة الكلية لسطح الحافظة أقل ما يمكن .



٢٠١٤ ص

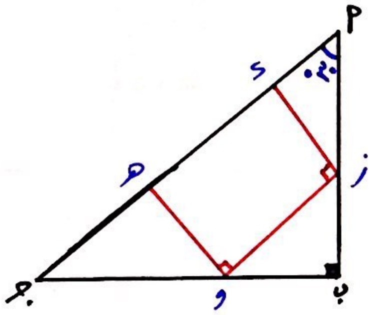
جد أبعاد شبه المنحرف الذي يمكن رسمه في الربع الأول بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران ق(س) = ٤س − س٢ ، لتكون مساحته أكبر ما يمكن .

٢٠١٥ ش

اسطوانة دائرية قائمة مغلقة نصف قطر قاعدتها (نق) سم وارتفاعها (ع) سم وحجمها (٥٤ π) سم٣ ، جد نصف قطر قاعدة الأسطوانة وارتفاعها اللذان يجعلان مساحة سطحها الكلية أقل ما يمكن .

٢٠١٥ ص

جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث قائم الزاوية طول وتره (٢٤) سم وقياس احدى زواياه (٣٠°) ، بحيث تقع احدى قاعدتي المستطيل على الوتر ورأساه الآخران على ضلعي القائمة .



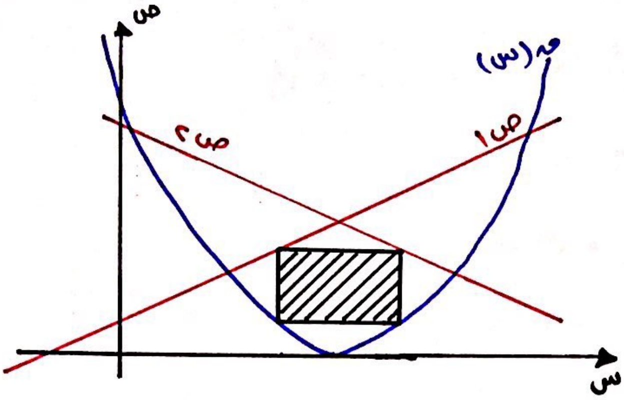
٢٠١٦ ش

جد حجم أكبر موشور (منشور) رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم .

٢٠١٦ ص

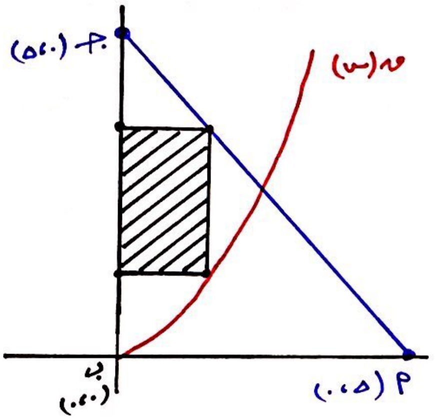
يقع رأسان من رؤوس المستطيل المظلل في الشكل الآتي على منحنى الإقتران ق(س) = س² - ٦س + ٩ ورأساه الآخران على المستقيمين ص١ = ٢+س ، ص٢ = ٨ - س

جد بعدي المستطيل الذين يجعلان مساحته أكبر ما يمكن .



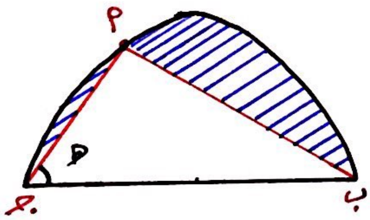
٢٠١٧ ش

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية ، احداثيات رؤوسه أ(٥،٠) ، ب(٠،٠) ، جـ(٠،٥) رسم داخله مستطيل ينطبق رأسان من رؤوسه على الضلع ب جـ وأحد رأسيه الآخرين على الضلع أ جـ ، والرأس الآخر على منحنى الإقتران ق = س² كما في الشكل المجاور ، جد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل المظلل .



٢٠١٧ ص

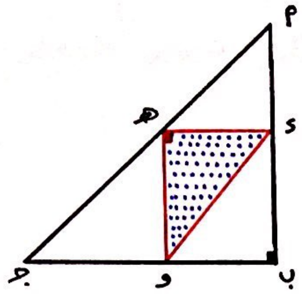
رسم المثلث أ ب جـ داخل دائرة نصف قطرها ٨ سم بحيث يقع الرأسان ب،جـ على نهايتي القطر ، والرأس الآخر (أ) يتحرك على منحنى نصف الدائرة كما في الشكل المجاور ، جد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة المنطقة المظللة أقل ما يمكن ؟



٢٠١٨ ش

- يمثل الشكل المجاور المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب ؛ فيه أب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم ؛ وبداخله المثلث د هـ و القائم في هـ ، وتقع رؤوسه على أضلاع المثلث أ ب جـ علماً بأن د هـ // ب جـ

جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث د هـ و ؟



٢٠١٨ ص

طريق منحني يمثل في المستوى الإحداثي بالاقتران ق(س) = $\sqrt{٢س - ١}$

والنقطة (٣ ، ٠) تمثل موقع مستشفى . جد احداثي النقطة أ(س ، ص) الواقعة على الطريق التي يمكن أن يبنى فيها صيدلية وتكون أقرب ما يمكن إلى المستشفى .

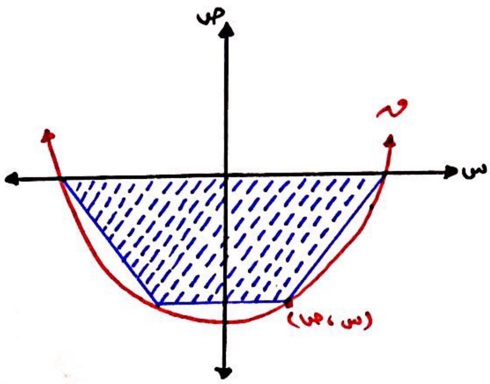
٢٠١٩ ش

قطاع دائري محيطه ٢٤ م ؛ جد طول نصف قطر دائرته التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن .

٢٠١٩ عام

جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف يمكن رسمه تحت محور السينات بحيث تكون احدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران ق(س) = س^٢ − ٩

(انظر الشكل المجاور) .



الاستاذ : شادي خرفان
0797751710

٢٠١٩ تكميلي

منشور ثلاثي قائم حجمه ٢ سم٣ قاعدته على شكل مثلث متطابق الأضلاع جد طول ضلع قاعدة المنشور الذي يجعل مساحة سطحه الكلية أقل ما يمكن.