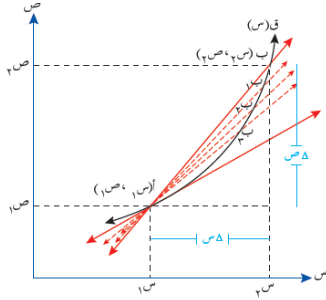


التفسير الهندسي و الفيزيائي للمشتقة

أولاً التفسير الهندسي للمشتقة



قاعدة

- ✗ ميل المماس عند النقطة (أ) = نهاية ميل القاطع \overline{AB} عندما تقترب النقطة ب من النقطة (أ)
- ✗ ميل المماس عند النقطة (أ) = نهاية معدل التغير للمنحنى

نتيجة

ميل المنحنى عند النقطة (أ) = $u'(s)$

مثال

إذا كانت $v = c(s) = s^3 - 6s + 5$ ، جد ميل المماس لمنحنى الإقتران، عند $s = -2$ ؟

الحل

بما أن الميل هو نفسه $u'(s)$

$$\text{اذن } u'(s) = 3s^2 - 6$$

ميل المماس عند $s = -2$

$$u'(-2) = \text{ميل المماس}$$

$$= 3(-2)^2 - 6$$

$$= 12 - 6 = 6$$

مثال

إذا كانت $c(s) = s^3 - 3s$ ، جد ميل المماس لمنحنى الإقتران $c(s)$ عند النقطة $(2, -2)$ ؟

الحل

$$\text{ميل المماس} = u'(2)$$

$$= 3 \times 2^2 - 3$$

$$= 12 - 3 = 9$$

$$\text{الميل} = u'(s)$$

$$u'(s) = 3s^2 - 3$$

الميل عند النقطة $(2, -2)$

$$\text{ميل المماس} = u'(2)$$



معادلة المماس

$$ص - ص_1 = م (س - س_1)$$

مثال



جد معادلة المماس المرسوم للمنحنى الاقتران ق(س) = $س^3 - 5س^2 + 19$ ، عند النقطة (2, 7)؟

الحل

$$\text{الميل} = \text{ق}'(س) = 3س^2 - 10س$$

$$\text{ق}'(2) = 3(2)^2 - 10 \times 2$$

$$= 12 - 20 = -8$$

اذن معادلة المماس هي

$$ص - ص_1 = م (س - س_1)$$

$$ص - 7 = -8 (س - 2)$$

$$ص - 7 = -8س + 16$$

$$ص = -8س + 23$$

مثال



جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $(س^3 + 3س^2 + 9س + 4)$ عند النقطة (1, 16)؟

الحل

$$\text{م} = \text{ق}'(س) = 3س^2 + 6س + 9$$

$$\text{ق}'(1) = 3(1)^2 + 6(1) + 9$$

$$= 13 \times 2 + 9 = 35$$

معادلة المماس هي

$$ص - ص_1 = م (س - س_1)$$

$$ص - 16 = 35 (س - 1)$$

$$ص - 16 = 35س - 35$$

$$ص = 35س - 19$$



إذا كان ق(س) = (س² + ١)(٣ - س) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند س = ٢؟

الحل

$$ق(س) = (س² + ١)(٣ - س)$$

$$م = ق'(٢) = (٣)(٣ - ٢) + (٢)(٣ - ٢)$$

$$= ٣ + ٢ = ٥$$

$$ق(٢) = (٢² + ١)(٣ - ٢) = ٥$$

$$= ٥(١) = ٥$$

$$٥ = م$$

لإيجاد معادلة المماس علينا إيجاد قيمة ص = ق(٢)

$$ق(٢) = (٢² + ١)(٣ - ٢) = ٥$$

$$٥ = ٢ × م$$

$$٥ = (٢) م$$

معادلة المماس عند النقطة (٢ ، ٥)

$$ص - ص_١ = م(س - س_١)$$

$$ص - ٥ = ٥(س - ٢)$$

$$ص = ٥س - ١٠ + ١٠ = ٥س$$

$$ص = ٥س - ١٠$$



جد معادلة المماس للمنحنى الاقتران ق(س) = (س³ + ٢)(١ + س) عند النقطة (١ ، ١٠)؟

الحل

معادلة المماس هي

$$م = ق'(١) = (٣)(١ + ١) + (١)(٣ + ٢)$$

$$ص - ص_١ = م(س - س_١)$$

$$ق(١) = (١³ + ٢)(١ + ١) = ٦$$

$$ص - ١٠ = ٦(س - ١)$$

$$٦ × ١ + ٢ × ٥ = م$$

$$ص - ١٠ = ٦س - ٦$$

$$٦ = م$$

$$ص = ٦س - ٤$$



إذا كانت ق(س) = $2س^2 - 7س + 5$ وكان ميل المماس هو (5) جد نقاط التماس للمنحنى ق(س)؟

الحل

$$م = ق'(س) = 4س - 7$$

$$5 = 4س - 7$$

$$12 = 4س$$

$$س = 3$$

من خلال قيمة س علينا إيجاد قيمة ص = ق(3)

$$ق(3) = 2 \times 3^2 - 7 \times 3 + 5$$

$$= 18 - 21 + 5$$

$$ص = ق(س) = 2$$

النقطة (3 ، 2) هي نقطة التماس



إذا كانت ق(س) = $3س^2 - 9س$ وكان ميل المماس له (3) جد نقاط التماس للمنحنى ق(س)؟

الحل

$$م = ق'(س) = 6س - 9$$

$$3 = 6س - 9$$

$$12 = 6س$$

$$س = 2$$

$$س = 2 \text{ أو } س = -2$$

من خلال قيمة س علينا إيجاد قيمة ص = ق(2) و ص = ق(-2)

$$ص = ق(2) = 3 \times 2^2 - 9 \times 2$$

$$= 12 - 18 = -6$$

$$ص = ق(-2) = 3 \times (-2)^2 - 9 \times (-2)$$

$$= 12 + 18 = 30$$

النقاط هي (2 ، -6) ، (-2 ، 30) ، نقاط التماس

تعريف

عندما يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) حيث ف(ن) هي المسافة التي يقطعها فإن

السرعة ع(ن) هي مشتقة المسافة ← $ع(ن) = ف'(ن)$

التسارع ت(ن) هي مشتقة السرعة ← $ت(ن) = ع'(ن)$

مثال

يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = $ن^3 + 2ن^2 + 8$ أحسب

(١) سرعة الجسم عندما ن = ٣

(٢) تسارع الجسم عندما ن = ٣

الحل

السرعة هي ع(ن) = $ف'(ن) = 3ن^2 + 4ن$

السرعة بعد ٣ ثوان هي

$$ع(٣) = 3(3)^2 + 4(3) = 39$$

$$= 27 + 12 = 39 \text{ م/ث}$$

التسارع ت(ن) = $ع'(ن) = 6ن + 4$

التسارع بعد ٣ ثواني هو

$$ت(٣) = 6(3) + 4 = 22$$

$$= 18 + 4 =$$

$$= 22 \text{ م/ث}^2$$



لمتابعة المزيد من أوراق العمل والاختبارات والتدريبات
الاستاذ لؤي ابو ليد "رياضيات"





يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = 3ن - 2ن + 4 أحسب سرعة الجسم عندما يكون تسارعه 10 م/ث²؟

الحل

$$ع(ن) = ف'(ن) = 3 - 2ن$$

$$ت(ن) = ع'(ن) = -2$$

$$\text{التسارع} = 10 \text{ م/ث}^2$$

$$10 = 2 - 2ن$$

$$12 = 2ن$$

$$ن = 2 \text{ ثانية}$$

السرعة هي بعد 2 ث

$$ع(2) = 3 - 2 \times 2 = -1$$

$$= -1 \text{ م/ث} = 1 \text{ م/ث}$$



جسم يتحرك حسب العلاقة ف(ن) = 5ن² - 6ن + 4 أحسب التسارع عندما تكون السرعة = 7 م/ث؟

الحل

$$ع(ن) = ف'(ن) = 10ن - 6$$

$$ت(ن) = ع'(ن) = 10$$

$$\text{السرعة} = 7 \text{ م/ث}$$

$$ع(ن) = 7 = 10ن - 6$$

$$13 = 10ن$$

$$ن = 1.3$$

$$ن = 1.3 \text{ ثانية} \leftarrow ن = 2 \text{ ثانية} \text{ و } ن = 2 \text{ ثانية "تهمل"}$$

التسارع بعد (2) ث

$$ت(ن) = 10$$

$$ت(2) = 10 = 2 \times 5 = 10 \text{ م/ث}^2$$



يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = $\frac{1}{3}n^3 - 2n^2 + 5n + 8$ أحسب تسارعه عندما تنعدم السرعة ؟

الحل

$$ع(ن) = (ن) ف' = 2n^2 - 4n + 5$$

$$ت(ن) = (ن) ع' = 4n - 4$$

تنعدم السرعة (السرعة تصبح صفرا)

$$0 = 5 + 2n^2 - 4n$$

$$0 = (ن - 1)(ن - 5)$$

$$ن = 5 \quad \text{و} \quad ن = 1$$

التسارع ت(ن) بعد ن=5 و ن=1

$$ت(ن) = 4ن - 4$$

$$ت(5) = 4 \times 5 - 4 = 20 - 4 = 16 \text{ م/ث}^2$$

$$ت(1) = 4 \times 1 - 4 = 4 - 4 = 0 \text{ م/ث}^2$$



إذا كان $س(س) = 2س^2 + 5س + 5$ وكان ميل المماس عند $س=2$ هو 11 جد قيمة الثابت أ ؟

الحل

$$س(س) = 2س^2 + 5س + 5$$

$$م = س'(2) = 11$$

$$س'(2) = 11$$

$$س'(2) = 4س + 5 = 11$$

$$س'(2) = 4 \times 2 + 5 = 8 + 5 = 13$$

$$11 = 8 + 5$$

$$9 = 5 \leftarrow 4 = \frac{9}{4}$$



اطلب ورق العمل من المعلم لهذا الدرس



إذا كان $ق(س) = (س+٤)^٢$ وكان ميل المماس عند $س=أ$ هو ٦ جد قيمة $أ$ ؟

الحل

$$ق(س) = (س+٤)^٢$$

$$م = ق'(س) = ٢(س+٤) = ٨+٢س$$

$$٨+٢أ = ق'(أ)$$

$$٦ = ق'(أ)$$

$$٦ = ٨+٢أ$$

$$٢ = ٢أ \quad \leftarrow \quad أ = ١ \quad \leftarrow \quad س = ١$$



تحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = ٢ن^٢$ وكانت سرعته المتوسطة في الفترة $[٢٠, ١٠]$ تساوي سرعته اللحظية بعد مرور ٣ ثواني ، فجد قيمة $أ$ ؟

الحل

السرعة المتوسطة في الفترة $[١٠, ٢٠]$

$$\frac{\Delta ف(ن)}{\Delta ن} = \frac{ف(٢٠) - ف(١٠)}{٢٠ - ١٠}$$

$$\frac{\Delta ف(ن)}{\Delta ن} = \frac{ف(٢٠) - ف(١٠)}{٢٠ - ١٠}$$

$$\frac{\Delta ف(ن)}{\Delta ن} = \frac{٢٠٠ - ٢٠}{١٠}$$

$$\frac{\Delta ف(ن)}{\Delta ن} = ١٨$$

السرعة بعد ٣ ثواني (السرعة اللحظية)

$$ع(٣) = ف'(٣) = \text{السرعة بعد ٣ ثواني}$$

$$ع(٤) = ف'(٤)$$

$$ع(٣) = ف'(٣) = ١٢ = ٣ \times ٤$$

$$ع(٣) = ١٢ \text{ م/ث}$$

السرعة المتوسطة = (السرعة اللحظية)

$$١٢ = ٢أ$$

$$٦ = أ$$



يتحرك جسم بحيث كان بعده عن نقطة الاصل معطى بالعلاقة $f(n) = 2n^2 + 2$ متى تساوي سرعته المتوسطة سرعته في اللحظة التي يكون فيها الزمن $t = 4$.

الحل

السرعة بعد $t = 4$ ثواني (السرعة اللحظية)

$$f(n) = 2n^2 + 2$$

$$v(n) = 4n$$

$$v(4) = 4 \times 2 = 8 \text{ م/ث}$$

السرعة المتوسطة في الفترة $[1, 2]$

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{2 - 2 + 2}{2 - 1}$$

$$v = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{2}{1}$$

(السرعة اللحظية) = السرعة المتوسطة

$$8 = v$$

تدريب



جد معادلة المماس لكل من الاقترانات التالية

$$v(s) = (s^3 - 2s^2 + 4) \text{ عند } s = 1$$

تدريب



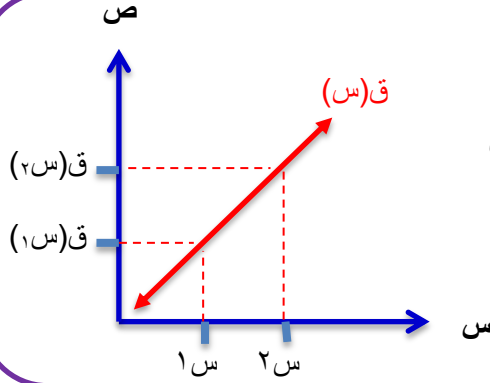
تحرك جسم حسب العلاقة $f(v) = 3v^3 - 6v^2 + 9$ جد تسارعه عندما

تكون سرعته 30 م/ث

تطبيقات الاشتقاق

أولاً التزايد والتناقص للإقترانات

أولاً

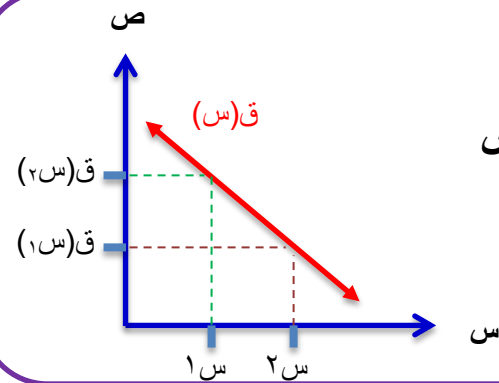


١- التزايد

يكون الإقتران متزايداً عندما تزداد قيم ص كلما زادت قيم س

$$ق(س٢) < ق(س١) \text{ عندما } س٢ < س١$$

اقتران متزايد

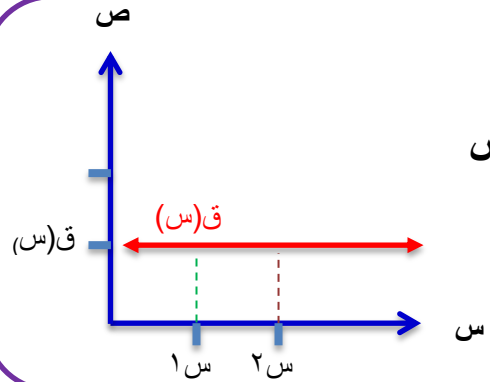


٢- التناقص

يكون الإقتران متناقصاً عندما تقل قيم ص كلما زادت قيم س

$$ق(س٢) > ق(س١) \text{ عندما } س٢ < س١$$

اقتران متناقص



٣- الثابت

يكون الإقتران ثابتاً عندما تثبت قيم ص مهما تغيرت قيمة س

$$ق(س٢) = ق(س١) \text{ (مهما تغيرت قيم س)}$$

اقتران ثابت

نظرية

إذا كان ق(س) اقتران متصل وقابل للاشتقاق فإن :-

- ١- ق(س) متزايد على الفترة [أ، ب] ، إذا كان $ق'(س) < ٠$ لجميع قيم س في [أ، ب]
- ٢- ق(س) متناقص على الفترة [أ، ب] ، إذا كان $ق'(س) > ٠$ لجميع قيم س في [أ، ب]
- ٣- ق(س) ثابت على الفترة [أ، ب] ، إذا كان $ق'(س) = ٠$ لجميع قيم س في [أ، ب]



- ١- إيجاد المشتقة الأولى $u'(x)$
- ٢- إيجاد أصفار المشتقة $u'(x) = 0$
- ٣- البحث في الإشارة قبل أصفار المشتقة وبعدها
 - $u'(x) < 0$ إقتران ان التزايد
 - $u'(x) > 0$ إقتران متناقص
 - $u'(x) = 0$ إقتران ثابت

تذكير مهم

اصفار المشتقة الاولى تسمى نقاط حرجة

التزايد و التناقص من الرسم البياني

$u'(x)$

فوق السينات تزايد
أسفل السينات تناقص

$u'(x)$

يتحول من قيمة صغرى الى قيمة عظمى تزايد
يتحول من قيمة عظمى الى قيمة صغرى تناقص

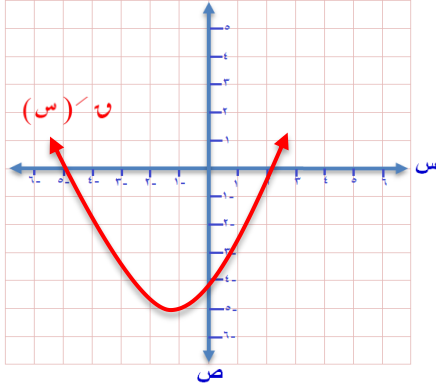


لمتابعة المزيد من أوراق العمل و الاختبارات و التدريبات
الاستاذ لؤي ابو لبدده "رياضيات"

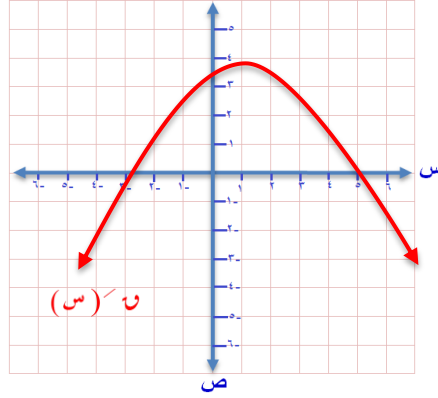




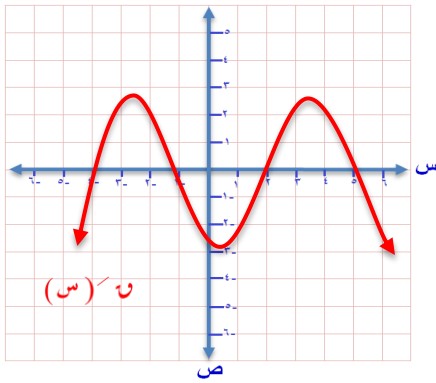
الرسم البياني التالي يمثل u (س) ، اعتماداً على الرسم جد فترات التزايد و التناقص للإقترانات التالية



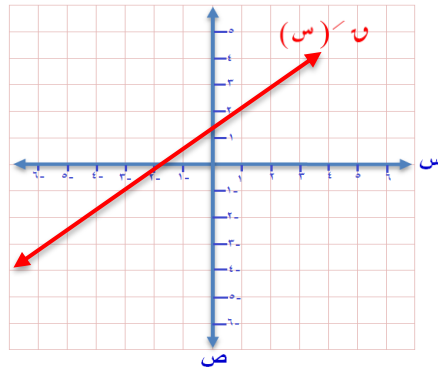
فترات التزايد $(-\infty, 2]$ ، $[4, \infty)$
فترات التناقص $[2, 4]$



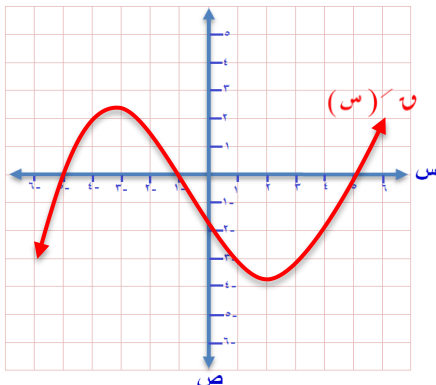
فترات التزايد $[0, 3]$
فترات التناقص $(3, \infty)$ ، $(-\infty, 0]$



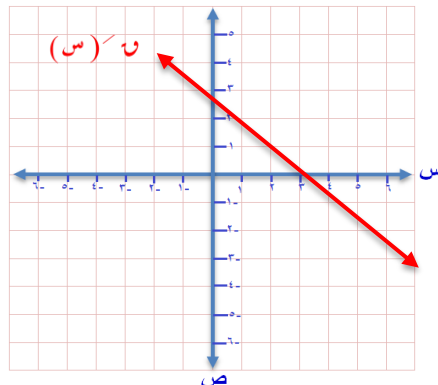
فترات التزايد $[0, 2]$ ، $[4, 6]$
فترات التناقص $(2, 4]$ ، $(6, \infty)$ ، $(-\infty, 0]$



فترات التزايد $(-\infty, 2]$
فترات التناقص $(2, \infty)$



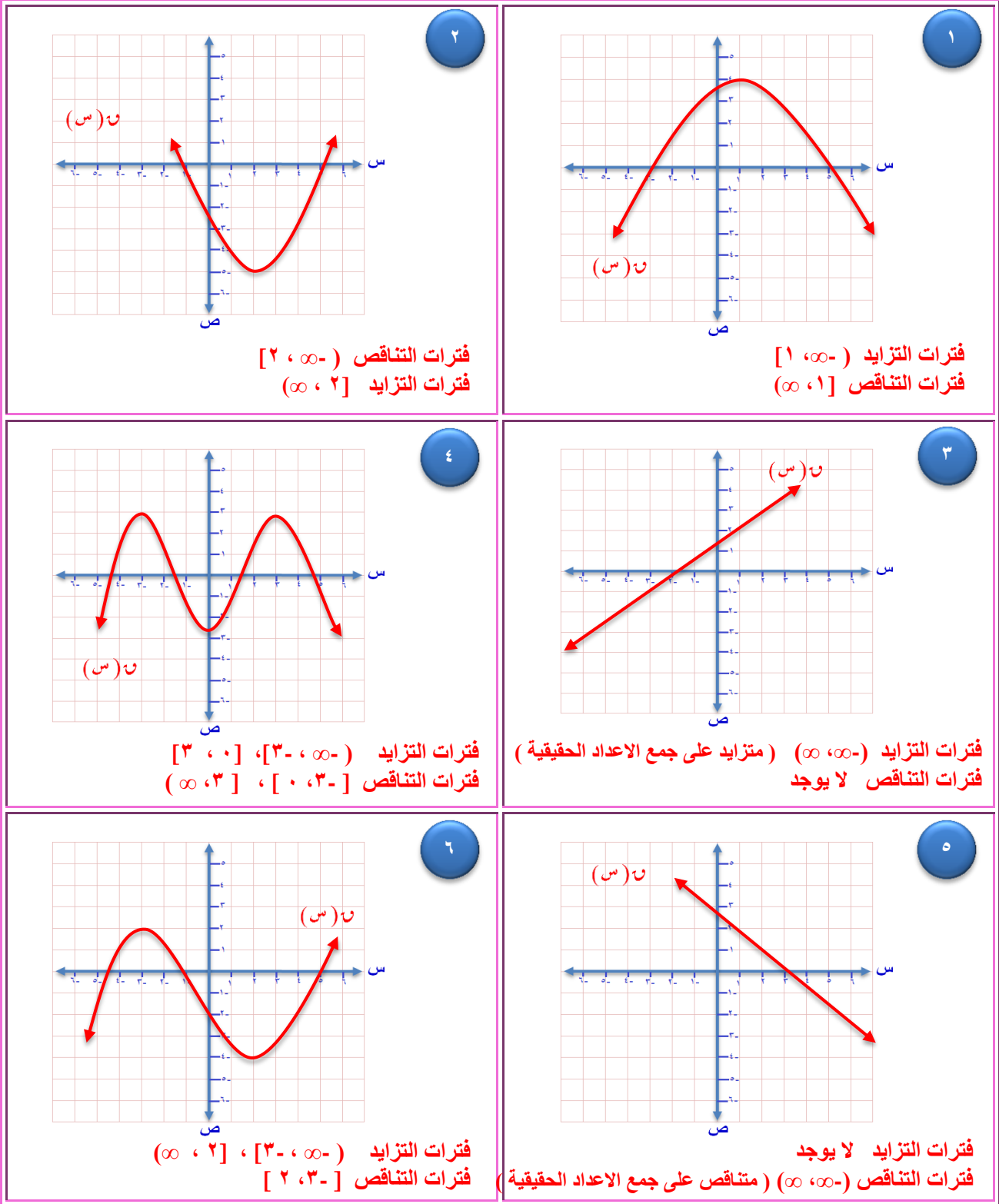
فترات التزايد $(-\infty, 1]$ ، $[3, 5]$
فترات التناقص $[1, 3]$ ، $(5, \infty)$



فترات التزايد $(-\infty, 3]$
فترات التناقص $(3, \infty)$



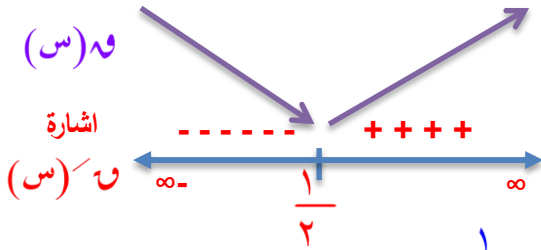
الرسم البياني التالي يمثل $u(s)$ ، اعتماداً على الرسم جد فترات التزايد و التناقص للإقترانات التالية



التزايد و التناقص للإقترانات

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للإقتران $ق(س) = س^2 - س - 20$ ان وجدت



فترات التزايد $(\frac{1}{2}, \infty)$

فترات التناقص $(-\infty, \frac{1}{2})$

الحل $ق(س) = س^2 - س - 20 = 0$

$ق(س) = س^2 - س - 20 = 0$

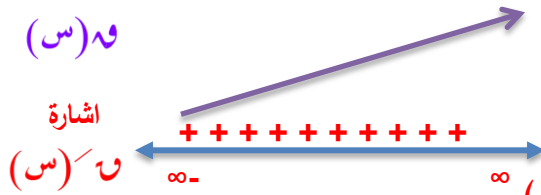
$0 = 1 - س^2$

$1 = س^2$

$\frac{1}{2} = \frac{س^2}{2} \leftarrow س = \frac{1}{2}$

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للإقتران $ق(س) = س^2 + س$ ؟ إن وجدت



الحل $ق(س) = س^2 + س = 0$

$0 = (س) (س + 1)$

$0 = 1 + س^2 \leftarrow س^2 = -1$

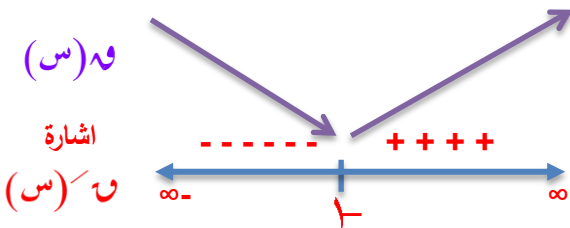
$س = \frac{1}{3} = 2$ لا تحلل (لا يوجد جذر تربيعي سالب)

$ق(س)$ دائما سيكون $<$ صفر عند تعويض اي قيمة له $ق(س) < 0$

ق(س) متزايد على جميع الأعداد الحقيقية

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للإقتران $ق(س) = س^2 + 2س + 1$ ؟ إن وجدت



الحل $ق(س) = س^2 + 2س + 1 = 0$

$0 = 2 + س^2$

$2 - = س^2$

$1 - = س$

فترات التزايد $(-1, \infty)$

فترات التناقص $(-\infty, -1)$



جد فترات التزايد والتناقص للإقتران ق (س) = $s^3 - 2s^2 + 1$ ؟ إن وجدت

الحل

$$0 = (s) \quad s^3 - 2s^2 + 1 = 0$$

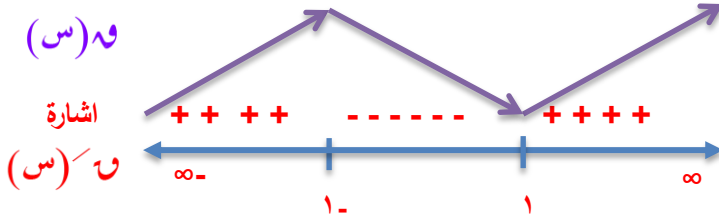
$$0 = 3 - 2s^2$$

$$3 = 2s^2$$

$$1 = s^2$$

$$1 = s \quad 1 = -s$$

فترات التزايد $(-\infty, 1]$ و $[1, \infty)$
فترة التناقص $[-1, 1]$



جد فترات التزايد والتناقص للإقتران ق (س) = $\frac{1}{3}s^3 - \frac{5}{4}s^2 + 6s - 6$ ، إن وجدت

الحل

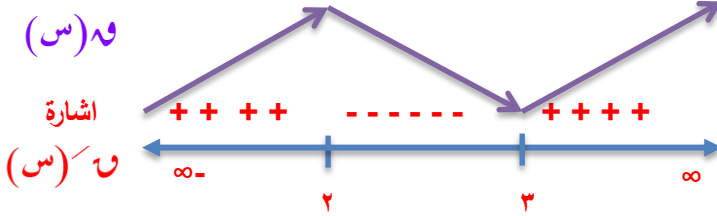
$$0 = (s) \quad \frac{1}{3}s^3 - \frac{5}{4}s^2 + 6s - 6 = 0$$

$$0 = 6 + 6s - \frac{5}{4}s^2$$

$$0 = (3 - s)(2 - s)$$

$$2 = s \quad \text{أو} \quad 3 = s$$

فترات التزايد $(-\infty, 2]$ و $[3, \infty)$
فترات التناقص $[2, 3]$



جد فترات التزايد والتناقص للإقتران ق (س) = $s^3 - 3s^2 + 1$ ، ان وجدت

الحل

$$0 = (s) \quad s^3 - 3s^2 + 1 = 0$$

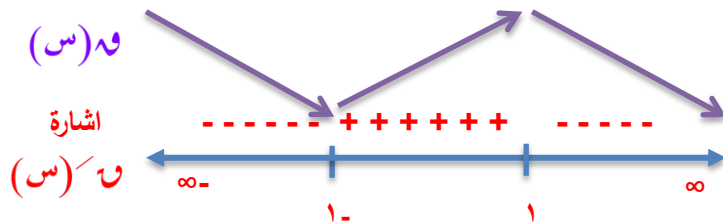
$$0 = 3s^2 - 3$$

$$3s^2 = 3$$

$$s^2 = 1$$

$$1 = s \quad 1 = -s$$

فترات التزايد $[-1, 1]$
فترات التناقص $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$



تدريب



جد فترات التزايد و التناقص للاقتران التالي ان وجدت
 $u(s) = (s-48)s^2$

تدريب



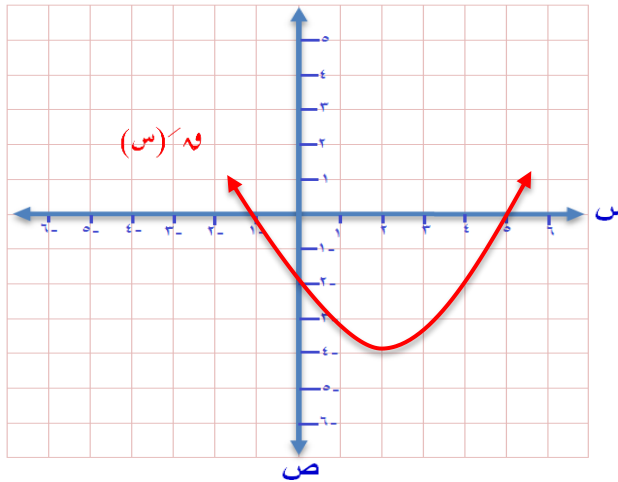
بين أن الاقترانات التالية هي متزايد على ح
 $u(s) = s^5 + 2$

تدريب



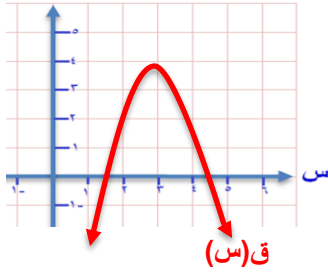
اعتماداً على الشكل التالي الذي يمثل $u(s)$ جد قيمة كل مما يلي
 (١) فترات التزايد و التناقص (٢) القيم القصوى و نوعها (٣) عدد القيم الحرجة

ثم جد هنا $\frac{u(s+2) - u(s)}{h}$

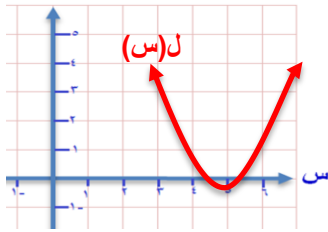


اطلب ورق العمل من المعلم لهذا الدرس

ثانياً القيم القصوى للإقتران



نلاحظ ان الإقتران ق (س) ، كان متزايداً في الفترة $(-∞, 3]$ ، وكانت اعلى نقطة عند $س = 3$ ، ثم بعد ذلك بدأ بالتناقص هذه النقطة $(س, ق(س))$ ، $(3, 4)$ ، قيمة عظمى محلية للإقتران (تحول من تزايد الى تناقص)



في الإقتران ل (س) كان الإقتران متناقصاً في الفترة $(-∞, 5]$ ثم تحول عند $س = 5$ الى اقتران متزايد في الفترة $[5, ∞)$ فتكون النقطة $(س, ل(س))$ ، $(5, 0)$ ، قيمة صغرى محلية للإقتران (تحول من متناقص الى متزايد)

تسمى القيمة العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية (القيم القصوى).

عظمى محلية ← تحول الاقتران من متزايد الى متناقص

صغرى محلية ← تحول الاقتران من تناقص الى تزايد



لمتابعة المزيد من أوراق العمل و الاختبارات و التدريبات

الاستاذ لؤي ابو ليدو "رياضيات"





جد النقط الحرجة و القيمة الصغرى المحلية والعظمى المحلية إن وجدت للإقتران

الحل ق (س) = (س)س(س - ٤٨)؟

ق (س) = س^٣ - ٤٨س

ق'(س) = ٣س^٢ - ٤٨

٠ = ٤٨ - ٣س^٢

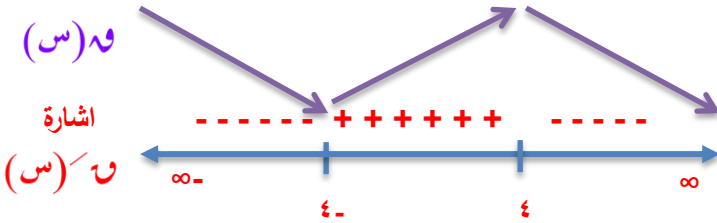
٤٨ = ٣س^٢ ← س^٢ = $\frac{٤٨}{٣}$

١٦ = س^٢ ← س = ٤- او س = ٤

فترات التزايد (٤-، ∞-) و [٤، ∞)

فترات التناقص [٤، ٤-]

القيم القصوى



☒ قيمة صغرى محلية عند س = ٤ قيمتها ق (٤) = - ١٢٨

☒ قيمة عظمى محلية عند س = ٤- وقيمتها ق (٤-) = ١٢٨



جد النقط الحرجة والقيم العظمى المحلية والصغرى المحلية للإقتران ق(س) = (س - ٢)(٤ + س) ان وجدت

الحل ق (س) = (س - ٢)س(٤ + س) - ٣٢

ق'(س) = ٤س + ١٢

= ٤س + ١٢

٤س - = ١٢

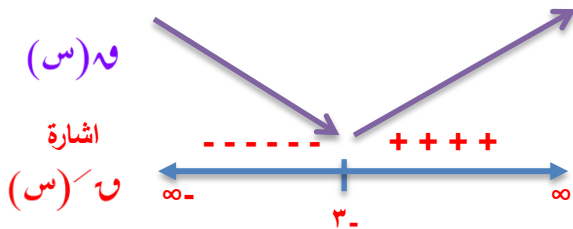
س = $\frac{١٢}{٤}$

س = ٣-

فترات التزايد [٣-، ∞)

فترات التناقص (٣-، ∞-)

القيم القصوى



☒ قيمة صغرى محلية عند س = ٣- وقيمتها ق (٣-) = - ٥٠



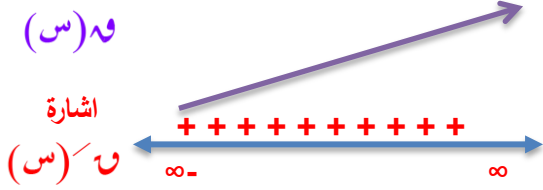
جد النقاط الحرجة والقيم العظمى المحلية الصغرى المحلية إن وجدت للإقتران $ق(س) = ٨س + ٦$ ؟

الحل $ق(س) = ٨س + ٦$

بما أن $ق(س)$ سيكون دائما > صفر ، إذا ق $(س)$ متزايد على جميع الأعداد الحقيقية

إذا لا يوجد نقاط حرجة .

إذا لا يوجد قيم قصوى .



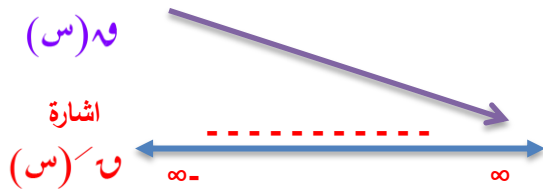
جد النقاط الحرجة والقيم العظمى المحلية الصغرى المحلية إن وجدت للإقتران $ق(س) = ٦ - ٣س$ ؟

الحل $ق(س) = ٦ - ٣س$

بما أن $ق(س)$ > صفر دائما إذا ق $(س)$ متناقص على جميع الأعداد الحقيقية

إذا لا يوجد نقاط حرجة .

إذا لا يوجد قيم قصوى .



جد فترات التزايد والتناقص والقيم العظمى المحلية الصغرى المحلية للإقتران $ق(س) = ٦س^٢ - ١س + ١$ ؟

الحل $ق(س) = ٦س^٢ - ١س + ١$

$٦س^٢ - ١س + ١ = ٠$

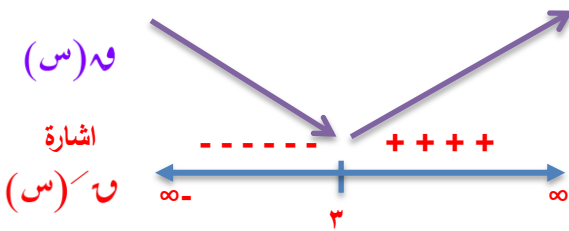
$٦س = ١$

$س = ١/٦$

ق(س) متزايد $[١/٦, ∞)$

ق(س) متناقص $(-∞, ١/٦]$

القيم القصوى



☒ قيمة صغرى محلية عند $س = ١/٦$ ، وقيمتها ق $(س) = ١٠/١٢$



جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى (الصغرى و العظمى المحلية للإقتران

ق(س) = (س)س - (س)س^٢ - (س)س^٣ - ٢٤ ؟ ان وجدت

الحل ق(س) = (س)س^٣ - (س)س^٢ - ٢٤

ق'(س) = ٣س^٢ - ٢س - ٢٤

بالقسمة على ٣

٠ = ٢٤ - ٢س - ٣س^٢

٠ = ٨ - ٢س - ٣س^٢

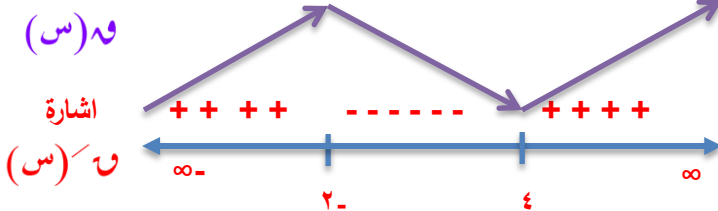
٠ = (٢+س) (٤-س)

نقاط حرجة. س = ٤ س = -٢

ق(س) متزايد (س) متناقص [٢-، ∞-) ، [٤، ∞)

ق(س) متناقص [٤، ٢-]

القيم القصوى



☒ قيمة صغرى محلية عند س = ٤ وقيمتها ق(٤) = -٨٠

☒ قيمة عظمى محلية عند س = -٢ وقيمتها ق(-٢) = ٢٨



جد فترات تزايد واتناقص القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية للإقتران ق(س) = (س)س^٢ + ٦س ؟

الحل ق(س) = (س)س^٢ + ٦س

٠ = ٢س + ٦س

٠ = ٦س + ٢س

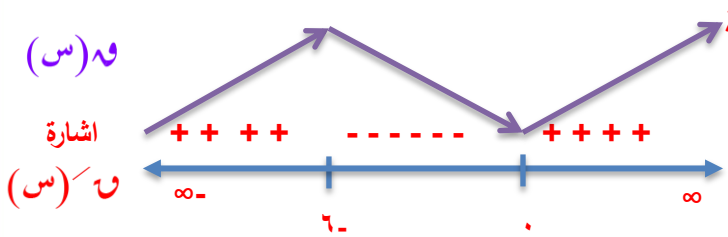
٠ = (٦+س)س

نقاط حرجة س = ٠ س = -٦

ق(س) متزايد (س) متناقص [٦-، ∞)

ق(س) متناقص [٠، ٦-]

القيم القصوى



☒ قيمة عظمى محلية عند س = -٦ وقيمتها ق(-٦) = ١٨

☒ قيمة صغرى محلية عند س = ٠ وقيمتها ق(٠) = ٠



ق(س) = (س-٢)³ بين انه لا توجد قيم قصوى للإقتران ق(س) ؟

الحل $ق(س) = (س-٢)³$

$$١ \times ٢(س-٢)³ = (س)'$$

$$١٢ + س١٢ - ٢س³ =$$

بالقسمة على ٣ $٠ = ١٢ + س١٢ - ٢س³$

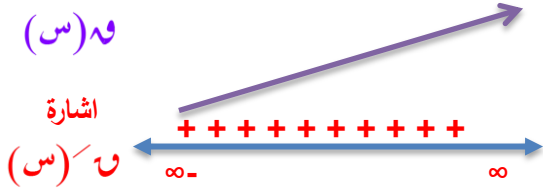
تحليل عبارة تربيعية $٠ = ٤ + س٤ - ٢س$

$$٠ = (س-٢) (س-٢)$$

$$س = ٢$$

∴ ق(س) = متزايد على جميع الاعداد الحقيقية

(-∞, ∞) ∴ لا يوجد قيم قصوى .



إذا كانت ق(س) = (س+٢)³ ، جد فترات التزايد والتناقص للإقتران ؟

الحل $١ \times ٢(س+٢)³ = (س)'$

$$١٢ + س١٢ + ٢س³ =$$

بالقسمة على ٣ $٠ = ١٢ + س١٢ + ٢س³$

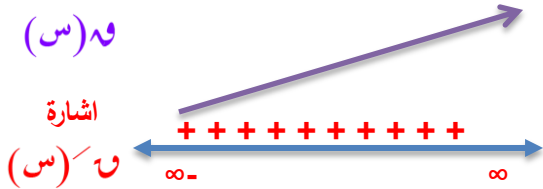
$$٠ = ٤ + س٤ + ٢س$$

$$٠ = (س+٢) (س+٢)$$

س = -٢ نقطة حرجة

ق(س) متزايد (-∞, ∞)

متزايد على الاعداد الحقيقية



جد القيم القصوى للإقتران التالي ، ان وجدت

$$ق(س) = س³ - ٣س²$$





إذا علمت أن ق(س) = س³ - أ س² ، أوجد قيمة أ إذا كانت س = 2 نقطة حرجة للإقتران ق(س) ؟

الحل $ق(س) = س^3 - أ س^2 = 0$

$$0 = (س^2) (س - أ)$$

$$0 = 2 \times 2 \times 2 - 2 \times أ$$

$$3 = 2 \leftarrow \frac{12}{4} = \frac{12}{4}$$



إذا كانت ق(س) = أس² + 6س - 1 وكان للإقتران قيمة عظمى محلية عند س = 3 جد قيمة (أ) ؟

الحل $ق(س) = أس^2 + 6س - 1$

$$0 = (س^2) (أ + 6)$$

$$0 = 6 + 3 \times أ$$

$$0 = 6 + أ6$$

$$6 - 6 = أ6$$

$$\frac{6 - 6}{6} = أ$$

$$0 = أ$$



اطلب ورق العمل من المعلم لهذا الدرس



إذا كانت ق(س) = س³ - 6س² ب أجد قيمة ب علماً بأن للإقتران قيمة حرجة عند س = 1 ؟

الحل $ق(س) = س^3 - 6س^2 + ب = 0$

$$0 = (س^2) (س - 6 + ب)$$

$$0 = 1 \times 1 - 6 + ب$$

$$0 = 1 - 6 + ب$$

$$\frac{1 - 6}{3} = ب$$

$$ب = 4$$



إذا كانت ق(س) = $s^3 - 2s^2 + 9$ وكان ميل المماس عند $s=2$ هو 20. جد قيمة ل؟

الحل \hookrightarrow ق(س) = $s^3 - 2s^2 + 9$ ل س

$$20 = (2) \hookrightarrow$$

$$20 = 2 \times 2 - 2 \times 3$$

$$20 = 4 - 12$$

$$8 = 4 -$$

$$8 = -4$$

$$\frac{8}{4} = \frac{-4}{4}$$

$$2 = -$$



إذا كان ميل المماس المنحني ص = $(1+s)^2$ عندما $s=1$ يساوي 4 - جد قيم (أ)؟

الحل \hookrightarrow ص = $(1+s)^2 \times$ أ

$$4 = (1) \hookrightarrow$$

$$4 = 2 \times (1 + 1 - \times) \times$$

$$4 = 2 \times (1 + \times) \times$$

$$4 = 2 \times 2 + 2 \times \times$$

$$1 - \times = 4 + 2 \times + 2 \times 2 - \times 1 -$$

$$0 = \frac{4 - 2 - 2 \times}{2}$$

$$0 = 2 - \times - 2 \times$$

$$0 = (1 + \times) (2 - \times)$$

$$1 = \times \quad 2 = \times$$



إذا كان للاقتران ق(س) = $3s^2 - 4s + 2$ قيمة حرجة عند $s=2$ فجد قيمة الثابت أ؟

تطبيقات اقتصادية



$$\text{التكلفة الحدية} = ك'(س)$$

$$\text{الربح الحدي} = ر'(س)$$

$$\text{الايراد الحدي} = د'(س)$$

$$\text{التكلفة الكلية} = ك(س)$$

$$\text{الربح الكلي} = ر(س)$$

$$\text{الايراد الكلي} = د(س)$$

الايراد الحدي = التكلفة الحدية + الربح الحدي

$$د'(س) = ك'(س) + ر'(س)$$

التكلفة الحدية = الایراد الحدي - الربح الحدي

$$ك'(س) = د'(س) - ر'(س)$$

الربح الحدي = الایراد الحدي - التكلفة الحدية

$$ر'(س) = د'(س) - ك'(س)$$

الايراد الكلي = التكلفة الكلية + الربح الكلي

$$د(س) = ك(س) + ر(س)$$

التكلفة الكلية = الایراد الكلي - الربح الكلي

$$ك(س) = د(س) - ر(س)$$

الربح الكلي = الایراد الكلي - التكلفة الكلية

$$ر(س) = د(س) - ك(س)$$

الايراد الكلي = عدد القطع المنتجة × السعر

لإيجاد (الايراد أو التكلفة أو الربح) (أكبر أو أقل) ما يمكن

(١) اشتق (الايراد أو التكلفة أو الربح) حسب المطلوب

(٢) اجعل المشتقة تساوي صفر ايجاد النقط الحرجة

(٣) النقاط الحرجة التي ظهرت هي التي ستكون (أكبر أو أقل) ما يمكن

(٤) يمكنك تأكيد الحل من خلال فترة التزايد و الناقص و الرسم البياني لها



لمتابعة المزيد من أوراق العمل و الاختبارات و التدريبات



الاستاذ لؤي ابو لبده "رياضيات"





في شركة لإنتاج ألعاب للأطفال كانت التكلفة الكلية لإنتاج لعبة هي ك(س) = 200 - 0,05س + 0,0001س² وان الربح الناتج عن مبيع س لعبة هو ر(س) = 0,2س فجد

- ١- التكلفة الحدية
- ٢- عدد اللعب اللازم إنتاجها حتى تكون التكلفة اقل ما يمكن
- ٣- الإيراد الحدي
- ٤- الربح الحدي

الحل

١- التكلفة الحدية = ك'(س)

$$ك'(س) = 200 - 0,05س + 0,0002س$$

$$ك'(س) = 200 - 0,05س + 0,0002س$$

٢- تكون التكلفة اقل ما يمكن عندما ك'(س) = 0

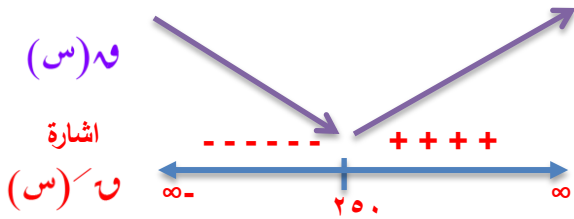
$$0 = ك'(س)$$

$$0 = 200 - 0,05س + 0,0002س$$

$$0,0002س = 0,05س - 200$$

$$س = \frac{0,05}{0,0002}$$

$$س = 250$$



عند س = 250 قيمة صغرى محلية تكون التكلفة اقل ما يمكن

٣- الإيراد الحدي = التكلفة الحدية + الربح الحدي

الإيراد الكلي = التكلفة الكلية + الربح الكلي

$$د(س) = ك'(س) + ر(س)$$

$$د(س) = (200 - 0,05س + 0,0002س) + (0,2س)$$

$$د(س) = (200 + 0,15س + 0,0002س)$$

الإيراد الحدي = د'(س)

$$د'(س) = 0,15 + 0,0004س$$

٤- الربح الحدي = ر'(س)

$$الربح الكلي = ر(س) = 0,2س$$

$$الربح الحدي = ر'(س) = 0,2$$



إذا كان إقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو $D(s) = -2s^2 + 60s$ دينار واقتران التكلفة الكلية $K(s) = 20s$ دينار ، حيث s عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما فجد ما يلي :-

- ١- التكلفة الحدية
- ٢- الإيراد الحدي
- ٣- الربح الحدي
- ٤- قيمة s التي تجعل الربح اكبر ما يمكن .

الحل

١- التكلفة الحدية = $K'(s)$

$$K(s) = 20s$$

$$\text{التكلفة الحدية} = K'(s) = 20$$

٢- الايراد الحدي = $D'(s)$

$$\text{الايراد الكلي} = -2s^2 + 60s$$

$$\text{الايراد الحدي} = D'(s)$$

$$D'(s) = -4s + 60$$

٣- الربح الحدي = $R'(s)$

$$\text{الربح الكلي} = \text{الايراد الكلي} - \text{التكلفة الكلية}$$

$$R(s) = (-2s^2 + 60s) - (20s)$$

$$R(s) = -2s^2 + 40s$$

$$\text{الربح الحدي} = R'(s)$$

$$R'(s) = -4s + 40$$

٤- قيمة s ليكون الربح اكبر ما يمكن عندما $R'(s) = 0$

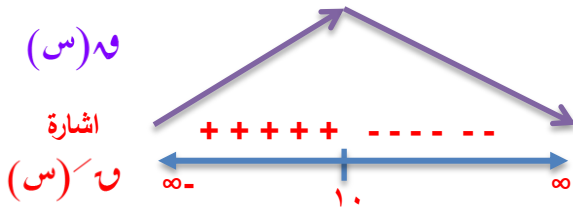
$$R'(s) = -4s + 40 = 0$$

$$0 = -4s + 40$$

$$40 = 4s$$

$$s = \frac{40}{4} = 10 \leftarrow s = 10$$

عند $s = 10$ قيمة عظمى محلية يكون الربح اكبر ما يمكن





ينتج مصنع للحواسيب (س) جهاز أسبوعيا فإذا كانت تكلفة الإنتاج الكلي الأسبوع تعطي بالعلاقة

$$ك(س) = ٣٠٠ + ٥٠س + س^٢ ، وكان المصنع يبيع الجهاز الواحد بمبلغ ٢٥٠ دينار فجد :-$$

١- اقتران الإيراد الكلي

٢- اقتران الربح الكلي

٣- عدد الأجهزة التي يجب أن يبيعها المصنع اسبوعيا ليحقق أكبر ربح؟

الحل

(١) الإيراد الكلي = د(س)

$$د(س) = \text{سعر البيع} \times \text{عدد القطع المباعة}$$

$$د(س) = ٢٥٠ \times س = ٢٥٠س$$

(٢) الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكلفة الكلية

$$ر(س) = ٢٥٠س - (٣٠٠ + ٥٠س + س^٢)$$

$$ر(س) = ٢٥٠س - ٣٠٠ - ٥٠س - س^٢$$

$$ر(س) = ٢٠٠س - ٣٠٠ - س^٢$$

(٣) عدد الأجهزة التي يجب أن يبيعها المصنع اسبوعيا ليحقق أكبر ربح $ر'(س) = ٠$

$$ر(س) = ٢٠٠س - ٣٠٠ - س^٢$$

$$\text{الربح الحدي} = ر'(س) = ٢٠٠ - ٢س$$

يكون الربح أكبر م يمكن عندما $ر'(س) = ٠$

$$٠ = ٢٠٠ - ٢س$$

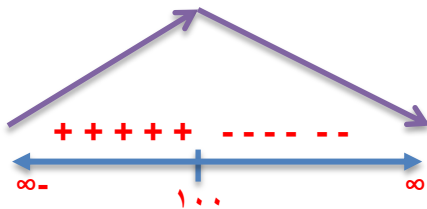
$$٢س = ٢٠٠$$

$$\frac{٢س}{٢} = \frac{٢٠٠}{٢}$$

$$س = ١٠٠$$

١٠٠ (س)

اشارة
١٠٠ (س)



أكبر ربح عندما يبيع الشركة ١٠٠ جهاز اسبوعيا .



وجد مصنع لإنتاج أجهزة إلكترونية أن التكلفة الكلية بالدينار ، لإنتاج s من الأجهزة أسبوعياً تعطى بالعلاقة $K(s) = 300 + 50s$ ، إذا بيع الجهاز الواحد بمبلغ $(200 - s)$ دينار ، فجد قيمة s التي تجعل الربح الأسبوعي أكبر ما يمكن ؟

قيمة s التي تجعل الربح الأسبوعي أكبر ما يمكن $r(s) =$

الإيراد = عدد القطع المنتجة \times سعر بيع القطعة الواحدة

$$D(s) = (200 - s) \times s$$

$$D(s) = 200s - s^2$$

$$R(s) = D(s) - K(s)$$

$$R(s) = (200s - s^2) - (300 + 50s)$$

$$R(s) = 200s - s^2 - 50s - 300$$

$$R(s) = 150s - s^2 - 300$$

$$r'(s) = 150 - 2s$$

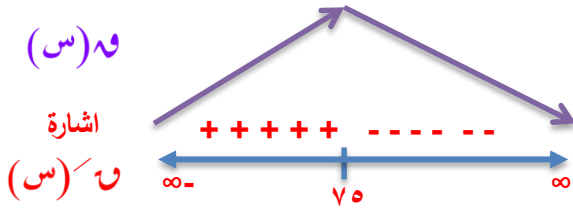
$$0 = 150 - 2s$$

$$2s = 150$$

$$s = 75$$

أكبر ربح عند بيع 75 جهاز

الحل



يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ 100 دينار ، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدينانير لإنتاج s وحدة من هذه السلعة أسبوعياً تعطى بالعلاقة $K(s) = 3s^2 + 40s + 70$ دينار فجد الربح الحدي

الإيراد = عدد القطع المنتجة \times سعر بيع القطعة الواحدة

$$D(s) = 100 \times s$$

$$D(s) = 100s$$

$$R(s) = D(s) - K(s)$$

$$R(s) = 100s - (3s^2 + 40s + 70)$$

$$R(s) = 100s - 3s^2 - 40s - 70$$

$$r'(s) = 100 - 6s - 40$$

$$r'(s) = 60 - 6s$$

الحل



إذا كان د(س) = ٣٠ - س^٢ ، هو اقتران الإيراد الكلي و كان ك(س) = ٣٠ - س^٦ ، هو إقتران التكلفة الكلية فجد س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن .

الحل

يكون الربح اكبر ما يمكن عندما يكون $r'(s) = 0$.

الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفة الكلية

$$r(s) = (30 - s^2) - (30 - s^6)$$

$$r(s) = 30 - s^2 - 30 + s^6$$

$$r(s) = 24 - s^2$$

$$\text{الربح الحدي} = r'(s) = 24 - 2s$$

يكون الربح اكبر ما يمكن عندما يكون $r'(s) = 0$.

$$0 = 24 - 2s$$

$$24 = 2s$$

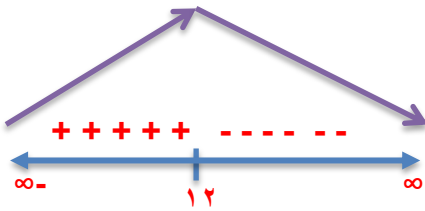
$$s = \frac{24}{2}$$

$$s = 12$$

عظمى عندما $s = 12$

وه(س)

اشارة
و(س)



إذا كان اقتران الإيراد الكلي لأحد المبيعات هو د(س) = ٥٠س + ٢س^٢ دينار ، واقتران التكلفة ك(س) = ٣٠س + ٤س^٢ + ٢٠٠ ، حيث س عدد الوحدات المباعة فجد قيمة س التي تجعل الربح اكبر ما يمكن

الحل

الربح = الإيراد - التكلفة

$$r(s) = (50s + 2s^2) - (30s + 4s^2 + 200)$$

$$r(s) = 50s + 2s^2 - 30s - 4s^2 - 200$$

$$r(s) = 20s - 2s^2 - 200$$

$$r'(s) = 20 - 4s$$

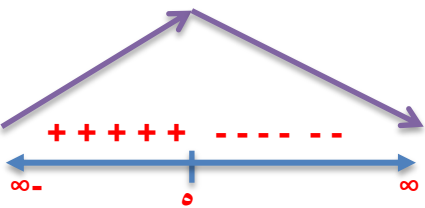
$$0 = 20 - 4s$$

$$4s = 20$$

$$s = 5$$

وه(س)

اشارة
و(س)





يبيع مصنع الوحدة من سلعة بسعر (٧٠) دينار فإذا كانت التكلفة الكلية بالدنانير لانتاج س وحدة من هذه

$$\text{السلعة اسبوعيا هي ك(س) = } 60000 + 50س + 0,0025س^2$$

فما عدد الوحدات التي يجب انتاجها اسبوعيا لتحقيق اكبر ربح ممكن ؟



اطلب ورق العمل من المعلم لهذا الدرس

الحل

عدد الوحدات التي يجب انتاجها اسبوعيا لتحقيق اكبر ربح ممكن $r(س) = ٠$

الإيراد = عدد القطع المنتجة \times سعر بيع القطعة الواحدة

$$د(س) = 70 \times س$$

$$د(س) = 70س$$

$$ر(س) = د(س) - ك(س)$$

$$ر(س) = 70س - (60000 + 50س + 0,0025س^2)$$

$$ر(س) = 70س - 60000 - 50س - 0,0025س^2$$

$$ر(س) = 20س - 60000 - 0,0025س^2$$

$$ر(س) = 20س - 60000$$

$$\text{اكبر ربح ممكن } r(س) = ٠$$

$$٠ = 20س - 60000$$

$$20س = 60000$$

$$س = \frac{60000}{20}$$

$$س = 3000$$

$$س = 3000$$

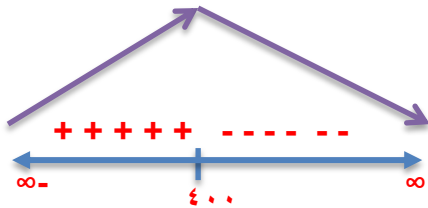
$$س = 3000$$

$$ر(س) \text{ عظمى عند } س = 3000$$

٧(س)

اشارة

٧(س)





إذا كان ك (س) = $40 + 3س^2$ دينار اقتران التكلفة الكلية للإنتاج س قطعة من هذه السلعة ، فجد التكلفة الحدية لإنتاج (٢٠) قطعة

الحل

$$ك (س) = 40 + 3س^2$$

$$ك' (س) = 6س$$

$$ك' (20) = 20 \times 6 = 120$$



إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو د (س) = $80س + س^2$ دينار ، واقتران التكلفة الكلية هو ك (س) = $40 + 160س$ دينار ، حيث عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما ، فجد الربح الحدي ؟

الحل

$$ر (س) = د (س) - ك (س)$$

$$ر (س) = (80س + س^2) - (40 + 160س)$$

$$ر' (س) = (80 + 2س) - 160$$

$$ر' (س) = 2س - 80$$



إذا كان الإقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو د(س) = $60س - س^2$ دينار ، واقتران التكلفة الكلية هو ك(س) = $20 + 8س$ دينار ، حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما ، فجد الربح الحدي

الحل

$$ر (س) = د (س) - ك (س)$$

$$ر (س) = (60س - س^2) - (20 + 8س)$$

$$ر (س) = (60س - س^2) - 20 - 8س$$

$$ر' (س) = 60 - 2س - 8$$

$$ر' (س) = 52 - 2س$$



ينتج مصنع للحواسيب س جهاز اسبوعيا، فإذا كانت تكلفة الإنتاج الكلي الاسبوعي بالدينار ، تعطى بالعلاقة ك(س) = ٣٠٠٠ + ٥٠س + س^٢ ، وكان سعر الجهاز الواحد ٢٥٠ دينارا ، فما عدد الاجهزة التي يجب ان يبيعها المصنع اسبوعيا لتحقيق اكبر ربح ممكن ؟

الحل

الايراد = عدد القطع المنتجة × سعر بيع القطعة الواحدة

$$د(س) = ٢٥٠ \times س$$

$$د(س) = ٢٥٠ س$$

$$ر(س) = د(س) - ك(س)$$

$$ر(س) = ٢٥٠س - (٣٠٠٠ + ٥٠س + س^٢)$$

$$ر(س) = ٢٥٠س - ٣٠٠٠ - ٥٠س - س^٢$$

$$ر'(س) = ٢٥٠ - ٥٠ - ٢س$$

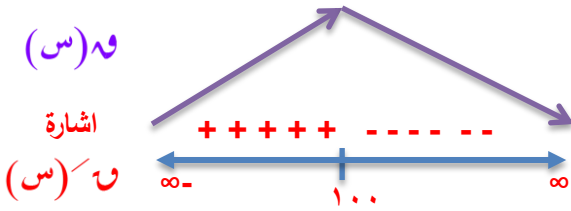
$$٠ = ٢٥٠ - ٥٠ - ٢س$$

$$٠ = ٢٠٠ - ٢س$$

$$٢٠٠ = ٢س$$

$$١٠٠ = س$$

اكبر ربح يمكن عند س = ١٠٠



ينتج احد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ ٩٠ دينار فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س وحدة من هذه السلعة اسبوعيا تعطى بالعلاقة: ك(س) = ٢س^٢ + ٧٠س + ١٠٠ دينار فجد الربح الحدي .

الحل

الايراد = عدد القطع المنتجة × سعر بيع القطعة الواحدة

$$د(س) = ٩٠ \times س$$

$$د(س) = ٩٠ س$$

$$ر(س) = د(س) - ك(س)$$

$$ر(س) = ٩٠س - (٢س^٢ + ٧٠س + ١٠٠)$$

$$ر(س) = ٩٠س - ٢س^٢ - ٧٠س - ١٠٠$$

$$ر'(س) = ٩٠ - ٤س - ٧٠$$

$$٢٠ = ٤س$$



لمتابعة المزيد من أوراق العمل والاختبارات والتدريبات

الاستاذ لؤي ابو لده "رياضيات"



إذا كان $D(s) = 16s - 2s^2$ دينار، $K(s) = 2s^2 - 8s + 15$ دينار، هما إيراد s من وحدات معينة وتكلفتها، فجد قيمة s التي تجعل الربح اكبر ما يمكن .

الحل

$$R(s) = D(s) - K(s)$$

$$R(s) = (16s - 2s^2) - (2s^2 - 8s + 15)$$

$$R(s) = 16s - 2s^2 - 2s^2 + 8s - 15 = 24s - 4s^2 - 15$$

$$R'(s) = 24 - 8s$$

$$R'(s) = 24 - 8s = 0$$

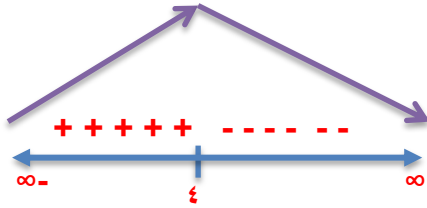
$$24 = 8s$$

$$3 = s$$

$$s = 3$$

$R(s)$

اشارة
 $R'(s)$



ينتج مصنع للمثلجات s ثلاجة شهريا ، فإذا كانت تكلفة إنتاجها تعطى بالعلاقة $K(s) = 36000 + 4s + s^2$ وكان سعر الثلاجة الواحدة ٥٠٠ دينار ، فجد عدد الثلاجات التي يجب ان يبيعها المصنع شهريا لتحقيق اكبر ربح ممكن

الحل

$$\text{الإيراد} = \text{عدد القطع المنتجة} \times \text{سعر بيع القطعة الواحدة}$$

$$D(s) = 500s$$

$$D(s) = 500s$$

$$R(s) = D(s) - K(s)$$

$$R(s) = 500s - (36000 + 4s + s^2)$$

$$R(s) = 500s - 36000 - 4s - s^2 = 496s - 36000 - s^2$$

$$R'(s) = 496 - 2s$$

$$0 = 496 - 2s$$

$$2s = 496$$

$$s = 248$$

عند $s = 248$ الربح اكبر ما يمكن

$R(s)$

اشارة
 $R'(s)$

