مدارس الجزيرة الثانوية
الجزيرة
Al-Jazeera Schools

مهارات في

الرياضيات

الفرع العلمي

الفصل الدراسي الاول

التفاضل

اعداد الدكتور

أياد جاد الله

اياد جاد الله 0788513659

معدل التغير :-

تعريف :

اذا كان ص = هـ(س) اقترانا معرفا على [أ، ب] وتغيرت س من س١ إلى س٢ ، فإن ص تتغير من ص١ = هـ(س١) إلى ص٢ = هـ(س٢)

حيث :

١. مقدار تغير لسينات $\Delta س = س_2 - س_1$

٢. مقدار تغير لصادات $\Delta ص = ص_2 - ص_1$

٣. معدل تغير هـ(س) = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

أو $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_2) - هـ(س_1)}{س_2 - س_1}$

١. اذا كان هـ(س) = $س^2 + س - 1$ ، جد

أ. مقدار تغير لسينات ($\Delta س$) اذا تغيرت س من س١ = ٢ إلى $س_2 = ٧$

ب. مقدار تغير هـ(س) اذا تغيرت س من س١ = -١ حيث $\Delta س = -٣$

ج. معدل تغير هـ(س) اذا تغيرت س من س١ = ١ إلى $س_2 = ٣$

الحل :

(أ) $\Delta س = س_2 - س_1 = ٧ - ٢ = ٥$

(ب) $\Delta ص = هـ(س_2) - هـ(س_1)$ لكن

$\Delta ص = هـ(-٤) - هـ(-١)$

$= ١٢ - ١١ = ١$

$\Delta س = س_2 - س_1$

$-٣ = س_2 - (-١)$

$س_2 = -٤$

(ج) معدل التغير = $\frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١}$

$= \frac{١١ - ١}{٢} = ٥$

٢. إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} |٢س - ٣| & ، ٠ \le س < ٢ \\ [س + ١] & ، ٢ \le س < ٦ \end{cases}$

جد معدل تغير هـ(س) اذا تغيرت س من هـ(١) بمقدار (٠,٥)

الحل : $\Delta س = س_2 - س_1$

$٠,٥ = س_2 - ١ \leftarrow س_2 = ١,٥$

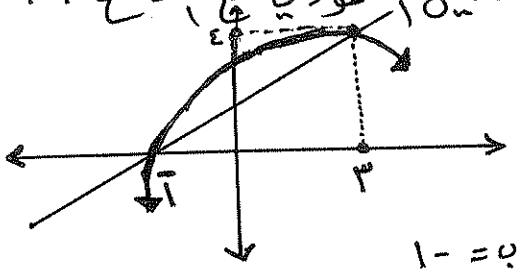
المطلوب = معدل تغير = $\frac{هـ(١,٥) - هـ(١)}{١,٥ - ١}$

$= \frac{٣ - ١}{١,٥} = \frac{٤}{٣}$

ب. اذا كان هـ(س) = $(س^2 + س)^{-١}$ وكان مقدار تغير لاحظ هـ(س) عندما تتغير س من هـ(١) إلى (م) هو $-\frac{١}{٣}$ ، جد م > ٢ . حيث م : ثابت

الحل :

ج. جد ميل العمودي على المماس $\overleftrightarrow{أ ب}$



الجواب = -١

٣) $هـ(س) = س^٢ - ٣$ ، اذا تغيرت س من ١ لقيمة $١+هـ$ ، اجد معدل تغير هـ.

الحل: $س_١ = ١$ ، $س_٢ = ١+هـ$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(١+هـ) - هـ(١)}{١+هـ-١}$$

$$= \frac{(١+هـ)^٢ - ٣ - (١^٢ - ٣)}{هـ}$$

$$= \frac{١+٢هـ+هـ^٢ - ٢ - ٣}{هـ}$$

$$= \frac{٢هـ+هـ^٢}{هـ} = \frac{هـ(٢+هـ)}{هـ} = ٢+هـ$$

٤) $هـ(س) = ظاس$ ، تغيرت س من (س) الى $(س+هـ)$ ، اثبت ان معدل التغير هو $\frac{قا^٢س \cdot ظاهـ}{هـ(١ - ظاس ظاهـ)}$

الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س+هـ) - هـ(س)}{س+هـ-س}$

$$= \frac{ظا(س+هـ) - ظاس}{هـ}$$ متطابقة

$$= \frac{\frac{ظاس+ظاهـ}{١-ظاس ظاهـ} - ظاس}{هـ}$$

$$= \frac{ظاس+ظاهـ - ظاس + ظاس^٢ ظاهـ}{(١-ظاس ظاهـ)\cdot هـ}$$

$$= \frac{ظاهـ(١+ظا^٢س)}{(١-ظاس ظاهـ)\cdot هـ}$$

$$= \frac{ظاهـ \cdot قا^٢س}{هـ(١-ظاس ظاهـ)}$$

٥) $هـ(س) = ٤س^٢ - ٩$ ، كان معدل تغير هـ على $[ب، ٢]$ يساوي (-٤) جد ب ؟

الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(ج) - هـ(ب)}{٢-ب}$

$$-٤ = \frac{(١٦-٩) - (٤ب^٢-٩)}{(٢-ب)}$$

$$-٤ = \frac{١٦-٤ب^٢+٩}{٢-ب}$$ ضرب تبادلي

$$-٨+٤ب = ١٦-٤ب^٢$$

$$٤ب^٢-٤ب+٢٤ = ٠$$

$$ب^٢+ب-٦ = ٠$$

$$(ب+٣)(ب-٢) = ٠$$

$$ب = -٣ \quad ب = ٢$$ ✗

٦) $\Delta ص = ٣س^٢\Delta س^٢ - ٥\Delta س$ جد معدل تغير هـ عندما $س = ٢$

الحل: $\Delta ص = ٣(٢\Delta س)^٢ - ٥(٢\Delta س)$

نقسم على $\Delta س$ لكل الحدين

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٣(٢\Delta س)^٢ - ٥(٢\Delta س)}{\Delta س}$$

معدل التغير $= ٣س^٢(٢) - ٥س$

نعوض س

$= ٣ \times ٤ \times ٢ - ٥ \times ٢$

$= ٣٦ - ١٠ = ٢٦$

٧. اذا كان معدل تغير $هـ$ على $[-١، ٢]$ يساوي (٥). جد معدل تغير الاقتران $هـ(س) = ٤س^٢ - ٣هـ(س)$ على الفترة نفسها؟

الحل: المعطيات $\frac{هـ(٢) - هـ(-١)}{٢ - -١} = ٥$

$١٥ = هـ(٢) - هـ(-١)$

المطلوب: معدل تغير $هـ(س)$ $= \frac{هـ(٢) - هـ(-١)}{٢ - -١}$

$= \frac{(١٦ - ٣هـ(٢)) - (٤ - ٣هـ(-١))}{٣}$

$= \frac{١٦ - ٣هـ(٢) - ٤ + ٣هـ(-١)}{٣}$

$= \frac{١٢ + ٣(هـ(-١) - هـ(٢))}{٣}$

$= \frac{١٢ + ٣ \times -١٥}{٣} = -١١$

٨. اذا كان معدل تغير $هـ(س)$ على $[١، ٣]$ يساوي ٥، $هـ(١) \times هـ(٣) = ١٢$، حيث $هـ(س) = \frac{١}{هـ(س)}$ جد معدل تغير $هـ(س)$ على نفس الفترة؟

الحل: معدل تغير $هـ(س) = \frac{\frac{١}{هـ(٣)} - \frac{١}{هـ(١)}}{٣ - ١}$

$= \frac{هـ(١) - هـ(٣)}{هـ(٣) \times هـ(١)} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{-١٠}{١٢} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{-٥}{١٢}$

معلومة معطاة $\frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١} = ٥$

$١٠ = هـ(٣) - هـ(١)$

٩. $هـ(س) = ٢\sqrt{س}$، وكان معدل التغير في الاقتران $هـ(س)$ في الفترة $[١، ب]$ يساوي $\frac{١}{٣}$، فما قيمة الثابت $ب$؟

الحل: معدل التغير $= \frac{هـ(ب) - هـ(١)}{ب - ١}$

$\frac{٢\sqrt{ب} - ٢}{ب - ١} = \frac{١}{٣}$

$٣\sqrt{ب} - ٣ = ب - ١$

$٣\sqrt{ب} = ب + ٢$ بالتربيع

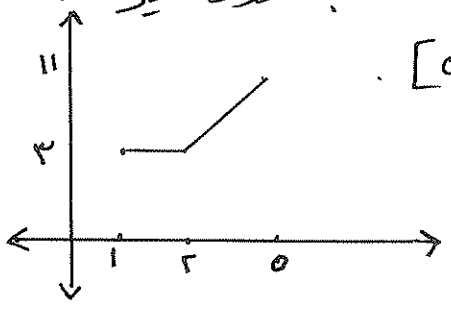
$٩ب = ب^٢ + ٤ب + ٤$

$صفر = ب^٢ - ٥ب + ٤$

$صفر = (ب - ٤)(ب - ١)$

$ب = ٤$ مرفوض، $ب = ١$ الحل

ب. بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $هـ$. جد معدل تغير $هـ$ على $[٢، ٥]$.



الحل: معدل تغير $هـ = \frac{هـ(٥) - هـ(٢)}{٥ - ٢}$

$= \frac{١١ - ٣}{٣}$

$= \frac{٨}{٣}$

١٠) اذا كان معدل تغير ق على [٢، ٥] يساوي (٧)، وكان معدل تغير ق على [٥، ٩] يساوي (١٤)، جد معدل تغير ق على [٢، ٩]

الجواب : ١١

١١) اذا كان معدل تغير ق على [١، ٤] يساوي ٣، كان ق(١) + ق(٤) = ٢، جد معدل تغير هـ(س) = ق²(س) على نفس الفترة ؟

الجواب : ٦

١٢) اذا كان معدل تغير ق(س) على [٢، ٤] يساوي (-١)، وكان هـ(س) = س² ق(س) + ٢س وكان هـ(س) يمر بالنقطة (٢، ٨)، جد معدل تغير هـ(س) على [٢، ٤].

الحل: معطى : معدل ق = $\frac{ق(٤) - ق(٢)}{٤ - ٢}$

$-١ = \frac{ق(٤) - ق(٢)}{٢}$

$\boxed{-٢ = ق(٤) - ق(٢)}$

معطى : $\boxed{هـ(٢) = ٨}$

∴ هـ(٢) = ٤ق(٢) + ٤ = ٨

٤ق(٢) = ٤

$\boxed{ق(٢) = ١}$

المطلوب :

معدل تغير هـ(س) = $\frac{هـ(٤) - هـ(٢)}{٤ - ٢}$

$= \frac{١٦ق(٤) + ٨ - (٤ق(٢) + ٤)}{٢}$

$= \frac{١٦ق(٤) + ٨ - ٤ق(٢) - ٤}{٢}$

$= \frac{١٦(-٢ + ق(٢)) + ٨ - ٤ق(٢) - ٤}{٢}$

$= \frac{١٦(-٢ + ١) + ٨ - ٤ \times ١ - ٤}{٢} = -٨$

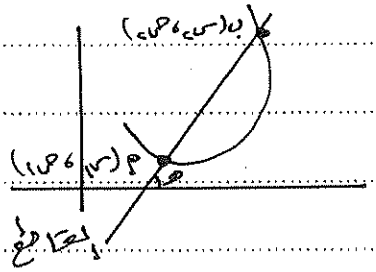
لاحظ ثم لاحظ :

* معدل تغير الاقتران الثابت يساوي (صفر)
* معدل تغير الاقتران الخطي يساوي (معامل س)

التفسير الهندسي

ميل القاطع = معدل التغير = ظا هـ

حيث هـ : زاوية ميل المستقيم وهي الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



١٣) ق(س) = س² + ٢س جد ميل القاطع الواصل بين (١، ق(١)) (٣، ق(٣))

الحل: ميل القاطع = $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$

$= \frac{١٥ - ٣}{٢} = ٦$

١٤) اذا كان القاطع المار بالنقطتين (٢، ق(٢)) (٤، ق(٤)) يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. جد معدل تغير ق على [٢، ٤]

الحل: معدل التغير = ظا ١٣٥ = -١

طبعا = ظا ١٣٥ = -ظا ٤٥ = -١

١٥ ⇐ جد ميل القاطع وميل العمودي عليه اذا كان القاطع مارا بالنقط (-١ ، ق(-١)) (٣ ، ق(٣))

حيث ق(س) = س²

الحل: ميل القاطع = معدل تغير = $\frac{ق(٣) - ق(-١)}{٣ - -١}$

$= \frac{٩ - ١}{٤} = ٢$

∴ ميل القاطع = ٢

لاحظ ميل مستقيم × ميل العمودي عليه = -١

∴ ميل القاطع × ميل العمودي = -١

٢ × ميل العمودي = -١

∴ ميل العمودي = $\frac{-١}{٢}$

١٦ ⇐ اذا كان ق(١) = $\frac{١}{٢}$ ق(٥) = ٦ ، جد

أ. معدل تغير ق(س) على [١ ، ٥] ← $\frac{٣}{٢}$

ب. ميل القاطع الواصل بين (١ ، ق(١)) (٥ ، ق(٥))

جـ. ميل العمودي على القاطع الواصل بين النقط (١ ، ق(١)) (٥ ، ق(٥)) ← $\frac{-٢}{٣}$

التغير — الفيزيائي — للموضوع

* السرعة المتوسطة = معدل تغير للمسافة بالنسبة للزمن

$\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن٢) - ف(ن١)}{ن٢ - ن١}$

١٧ ⇐ قذف جسم رأسيا لأعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن² حيث ن: الزمن بالثواني ، ف: المسافة بالمتر. جد

[١]. السرعة المتوسطة على [٢ ، ٥].

[٢]. السرعة المتوسطة بدلالة Δن اذا تغيرت ن من (صفر) إلى (Δن)

الحل: [١]. $\bar{ع} = \frac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢} = \frac{١٧٥ - ١٠٠}{٣} = ٢٥$

[٢]. $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(\Delta ن) - ف(٠)}{\Delta ن - صفر}$

$= \frac{٦٠\Delta ن - ٥(\Delta ن)^٢}{\Delta ن}$

$= \frac{\cancel{\Delta ن}(٦٠ - ٥(\Delta ن))}{\cancel{\Delta ن}} = ٦٠ - ٥(\Delta ن)$

١٨ ⇐ مكعب من المعدن يتمدد بانتظام محافظا على شكله. جد معدل تغير حجمه عندما يتغير طول حرفه (ضلعه) من ٣ سم إلى ٤ سم.

الحل: حجم المكعب = (الضلع)³ ⇐ ح(س) = س³

$\frac{\Delta ح(س)}{\Delta س} = \frac{ح(٤) - ح(٣)}{٤ - ٣}$

$= \frac{٦٤ - ٢٧}{١} = ٣٧$

١٩ ⇐ مثلث متساوي الاضلاع ، طول ضلعه (س) يتمدد بانتظام. جد مقدار تغير مساحته اذا تغير طول ضلعه من (٨ سم) إلى (١٠ سم).

الحل: م = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س²

المطلوب Δم = م(١٠) - م(٨) = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$(١٠٠ - ٦٤) = ٩√٣

٢٠ ⇐ صفيحة معدنية دائرية الشكل. جد معدل تغير مساحتها عندما يتغير طول قطرها من ٢ سم إلى ٨ سم.

الحل: م = π نق²

معدل تغير المساحة = $\frac{م(٤) - م(١)}{٤ - ١}$

$= \frac{١٦\pi - \pi}{٣} = ٥\pi$

درس (٢):

تعريف المشتقة الأولى

$\text{ق}'(\text{س}) \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \leftarrow \text{ص}'$

يجب أن نتعلم ٣ أمور :-

١. ايجاد المشتقة بدلالة س .
٢. ايجاد المشتقة عند نقطة
٣. ايجاد المشتقة للاقتران المتشعب .

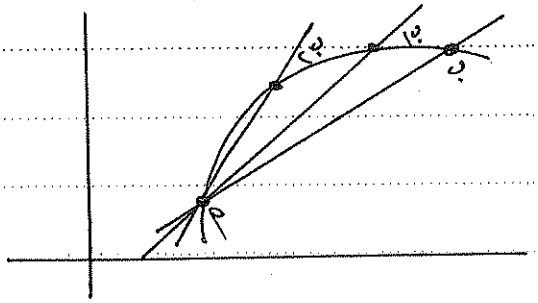
القانون: المشتقة الأولى = $\lim_{\Delta\text{س}\to 0}$ معدل التغير

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

* واذا كانت النهاية غير موجودة، فإن ق(س) يكون غير قابل للاشتقاق (ق'(س)) غير موجودة .



في الشكل السابق اذا تحركت النقطة (ب) على منحنى ق مقتربة من (أ) فإن Δس تصغر شيئاً فشيئاً، والقاطع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يأخذ اوضاعاً مختلفة هي $\overleftrightarrow{\text{أب}}$، $\overleftrightarrow{\text{أب}_1}$، $\overleftrightarrow{\text{أب}_2}$ ... وعندما Δس ← ٠ فإن القاطع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يتحول الى مماس عند أ حيث تنطبق ب على أ، وبالتالي يأتي عندنا قانون المشتقة والعلاقة مع معدل التغير

حيث ميل القاطع = $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$

∴ ميل المماس = $\lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$

ويسمى ميل المماس بالمشتقة الأولى

أمثلة

* جد المشتقة الأولى ق'(س) باستخدام تعريف المشتقة الأولى لكل مما يلي :-

١. $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3 - 7$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^3 - 7 - (\text{س}^3 - 7)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^3 \cancel{- 7} - \text{س}^3 \cancel{+ 7}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^3 - \text{س}^3}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}(\text{ع}^2 + \text{ع}\text{س} + \text{س}^2)}{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}$$

$$= 3\text{س}^2$$

٢. $هـ(س) = س^٤ + س$

الحل: $هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^٤ + ع - (س^٤ + س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^٤ - س^٤ + ع - س}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} + \frac{ع^٤ - س^٤}{ع - س}$

$= ١ + \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)(ع^٢ + س^٢)}{ع - س}$

$= ١ + ٤س^٣$

٣. $هـ(س) = \sqrt{٣س - ٨}$

الحل: $هـ'(٣) = \lim_{ع \to ٣} \frac{هـ(ع) - هـ(٣)}{ع - ٣}$

$= \lim_{ع \to ٣} \frac{\sqrt{٣ع - ٨} - \sqrt{٣(٣) - ٨}}{ع - ٣}$ مراعفه

$= \lim_{ع \to ٣} \frac{\sqrt{٣ع - ٨} - \sqrt{١}}{ع - ٣} \times \frac{\sqrt{٣ع - ٨} + \sqrt{١}}{\sqrt{٣ع - ٨} + \sqrt{١}}$

$= \lim_{ع \to ٣} \frac{٣ع - ٨ - ١}{(ع - ٣)(\sqrt{٣ع - ٨} + \sqrt{١})}$

$= \lim_{ع \to ٣} \frac{٣(ع - ٣)}{(ع - ٣)(\sqrt{٣ع - ٨} + \sqrt{١})}$

$= \frac{٣}{\sqrt{٣(٣) - ٨} + \sqrt{١}}$

$= \frac{٣}{٢}$

٤. $هـ(س) = ٢س + \sqrt{س}$ ، $س = ٧$

الحل: $هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٢ع + \sqrt{ع} - (٢س + \sqrt{س})}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٢ع - ٢س + \sqrt{ع} - \sqrt{س}}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٢(ع - س)}{ع - س} + \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{س}}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٢(ع - س)}{ع - س} + \frac{ع - س}{(ع - س)(\sqrt{ع} + \sqrt{س})}$

$= ٢ + \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

٥. $هـ(س) = س \, حا ٣س$

الحل: $هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع \, حا ٣ع - س \, حا ٣س}{ع - س}$

نطرح ونضيف $ع \, حا ٣س$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع \, حا ٣ع - ع \, حا ٣س}{ع - س} + \frac{ع \, حا ٣س - س \, حا ٣س}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع(حا ٣ع - حا ٣س)}{ع - س} + حا ٣س \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)}{(ع - س)}$

$= \lim_{ع \to س} ع \left(٢ \, حتا \frac{٣ع + ٣س}{٢} \times \frac{حا \frac{٣ع - ٣س}{٢}}{ع - س}\right) + حا ٣س$

$= \lim_{ع \to س} ٢ع \, حتا \frac{٣(ع + س)}{٢} \times \frac{٣}{٢} + حا ٣س$

$= ٣س \, حتا ٣س + حا ٣س$

٦. $ل(س) = س^٢ هـ(س)$

الحل: $ل'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ل(ع) - ل(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ هـ(ع) - س^٢ هـ(س)}{ع - س}$

نطرح ونضيف $ع^2$ ق(س)

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^2 ق(ع) - ع^2 ق(س)}{ع - س} + \frac{ع^2 ق(س) - س^2 ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} ع^2 \left(\frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}\right) + ق(س)\left(\frac{ع^2 - س^2}{ع - س}\right)$$

حلل واختصر

$$= س^2 \times ق'(س) + ق(س) \times 2س$$

٧. اذا كان ق قابلاً للاشتقاق، اثبت ان

$$\lim_{ع \to س} \frac{ع ق(س) - س ق(ع)}{ع - س} = ق(س) - س ق'(س)$$

الحل: نحل النهاية بطرح واضافة س ق(س)

$$\lim_{ع \to س} \frac{ع ق(س) - س ق(س)}{ع - س} + \frac{س ق(س) - س ق(ع)}{ع - س}$$

$$\lim_{ع \to س} ق(س)\left(\frac{\cancel{ع - س}}{\cancel{ع - س}}\right) + \frac{س(ق(س) - ق(ع))}{(ع - س)}$$

$$ق(س) + س \times -ق'(س)$$

$$ق(س) - س ق'(س)$$

* ايجاد المشتقة عند نقطة *

جد ق'(س) باستخدام التعريف عند النقطة المطلوبة :-

٨. ق(س) = $2س^2 - 4$ ، جد ق'(٣)

الحل: $ق'(٣) = \lim_{ع \to ٣} \frac{ق(ع) - ق(٣)}{ع - ٣}$ باستخدام التعريف

$$= \lim_{ع \to ٣} \frac{2ع^2 - 4 - 14}{ع - ٣}$$

$$= \lim_{ع \to ٣} \frac{2ع^2 - 18}{ع - ٣}$$

$$= \lim_{ع \to ٣} \frac{2\cancel{(ع - ٣)}(ع + ٣)}{\cancel{ع - ٣}} = 12$$

٩. ق(س) = $س^3 + 5س$ ، جد ق'(-١)

الحل: $ق'(-١) = \lim_{ع \to -١} \frac{ق(ع) - ق(-١)}{ع - -١}$ باستخدام التعريف

$$= \lim_{ع \to -١} \frac{ع^3 + 5ع - -6}{ع + 1}$$

$$= \lim_{ع \to -١} \frac{ع^3 + 5ع + 6}{ع + 1}$$ قسم تركيبية

عدد	ع	$ع^2$	$ع^3$
٦	٥	٠	١
-٦	١	-١	١
٠	٦	-١	١

(-١)

$$= \lim_{ع \to -١} ع^2 - ع + 6 = 8$$

١٠. ق(س) = $\frac{س^2}{1 - س}$ ، س ≠ ١

جد ق'(-٢) بالتعريف.

الحل: $ق'(-٢) = \lim_{ع \to -٢} \frac{ق(ع) - ق(-٢)}{ع - -٢}$

$$= \lim_{ع \to -٢} \frac{\frac{ع^2}{1 - ع} - \frac{4}{3}}{ع + 2}$$ نوحد مقامات

$$= \lim_{ع \to -٢} \frac{3ع^2 - 4 + 4ع}{3(1 - ع)} \times \frac{1}{ع + 2}$$

$$= \lim_{ع \to -٢} \frac{(3ع - 2)\cancel{(ع + 2)}}{3(1 - ع)} \times \frac{1}{\cancel{(ع + 2)}}$$

$$= \frac{-8}{9}$$

١١. أ. ق(س) = جا ٢س ، جد ق'($\frac{\pi}{4}$) بالتعريف.

تمرين

ب. ق(س) = $س\sqrt{س + 1}$ ، س > -١

جد ق'(٣)

باستخدام تعريف المشتقة

* مشتقة الاقترانات المتشعبة *

شرح بسيط: ① . اذا كان ق معرفاً على [أ، ب] فإن ق'(أ)، ق'(ب) غير موجودات لأن ق غير معرف على يسار أ ويمين ب، أي أن المشتقة عند الاطراف غير موجودة.

② . نقطة التحول س = جـ

نجد ق'$_+$(جـ)، ق'$_-$(جـ)، فإذا كانت

ق'$_+$(جـ) = ق'$_-$(جـ)

∴ ق'(جـ) موجودة

١٢. ق(س) = { ٢س + ٣ ، −٥ ≤ س < ١ ؛ ١ + ٤س ، ١ ≤ س ≤ ٣ }

جد ق'(−٥)، ق'(٣)، ق'(٠)، ق'(٢)، ق'(١) باستخدام تعريف المشتقة؟.

الحل: ق'(−٥)، ق'(٣) غير موجودة لانها طرف فترة.

* ق'(٠) عادية = نها$_{ع \to ٠}$ (ق(ع) − ق(٠)) / (ع − ٠) = نها$_{ع \to ٠}$ (٢ع + ٣ − ٣) / (ع − ٠)

= نها$_{ع \to ٠}$ ٢ع / ع = ٢

* ق'(٢) عادية = نها$_{ع \to ٢}$ (ق(ع) − ق(٢)) / (ع − ٢) = نها$_{ع \to ٢}$ (١ + ٤ع − ٩) / (ع − ٢)

= نها$_{ع \to ٢}$ ٤(ع − ٢) / (ع − ٢) = ٤

* ق'(١) نقطة تحول يميناً ويساراً

ق'$_+$(١) = نها$_{ع \to ١^+}$ (ق(ع) − ق(١)) / (ع − ١)

= نها$_{ع \to ١^+}$ (١ + ٤ع − ٥) / (ع − ١) = نها$_{ع \to ١^+}$ ٤(ع − ١) / (ع − ١) = ٤

ق'$_-$(١) = نها$_{ع \to ١^-}$ (ق(ع) − ق(١)) / (ع − ١)

= نها$_{ع \to ١^-}$ (٢ع + ٣ − ٥) / (ع − ١) = نها$_{ع \to ١^-}$ ٢(ع − ١) / (ع − ١) = ٢

ق'$_+$(١) ≠ ق'$_-$(١) ← ق'(١) غير موجودة

← ق غير قابل للاشتقاق عند س = ١

١٣. ق(س) = { ٢س² + ٥ ، س ≥ ١ ؛ ٤س + ٣ ، س < ١ }

ابحث قابلية الاشتقاق لاقتران ق عند س = ١ باستخدام تعريف المشتقة.

الحل: س = ١ نقطة تحول يميناً ويساراً

ق'(١)$^+$ = نها$_{ع \to ١^+}$ (ق(ع) − ق(١)) / (ع − ١)

= نها$_{ع \to ١^+}$ (٢ع² + ٥ − ٧) / (ع − ١) = نها$_{ع \to ١^+}$ (٢ع² − ٢) / (ع − ١)

= نها$_{ع \to ١^+}$ ٢(ع − ١)(ع + ١) / (ع − ١) = ٤

ق'(١)$^-$ = نها$_{ع \to ١^-}$ (٤ع + ٣ − ٧) / (ع − ١) = نها$_{ع \to ١^-}$ (٤ع − ٤) / (ع − ١)

= نها$_{ع \to ١^-}$ ٤(ع − ١) / (ع − ١) = ٤

ق'(١)$^+$ = ق'(١)$^-$ ← ق'(١) = ٤

⇐ ق قابل للاشتقاق عند س = ١

١٤. ق(س) = ظا س ، جد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة

الحل: قَ(س) = $\lim_{ع \to س} \frac{ظا ع - ظا س}{ع - س}$

حسب المتطابقة ظا(أ - ب) = $\frac{ظا أ - ظا ب}{1 + ظا أ ظا ب}$

قَ(س) = $\lim_{ع \to س} \frac{ظا(ع - س) \times (1 + ظا ع ظا س)}{ع - س}$

= $\lim_{ع \to س} \frac{ظا(ع - س)}{(ع - س)} \times \lim_{ع \to س} (1 + ظا ع ظا س)$

$\boxed{ص = ع - س}$

$ع \to س$

$ص \to 0$

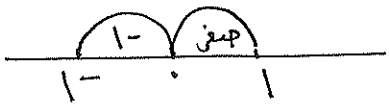
= $\lim_{ص \to 0} \frac{ظا ص}{ص} \times (1 + ظا^2 س)$

= $1 \times قا^2 س$ = $قا^2 س$

١٥. ق(س) = $س^2$ [س] ، جد قَ(٠) باستخدام تعريف المشتقة.

الحل: نعيد تعريف الصحيح

س = صفر ، ل = ١



ق(س) = { $-س^2$ ، $-1 \le س < صفر$ ؛ صفر ، $صفر \le س < 1$ }

قَ$_+$(صفر) = $\lim_{ع \to 0^+} \frac{ق(ع) - ق(0)}{ع - 0}$

= $\lim_{ع \to 0^+} \frac{صفر - صفر}{ع}$ = صفر

قَ$_-$(٠) = $\lim_{ع \to 0^-} \frac{ق(ع) - ق(0)}{ع - 0}$

= $\lim_{ع \to 0^-} \frac{-ع^2 - 0}{ع}$ = $\lim_{ع \to 0^-} -ع$

= صفر

∴ قَ(٠) = صفر

١٦. ق(س) = س|س - ١| ، جد قَ(١) باستخدام تعريف المشتقة.

العلاقة بين معدل التغير والمشتقة:

١. قَ(س) = $\lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

٢. قَ(س) = $\lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

٣. قَ(س) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

① . اذا كان معدل تغير ق(س) يساوي ($س^3 \Delta س + 5س - 1$) ، جد قَ(٦).

الحل: قَ(س) = $\lim_{\Delta س \to 0}$ معدل التغير

= $\lim_{\Delta س \to 0} س^3 \Delta س + 5س - 1$

قَ(س) = ٥س - ١

قَ(٦) = ٥ × ٦ - ١ = ٢٩

② . اذا كان التغير في الاقتران يساوي $5س^2 هـ - 2س^3 هـ^2$ ، جد قَ(١)

الحل: نجد معدل التغير اولاً

التغير = $\Delta ص = 5س^2 هـ - 2س^3 هـ^2$

معدل التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{5س^2 هـ - 2س^3 هـ^2}{هـ}$

= $\frac{\cancel{هـ}(5س^2 - 2س^3 هـ)}{\cancel{هـ}}$

قَ(س) = $\lim_{هـ \to 0} 5س^2 - 2س^3 هـ$

قَ(س) = $5س^2$

قَ(١) = ٥ .

③ . أ. اذا كان

ق(س + هـ) - ٥هـ = $3س هـ^2 + س^2 هـ$ + ق(س)

جد قَ(٢) .

ب. اذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س إلى ع يساوي (س ع² − ع س²). أوجد قَ(٥)

نظرية الاتصال والاشتقاق :-

اذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س = جـ ، فإن ق(س) متصل عند س = جـ (البرهان مطلوب)

① . قَ(٣) = ٦ ، ق(٣) = ٥

جد $\lim_{س \to ٣} (٢س + ق^٢(س))$

الحل: ق قابل للاشتقاق عند س = ٣

∴ ق متصل عند س = ٣

يعني $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ق(٣) = ٥$

المطلوب: $\lim_{س \to ٣} ٢س + \lim_{س \to ٣} ق^٢(س)$

$= ٦ + (ق(٣))^٢$

$= ٦ + ٢٥ = ٣١$

② . اذا كان قَ(٢) موجودة ، ومنحنى ق يمر بالنقطة (٢ ، ٥) ، جد

$\lim_{س \to ٢} (|س - ١| + [\frac{س}{٣} + ٤] - ٦ق(س))$

الحل: ق قابل للاشتقاق عند س = ٢

∴ ق متصل عند س = ٢

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢) = ٥$

المطلوب

$\lim_{س \to ٢} |س - ١| + \lim_{س \to ٢} [\frac{س}{٣} + ٤] - \lim_{س \to ٢} ٦ق(س)$

$١ + ٤ - ٦ \times ٥ = -٢٥$

نتيجة مهمة للغاية (very important)

اذا كان ق غير متصل عند س = أ فإن ق غير قابل للاشتقاق عند س = أ .

① . $ق(س) = \frac{٩}{س - ١}$ ابحث قابلية الاقتران للاشتقاق عند س = ١

الحل: نبحث الاتصال عند س = ١

$ق(١) = \frac{٩}{٠}$ (غير معرف)

∴ ق غير متصل عند س = ١

∴ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ١

② . $ق(س) = \begin{cases} س^٢ & ، ١ \le س < ٢ \\ ٣س + ٢ & ، ٢ \le س < ٧ \end{cases}$

ابحث قابلية الاقتران للاشتقاق عند س = ٢

الحل: نبحث الاتصال عند س = ٢

$ق(٢) = ٣ \times ٢ + ٢ = ٨$

$\lim_{س \to ٢^+} (٣س + ٢) = ٨$ ، $\lim_{س \to ٢^-} (س^٢) = ٤$

∴ ق غير متصل عند س = ٢

∴ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٢

③ . خبيث $ق(س) = \begin{cases} [س + ١] & ، س < ٢ \\ |س^٢ - ١| & ، س \ge ٢ \end{cases}$

ابحث قابلية الاقتران للاشتقاق عند س = ٢

الحل:

* قواعد الاشتقاق *

[١] مشتقة الثابت ← صفر

[٢] $س^{ن}$ ← $ن\,س^{ن-١}$

[٣] أ س ← أ

[٤] أ $س^{ن}$ ← أ × ن $س^{ن-١}$

[٥] مشتقة الجمع والطرح ← نشتق كل اقتران لحاله

* $(ق \pm هـ)'(س) = ق'(س) \pm هـ'(س)$

[٦] $(ق \cdot هـ)'(س) = ق \times هـ' + هـ \times ق'$

اول × ثاني — الاول × م الثاني + الثاني × م الاول

[٧] مشتقة قسمة اقترانين :-

أ. $\frac{اقتران}{ثابت}$ ← $\frac{م.الاقتران}{الثابت نفسه}$

ب. $\frac{ثابت}{اقتران}$ ← $\frac{-الثابت \times م.المقام}{(مقام)^{٢}}$

ج. $\frac{اقتران (بسط)}{اقتران (مقام)}$ ← $\frac{مقام \times م.بسط - بسط \times م.مقام}{(مقام)^{٢}}$

[٨] $(ق(س))^{ن}$ ← $ن\,(ق(س))^{ن-١} \times ق'(س)$

لاحظ : π ، هـ ، ٢π ، $هـ^{٢}$ ، $\sqrt{هـ}$ ، جا π

قا $\frac{\pi}{٣}$ ... كلها ثوابت ...

[٩] الجذر التربيعي $\sqrt{ق}$ ← $\frac{ق'}{٢\sqrt{ق}}$

[١٠] اي جذر مش تربيعي يرجع لاصله ثم نشتقه

أمثلة

١. $ق(س) = س^{٣} + ٥س - ٢$ ، جد $ق'(١)$

$ق'(س) = ٣س^{٢} + ٥$

$ق'(١) = ٨$

٢. $ق(س) = ٩س - س^{٢} - \pi$

$ق'(س) = ٩ - ٢س$

٣. $ق(س) = ٧س^{٢} - ٢س^{٥} - ٣١$

$ق'(س) = ١٤س - ١٠س^{٤}$

٤. $ق(س) = (س^{٢}+١)(٣س-٢)$

جد $ق'(-٢)$

$ق'(س) = (س^{٢}+١)(٣) + (٣س-٢)(٢س)$

$ق'(-٢) = ١٥ + ٣٢ = ٤٧$

٥. $ق(س) = س^{٣} - س^{٢}$ جد

$ق'(١)$ ، $(ق(١))'$

الحل : $ق'(س) = ٣س^{٢} - ٢س$

* $ق'(١) = ٣ \times ١ - ٢ \times ١ = ١$

* $(ق(١))' = (١^{٣} - ١^{٢})' = (٠)' = ٠$

٦. $ق(س) = ٢س^{-٣} - ٥س^{-١}$

$ق'(س) = -٦س^{-٤} + ٥س^{-٢}$

$= \frac{-٦}{س^{٤}} + \frac{٥}{س^{٢}}$

٧. $ص = ٢س^{٣} + ٧س - ١$ ، جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٦س^{٢} + ٧$ نعوض

$= ٦ \times ٤ + ٧ = ٣١$

٨. $ص = (س^{٢} + ٣س - ١)^{٥}$ جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٠}$

$\frac{دص}{دس} = ٥(س^{٢}+٣س-١)^{٤}(٢س+٣)$

نعوض $= ٥(-١)^{٤}(٣) = ١٥$

٩. $ص = م^{٣} - م^{٩} + ٦م - ٤١$

جد $\frac{دص}{دم}$ ؟

$\frac{دص}{دم} = ٣م^{٢} - ٩م^{٨} + ٦$

١٠. $ق(س) = \pi س^{٢} - أ س^{٣} - ٩\sqrt{\pi}$

$ق'(س) = ٢\pi س - ٣أ س^{٢}$

١١. $ص = (٢س+١)(س - س^{٢})$

جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=-٢}$

$\frac{دص}{دس} = (٢س+١)(١-٢س) + (س-س^{٢})(٢)$

$= (٢\times-٢+١)(١-٢(-٢)) + (-٢-٤)(٢)$

$= (-٣)(٥) + (-٦)(٢) = -٢٧$

١٢. $ق(س) = \frac{٨}{س^{٢}+١}$ جد $ق'(-٢)$

$ق'(س) = \frac{-٨\times٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}} \leftarrow ق'(-٢) = \frac{٣٢}{٢٥}$

١٣. $ص = \frac{س^{٢} - س^{٥} - ٩}{٧}$

$ص' = \frac{٢س - ٥س^{٤}}{٧}$

١٤. $ص = \frac{س^{٢} + ٢س - ٥}{٤س - ١}$

$ص' = \frac{(٤س-١)(٢س+٢) - (س^{٢}+٢س-٥)(٤)}{(٤س-١)^{٢}}$

١٥. $ق(س) = \frac{س^{٣}(س-٢)}{س^{٣}+١}$ ، جد $ق'(١)$

نجهز $ق(س) = \frac{س^{٤} - ٢س^{٣}}{س^{٣}+١}$

$ق'(س) = \frac{(س^{٣}+١)(٤س^{٣}-٦س^{٢}) - (س^{٤}-٢س^{٣})(٣س^{٢})}{(س^{٣}+١)^{٢}}$

$ق'(١) = \frac{٢\times-٢ - -١\times٣}{٤} = \frac{-١}{٤}$

١٦. $ق(س) = \frac{س}{٤} - \frac{٤}{س} - \frac{١}{٤}$

$ق'(س) = \frac{١}{٤} - \frac{-٤\times١}{س^{٢}} = \frac{١}{٤} + \frac{٤}{س^{٢}}$

١٧. $ق(س) = (س - س^{-١})^{٣}$

$ق'(س) = ٣(س - س^{-١})^{٢}(١ + س^{-٢})$

$= ٣(س - \frac{١}{س})^{٢}(١ + \frac{١}{س^{٢}})$

١٨. $ق(س) = \sqrt{س^{٣} + س^{٢} + ٧}$

جد $ق'(١)$

$ق'(س) = \frac{٣س^{٢} + ٢س}{٢\sqrt{س^{٣} + س^{٢} + ٧}}$

$ق'(١) = \frac{٥}{٦}$

١٩. $ق(س) = هـ(س) \times ل(س)$

جد $ق'(٤)$ حيث $هـ(٤) = ل'(٤) = ٢$

، $هـ'(٤) = ل(٤) = -٣$

$ق'(س) = هـ(س)\times ل'(س) + ل(س)\times هـ'(س)$

$ق'(٤) = هـ(٤)\times ل'(٤) + ل(٤)\times هـ'(٤)$

$= ٢\times٢ + -٣\times-٣ = ١٣$

٢٠. $ق(س) = أ س^{٣} - ٣س^{٢} - ١٢$

جد أ حيث $ق'(-٢) = ١٢$ ،

$ق'(س) = ٣أ س^{٢} - ٦س$

$ق'(-٢) = ١٢أ + ١٢ = ١٢$

$١٢أ = ٠$

$أ = صفر$

أسئلة حلوة كثير :-

٢١. ق(س) = س² هـ(س) − ٥

جد قَ(٢) حيث

هـ(٢) = ½ هـَ(٢) = ٣

قَ(س) = س² × هـَ(س) + هـ(س) × ٢س

قَ(٢) = ٤ × هـَ(٢) + هـ(٢) × ٤

= ٤ × ٦ + ٣ × ٤ = ٣٦

٢٢. إذا كان قَ(٣) = ١ ، ق(٣) = ٢

هـ(٣) = ٥ ، هـَ(٣) = ٤ ، جد :

أ. (ق . هـ)َ(٣)

= ق × هـَ + هـ × قَ

= ق(٣) × هـَ(٣) + هـ(٣) × قَ(٣)

= ٢ × ٤ + ٥ × ١ = ١٣

ب. (٦ق(س) − ٤هـ(س) + س²)َ(٣)

= ٦قَ(س) − ٤هـَ(س) + ٢س نعوض

= ٦قَ(٣) − ٤هـَ(٣) + ٢ × ٣

= ٦ × ١ − ٤ × ٤ + ٢ × ٣ = −٤

جـ. (ق(٣) . هـ(س))َ(٣)

= (٢هـ(س))َ(٣)

= ٢هـَ(س) ← ٢ × هـَ(٣)

= ٢ × ٤ = ٨

د. (هـ/ق)َ(٣)

= (ق × هـَ − هـ × قَ)/(ق)² نعوض

= (٢ × ٤ − ٥ × ١)/٤ = ٣/٤

هـ. (ق³)َ(٣)

= ٣(ق)² × قَ نعوض

= ٣(ق(٣))² × قَ(٣)

= ٣(٢)² × ١ = ١٢

و. (ق² × س²)َ(٣)

= ق² × ٢س + س² × ٢(ق)¹ × قَ

= ٤ × ٦ + ٩ × ٢ × ٢ × ١

= ٢٤ + ٣٦ = ٦٠

٢٣. ق(س) = جـ/س + س ، س ≠ ٠

جد جـ حيث نها (س ← ١) (ق(س) − ق(١))/(س − ١) = −٣

الحل: المعلومة قَ(١) = −٣

نجد قَ(س) = (−جـ × ١)/س² + ١ ⇐

قَ(١) = −جـ/١ + ١ = −٣

−جـ = −٤ ← جـ = ٤

٢٤. ق(س) × هـ(س) = ١ ، كان

تمرين هـ(١) = ٣ ، هـَ(١) = ٥ ، جد

قَ(١)

جـ: −٥/٩

٢٥. ق(س) = س³ − ٣س² − ٨

جد أصفار المشتقة الأولى.

الحل: قَ = ٣س² − ٦س = ٠

س(٣س − ٦) = ٠

س = ٠ ، س = ٢

٢٦. ق(س) = س² . ل(س) / م(س) جد قَ(٢)

حيث ل(٢) = مَ(٢) = ١ ،

لَ(٢) = م(٢) = −٣

(أسئلة عامة مشتقة المجذور)

٢٧. $ص = \sqrt[3]{س^2 + 7س}$ جد $\frac{دص}{دس}$ | $س = 1$

الحل: $ص = (س^2 + 7س)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{3}(س^2 + 7س)^{-\frac{2}{3}} \times (2س + 7)$

$= \frac{2س + 7}{3\sqrt[3]{(س^2 + 7س)^2}}$ نعوض

$= \frac{9}{3\sqrt[3]{8} \times 3} = \frac{9}{4 \times 2} = \frac{3}{4}$

٢٨. $ص = \sqrt[4]{س - 1}$ جد $\frac{دص}{دس}$ | $س = 2$

الحل: $ص = (س - 1)^{\frac{1}{4}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{4}(س - 1)^{-\frac{3}{4}} \times 1$

$= \frac{1}{4\sqrt[4]{(س - 1)^3}}$ نعوض

$= \frac{1}{4}$

٢٩. $ص = \sqrt{س} \cdot \sqrt{س}$ جد $\frac{دص}{دس}$ | $س = 1$

الحل: $ص = س^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس} = س^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{س}} + \sqrt{س} \times \frac{1}{2}س^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{\sqrt{س}}{2\sqrt{س}} + \frac{\sqrt{س}}{2\sqrt{س}}$ نعوض

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (يوجد حل آخر)

٣٠. $ص = \sqrt[3]{(س^2 + 7)^4}$ جد $\frac{دص}{دس}$

عند $س = -5$

* مشتقة الاقترانات المتشعبة *

قبل أن نشتق يجب بحث الاتصال

حيث * نشتق كل قاعدة لوحدها ونزيل المساواة.

* الاطراف عندها المشتقة غير موجودة.

* التحول: اتصال ← متصل ← مشتقة +، -

← غير متصل

← المشتقة عندها غير موجودة

١. $هـ(س) = \begin{cases} س^3 + 4 & ، -2 \le س \le 1 \\ س^2 - 4س & ، 1 \le س \le 5 \end{cases}$

جد $هـ'(س)$ ؟

الحل: $هـ'(س) = \begin{cases} 3س^2 & ، -2 < س < 1 \\ 2س - 4 & ، 1 < س < 5 \\ \text{غير موجودة} & ، س = -2 ، 1 ، 5 \end{cases}$

نبحث اتصال التحول

$هـ(1) = -3$ ، نهـا $س \to 1^+$ $س^2 - 4س = -3$ ، نهـا $س \to 1^-$ $س^3 + 4 = 5$

غير متصل ← $هـ'(1)$ غير موجودة

٢. $هـ(س) = \begin{cases} \frac{4}{س} - 1 & ، س > 1 \\ س^2 + 2س & ، س \le 1 \end{cases}$

جد $هـ'(س)$ ؟

الحل: $هـ'(س) = \begin{cases} -\frac{4}{س^2} & ، س > 1 \\ 2س + 2 & ، س < 1 \\ \text{غير موجودة} & ، س = 1 \end{cases}$

* نبحث اتصال التحول $س = 1$

$هـ(1) = 3$

نهـا $س \to 1^+$ $(\frac{4}{س} - 1) = 3$

نهـا $س \to 1^-$ $(س^2 + 2س) = 3$

متصل

* نبحث المشتقة

$هـ'_+(1) = -\frac{4}{س^2} = -4$

$هـ'_-(1) = 2س + 2 = 4$

٣. ق(س) = { س² ، س ≤ ٢ ؛ ٣س − ١ ، ٢ < س < ٤ ؛ ٥ − س ، س ≥ ٤ }

جد قَ(س) ؟!

الحل: قَ(س) = { ٢س ، س < ٢ ؛ ٣ ، ٢ < س < ٤ ؛ −١ ، س > ٤ ؛ غ.م ، س = ٢ ، ٤ }

نبحث اتصال ق
س = ٢ ... غ. متصل
س = ٤ ... غ. متصل

٤. ق(س) = { (س² − ١٦)/(س − ٤) ، س ≠ ٤ ؛ ٨ ، س = ٤ }

حلو
حلو
حلو

جد قَ(س) ؟

الحل: نبحث اتصال التحول ق(٤) = ٨

نها س→٤ (س² − ١٦)/(س − ٤) = ÷ ← نها س→٤ (س − ٤)(س + ٤)/(س − ٤) = ٨

∴ ق(س) = { س + ٤ (يمكن اختصاره إذا كان متصل) ، س ≠ ٤ ؛ ٨ ، س = ٤ }

(ملاحظة خطيرة على الكسر عند اصفار المقام والمشتقة)

← قَ(س) = { ١ ، س ≠ ٤ ؛ ١ ، س = ٤ }

أو نكتب قَ(س) = ١

٥. ق(س) = { س² + ٧ ، س ≠ ٣ ؛ ١٦ ، س = ٣ }

جد قَ(س)

الحل: نبحث اتصال التحول ق(٣) = ١٦

نها س→٣ س² + ٧ = ٩ + ٧ = ١٦ متصل

قَ(س) = { ٢س ، س ≠ ٣ ؛ ٦ ، س = ٣ }

أو نكتب قَ(س) = ٢س

٦. ق(س) = { س² + ٧ ، س ≠ ٣ ؛ ١٠ ، س = ٣ }

جد قَ(س) ؟

الحل: قَ(س) = { ٢س ، س ≠ ٣ ؛ غير موجودة ، س = ٣ }

نبحث اتصال س = ٣
ق(٣) = ١٠
نها س→٣ س² + ٧ = ١٦
غير متصل

٧. ق(س) = س³ |س − ١| ، جد قَ(س) ؟

الحل: نعيد تعريف المطلق

− | + ، ١

ق(س) = { س³(س − ١) ، س ≥ ١ ؛ س³(١ − س) ، س < ١ }

ق(س) = { س⁴ − س³ ، س ≥ ١ ؛ س³ − س⁴ ، س < ١ }

قَ(س) = { ٤س³ − ٣س² ، س > ١ ؛ ٣س² − ٤س³ ، س < ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ }

نبحث اتصال س = ١
ق(١) = ∴
نها س→١⁺ = ٠
نها س→١⁻ = ٠
متصل
نبحث اشتقاق
قَ(١)⁺ = ١
قَ(١)⁻ = −١

٨. ق(س) = |س² − ٥س + ٤| / س(س − ١) ، س ∈ (١ ، ٥]

جد قَ(س)

الحل: نعيد تعريف

+ | − | + ، ١ ، ٤

ق(س) = { (س − ٤)(س − ١)/س(س − ١) ، ١ < س < ٤ ؛ (س − ٤)(س − ١)/س(س − ١) ، ٤ ≤ س ≤ ٥ }

نبسط

ق(س) = { −١ + ٤/س ، ١ < س < ٤ ؛ ١ − ٤/س ، ٤ ≤ س ≤ ٥ }

س = ٤ تحول نبحث اتصال ق عندها

متصل . . .

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{س^{٢}} & ، ١ < س < ٤ \\ \frac{٤}{س^{٢}} & ، ٤ < س < ٥ \end{cases}$$

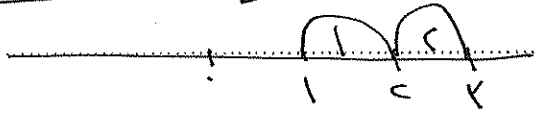
غير موجودة ، س = {٤، ٥}

بحث اشتقاقه الحول هـ(١) = $\frac{-٤}{١٦}$ ، هـ(٤) = $\frac{٤}{١٦}$

٩. هـ(س) = (س − ٤) × [س]

جد هـ(٢) ؟

الحل: نجد تعريف المجهول س = ١٠ ، ل = ١



$$هـ(س) = \begin{cases} (س-٤) \times ١ & ، ١ \leq س < ٢ \\ (س-٤) \times ٢ & ، ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} ١ & ، ١ < س < ٢ \\ ٢ & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$$

الدخل هـ عند س = ٢ ← غير متصل

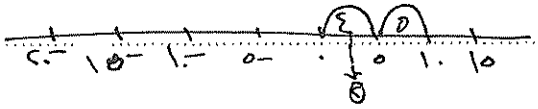
$$\text{هـ}(٢^{+}) = -٤ \quad ، \quad \text{هـ}(٢^{-}) = -٢$$

← هـ(٢) غير موجودة

١٠. هـ(س) = [$\frac{١}{٥}$ س + ٤]

جد هـ(٢) ، هـ(٥) ؟

الحل: نجد تعريف س = ٢٠ ، ل = ٥



س = ٢ تقطة عادية ← هـ(س) = ٤

∴ هـ(س) = ٤ ← ∴ هـ(٢) = ٤

س = ٥ تحول ← هـ(س) = $\begin{cases} ٤ & ، ٠ < س \leq ٥ \\ ٥ & ، ٥ < س < ١٠ \end{cases}$

نجد النقال عند س = ٥

هـ(٥) = ٤ ، $\text{نهـ}_{س \to ٥^{+}}$ = ٥ ، $\text{نهـ}_{س \to ٥^{-}}$ = ٤

∴ هـ غير متصل عند س = ٥

∴ هـ(٥) غير موجودة .

يوجد طريقة أخرى للتعامل مع متصلة المجهول :-

* متصلة المجهول حالتان

① كان = متصلة ∴ التعويض كسر غير موجودة ، التعويض مجهول

② مشترك/ نعوض كسر بضعفه ومتصلة مجهول نجد تعريف يميناً = يساراً =

١١. هـ(س) = (س − ٤) × [س]

جد هـ(٢)

الحل: نعوض ② بالمجهول [٢] $\begin{matrix} ٢^{+} \\ ١^{-} \end{matrix}$

هـ(س) = $\begin{cases} ٢(س-٤) & ، س \geq ٢ \\ ١(س-٤) & ، س < ٢ \end{cases}$ متصل عند س = ٢

هـ(٢)$^{+}$ = −٢ ، هـ(٢)$^{-}$ = −١ ← هـ(٢) غير موجودة

١٢. هـ(س) = [$\frac{١}{٥}$ س + ٤] جد (طريقة ثانية) ← مكرر

هـ(٢) ، هـ(٥) ؟

الحل: هـ(٢) نعوض [$\frac{٢}{٥}$ + ٤] كسر بضعفه

∴ هـ(س) = ٤ ← هـ(٣) = صفر

هـ(٣) = صفر

* هـ(٥) نعوض [$\frac{١}{٥} \times ٥ + ٤$] = [٥] متصل عند مجهول

هـ(٥) غير موجودة

١٣. هـ(س) = س − ٤ [س] جد هـ(٠)

الحل: نعوض بالمجهول [صفر] $\begin{matrix} صفر^{+} \\ صفر^{-} \end{matrix}$ = $\begin{matrix} ٠ \\ -١ \end{matrix}$

هـ(س) = $\begin{cases} صفر & ، س \geq ٠ \\ -٤ & ، س < ٠ \end{cases}$ متصل عند س = ٠

هـ(٠) = صفر ، هـ$^{+}$(٠) = ٠

هـ(س) = $\begin{cases} صفر & ، س \geq ٠ \\ -٤ & ، س < ٠ \end{cases}$ هـ$^{-}$(٠) = ٠

∴ هـ(٠) = صفر

١٤. $ق(س) = \frac{[\frac{١}{٥}س]}{س - ٢}$ جد $ق'(٧)$

الحل: نعوض بالصحيح لوحده $[\frac{٧}{٥}]$ = نصحح = ١

$\therefore ق(س) = \frac{١}{س - ٢}$

$ق'(س) = \frac{-١ \times ١}{(س-٢)^٢} \leftarrow ق'(٧) = \frac{-١}{٢٥}$

١٥. $ل(س) = س [س - ٢]$

جد $ل'(\frac{١}{٢})$

الحل: نعوض بالصحيح لوحده $[\frac{-٣}{٢}]$ نصححه

$ل(س) = س \times -٢ = -٢س$

$ل'(س) = -٢ \leftarrow ل'(\frac{١}{٢}) = -٢$

طريقة سريعة لاشتقاق المطلق: (نقطة)

نعوض داخله ← التعويض موجب نأخذ القاعدة الموجبة ثم نشتق.

← التعويض سالب نأخذ القاعدة السالبة ثم نشتق

← التعويض صفر نعيد التعريف

١٦. $ق(س) = |س^٢ - س - ٥|$

جد $ق'(١)$

الحل: نعوض $|-٥|$ نضرب بسالب

$ق(س) = -س^٢ + س + ٥$

$ق'(س) = -٢س + ١$

$ق'(١) = -١$

١٧. $ق(س) = |٣ + س^٢|$

جد $ق'(-٤)$

الحل: نعوض $|١٩|$ موجب

$ق(س) = ٣ + س^٢$

$ق'(س) = ٢س$

$ق'(-٤) = ٢ \times -٤ = -٨$

١٨. $ق(س) = |٢ - س| \times [\frac{س}{٢} - ٣]$

جد $ق'(٩)$

الحل: المطلق نعوض ← ⊖ ← $(س - ٢)$

الصحيح نعوض ← $[\frac{٣}{٢}]$ نصححه = ١

$\therefore ق(س) = (س - ٢) \times ١ = س - ٢$

$ق'(س) = ١ \leftarrow ق'(٩) = ١$

١٩. $ق(س) = \frac{|س^٢ - ٤|}{[\frac{١}{٢}س]}$

جد $ق'(٥)$

الحل: المطلق نعوض ← + ← $(س^٢ - ٤)$

الصحيح نعوض ← $[\frac{٥}{٢}]$ نصحح ٢

$\therefore$ اصبح $ق(س) = \frac{س^٢ - ٤}{٢}$

$ق'(س) = \frac{٢س}{٢} \leftarrow ق'(٥) = ٥$

٢٠. $ق(س) = \frac{[س + ٢]}{س}$ جد $ق'(\frac{١}{٢})$

الحل: الصحيح نعوض $[٢ + ٢] \leftarrow ٢$

$\therefore$ اصبح $ق(س) = \frac{٢}{س}$

$ق'(س) = \frac{-٢ \times ١}{س^٢}$

$ق'(\frac{١}{٢}) = \frac{-٢}{(\frac{١}{٢})^٢} = -٢ \times ٤$

$= -٨$

* قاعدة السلسلة *

عند وجود ٣ رموز بعاد لبعض نستخدم

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$$

١. ص $= ع^3 - ٢ع$ ، ع $= س^2 + ١$

جد $\frac{دص}{دس}$

الحل: $\frac{دص}{دع} = ٣ع^2 - ٢$ ، $\frac{دع}{دس} = ٢س$

بجد $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = (٣ع^2 - ٢)(٢س)$

$\frac{دص}{دس} = (٣(س^2+١)^2 - ٢)(٢س)$

٢. ص $= ن^2 + ٦ن$ ، س $= ن^3 - ن$

جد $\frac{دص}{دس}$ ؟

الحل: $\frac{دص}{دن} = ٢ن + ٦$ ، $\frac{دس}{دن} = ٣ن^2 - ١$

بجد $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$= (٢ن+٦) \times \frac{١}{٣ن^2 - ١} = \frac{٢ن+٦}{٣ن^2-١}$

٣. ص $= ع^3 - ٢ع + ١$ ، ع $= ٣س^2 - ١$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س $= ١$

الحل: $\frac{دص}{دع} = ٣ع^2 - ٢$ ، $\frac{دع}{دس} = ٦س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$= (٣ع^2 - ٢)(٦س)$

بخذ قيمة ع من الأصل

ع $= ٢س^2 - ١$

ع $= ٢ \times ١ - ١ = ٢$

$= (٣ \times ٤ - ٢)(١ \times ٦) =$

$= ١٠ \times ٦$

$= ٦٠$

٤. ص $= \frac{٢ل}{ل^2 + ١}$ ، ل $= ١٠س^2 + س + ١$

جد $\frac{دص}{دس}$ عند س $= -\frac{١}{٢}$ ؟

الحل: $\frac{دص}{دل} = \frac{(ل^2+١)(٢) - (٢ل)(٢ل)}{(ل^2+١)^2}$

بخذ ل $= ١٠ \times \frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} + ١$

ل $= ٣$

$\frac{دل}{دس} = ٢٠س + ١$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دل} \times \frac{دل}{دس}$

$= \frac{(ل^2+١)(٢) - ٤ل^2}{(ل^2+١)^2} \times (٢٠س + ١)$ نعوض

$= \frac{٢٠ - ٦}{١٠٠} \times -٩ = \frac{-١٤٤}{١٠٠}$

٥. $\frac{دص}{دن} = -\frac{١}{٤}$ ، $\frac{دس}{دن} = -\frac{٢}{٥}$

جد $\frac{دس}{دص}$ ؟

الحل: $\frac{دس}{دص} = \frac{دس}{دن} \times \frac{دن}{دص}$

$= -\frac{٢}{٥} \times \frac{٤}{-١} = \frac{٨}{٥}$

٦. تمرين $\frac{دل}{دص} = ٤ل^{-١}$ ، ع $= ٩$ ص

إذا كان $\frac{دع}{دل} = ٤$ عندما ل $= ٢$

جد ٩ ؟ إجابة ٩ $= ٨$

الحل: $\frac{دل}{دص} = \frac{دل}{دع} \times \frac{دع}{دص}$

$\frac{٤}{ل} = \frac{١}{٤} \times ٩$ نعوض ل $= ٢$

$\frac{١}{٤}٩ = ٢ \Leftarrow \frac{٤}{٢} = \frac{١}{٤} \times ٩$

٩ $= ٨$

٧. ص $= (س^2 + ٤س)^9$ جد $\frac{دص}{دس}$

تمرين باستخدام السلسلة

فكرة الاقتران المركب

ق (مش س)

مثلاً :

* ق(س²) ← ٢س × قَ(س²)
* ق(٥س − ٩) ← ٥ × قَ(٥س − ٩)
* ق³(س⁶) ← (ق(س⁶))³

نشتق ٣(ق(س⁶))² × ٦س⁵ × قَ(س⁶)

لا تنسى س الحقيقية إذا لم تعطى بالسؤال

١. ص = ق(س² + ١) ، جد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ٢ علماً أن قَ(٥) = ٩

الحل: $\frac{دص}{دس}$ = ٢س × قَ(س² + ١)

نعوض = ٢ × ٢ × قَ(٥)

$\frac{دص}{دس}$ = ٤ × ٩ = ٣٦

٢. ق(س² + ١) = س³ − ٤س

جد قَ(٥) حيث س < ٠

نشتق الطرفين

الحل: ٢س × قَ(س² + ١) = ٣س² − ٤

نجد س الحقيقية س² + ١ = ٥

س² = ٤ ← س = ٢ ، −٢ ×

نعوض س = −٢

٢ × ٢ قَ(٥) = ٣ × −٢² − ٤

−٤ قَ(٥) = ٨ ← قَ(٥) = −٢

٣. هـ($\frac{٢}{س}$) = س² + س

جد هـَ(−١)

الحل: نشتق $\frac{-٢}{س^٢}$ × هـَ($\frac{٢}{س}$) = ٢س + ١

نجد س الحقيقية $\frac{٢}{س}$ = −١ ← س = −٢

نعوض $\frac{-٢}{(-٢)^٢}$ × هـَ($\frac{٢}{-٢}$) = ٢ × −٢ + ١

$-\frac{١}{٢}$ × هـَ(−١) = −٣

$\boxed{هـَ(-١) = ٦}$

٤. ص = ل(س³) − ل³(س)

جد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ١ حيث

ل(١) = لَ(١) = ٢

الحل: $\frac{دص}{دس}$ = ٣س² × لَ(س³) − ٣(ل(س))² × لَ(س)

نعوض مباشرة لأن س حقيقية

$\frac{دص}{دس}$ = ٣ × لَ(١) − ٣(ل(١))² × لَ(١)

= ٣ × ٢ − ٣ × (٢)² × ٢

= ٦ − ٢٤ = −١٨

٥. ل(س) = ق(هـ(س)) كان

هـ(١) = ٤ ، قَ(٤) = −٥ ،

لَ(١) = ٢ ، جد هـَ(١) ؟

الحل: نشتق الطرفين

لَ(س) = هـَ(س) × قَ(هـ(س))

لَ(١) = هـَ(١) × قَ(هـ(١))

٢ = هـَ(١) × قَ(٤)

٢ = هـَ(١) × −٥

هـَ(١) = $\frac{-٢}{٥}$

٦. ص = ق²(س³) جد قَ(٨)

علماً أن ق(٨) = ١ ، $ص\big|_{س=٢}$ = ١٠٠

الحل: صَ = ٢(ق(س³)) × قَ(س³) × ٣س²

نجد س الحقيقية س³ = ٨ ← س = ٢

نعوض

صَ = ٢ق(٨) × قَ(٨) × ١٢

١٠٠ = ٢ × ١ × قَ(٨) × ١٢

قَ(٨) = $\frac{١٠٠}{٢٤}$ = $\frac{٢٥}{٦}$

مشتقة تركيب اقترانين

* $(قـ \circ هـ)(س) = قـ(هـ(س))$
* $(قـ \circ هـ)'(س) = قـ'(هـ(س)) \times هـ'(س)$
* $(ل \circ م)'(س) = ل'(م(س)) \times م'(س)$
* $(قـ \circ هـ)'(س) = قـ'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

١. $قـ(س) = س^2$ ، $هـ(س) = 1 - 3س$

جد أ. $(قـ \circ هـ)'(س)$

ب. $(هـ \circ قـ)'(2)$

أ. $(قـ \circ هـ)'(س) = قـ'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

بحيث $قـ'(س) = 2س$ ، $هـ'(س) = -3$

$\therefore (قـ \circ هـ)'(س) = قـ'(1-3س) \times -3$

$= 2(1-3س) \times -3$

$= -6 + 18س$

ب. $(هـ \circ قـ)'(2) = هـ'(قـ(2)) \times قـ'(2)$

$= هـ'(4) \times 4$

$= -3 \times 4 \times 2 = -24$

٢. $قـ(س) = \frac{س^2 - س}{4}$ ، $هـ(س) = \frac{2}{س}$

جد $(قـ \circ هـ)'(-1)$

$(قـ \circ هـ)'(-1) = قـ'(هـ(-1)) \times هـ'(-1)$

$= قـ'(-2) \times هـ'(-1)$

$* قـ'(س) = \frac{2س - 1}{4}$ ، $* هـ'(س) = \frac{-2}{س^2}$

$\therefore (قـ \circ هـ)'(-1) = \frac{2 \times -2 - 1}{4} \times \frac{-2}{(-1)^2}$

$= \frac{-5}{4} \times -2$

$= \frac{10}{4}$

٣. $قـ(س) = س^2 - 2س$ ،

$هـ'(2) = 6$ ، $(قـ \circ هـ)'(2) = 48$

جد $هـ(2)$ ؟ لاحظ $قـ'(س) = 2س - 2$

الحل: $(قـ \circ هـ)'(2) = قـ'(هـ(2)) \times هـ'(2)$

$48 = قـ'(هـ(2)) \times 6$

$8 = قـ'(هـ(2))$

$8 = 2هـ(2) - 2$

$10 = 2هـ(2)$

$\boxed{هـ(2) = 5}$

٤. $قـ$ ، $هـ$ اقترانيه قابلين للاشتقاق

وكان $(قـ \circ هـ)(س) = س$ ، وكان

$قـ(س) = 1 + (قـ(س))^2$ جد $هـ'(س)$ ؟

الحل: نشتق طرفين

$قـ'(هـ(س)) \times هـ'(س) = 1$

$1 + (قـ(هـ(س)))^2 \times هـ'(س) = 1$

$(1 + س^2) \times هـ'(س) = 1$

$هـ'(س) = \frac{1}{1 + س^2}$

٥. $قـ$ ، $هـ$ اقترانيه قابلين للاشتقاق وكان

$(قـ \circ هـ)(س) = \frac{س^2 + 9}{س + 1} + \frac{1}{2}$

$س \neq -1$

وكان $قـ'(س) = \sqrt[3]{7 + س^2}$ وكان

$هـ'(1) = 4$ ، $هـ(1) = 1$ جد

الثابت 9 ؟

$\boxed{9 = -27}$

* الاشتقاق الضمني *

يجب التمييز بين الاقتران الصريح و الضمني . حيث الصريح ص لوحدها ولا يوجد غيرها... أما الضمني يكون هناك سينات وصادات .

* الشرط: كلما نشتق ص نضع بجانبها صَ

مثلاً: ص² ← ٢ ص صَ

: ٥ ص³ ← ١٥ ص² صَ

: √ص ← صَ / ٢√ص

أمثلة

١. س² + ص³ = ١٦ جد دص/دس

الحل: ٢س + ٣ص² صَ = صفر

قوي

٣ص² صَ = −٢س

صَ = −٢س / ٣ص²

٢. √س − √ص = √١١ جد دص/دس

الحل: ١/٢√س − صَ/٢√ص = صفر

١/٢√س = صَ/٢√ص ← صَ = √ص/√س

٣. (س ص)³ = ٤س جد دص/دس

الحل: س³ ص³ = ٤س ، ص³ = ٤س/س³

ص³ = ٤/س²

٣ص² صَ = −٤×٢س / س⁴

صَ = −٨/س³ × ١/٣ص²

∴ دص/دس = −٨ / ٣س³ص²

٤. س² + ص² = ٥س − ص³

الحل: ٢س + ٢ص صَ = ٥ − ٣ص² صَ

٢ص صَ + ٣ص² صَ = ٥ − ٢س

صَ (٢ص + ٣ص²) = ٥ − ٢س

صَ = (٥ − ٢س) / (٢ص + ٣ص²)

٥. س − س² ص = ٦س² جد صَ

الحل: ١ − (س² صَ + ص × ٢س) = ١٢س

١ − س² صَ − ٢س ص = ١٢س

−س² صَ = ١٢س − ١ + ٢س ص

صَ = (١٢س − ١ + ٢س ص) / −س²

٦. (س − ص)² − ص = صفر

الحل: ٢(س − ص)¹(١ − صَ) − صَ = صفر

(٢س − ٢ص)(١ − صَ) − صَ = صفر

٢س − ٢س صَ − ٢ص + ٢ص صَ − صَ = صفر

−٢س صَ + ٢ص صَ − صَ = −٢س + ٢ص

صَ (−٢س + ٢ص − ١) = −٢س + ٢ص

صَ = (−٢س + ٢ص) / (−٢س + ٢ص − ١)

٧. ٤/س + ٢/ص = ٣ جد صَ عند (١،٤)

الحل: −٤/س² + −٢صَ/ص² = صفر

نعوض

−٤/١٦ + −٢صَ/١ = صفر

−٢صَ = ١/٤

صَ | (١،٤) = −١/٨

اذا كان

٨. ق(٢ص^٣) = س ص^٢

كان ق(١٦) = -١٨ ، قَ(١٦) = ٢

جد صَ عند ص = ٢ ؟

الحل: ٦ص^٢ صَ × قَ(٢ص^٣) = س × ٢ص صَ + ص^٢ × ١

نعوض لكن نجد س من الأصل؟ ق(١٦) = ٤س ، -١٨ = ٤س ← س = -٩/٢

٦ × ٤ صَ × قَ(١٦) = -٩/٢ × ٢ × ٢ صَ + ٤

٢٤ × صَ × ٢ = -١٨ صَ + ٤

٤٨ صَ + ١٨ صَ = ٤

صَ (٤٨ + ١٨) = ٤

صَ = ٤/٦٦ = ٢/٣٣

٩. ق(س) قابل للاشتقاق وكان ص^٢ = س ق(س^٢) ، ص > ٠ وكان ق(١) = ٤ ، قَ(١) = ١ ، جد صَ عند س = ١

٢٠١٦

الحل: نجد ص ← عالأصل ص^٢ = ١ ق(١) ← ص^٢ = ٤ ← ص = ٢

٢ص صَ = س × ٢س قَ(س^٢) + ق(س^٢) × ١

٢ × ٢ صَ = ١ × ٢ × ١ قَ(١) + ق(١) × ١

٤ صَ = ٢ × ١ + ٤

٤ صَ = ٦ ← صَ = ٣/٢

١٠. ص^٣ = ق(٤س^٢ - س)

تمرين

ق(٥) = -٨ ، قَ(٥) = ٤

جد دص/دس عند س = -١

الجواب = -٣

مشتقات الاقترانات الدائرية ***

* جا ق(س) ← قَ(س) × جتا ق(س)
* جتا ق(س) ← قَ(س) × -جا ق(س)
* ظا ق(س) ← قَ(س) × قا^٢ ق(س)
* ظتا ق(س) ← قَ(س) × -قتا^٢ ق(س)
* قا ق(س) ← قَ(س) × قا ق(س) × ظا ق(س)
* قتا ق(س) ← قَ(س) × -قتا ق(س) × ظتا ق(س)

لاحظ: اقتران فيه حرف (ت) مشتقته سالبة.

: حرام شرعاً جا ٢س/٢ ≠ جا س

أمثلة :-

١. ق(س) = جا ٣س - جتا س^٢ + ظا ٥/س

قَ(س) = ٣ جتا ٣س - ٢س × -جا س^٢ + -٥/س^٢ قا^٢ ٥/س

= ٣ جتا ٣س + ٢س جا س^٢ - ٥/س^٢ قا^٢ ٥/س

٢. ص = قتا ٢/س - ظتا س^٣

صَ = -٢/س^٢ × -قتا ٢/س ظتا ٢/س - ٣س^٢ × -قتا^٢ س^٣

= ٢/س^٢ قتا ٢/س ظتا ٢/س + ٣س^٢ قتا^٢ س^٣

٣. ص = جا √س - ظا ∛س

صَ = ١/٢√س جتا √س - ١/٥ س^(-٤/٥) قا^٢ ∛س

= جتا √س / ٢√س - قا^٢ ∛س / ٥ ∛س^٤

٤. ق(س) = ظا س + قا س ، جد قَ(π/٦)

قَ(س) = قا^٢ س + قا س ظا س

قَ(π/٦) = قا^٢ π/٦ + قا π/٦ ظا π/٦

= ٤/٣ + ٢/√٣ × ١/√٣ = ٦/٣ = ٢

٥. $\text{ص} = \frac{\pi}{\text{قا س}}$ ، جد $\text{ق}'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\text{ص}' = \frac{-\pi \times \text{قا س ظا س}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$= \frac{-\pi \times \text{ظا}\frac{\pi}{3}}{\text{قا}\frac{\pi}{3}} = \frac{-\pi \times \sqrt{3}}{2} = \frac{-\pi\sqrt{3}}{2}$

٦. $\text{ق(س)} = \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq 0$

جد $\text{ق}'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{س} \times \text{جتا س} - \text{جا س}}{\text{س}^2}$

$\text{ق}'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2} = \frac{\frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{2}}{\frac{\pi^2}{36}}$

٧. $\text{ق(س)} = \frac{\text{جتا س}}{1 + \text{جا س}}$ اثبت ان $\text{ق}'(\pi) = -1$

الحل: $\text{ق}' = \frac{(1+\text{جا س})(-\text{جا س}) - (\text{جتا س})(\text{جتا س})}{(1+\text{جا س})^2}$

$\text{ق}'(\pi) = \frac{(1+0)(0) - (-1)(-1)}{(1)^2} = -1$

٨. تمرين $\text{ص} = \frac{1 + \text{ظا س}}{1 - \text{ظا س}}$ أثبت أن $\text{ص}' = \frac{2}{1 - \text{جا}2\text{س}}$

الحل: $\text{ص} = \frac{1 + \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}}{1 - \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}} = \frac{\text{جتا س} + \text{جا س}}{\text{جتا س} - \text{جا س}}$

نشتق

$\text{ص}' =$

الحل داخل الصف

٩. $\text{ص} = \text{جا}^2\text{هـ}$ ، $\text{س} = \text{جتا هـ}$

حيث $0 < \text{هـ} < \frac{\pi}{2}$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

الحل: نجد هـ ← $\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جتا هـ}$ ← $\text{هـ} = \frac{\pi}{4}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دهـ}} = 2\,\text{جا هـ جتا هـ}$

$\frac{\text{دس}}{\text{دهـ}} = -\text{جا هـ}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دهـ}} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دس}}$

$= 2\,\text{جا هـ جتا هـ} \times \frac{1}{-\text{جا هـ}}$

$= -2\,\text{جتا هـ}$

$= -2\,\text{جتا}\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$

١٠. جد $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\sqrt{\text{س}^2\text{جا}^2\text{س} + \text{س}^2\text{جتا}^2\text{س}}\right)$

الحل: $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\sqrt{\text{س}^2(\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س})}\right)$

$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\sqrt{\text{س}^2}\right) = \frac{2\text{س}}{2\sqrt{\text{س}^2}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2}}$

١١. $5\text{س} = \text{جا}3\text{ص}$

الحل: $5 = 3\text{ص}'\,\text{جتا}3\text{ص}$

$\text{ص}' = \frac{5}{3\,\text{جتا}3\text{ص}} = \frac{5}{3}\,\text{قا}3\text{ص}$

١٢. $\text{س} = \text{قا}2\text{ص}$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{ص} = \frac{\pi}{12}}$

الحل: $1 = 2\text{ص}'\,\text{قا}2\text{ص}\,\text{ظا}2\text{ص}$

نعوض

$1 = 2\text{ص}'\,\text{قا}\frac{\pi}{6}\,\text{ظا}\frac{\pi}{6}$

$1 = 2\text{ص}' \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$

$1 = \frac{4}{3}\text{ص}' \leftarrow \text{ص}' = \frac{3}{4}$

مهم

١٣. أ. $\text{جا}(\text{س ص}) = \text{ص}^2$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

ب. $\text{ق(س)} = \text{س}\,|\text{جا س}|$ ، $\text{س} \in [0, 2\pi]$

ابحث قابلية الاشتقاق عند $\text{س} = \pi$

صفر

غير موجودة

١٤. $هـ(س) = ق(س)$ ، $س \in [-٢\pi ، ٢\pi]$

جد أصفار $هـ$ مستعيناً بدولاب.

الحل: $هـ(س) = ق(س) ظا(س) = ٠$

$\therefore \frac{١}{جتا س} \times جا س = ٠$

$\therefore جا س = ٠$

$\leftarrow س = ٠ ، \pi ، ٢\pi ، -\pi ، -٢\pi$

لكن $-٢\pi ، ٢\pi$ تمثل (أطراف)

$\therefore س = ٠ ، \pi ، -\pi$

١٥. أثبت أن

$ص = أ جا س + ب جتا س$

حيث $أ ، ب$ ثوابت ، أثبت أن

$(ص\dot{})^٢ + ص^٢ = أ^٢ + ب^٢$

الحل: داخل الصف مع المركز الديد

اطلبوا فيّ أسرّ حلكم
قاعدة لوبيتال

١٦. $ص = هـ(م) = ظا \frac{\pi}{١٠} م$ ،

$م = ه(س) = ٥ س$ ، جد

$(هـ \circ ه)'(١)$.

الحل: $ه(١) = ٥$ ، $هـ(م) = \frac{\pi}{١٠} \times ق^٢ \frac{\pi}{١٠} م$

$(هـ \circ ه)'(١) = هـ'(ه(١)) \times ه'(١)$

$= هـ'(٥) \times ٥$

$= ٥ \times ق^٢ \frac{٥\pi}{١٠} \times \frac{\pi}{١٠}$

$= ٥ \times ١ \times \frac{\pi}{١٠} = \frac{\pi}{٢}$

١٧. $هـ(س) = جا س - \frac{١}{٢} س$

$س \in [٠ ، ٢\pi]$ جد $س$ حيث

$هـ'(س) = ٠$

الحل: $هـ'(س) = جتا س - \frac{١}{٢} = ٠$

$جتا س = \frac{١}{٢}$

$س = ٦٠^\circ ، ٣٠٠^\circ$

$س = \{\frac{\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}\}$

١٨.

أ. $هـ(س) = ظا س + ظتا س$

أثبت أن $هـ'(س) = \frac{١}{جتا^٢ س - ١}$

ب. $ص = \frac{ظا س}{١ + ق^٢ س}$ أثبت أن

$ص' = \frac{ق^٢ س}{١ + ق^٢ س}$

* المشتقات العليا *

المشتقة الثانية ← $\text{قـ}(س) = \frac{د^2 ص}{د س^2}$

المشتقة الثالثة ← $\text{قـ}''(س) = \frac{د^3 ص}{د س^3}$

المشتقة الرابعة ← $\text{قـ}'''(س) = \frac{د^4 ص}{د س^4}$

ملاحظة :

درجة المشتقة = درجة الاقتران

فالجواب = معامل أكبر حدة × مضروب العدد الذي حول قوته

$= ن \times ن!$

المشتقة النونية = $\text{قـ}^{(ن)}(س)$

أمثلة

1. $\text{قـ}(س) = س^3 - 5س + 11$ جد $\text{قـ}(1)$

الحل : $\text{قـ}(س) = 3س^2 - 5$

$\text{قـ}'(س) = 6س$

$\text{قـ}''(1) = 6 \times 1 = 6$

2. $ص = 2س^2$ ، جد $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ ؟

الحل : $\frac{د ص}{د س} = -4س^{-3}$

$\frac{د^2 ص}{د س^2} = 12س^{-4}$

$\frac{د^3 ص}{د س^3} = -48س^{-5} = \frac{-48}{س^5}$

3. $ص = \frac{س^2 + 1}{س}$ جد $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ ؟

الحل : نبسط $ص = س + س^{-1}$

$\frac{د ص}{د س} = 1 + -1س^{-2}$

$\frac{د^2 ص}{د س^2} = 0 + 2س^{-3} = \frac{2}{س^3}$

4. $\text{قـ}(1) = 3$ ، $\text{قـ}'(1) = -2$

$\text{قـ}''(1) = 4$ ، جد $\left(\frac{\text{قـ}}{\text{قـ}'}\right)'(1)$ ؟

الحل : $\frac{\text{قـ}' \times \text{قـ}' - \text{قـ} \times \text{قـ}''}{(\text{قـ}')^2}$ نعوض

$= \frac{-2 \times -2 - 3 \times 4}{(-2)^2} = \frac{-2}{4}$

5. $\text{قـ}(س) = س^3$ ، $\text{ل}(1) = -1$

$\text{ل}'(1) = 2$ جد $(\text{قـ} \times \text{ل})'(1)$ ؟!

الحل : $\text{قـ}' = 3س^2$ ، $\text{قـ}'' = 6س$

$\text{قـ}' \times \text{ل} + \text{ل} \times \text{قـ}'$ نعوض

$\text{قـ}'(1) \times \text{ل}(1) + \text{ل}'(1) \times \text{قـ}'(1)$

$3 \times 2 + -1 \times 6 =$ صفر

6. $\text{قـ}(س) = س^ن$ كانت

$\text{قـ}^{(3)}(س) = 24س^{ن-3}$

جد قيمة ن ؟!

الحل : $\text{قـ}' = ن س^{ن-1}$

$\text{قـ}'' = ن(ن-1)س^{ن-2}$

$\text{قـ}''' = ن(ن-1)(ن-2)س^{ن-3} = 24$ ← $ن-3$

$ن(ن-1)(ن-2) = 24$

$24 = 2 \times 3 \times 4$

$\therefore ن = 4$

7. $\text{قـ}(س) = \frac{1}{4}س^ن$ كانت $\text{قـ}^{(4)}(1+ب) = 9$ ، جد $ب$ (تابعة) 2016

عمرين

الجواب $ب = 2.9$

ب. $\text{قـ}(س) = \frac{1}{س^ن}$ وكانت $\text{قـ}^{(3)}(س) = 210س^{-ن-3}$

جد ن ؟

الجواب $ن = 5$

٨. ق(س) = س² + ١ ، هـ(س) = س³

جد (هـ ∘ ق)''(١)

الحل: نجد (هـ ∘ ق)'(س) ثم (هـ ∘ ق)''(س) ثم نعوض س = ١

لاحظ ق'(س) = ٢س ، ق''(س) = ٢

هـ'(س) = ٣س² ، هـ''(س) = ٦س

(هـ ∘ ق)'(س) = هـ'(ق(س)) × ق'(س)

الأول — الثاني

(هـ ∘ ق)''(س) = هـ'(ق(س)) × ق''(س) + ق'(س) × هـ''(ق(س)) × ق'(س)

نعوض

(هـ ∘ ق)''(١) = هـ'(ق(١)) × ق''(١) + ق'(١) × هـ''(ق(١)) × ق'(١)

= هـ'(٢) × ٢ + ٢ × هـ'(٢) × ٢

= ١٢ × ٢ + ٢ × ١٢ × ٢

= ٢٤ + ٤٨ = ٧٢

٩. س² − س = ١ + ص²

جد $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ عند (٢ ، ١)

الحل: ٢س − ١ = ٢ص ص'

ص' = $\frac{٢س − ١}{٢ص}$ نعوض = $\frac{٣}{٢}$

ص'' = $\frac{(٢ص)(٢) − (٢س − ١)(٢ص')}{(٢ص)^٢}$ نعوض

= $\frac{٤ − ٣ × ٢ × \frac{٣}{٢}}{٤}$ = $\frac{−٥}{٤}$

١٠. ص = جتا س³ ، جد ص''؟

الحل: ص' = ٣س² × − جا س³

= −٣س² جا س³

ص'' = −٣س² × ٣س² جتا س³ + جا س³ × −٦س

= −٩س⁴ جتا س³ − ٦س جا س³

١١. ق(س) = (|س|)³ جد ق'(٠) ، ق''(٠) ، ق'''(٠) ، ق^(٤)(٠)

الحل: نعيد التعريف س = ٠ ، $\frac{+}{−}$

ق(س) = { س³ ، س ≥ ٠ ؛ −س³ ، س < ٠ }

* ق'(س) = { ٣س² ، س ≥ ٠ ؛ −٣س² ، س < ٠ }

اتصال التحول ✓ اشتقاق التحول ق'(٠) = ق'(٠)⁺ = ٠

* ق''(س) = { ٦س ، س ≥ ٠ ؛ −٦س ، س < ٠ }

اتصال س = ٠ ✓ اشتقاق ق''(٠)⁺ = ق''(٠)⁻ = ∴

* ق'''(س) = { ٦ ، س > ٠ ؛ −٦ ، س < ٠ ؛ غ.م ، س = ∴ }

اتصال س = ٠ ✓ اشتقاق ق'''(٠)⁺ = ٦ ، ق'''(٠) = −٦

* ق''''(٠) = غير موجودة ∴ ق'''(صفر) = غ. موجودة

١٢. أ. ص = |س| (س² + س)

جد ص'''

ب. ص = |س|⁴ جد ص''''

س = ٢

جـ. ل ، ق ، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق حيث هـ(س) = ل(س) × ق(س) لكن ل'(س) × ق'(س) = جـ (ثابت)

روعة روعة روعة

أثبت أن هـ'''(س) = ل(س) × ق'''(س) + ق(س) × ل'''(س)

* أسئلة Top 5 Top ...

١. $ص = ن^{٢} - ٣ن$ ، $س = ن^{٢} - ن$

جد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$!!!؟؟!!

الحل : $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

لاحظ $\frac{دص}{دن} = ٢ن - ٣$

$\frac{دس}{دن} = ٢ن - ١$

$\therefore \frac{دص}{دس} = (٢ن - ٣) \times \left(\frac{١}{٢ن - ١}\right)$

$= \frac{٢ن - ٣}{٢ن - ١}$

$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = \frac{(٢ن - ١)(٢\ \frac{دن}{دس}) - (٢ن - ٣)(٢\ \frac{دن}{دس})}{(٢ن - ١)^{٢}}$

$= \frac{(٢ن - ١)(٢ \times \frac{١}{٢ن - ١}) - (٢ن - ٣)(٢ \times \frac{١}{٢ن - ١})}{(٢ن - ١)^{٢}}$

$= \frac{\frac{٤ن - ٢}{٢ن - ١} - \frac{٤ن - ٦}{٢ن - ١}}{(٢ن - ١)^{٢}}$

$= \frac{٤ن - ٢ - ٤ن + ٦}{(٢ن - ١)} \times \frac{١}{(٢ن - ١)^{٢}}$

$= \frac{٤}{(٢ن - ١)^{٣}}$

٢. $ص = جا ن$ ، $س = جتا ن$

جد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ عندما $ن = \frac{\pi}{٢}$

الحل : $\frac{دص}{دن} = جتا ن$ ، $\frac{دس}{دن} = -جا ن$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = جتا ن \times \frac{١}{-جا ن}$

$\frac{دص}{دس} = -ظا ن$

$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = \ominus \times \frac{دن}{دس} = -قتا^{٢} ن$

$= \ominus \times \frac{١}{-جا ن} \times -قتا^{٢} ن$

نعوض

$= \frac{-١}{(جا ن)^{٣}} = نعوض = \frac{-١}{(جا \frac{\pi}{٢})^{٣}} = -١$

٣. إلعب $\frac{دص}{دس} = جا ن$ ، $\frac{دس}{دن} = ٣$

جد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ | $ن = \frac{\pi}{٣}$

الحل : $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = \frac{دن}{دس} \times جتا ن$

$= \frac{١}{٣} \times جتا \frac{\pi}{٣}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٦}$

٤. تمرين ص ٩٠ $\frac{دس}{دن} = \frac{١}{ن - ٢}^{٣}$ ،

$ص = -ن + ن$ ،

جد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ عند $ن = ١$

ج : ٤٠ : ٤

ب. جد

$\frac{د}{دس}\left(-س^{٢} \times \frac{د}{دس}\left(\frac{١}{س}\right)\right)$ حيث $س \neq ٠$.

ج : صفر

جـ. $ص = ن^{٣} + ٢ن$ ، $\frac{دس}{دن} = ٤ن$ ،

جد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ عند $ن = ١$

ج : $\frac{١}{١٦}$

معدل التغير بالنسبة

هل تعلم أن

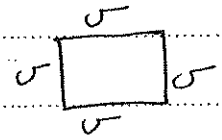
$\frac{دص}{دس}$: معناها معدل تغير ص بالنسبة إلى س

$\frac{دم}{دهـ}$: معناها معدل تغير م بالنسبة إلى هـ

أمثلة

١. صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بانتظام ، جد معدل تغير المساحة بالنسبة لطول الضلع عندما طول الضلع ٨ سم.

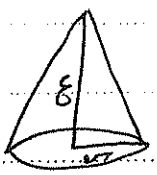
الحل: $م = س^٢$



$\frac{دم}{دس} = ٢س$

$= ٢ \times ٨ = ١٦$

٢. مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته ، يتمدد بانتظام ، احسب معدل تغير حجمه بالنسبة لارتفاعه عندما نصف قطره ٤ سم ؟



الحل: $ح = \frac{١}{٣}\pi س^٢ ع$

لكن $ع = ٢س$

نتخلص من رمز س ؟

$س = \frac{ع}{٢}$

$ح = \frac{١}{٣}\pi \times \frac{ع^٢}{٤} \times ع$

$ح = \frac{\pi}{١٢} \times ع^٣$

$\frac{دح}{دع} = \frac{\pi}{٤} \times ع^٢$ لكن $ع = ٢س$

$ع = ٢ \times ٤$

$ع = ٨$

$= \frac{\pi}{٤} \times ٦٤$

$= ١٦\pi$

٣. جد معدل تغير حجم كرة بالنسبة لمساحتها (مساحة السطح) عندما يكون قطرها ١٢ سم.

الحل: الكرة حجم $= \frac{٤}{٣}\pi نق^٣$

مساحة السطح $= ٤\pi نق^٢$

$ح = \frac{٤}{٣}\pi نق^٣ \leftarrow \frac{دح}{دنق} = ٤\pi نق^٢$

$م = ٤\pi نق^٢ \leftarrow \frac{دم}{دنق} = ٨\pi نق$

$\frac{دح}{دم} = \frac{دح}{دنق} \times \frac{دنق}{دم}$

$= ٤\pi نق^٢ \times \frac{١}{٨\pi نق}$ نعوض نق = ٦

$= ٤\pi \times ٣٦ \times \frac{١}{٨\pi \times ٦} = ٣$

٤. انبوب اسطواني الشكل يزداد ارتفاعه عن طول نصف قطر قاعدته بمقدار وحدتين . جد معدل تغير مساحته الجانبية بالنسبة إلى طول نصف قطر قاعدته عندما طول نصف قطر قاعدته ٦ سم.

ج: ٤٨π

٥. اثبت ان معدل تغير حجم الكرة بالنسبة لطول نصف قطرها يساوي مساحة سطحها.

أمثلة وتمارين

* *

إذا كان

① . $ص = ظا^3 س + \frac{1}{3} ظا^3 س$

اثبت ان $\frac{د ص}{د س} = قا^4 س$

الحل: $ص_س = قا^2 س + \frac{1}{3} \times 3 ظا^2 س \times قا^2 س$

$= قا^2 س (1 + ظا^2 س)$

$= قا^2 س \times قا^2 س$

$= قا^4 س$

إذا كان

② . $ص = حا س - \frac{1}{3} حا^3 س$

اثبت ان $\frac{د ص}{د س} = حتا^3 س$

الحل: $\frac{د ص}{د س} = حتا س - \frac{1}{3} \times 3 حا^2 س \times حتا س$

$= حتا س - حا^2 س \times حتا س$

$= حتا س (1 - حا^2 س)$

$= حتا س \times حتا^2 س = حتا^3 س$

إذا كان

③ . $ص = (قتا س + ظتا س)^ن$

اثبت ان $ص_س = -ن ص قتا س$

الحل:

$ص_س = ن (قتا س + ظتا س)^{ن-1} \times (-قتا س ظتا س + قتا^2 س)$

$= ن (قتا س + ظتا س)^{ن-1} \times -قتا س (ظتا س + قتا س)$

$= -ن \times قتا س \times (قتا س + ظتا س)^ن$

$= -ن ص قتا س$.

④ . $س^2 + ص^2 = 25$

اثبت ان $ص_{ت} + \frac{25}{ص^3} = صفر$

$2س + 2ص ص_س = صفر$

$\leftarrow \boxed{ص_س = -\frac{س}{ص}}$

$\leftarrow ص_{ت} = \frac{ص \times -1 - -س \times ص_س}{ص^2}$

$= \frac{-ص + س \times \frac{س}{ص}}{ص^2}$ نوحد مقامات

$= -\frac{ص^2 - س^2}{ص} \times \frac{1}{ص^2} = \frac{ص^2 - س^2}{ص^3}$

$= -\frac{(ص^2 + س^2)}{ص^3} = -\frac{25}{ص^3}$

الحجم بطريقة (بدون فرض بديهي)

$-\frac{25}{ص^3} + \frac{25}{ص^3} = صفر$

⑤ . $س = ظتا 2ص$

اثبت ان $ص_{ت} = -ص حا 4ص$.

الحل نفقة اخفق $1 = 2ص_س \times -قتا^2 2ص$

$ص_س = \frac{1}{-2 قتا^2 2ص} = -\frac{1}{2} حا^2 2ص$

$\boxed{ص_{ت} = -\frac{1}{2} حا^2 2ص}$

$ص_{ت} = -\frac{1}{2} \times 2 (حا 2ص) \times 2 ص_س حتا 2ص$

$= -2ص حا 2ص حتا 2ص$

$\boxed{ص_{ت} = -ص حا 4ص}$

⑥ . $ص = حا^4 س$ أثبت أن

$ص_{ت} + 16 ص = 12 جا^2 س$.

الحل: نجد $ص_{ت}$

$ص_{ت} = 4 (حا س)^3 حتا س$

$ص_{ت} = 4 (حا س)^3 \times -حا س + حتا س \times$ ضرب

$12 (حا س)^2 حتا^2 س$

$ص_{ت} = -4 حا^4 س + 12 حا^2 س حتا^2 س$

الجملة المطلوبة

$-٤ حا^٤س + ١٢ حا^٢س حتا^٢س + ١٦ حا^٤س$

$١٢ حا^٤س + ١٢ حا^٢س حتا^٢س$

$١٢ حا^٢س (حا^٢س + حتا^٢س) = ١٢ حا^٢س$

(٧) . $(ص+١)^٣ = (س-٢)^٢$ ٢٠١٢

أثبت أن $(\frac{٣}{٢} ص')^٢ = \frac{١}{ص+١}$

الحل : نشتق

$٣(ص+١)^٢ ص' = ٢(س-٢)$

$ص' = \frac{٢(س-٢)}{٣(ص+١)^٢}$

$\frac{٣}{٢} ص' = \frac{(س-٢)}{(ص+١)^٢}$ (تربيع)

$(\frac{٣}{٢} ص')^٢ = \frac{(س-٢)^٢}{(ص+١)^٤}$

$(\frac{٣}{٢} ص')^٢ = \frac{(ص+١)^٣}{(ص+١)^٤} = \frac{١}{ص+١}$

(٨) . $ص = ٣ جان$ ، $س = ٣ جتان$

أثبت أن $\frac{د^٢ص}{د س^٢} = -\frac{قتا^٣ن}{٣}$

الحل : $\frac{د ص}{د ن} = ٣ جتان$ ، $\frac{د س}{د ن} = -٣ جان$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س}$

$= ٣ جتان \times \frac{١}{-٣ جان} = -ظتان$

$\frac{د^٢ص}{د س^٢} = \ominus \frac{د ن}{د س} \times -قتا^٢ن$

$= \frac{١}{-٣ جان} \times قتا^٢ن$

$= -\frac{قتا^٣ن}{٣}$

(٩) . $حتا ص = س$ ، $ص \in (٠ ، \frac{\pi}{٢})$

أثبت أن $\frac{د ص}{د س} = \frac{-١}{\sqrt{١٧ - س^٢}}$

الحل : $ص' \times -حا ص = ١$

$ص' = \frac{-١}{حا ص}$ تذكر $حا^٢ص + حتا^٢ص = ١$

$حا ص = \sqrt{١ - حتا^٢ص}$

$= \frac{-١}{\sqrt{١ - حتا^٢ص}} = \frac{-١}{\sqrt{١٧ - س^٢}}$

(١٠) . $ص - س = حتا ص$ أثبت

أن $(ص')^٢ = -ص''(قا ص + ظا ص)$ ٢٠٠٩

الحل : نشتق

$ص' - ١ = ص'' \times -حا ص$

نشتق $ص' + ص'' حا ص = ١$

$ص'' + ص'' \times ص' حتا ص + حا ص \times ص''' = ٠$

$ص''' + ص''' حا ص = -(ص'')^٢ حتا ص$ نرتب

$\frac{ص'''(١ + حا ص)}{حتا ص} = (ص'')^٢$

$ص''' (-قا ص - ظا ص) = (ص'')^٢$

$-ص''' (قا ص + ظا ص) = (ص'')^٢$

(١١) . $ص - س ص = جا س$

اثبت ان $ص'' + ص = \frac{٢ ص'}{١ - س}$

الحل : $ص' - (س ص' + ص) = حتا س$

$ص'' - (س ص'' + ص' + ص') = -جا س$

$ص'' - س ص'' - ٢ ص' = -حا س$

$ص'' - س ص'' + حا س = ٢ ص'$

$ص'' - س ص'' + ص - ص = ٢ ص'$

$ص''(١ - س) + ص(١ - س) = ٢ ص'$

$(١ - س)(ص'' + ص) = ٢ ص'$

$ص'' + ص = \frac{٢ ص'}{١ - س}$

(١٢) . س ص = جا س أثبت أن

س صً + ٢ صَ + س ص = ٠

الحل: س صَ + ص = جتا س

نشتق

س صً + صَ + صَ = − جا س

س صً + ٢ صَ + جا س = ٠

لكن جا س = س ص

س صً + ٢ صَ + س ص = ٠

(١٣) . ص² = ٤ + ٢ جا س جتا س

٢٠١٧

أثبت أن

ص صً + (صَ)² + ٢ ص² = ٨

الحل: ص² = ٤ + جا ٢س

٢ ص صَ = ٠ + ٢ جتا ٢س

ص صَ = جتا ٢س

نشتق

ص صً + صَ . صَ = −٢ جا ٢س

ص صً + (صَ)² = −٢ جا ٢س

لكن جا ٢س = ص² − ٤

ص صً + (صَ)² = −٢ (ص² − ٤)

ص صً + (صَ)² = −٢ ص² + ٨

ص صً + (صَ)² + ٢ ص² = ٨

(١٤) . ص = س / (س + ١) اثبت ان

صً = −٢ ص³ / س³

الحل: صَ = ((س + ١)(١) − (س)(١)) / (س + ١)²

= ١ / (س + ١)²

صً = −١ × ٢(س + ١) / (س + ١)⁴ = −٢ / (س + ١)³

لكن من الأصل (س + ١) = س / ص

∴ (س + ١)³ = س³ / ص³

∴ صً = −٢ / (س³ / ص³) = −٢ ص³ / س³

(١٥) . ص = جا س / س أثبت أن

س صً + ٢ صَ + س ص = ٠

الحل: نتخلص من الكسر قبل الاشتقاق

ص س = جا س

نفس حل س١٢

(١٦) . ص = √(٤ + ٣ جا س) ، أثبت أن

٢ ص صً + ص² + ٢ (صَ)² = ٤

الحل: نبسط (نربع الطرفين)

ص² = ٤ + ٣ جا س نشتق

٢ ص صَ = ٣ جتا س نشتق

٢ ص صً + صَ × ٢ صَ = −٣ جا س

٢ ص صً + ٢ (صَ)² = −٣ جا س

لكن من الاصل −٣ جا س = ٤ − ص²

٢ ص صً + ٢ (صَ)² = ٤ − ص²

٢ ص صً + ٢ (صَ)² + ص² = ٤

(١٧) . ص^م = (١ + س)^ن اثبت ان

صَ = ن/م × ص / (١ + س)

الحل: نأخذ الجذر المميز لتبسيط السؤال

ص = (١ + س)^(ن/م)

صَ = ن/م (١ + س)^(ن/م − ١)

نضرب × $\frac{1+س}{1+س}$

$ص' = \frac{ن}{م} \times (1+س)^{\frac{ن}{م}-1} \times \frac{(1+س)}{1+س}$

$= \frac{ن}{م} \times \frac{(1+س)^{\frac{ن}{م}}}{1+س} = \frac{ن}{م} \times \frac{ص}{1+س}$

(١٨) إذا كان $ا ص = ظا س$ اثبت ان

$ظا ص = \frac{ص'}{٢ قا^٢ س + (ص')^٢}$

الحل: $ص' = قا^٢ س$ ثم نشتق

$ص' \times ص' \times جتا ص + جتا ص \times (ص')^٢ = ٢ قا س \times قا س ظا س$

$-(ص')^٢ جا ص + (ص')^٢ جتا ص = ٢ قا^٢ س . ظا س$

$ص'' جتا ص = ٢ قا^٢ س ظا س + (ص')^٢ جا ص$

$ص'' = \frac{٢ قا^٢ س ظا س + (ص')^٢ جا ص}{جتا ص}$

لكل $ظا س = جا ص$ نستبدلها

$ص'' = \frac{٢ قا^٢ س \times جا ص + (ص')^٢ جا ص}{جتا ص}$

$ص'' = جا ص \left(\frac{٢ قا^٢ س + (ص')^٢}{جتا ص}\right)$

$\frac{ص''}{٢ قا^٢ س + (ص')^٢} = ظا ص$

(١٩) إذا كان $ص = ظا^٢ س$ اثبت ان

$ص'' = ٢ (ص + ١)(٣ ص + ١)$

الحل: $ص' = ٢ (ظا س)^١ \times قا^٢ س$

$ص'' = ٢ ظا س \times ٢ قا س قا س ظا س + قا^٢ س \times ٢ قا^٢ س$

$= ٤ قا^٢ س ظا^٢ س + ٢ قا^٤ س$

$ص'' = ٢ قا^٢ س ((٢ ظا^٢ س) + قا^٢ س)$

$= ٢ (١ + ظا^٢ س)(٢ ظا^٢ س + ظا^٢ س + ١)$

$= ٢ (١ + ص)(٣ ص + ١)$.

(٢٠) ٢٠١٦ . إذا كان $جا ٣ س = (١ - ص^٢)^٦$

اثبت ان $٢ ص ص'' = ظتا ٣ س (ص^٢ - ١)$

الحل: نشتق

$٢ (جا ٢ س)(جتا ٣ س \times ٣) = ٦ (١ - ص^٢)^٥ \times -٢ ص ص'$

$جا ٢ س جتا ٣ س = (١ - ص^٢)^٥ \times -٢ ص ص'$

نقسم على $جا ٣ س$

$ظتا ٣ س = \frac{(١ - ص^٢)^٥ \times -٢ ص ص'}{(١ - ص^٢)^٦}$

$ظتا ٣ س = \frac{-٢ ص ص'}{١ - ص^٢}$

$(١ - ص^٢) ظتا ٣ س = -٢ ص ص' \times ١$

$٢ ص ص' = (ص^٢ - ١) ظتا ٣ س$

(٢١) ٢٠١٧ . إذا كان $ص = \sqrt[٣]{(ع+١)^٣} - \sqrt[٣]{(ع-١)^٣}$

$ع = ٢ س$ ، $س > \frac{١}{٢}$

اثبت ان $\left|\frac{دص}{دس}\right| = \sqrt{٤ س^٢ - ١}$

الحل: $ص = (ع+١)^{\frac{٣}{٣}} - (ع-١)^{\frac{٣}{٣}}$ نفوض $ع = ٢ س$

$ص = (٢ س + ١)^{\frac{٣}{٣}} - (٢ س - ١)^{\frac{٣}{٣}}$ نشتق

$ص' = \frac{٣}{٣}(٢ س + ١)^{\frac{١}{٣}} \times ٢ - \frac{٣}{٣}(٢ س - ١)^{\frac{١}{٣}} \times ٢$

$٢ ص' = ٢ (٢ س + ١)^{\frac{١}{٣}} - ٢ (٢ س - ١)^{\frac{١}{٣}}$

$\div ٣$

$ص' = (٢ س + ١)^{\frac{١}{٣}} - (٢ س - ١)^{\frac{١}{٣}}$

فكرة السؤال $ا ص' = \sqrt{(ص')^٢ - ١}$

رقم الصفحة (٣٥)

الحل رهيب بالوصف

كذبح وتاخذ اكبر / صنصير حطلعه

فنان

نهايات خاصة على تعريف المشتقة *

١. ق(س) = س^{٤} + ٦ أ س^{٢} ، جد أ حيث $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ} = ١٦$

الحل: معنى النهاية ق'(١) = ١٦

نجد ق'(س) = ٤ س^{٣} + ١٢ أ س

ق'(١) = ٤ + ١٢ أ = ١٦

١٢ أ = ١٢ ← أ = ١

٢. ق'(س) = س^{٦} + جـ س

جد جـ الثابت حيث $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(-٢+هـ) - ق(-٢)}{هـ} = ٢٠$

الحل: ق'(-٢) = ٢٠ نعوض مباشرة

(-٢)^{٦} + جـ × -٢ = ٢٠

٦٤ - ٢ جـ = ٢٠

-٢ جـ = -٤٤ ← $\boxed{جـ = ٢٢}$

٣. جد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{جا(س+هـ) - جا س}{هـ}$

الحل: يمكن حل النهاية ولكن هي نفس قانون تعريف المشتقة

ق'(س) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$

∴ المطلوب (جا س)'

= جتا س

٤. جد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{قا ٢(س+هـ) - قا ٢س}{هـ}$

الحل: معنى النهاية (قا ٢س)'

= ٢ قا ٢س ظا ٢س

٥. جد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{جا^{٢}(س+هـ) - جا^{٢}س}{هـ}$

الحل: (جا^{٢}س)'

= ٢ جا س جتا س = جا ٢س

٦. جد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{جتا ٥(س+٣هـ) - جتا ٥س}{٧هـ}$

الحل: $\frac{٣}{٧}$ × (جتا ٥س)'

= $\frac{٣}{٧}$ × ٥ × - جا ٥س

= $\frac{-١٥}{٧}$ جا ٥س

٧. جد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ظا(٢س+٣هـ) - ظا ٢س}{٤هـ}$

الحل: $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ظا ٢(س+\frac{٣هـ}{٢}) - ظا ٢س}{٤هـ}$

= $\frac{\frac{٣}{٢}}{٤}$ × (ظا ٢س)'

= $\frac{٣}{٨}$ × ٢ قا^{٢} ٢س = $\frac{٣}{٤}$ قا^{٢} ٢س

٨. جد $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا س - ١}{س - \frac{\pi}{٢}}$

الحل: $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا س - جا \frac{\pi}{٢}}{س - \frac{\pi}{٢}}$

معناها (جا س)' ($\frac{\pi}{٢}$)

= جتا س نعوض = صفر

٩. جد $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}^2 س - \frac{1}{2}}{س - \frac{\pi}{4}}$

الحل: $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}^2 س - \text{جتا}^2 \frac{\pi}{4}}{س - \frac{\pi}{4}}$

المعنى: $(\text{جتا}^2 س)'(\frac{\pi}{4})$

$= 2\,\text{جتا}\, س \times -\text{جا}\, س$ نعوض

$= 2\,\text{جتا}\frac{\pi}{4} \times -\text{جا}\frac{\pi}{4}$

$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = -1$

١٠. جد $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}^2 2س - 1}{2س - \pi}$

الحل: $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}^2 2س - \text{جتا}^2 2 \times \frac{\pi}{2}}{2(س - \frac{\pi}{2})}$

$= \frac{1}{2} \times (\text{جتا}^2 2س)'(\frac{\pi}{2})$

$= \frac{1}{2} \times 2\,\text{جتا}\, 2س \times 2 \times -\text{جا}\, 2س$

نعوض = صفر

١١. جد $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{ظا}\, س - 1}{س - \frac{\pi}{4}}$

الحل: $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{ظا}\, س - \text{ظا}\frac{\pi}{4}}{س - \frac{\pi}{4}}$

المعنى $(\text{ظا}\, س)'(\frac{\pi}{4})$

$= \text{قا}^2 س$ نعوض

$= \text{قا}^2 \frac{\pi}{4} = \leftarrow 2$

١٢. ق(٢) = ٥ ، ق'(٢) = ١٢

جد $\lim_{س \to 1} \frac{ق(س^2+1) - ق(2)}{س - 1}$

الحل: $\lim_{س \to 1} \frac{ق(س^2+1) - ق(1^2+1)}{س - 1}$

$(ق(س^2+1))'(1)$

$= 2س \times ق'(س^2+1)$ نعوض

$= 2 \times 1 \times ق'(2) = 2 \times 12 = 24$

١٣. ق(س³+١) = ٣س² − ٢

جد $\lim_{س \to 9} \frac{9ق(س) - س\,ق(9)}{\sqrt{س} - 3}$

الحل: نطرح ونضيف ٩ ق(٩)

$\lim_{س \to 9} \frac{9ق(س) - 9ق(9)}{\sqrt{س} - 3} + \lim_{س \to 9} \frac{9ق(9) - س\,ق(9)}{\sqrt{س} - 3}$

$9 \times \lim_{س \to 9} \frac{ق(س) - ق(9)}{\sqrt{س} - 3} + \lim_{س \to 9} \frac{ق(9)(9 - س)}{\sqrt{س} - 3}$

نضرب مرافق للنهايتين

$9 \lim_{س \to 9} \frac{ق(س) - ق(9)}{\sqrt{س} - 3} \times \frac{\sqrt{س} + 3}{\sqrt{س} + 3} + \frac{ق(9)(\cancel{3 - \sqrt{س}})(3 + \sqrt{س})}{\cancel{\sqrt{س} - 3}}$ (−١)

$9 \times \lim_{س \to 9} \frac{ق(س) - ق(9)}{س - 9} \times 6 + (ق(9) \times -1 \times 6)$

$9 \times ق'(9) \times 6 - 6\,ق(9)$

معطيات نجد س الحقيقية $9 = س^3 + 1 \leftarrow س = 2$

$9 \times ق'(9) \times 6 - 6\,ق(9)$

$9 \times 1 \times 6 - 6 \times 10$

$54 - 60 = \boxed{-6}$

$3س^2 ق'(س^3+1) = 6س$

$12\,ق'(9) = 12$

$ق'(9) = 1$

Mathematics Of Hotoo

١٤. اذا كان هـ(١/٢) = ٢، هـَ(١/٢) = ٨، جد

$$\text{نهـا}_{س \to ٦} \frac{هـ(حا \frac{\pi}{٦} س) - ٢}{س - ٦}$$

الحل: بفرض ٢ = هـ(حا π/٦)

هـ(١/٢) = ٢

نعتبر النهاية معنا هاي

$$(هـ(حا \frac{\pi}{٦} س))' (٦)$$

$$= هـَ(حا \frac{\pi}{٦}) \times جتا \frac{\pi}{٦} \times \frac{\pi}{٦}$$

نعوض

$$= هـَ(حا \frac{\pi}{٦}) \times جتا \frac{\pi}{٦} \times \frac{\pi}{٣٦}$$

$$= هـَ(\frac{١}{٢}) \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\pi}{٣٦}$$

$$= ٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\pi}{٣٦} = \frac{\pi \sqrt{٣}}{٩}$$

١٥. جد نهـا $\frac{هـ(ظا س) - ٧}{س \to \frac{\pi}{٤} \quad س - \frac{\pi}{٤}}$

علماً ان هـ(١) = ٧

هـَ(١) = ٣

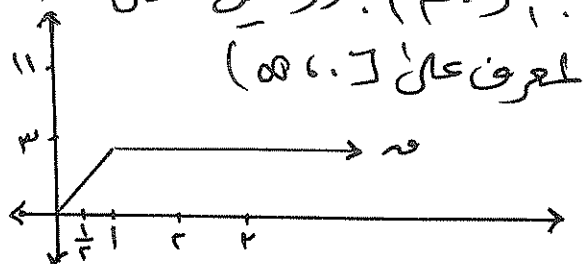
ب. جد نهـا $\frac{ل(جتا^٢ س) - ٩}{س \to \pi \quad س - \pi}$

حيث ل(١) = ٩

ل َ(١) = ٥

نكملة مخ :-

١. ارسم المجاور يمثل منحنى هـ(س) المعرف على [٠، ٥]



جد ١. هـَ(٤) = ٠ ، هـَ(١) = غير موجودة

٢. هـَ(٣) = ٠ ، هـَ(٠) = ٤ ، س = ٠ طرف

٥. هـَ(١/٢) = م = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{-٢}{-١} = ٣$ (ميل المستقيم)

(٣٨) ٢. الاقتران المطلوب متصل داعاً

عند س = ١ رأسه هو ب هـَ(١) غير موجودة

ثوابت :-

١. اذا اعلمت أن

$$\text{قـ}(س) = \begin{cases} أ\,س^{٢} + ب\,س + جـ ، & س \geq ١ \\ ٧ - س^{٢} ، & س < ١ \end{cases}$$

كان قـ(١) موجودة ، جد الثوابت أ ، ب ، جـ .

الحل: بما أن المتعة الثانية موجودة .

اذاً المتعة الاولى موجودة .

و قـ(س) متصل .

$$\text{قـ}(س) = \begin{cases} ٢أ\,س + ب ، & س \geq ١ \\ -٢\,س ، & س < ١ \end{cases}$$

$$\text{قـ}(س) = \begin{cases} ٢أ ، & س \geq ١ \\ -٢ ، & س < ١ \end{cases}$$

حسب المعلومات لانه قـ(١) موجودة

$$\text{قـ}_{+}(١) = \text{قـ}_{-}(١)$$

$$٢أ = -٢ \leftarrow \boxed{أ = -١}$$

أيضاً" قـ(١) موجودة

$$\text{قـ}_{+}(١) = \text{قـ}_{-}(١)$$

$$٢أ + ب = -٢\,س \text{ عند } س = ١ \text{ نعوض}$$

$$٢ \times -١ + ١ \times ب = -٢ \times ١ \leftarrow \boxed{ب = ٠}$$

أيضاً"

قـ متصل عند س = ١

$$\text{نهـا}_{س \to ١^{+}} \text{قـ}(س) = \text{نهـا}_{س \to ١^{-}} \text{قـ}(س) \text{ نعوض}$$

$$أ\,س^{٢} + ب\,س + د = ٧ - س^{٢}$$

$$-١ \times ٠ + ١ \times ب + د = ٧ - ١$$

$$ب + د = ٦$$

$$\boxed{د = ٦}$$

٢. $$\text{قـ}(س) = \begin{cases} أ\,س^{٣} + ٣ ، & س \geq ١ \\ س^{٢} - ب ، & س < ١ \end{cases}$$

جد أ ، ب التي تجعل الاقتران قابلاً للاشتقاق عند س = ١ .

الحل: $$\text{قـ}(س) = \begin{cases} ٣أ\,س^{٢} ، & س \geq ١ \\ ٢\,س ، & س < ١ \end{cases}$$

قابلاً" للاشتقاق عند س = ١

$$\text{قـ}_{+}(١) = \text{قـ}_{-}(١) \Leftarrow$$

$$٣أ \times ١^{٢} = ٢ \times ١ \leftarrow \boxed{أ = \frac{٢}{٣}}$$

∴ قـ(س) قابلاً للاشتقاق عند س = ١

← قـ متصل عند س = ١

$$\text{نهـا}_{س \to ١^{+}} \text{قـ}(س) = \text{نهـا}_{س \to ١^{-}} \text{قـ}(س) \text{ نعوض}$$

$$أ\,س^{٣} + ٣ = س^{٢} - ب$$

$$\frac{٢}{٣} \times ١ + ٣ = ١ - ب$$

$$\frac{١١}{٣} = ١ - ب \Leftarrow \boxed{ب = -\frac{٨}{٣}}$$

٣. $$\text{قـ}(س) = \begin{cases} أ\,س^{٢} + ب ، & س \leq ١ \\ \frac{١}{س} ، & س > ١ \end{cases}$$

جد الثوابت أ ، ب حيث قـ(س) قابلاً للاشتقاق عند س = ١ .

الحل: بغير تعريف المطلقة ونأخذ الاتجاه من الفترة المقابلة له

س = ٠ (+ | − ب)

$$ق(س) = \begin{cases} أ س^٢ + ب ، & س \le ١ \\ \frac{١}{س} ، & س > ١ \end{cases}$$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢أ س ، & س \le ١ \\ \frac{-١}{س^٢} ، & س > ١ \end{cases}$$

قابلاً للاشتقاق عند س = ١

$$ق'_+(١) = ق'_-(١)$$

$$\frac{-١}{١^٢} = ٢أ \times ١ \leftarrow \boxed{أ = \frac{-١}{٢}}$$

∵ ق قابلاً للاشتقاق

← ق متصل عند س = ١

$$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \lim_{س \to ١^-} ق(س)$$ نعوض

$$\frac{١}{س} = أ س^٢ + ب$$

$$\frac{١}{١} = أ \times ١ + ب$$ عند س = ١ نعوض

$$١ = \frac{-١}{٢} + ب \leftarrow \boxed{ب = \frac{٣}{٢}}$$

٤. تمرين ٢٠١٦

أ. $ق(س) = \begin{cases} أ س^٢ + ٤ب س - ٨ ، & س > ١ \\ أ س^٣ - ب س + ٢ ، & س \le ١ \end{cases}$

جد أ ، ب حيث ق'(١) موجودة

الجواب: أ = ١٠ ، ب = ٢

ب. $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٥ ، & س > ٢ \\ أ(س+١) + ب ، & -١ < س \le ٢ \\ ٢س^٣ + س + جـ ، & س \le -١ \end{cases}$

جد الثوابت أ ، ب ، جـ التي تجعل ق قابلاً للاشتقاق عند س = ٢ ومتصلاً عند س = -١

الجواب أ = ٤

ب = -٣

جـ = صفر

سؤال حلو :

اذا كان ق(٢) = ٤ ، ق'(٢) = -٣

جد

١. $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢}$

الحل

النهاية معناها ق'(٢) = -٣

٢. $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{٤ - ٢س}$

الحل

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{-٢(س - ٢)} = \frac{-١}{٢} \times ق'(٢)$$

$$= \frac{-١}{٢} \times -٣ = \frac{٣}{٢}$$

٣. $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(٢) - ق(س)}{س^٢ - ٤}$

الحل

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{-(ق(س) - ق(٢))}{(س - ٢)(س + ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{-١}{س + ٢} \times \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢}$$

$$= \frac{-١}{٤} \times ق'(٢) = \frac{-١}{٤} \times -٣ = \frac{٣}{٤}$$

٤. $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٤}{٨ - س^٣}$

الحل

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{-(س^٣ - ٨)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{-(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{١}{-(س^٢ + ٢س + ٤)} \times \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢}$$

$$= \frac{-١}{١٢} \times ق'(٢) = \frac{-١}{١٢} \times -٣ = \frac{١}{٤}$$

* براهين النظريات *

① . اذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س = أ

برهن أن ق(س) متصل عند س = أ

البرهان : احفظ البداية ق(س) − ق(أ) = ق(س) − ق(أ)

$$\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ}) = \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{(\text{س} - \text{أ})} \times (\text{س} - \text{أ})$$

ندخل نهاية على الطرفين

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ}) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}} \times \lim_{\text{س} \to \text{أ}} (\text{س} - \text{أ})$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ}) = \text{قَ}(\text{أ}) \times \text{صفر}$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{أ}) \quad \therefore \text{ق متصل عند س} = \text{أ}$$

② . $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ ، $\text{ن} \in \text{ط}^*$ ← $\text{قَ}(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$

البرهان : $\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{\text{ع} - \text{س}}$ بالقسمة الطويلة

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \text{ع}^{\text{ن}-1} + \text{ع}^{\text{ن}-2}\,\text{س} + \text{ع}^{\text{ن}-3}\,\text{س}^2 + \text{غ}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$$

$$= \text{س}^{\text{ن}-1} + \text{س}^{\text{ن}-1} + \dots + \text{س}^{\text{ن}-1} = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$$

③ . $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ حيث ن عدد صحيح سالب

اثبت ان $\text{قَ}(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$

البرهان : لا نستخدم التعريف لان القوة سالبة ، نفرض ن = −م

$\therefore \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{-\text{م}}$ ← $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}^{\text{م}}}$

← $\text{قَ}(\text{س}) = \frac{-1 \times \text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1}}{(\text{س}^{\text{م}})^2} = -\text{م} \times \text{س}^{\text{م}-1} \times \text{س}^{-2\text{م}}$

$= -\text{م}\,\text{س}^{-\text{م}-1}$ نرجع ن = −م

$\therefore \text{قَ}(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$

④ . $\text{ص} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ ← $\text{صَ} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}\,\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1}$

البرهان : نتخلص من القوة الكسرية

$\text{ص}^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{م}}$ نشتق ضمنياً

$\text{ن}\,\text{ص}^{\text{ن}-1} \times \text{صَ} = \text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1}$

$$\text{صَ} = \frac{\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1}}{\text{ن}\,\text{ص}^{\text{ن}-1}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\text{س}^{\text{م}-1}}{(\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}})^{\text{ن}-1}}$$

$$\text{صَ} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\text{س}^{\text{م}-1}}{\text{س}^{\text{م}-\frac{\text{م}}{\text{ن}}}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \text{س}^{\text{م}-1-\text{م}+\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$$

$$\text{صَ} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}\,\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1} \quad \dots$$

⑤ . $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظا س}$ ← $\text{قَ}(\text{س}) = \text{قا}^2\text{س}$

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

البرهان

$$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{\text{جتا س} \times \text{جتا س} - \text{جا س} \times -\text{جا س}}{(\text{جتا س})^2}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} = \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} = \text{قا}^2\text{س}$$

⑥ . $\text{ق}(\text{س}) = \text{قتا س}$ ← $\text{قَ}(\text{س}) = -\text{قتا س ظتا س}$

البرهان : $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{\text{جا س}}$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{-1 \times \text{جتا س}}{(\text{جا س})^2} = \frac{-\text{جتا س}}{\text{جا س}} \times \frac{1}{\text{جا س}}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = -\text{قتا س ظتا س}$$

⑦ . $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا س}$ ← $\text{قَ}(\text{س}) = \text{جتا س}$

البرهان : $\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{جا ع} - \text{جا س}}{\text{ع} - \text{س}}$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{2\,\text{جتا}\left(\frac{\text{ع}+\text{س}}{2}\right)\text{جا}\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} 2 \times \text{جتا}\left(\frac{\text{ع}+\text{س}}{2}\right) \times \frac{\text{جا}\frac{1}{2}(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = 2 \times \text{جتا س} \times \frac{1}{2} = \text{جتا س}$$

⑧ . $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا س}$ ← $\text{قَ}(\text{س}) = -\text{جا س}$ نفس حل ⑦

⑨ . $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س}) + \text{ل}(\text{س})$

← $\text{قَ}(\text{س}) = \text{هـَ}(\text{س}) + \text{لَ}(\text{س})$

البرهان : $\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{هـ}(\text{ع}) + \text{ل}(\text{ع}) - (\text{هـ}(\text{س}) + \text{ل}(\text{س}))}{\text{ع} - \text{س}}$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{هـ}(\text{ع}) - \text{هـ}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} + \frac{\text{ل}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \text{هـَ}(\text{س}) + \text{لَ}(\text{س})$$

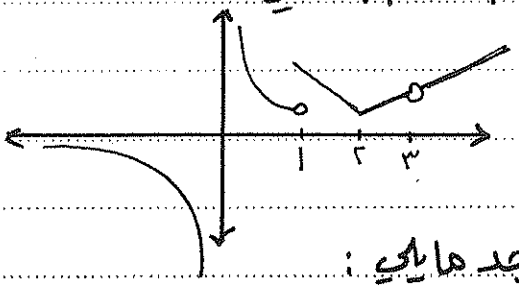
⑩ . $\text{ق}(\text{س}) = \text{جـ} \times \text{ل}(\text{س})$ ← $\text{قَ}(\text{س}) = \text{جـ} \times \text{لَ}(\text{س})$ نفس حل ⑨

⑪ . $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}$ ثابت

$\text{قَ}(\text{س}) = \therefore$ نفس حل ⑨ .

تمارين متنوعة

① . الشكل المجاور يمثل منحنى هـ (س)



جد ما يلي :

أ . نهـا هـ(س) غير موجودة ، فاقيم لثابت م
س→م
عندما تقترب س من {٠ ، ١}

ب . نقاط (عدم الاتصال)
التقترب و تطلق {٠ ، ١ ، ٣}

جـ . النقاط التي عندها هـ غير قابلة للاشتقاق .

التقترب ، تطلق ، الرؤوس ، حيث ، الأطراف
م ∈ {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

② . إذا كان هـ(س) = |س - ١| - |س + ١| جد

أ . الاشتقاق الأولى من اليمين للنقطة (-١ ، ٢)

ب . الاشتقاق الأولى من اليسار للنقطة (-١ ، ٢)

جـ . بين إذا كان هـ قابلة للاشتقاق عند النقطة (-١ ، ٢)

الحل : يجب إعادة التعريف

س = ١ ، س = -١

$$\frac{(س-١)-(س+١)}{١-} \quad \frac{(١+س)-(١-س)}{١} \quad \frac{(١-س)-(-١-س)}{١-}$$

$$\therefore هـ(س) = \frac{-٢}{١} \times \frac{-٢س}{١} \times \frac{٢}{١}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢ & ، س \leq -١ \\ -٢س & ، -١ < س \leq ١ \\ -٢ & ، س > ١ \end{cases}$$

في حساب التفاضل

$$هـ'(س) = \begin{cases} صفر & ، س < -١ \\ -٢ & ، -١ < س < ١ \\ صفر & ، س > ١ \end{cases}$$

أ . $هـ'_{+}(-١) = -٢$

ب . $هـ'_{-}(-١) = صفر$

جـ . $هـ'_{+}(-١) \neq هـ'_{-}(-١)$

∴ $هـ'(-١)$ غير موجودة .

③ . إذا كان (م ∘ ل)(س) = س ، م(س) = $\frac{١}{س}$ ، جد ل'(س)

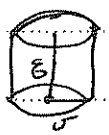
الحل : (م ∘ ل)(س) = س اشتق الطرفين

م'(ل(س)) × ل'(س) = ١

$\frac{١}{ل(س)} \times ل'(س) = ١$

ل'(س) = ل(س)

④ . أسطوانة دائرية قائمة حجمها ثابت ، جد معدل تغير ارتفاعها بالنسبة لنصف قطر قاعدتها .



الحل : ح = π س² ع

المطلوب $\frac{دع}{دس}$ ؟

نشتق ∴ $\frac{دح}{دس} = π س^{٢} \times \frac{دع}{دس} + ع \times ٢ π س$

لاحظ الاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $\frac{دح}{دس} = π س^{٢} \times \frac{دع}{دس} = -٢ π س ع$

$\frac{دع}{دس} = \frac{-٢ع}{س}$

⑤ . $\frac{١}{ص} - ٣ = \frac{-دص}{دس}$ جد $ص'_{س}$ عند (١ ، $\frac{١}{٢}$)

الحل : نحاول التبسيط $\frac{١}{ص} + \frac{ص}{س} = ٣$

س + ص² = ٣ س ص نشتق

١ + ٢ ص ص' = ٣ س ص' + ص × ٣ نفوض

١ + ٢ ص' = ٣ ص' + ٣

ص' = ٤

اذا كان

⑥ . ق(س) = ٢ ظتا س ،

هـ(س) = أ س (س² − ٣)³ وكان

(هـ ٥ ق)′ (π/٤) = −٥٠ ، جد

الثابت أ ؟

الحل: هـ′(ق(π/٤)) × ق′(π/٤) = −٥٠ ، ق(π/٤) = ٢

هـ′(٢) × −٤ = −٥٠ ، ق′(س) = −٢ قتا² س

٢٥ أ × −٤ = −٥٠ ، ق′(π/٤) = −٤

أ = −١/٢

هـ′(س) = (أ س) ٣ (س² − ٣)² ٢س + (س² − ٣)³ × أ

هـ′(٢) = ٢٥ أ

اذا كان

⑦ . ق(س) = س × د/دس (جتا² س)

جد ق′(π)

الحل: ق(س) = س × ٢ جتا س × −جا س

ق(س) = −س جا ٢س

ق′(س) = −س × ٢ جتا ٢س + جا ٢س × −١

ق′(π) = −٢π × ١ + صفر × −١ = −٢π

⑧ . اذا كان س = جا ص اثبت ان

جتا ص . دص/دس + جتا³ ص/جا ص × ص″ = ٢

الحل: ١ = ص′ جتا ص ⟸ ص′ = ١/جتا ص

ص″ = −١ × ص′ × −جا ص / جتا² ص = ص′ × جا ص / جتا² ص

ص″ = ١/جتا ص × جا ص/جتا² ص = جا ص/جتا³ ص

الجملة المطلوبة : (الطرف الايمن)

جتا ص × ١/جتا ص + جتا³ ص/جا ص × جا ص/جتا³ ص

١ + ١ = ٢

⑨ . جد

نها_{هـ→٠} (جا²(٢س + ٣هـ) − جتا²(π/٢ − ٢س)) / ٥هـ

الحل: لاحظ جتا(π/٢ − ٢س) = جا ٢س

∴ نها_{هـ→٠} (جا²(٢س + ٣هـ) − جا² ٢س) / ٥هـ فن

= نها_{هـ→٠} (جا² ٢(س + ٣/٢ هـ) − جا² ٢س) / ٥هـ

= (٣/٢)/٥ × (جا² ٢س)′

= ٣/١٠ × ٢ جا ٢س × ٢ جتا ٢س

= ٦/٥ جا ٢س جتا ٢س

⑩ . اذا كان ق(س) اقترانا قابلا للاشتقاق على ح ، وكان يحقق الخاصية

ق(س + هـ) = ق(س) × ق(هـ)

وكان ق(٠) = ق′(٠) = ١ ، باستخدام التعريف اثبت ان ق′(س) = ق(س) .

الحل: ق′(س) = نها_{هـ→٠} (ق(س + هـ) − ق(س)) / هـ

= نها_{هـ→٠} (ق(س) × ق(هـ) − ق(س)) / هـ

= نها_{هـ→٠} ق(س) (ق(هـ) − ١) / هـ

نوزع النهاية = نها_{هـ→٠} ق(س) × نها_{هـ→٠} (ق(٠ + هـ) − ق(٠)) / هـ

= ق(س) × ق′(٠) = ق(س) × ١

ق′(س) = ق(س)

. بالاشتقاق لا نستخدم القواعد ويجب استخدام التعريف بالحالات التالية :-

١. عندما يكون المطلوب استخدام تعريف المشتقة
٢. عندما يكون معدل تغير أو مقدار تغير.
٣. عند برهنة قواعد الاشتقاق الرئيسية.
٤. متشعب متصل عند جذر المقام

(١١) سؤال ذكي :-

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{جا^2 3س}{س} & ، س \neq 0 \\ صفر & ، س = 0 \end{cases}$$

جد $ق'(0)$

الحل: نستخدم التعريف لأن س = ٠ هو صفر مقام متصل.

$$ق'(0) = \lim_{ع \to 0} \frac{ق(ع) - ق(0)}{ع - 0}$$

$$= \lim_{ع \to 0} \frac{\frac{جا^2 3ع}{ع} - 0}{ع}$$

$$= \lim_{ع \to 0} \frac{جا^2 3ع}{ع^2} = \lim_{ع \to 0} \frac{جا 3ع}{ع} \times \frac{جا 3ع}{ع}$$

$$= 9$$

(١٢) . $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - 1}{س - 1} & ، س \neq 1 \\ 2 & ، س = 1 \end{cases}$

جد $ق'(1)$

$$ق'(1) = \lim_{ع \to 1} \frac{\frac{ع^2 - 1}{ع - 1} - 2}{ع - 1}$$ نوحد مقامات

$$= \lim_{ع \to 1} \frac{ع^2 - 1 - 2(ع - 1)}{ع - 1} \times \frac{1}{ع - 1}$$

$$= \lim_{ع \to 1} \frac{ع^2 - 2ع + 1}{ع - 1} \times \frac{1}{ع - 1}$$

$$= \lim_{ع \to 1} \frac{\cancel{(ع-1)}\cancel{(ع-1)}}{\cancel{(ع-1)}\cancel{(ع-1)}} = 1$$

لاحظ استخدمنا التعريف لأن س = ١ صفر مقام متصل.

(١٣) . $ق(س) = \sqrt{3 + جا س + جتا س}$ ، $هـ(0) = -1$ ، $هـ(0) = 2$

٢٠١٠

كان $د(س) = هـ(س) \times ق(س)$

جد $د'(0)$ ؟

الحل: $ق(0) = \sqrt{4} = 2$

$$ق'(س) = \frac{جتا س - جا س}{2\sqrt{3 + جا س + جتا س}}$$

$$ق'(0) = \frac{1}{4}$$

$$د'(س) = هـ(س) \times ق'(س) + ق(س) \times هـ'(س)$$

$$د'(0) = هـ(0) \times ق'(0) + ق(0) \times هـ'(0)$$

$$= 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times -1 = \frac{-3}{2}$$

(١٤) إذا كان $س = ظا 3ص$ جد $\frac{د^2 ص}{د س^2}$

٢٠١٢

عندما $ص = \frac{\pi}{12}$

الحل: $1 = 3ص' قا^2 3ص \leftarrow \boxed{ص' = \frac{1}{3} جتا^2 3ص}$

$$ص'' = \frac{1}{\cancel{3}} \times 2(جتا 3ص)^1 \times \cancel{3}ص' \times -جا 3ص$$

$$= -جا 6ص \times ص'$$

$$= -جا 6ص \times \frac{1}{3} جتا^2 3ص$$

نعوض

$$= -\frac{1}{3} جا 6 \times \frac{\pi}{12} \times \left(جتا 3 \times \frac{\pi}{12}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$= \boxed{\frac{-1}{6}}$$

(١٥) . $هـ(٢س+١) = ل(س) + \frac{٢}{س-١}$

كان $ل(٠) = ٣$ ، $ل'(٠) = ٢$ ،

$ل''(٠) = ١$ جد

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{هـ'(١+هـ) - هـ'(١)}{هـ}$$

الحل : المطلوب $= هـ''(١)$

نشتق $هـ'(٢س+١) \times ٢ = ٢ ل(س) \times ل'(س) + \frac{-٢}{(س-١)^٢}$

نعوض عن ٢ نقسم عليها

$هـ(٢س+١) = ل(س) \times ل'(س) - \frac{١}{(س-١)^٢}$

نشتق مرة ثانية

$هـ''(٢س+١) \times ٢ = ل(س) \times ل''(س) + ل'(س) \times ل'(س) - \frac{-١ \times ٢(س-١)}{(س-١)^٤}$

لكن نجد س الحقيقية

$٢س+١ = ١ \leftarrow س = ٠$

نعوض

$٢ هـ''(١) = ل(٠) \times ل''(٠) + ل'(٠) \times ل'(٠) + \frac{٢}{١}$

$٢ هـ''(١) = ١ \times ٢ + ٤ - ٢$

$٢ هـ''(١) = ٥ \longrightarrow هـ''(١) = \frac{٥}{٢}$

(١٦) . اذا كان هـ قابلة للاشتقاق

وكانت $هـ(جتاس - جاس) = ٢س + ١$

حيث $س \in [\frac{-\pi}{٦}, \frac{\pi}{٣}]$ جد $هـ'(٠)$ ؟

الحل: نشتق

$(-جاس - جتاس) \times هـ'(جتاس - جاس) = ٢$

نجد س الحقيقية $جتاس - جاس = ٠$

$\leftarrow ظاس = ١$

$\leftarrow س = \frac{\pi}{٤}$

نعوض

$هـ'(٠) \times (-جا\frac{\pi}{٤} - جتا\frac{\pi}{٤}) = ٢$

$هـ'(٠) \times -\sqrt{٢} = ٢ \leftarrow هـ'(٠) = -\sqrt{٢}$

(١٧) . اذا كان

$هـ(٢س-١) = جا^٢\frac{\pi}{١٨}(٤س-٢)$

ابثت ان $هـ''(٣) = \frac{\pi}{٣\sqrt{٦}}$

الحل : نشتق

$هـ'(٢س-١) \times ٢ = ٢ \times جا\frac{\pi}{١٨}(٤س-٢) \times جتا\frac{\pi}{١٨}(٤س-٢) \times \frac{\pi}{١٨}٤$

نجد س الحقيقية $٢س-١ = ٣$

$س = ٢$

نعوض

$هـ''(٣) = \frac{\pi}{٣\sqrt{٦}} \times \frac{١}{٢} \times \frac{\pi}{١٨}٤ = \frac{\pi}{١٨}٢\sqrt{٧}$

$= \frac{\pi}{٣\sqrt{٦}} \times ٢\sqrt{٧}$

(١٨) . $هـ(\frac{١}{٢}س) = (١-س)^٣$ جد $هـ''(-١)$

٢٠١٢

الحل: نجد س الحقيقية $\frac{١}{٢}س = -١ \leftarrow س = -٢$

نعوض للتخلص من المطلوب $١-س$ قاعدة سالبة

$هـ(\frac{١}{٢}س) = -س^٣$ نشتق

$\frac{١}{٢} هـ'(\frac{١}{٢}س) = -٣س^٢$

نشتق مرة ثانية

$\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} هـ''(\frac{١}{٢}س) = -٦س$ نعوض $س = -٢$

$\frac{١}{٤} هـ''(-١) = ١٢$

$هـ''(-١) = ٤٨$

(١٩) . ق(جا٢س) = قتا٢س

حيث س ∈ (٠ ، $\frac{\pi}{٣}$] جد قَ($\frac{١}{٢}$)

الحل : نجد س الحقيقية

جا٢س = $\frac{١}{٢}$

٢س = ٣٠° ، ١٥٠°

س = ١٥° ، ٧٥°

نشتق

قَ(جا٢س) × ٢جتا٢س = ٢ × قتا٢س ظتا٢س

نعوض مكان س = ١٥° = $\frac{\pi}{١٢}$ د

قَ($\frac{١}{٢}$) × ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢ × −٢ × $\sqrt{٣}$

قَ($\frac{١}{٢}$) = −٤$\sqrt{٣}$

(٢٠) . اذا كان ص = ق(س) وكانت

Δص = ٥س² هـ + ٢س هـ

حيث هـ = Δس جد

نها هـ→٠ $\frac{هـ}{قَ(١) - قَ(١ + هـ)}$

أ) −١٢ ب) ١٢ ج) $\frac{-١}{٧}$ د) $\frac{-١}{١٢}$

الحل : المطلوب $\frac{-١}{قً(١)}$

لاحظ Δص = ٥س² هـ + ٢س هـ نقسم على هـ = Δس

$\frac{Δص}{Δس}$ = $\frac{٥س^٢ هـ + ٢س هـ}{هـ}$ ندخل نهاية

نها Δس→٠ $\frac{Δص}{Δس}$ = نها هـ→٠ $\frac{٥س^٢ هـ + ٢س هـ}{هـ}$

قَ(س) = ٥س² + ٢س

قً(س) = ١٠س + ٢

قً(١) = ١٢ ∴ المطلوب

إذاً المطلوب $\frac{-١}{قً(١)}$ = $\frac{-١}{١٢}$

(٢١) . اذا كان ق(س) = $\frac{١}{٣ + أس}$ ، س ≠ $\frac{-٣}{أ}$

قَ(١) = ٢ ، جد أ ؟

الحل : قَ(س) = $\frac{-١ × أ}{(٣ + أس)^٢}$

قَ(١) = $\frac{-أ}{(٣+أ)^٢}$ = ٢ ← ضرب تبادلي

−أ = ٢(٣+أ)² ← −أ = ٢(٩ + ٦أ + أ²)

−أ = ١٨ + ١٢أ + ٢أ² ← ٢أ² + ١٣أ + ١٨ = ٠

(٢أ + ٩)(أ + ٢) = ٠

أ = $\frac{-٩}{٢}$ أ = −٢

اذا كان

(٢٢) . ق²(س³) − ٤ق(س) = −٤س² ، جد قَ(١) ؟

الحل : نشتق

٢(ق(س³))¹ × قَ(س³) × ٣س² − ٤قَ(س) = −٨س

نجهز ① . س³ = ١ ← س = ١

② . نجد ق(١) من الاصل

ق²(١) − ٤ق(١) + ٤ = ٠

(ق(١) − ٢)(ق(١) − ٢) = ٠

ق(١) = ٢

نعوض بالمشتقة س = ١

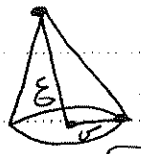
٢ق(١) × قَ(١) × ٣ − ٤قَ(١) = −٨

(٢ × ٢ قَ(١) × ٣) − (٤قَ(١)) = −٨

٢قَ(١) − ٤قَ(١) = −٨

٨قَ(١) = −٨ ← قَ(١) = −١

(٢٣) . مخروط ارتفاعه ٣ امثال نصف قطر قاعدته ، أخذ بالذوبان محافظاً على شكله ، جد معدل تغير حجمه بالنسبة لارتفاعه عندما نصف قطره ١٠ سم ؟



الحل: ح = $\frac{1}{3}\pi$ س^2 ع

ملاحظة: ع = ٣س ← س = $\frac{ع}{3}$

المطلوب $\frac{دح}{دع}$ ؟ س = ١٠ ← $\boxed{ع = ٣٠}$

∴ ح = $\frac{1}{3}\pi \times \frac{ع^2}{9} \times ع = \frac{\pi}{27} ع^3$

$\frac{دح}{دع} = \frac{\pi}{9} ع^2$ نعوض = $\frac{\pi}{9} \times (٣٠)^2 = ١٠٠\pi$

(٢٤). اذا كان ق$'$(٤) = ٦ جد

$\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٤-٢هـ) - ق(٤+٥هـ)}{هـ}$

الحل: نحتاج طرح و اضافة ق(٤)

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٤-٢هـ) - ق(٤)}{هـ} + \frac{ق(٤) - ق(٤+٥هـ)}{هـ}$

= $\frac{-٢}{1} \times ق'(٤) + \frac{٥}{1} \times -ق'(٤)$

= −٢ × ٦ + ٥ × −٦ = −٤٢

(٢٥). جد $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتا^2 س - \frac{1}{2}}{٤س - \pi}$

الحل: نحاول كتابة النهاية على صورة تعريف

= $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتا^2 س - جتا^2 \frac{\pi}{4}}{٤(س - \frac{\pi}{4})}$

= $\frac{1}{4} \times (جتا^2 س)' (\frac{\pi}{4})$

= $\frac{1}{4} \times ٢(جتا س)^1 \times -جا س$ نعوض

= $\frac{-1}{2} \times جتا\frac{\pi}{4} \times جا\frac{\pi}{4} = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{-1}{4}$

(٢٦). (س + ص)^5 + س^5 = ٢ جد ص$'$ عند ص = ٠

الحل: نشتق ٥(س+ص)^4(١+ص$'$) + ٥س^4 = ∴

نعوض ٥س^4(١+ص$'$) + ٥س^4 = ∴

٥س^4 + ٥س^{4}ص$'$ + ٥س^4 = ∴

٥س^{4}ص$'$ = −١٠س^4

ص$'$ = −٢

(٢٧). ص = ٣$\sqrt{ن}$ ، س = ن$\sqrt{ن}$

جد $\frac{دص}{دس}$ أ. ٩ص^2 ب. $\frac{٩}{ص}$

ج. $\frac{٩}{ص^2}$ د. ٩

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$\frac{دص}{دن} = ٣ \times \frac{1}{٢\sqrt{ن}}$

س = ن$^{\frac{3}{2}}$

$\frac{دس}{دن} = \frac{3}{2} ن^{\frac{1}{2}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٣}{٢\sqrt{ن}} \times \frac{٢}{٣\sqrt{ن}} = \frac{1}{ن}$ لكن ص = ٣$\sqrt{ن}$

ص^2 = ٩ن

ن = $\frac{ص^2}{9}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{\frac{ص^2}{9}} = \frac{٩}{ص^2}$

(٢٨). ق(س) = $\begin{cases} |١-س^2| + ١٤س ، س < ١ \\ س هـ^2(س) + ١٠ ، س \geq ١ \end{cases}$

اذا كان هـ(س) قابلاً للاشتقاق حيث

هـ(١) = هـ$'$(١) = ٢ ، ابحث قابلية الاشتقاق

ق(س) عند س = ١

الحل: نبحث اتصال ق عند س = ١

ق(١) = ١٤ ، $\lim_{س \to 1^+}$ ق = $\lim_{س \to 1^-}$ ق = ١٤ ← متصل

* نعيد تعريف المطلق

ق(س) = $\begin{cases} ١-س^2+١٤س ، س < ١ \\ س هـ^2(س) + ١٠ ، س \geq ١ \end{cases}$

ق$'$(س) = $\begin{cases} -٢س+١٤ ، س < ١ \\ س \times ٢هـ(س) هـ'(س) + هـ^2(س) ، س > ١ \end{cases}$

نبحث ق$'_+$(١) = ١ × ٢ × هـ(٢) × هـ$'$(٢) + (هـ(٢))^2

= ٨ + ٤ = ١٢

ق$'_-$(١) = −٢ × ١ + ١٤ = ١٢

∴ ق$'$(١) = ١٢

إذا كان

(٢٩) أ. $ص = (ع^٢ - ١٠ع + ١)^{\frac{٢}{٣}}$ ، $ع = س^٣ + ١$

جد $\frac{دص}{دس}$ عند $ع = ٩$ (ج: -٣٢)

ب. $ص = \sqrt[٣]{(٣ع + ٢)^٥}$ ، $ع = \frac{٨}{س^٢ + ٣}$

جد $\frac{دص}{دس}$ عند $س = ١$ (ج: -٢٠)

جـ. $ق(س) = ٢س^٢$ ، $هـ(س) = ٣س - ١$

جد ١. $\frac{د}{دس}\left(ق^٢(س) - هـ(٢س + ٥)\right)$ عند $س = ١$ (ج: ١٠)

٢. $\frac{د}{دس}\left(ق(هـ(س^٣))\right)$ عند $س = ١$ (ج: ٧٢)

د. $ق(س) = \frac{ك(س)}{هـ(س)}$ ، $هـ(س) \neq ٠$

حيث $ك(س)$ ، $هـ(س)$ قابلان للاشتقاق عند $س = أ$

$ق'(أ) = صفر$ ، اثبت أن $ق(أ) = \frac{ك'(أ)}{هـ'(أ)}$

هـ. $ل(س) = \frac{[٢س + ٨و٠]}{ق(س)} + س^٢$ ، كان

$ل(١) = ٣$ ، $ل'(١) = ٦$ ، جد $ق'(١)$ (ج: -٢)

إذا كان

(٣٠) $س = جتان$ ، $ص = جان$ ، جد

$\frac{دص}{دس}$ عند $س = \frac{١}{٥}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$ ، $\frac{دس}{دن} = -جان$ ، $\frac{دص}{دن} = جتان$

$= جتان \times \frac{١}{-جان}$

$= \frac{-جتان}{جان}$ ، نريد ايجاد القيم

$\frac{١}{٥} = جتان$

ايضاً $\sqrt{٢٤}$ ، ٥ ، ١

$\therefore جان = \frac{\sqrt{٢٤}}{٥}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-\frac{١}{٥}}{\frac{\sqrt{٢٤}}{٥}} = \frac{-١}{\sqrt{٢٤}}$

إذا كان

(٣١) $ص = \sqrt{\frac{١ + جاس}{١ - جاس}}$ اثبت أن

$ص' = \frac{١}{١ - جاس}$ ، $س \in [٠ ، \frac{\pi}{٢})$

الحل: نضرب بمرافق البسط أو المقام قبل الاشتقاق

$ص = \sqrt{\frac{١ + جاس}{١ - جاس} \times \frac{١ - جاس}{١ - جاس}}$

$ص = \sqrt{\frac{جتا^٢ س}{(١ - جاس)^٢}} = \frac{جتاس}{١ - جاس}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{(١ - جاس) \times -جاس - جتاس \times -جتاس}{(١ - جاس)^٢}$

$= \frac{-جاس + جا^٢س + جتا^٢س}{(١ - جاس)^٢} = \frac{١ - جاس}{(١ - جاس)^٢}$

$= \frac{١}{(١ - جاس)}$.

(٣٢) $ق(س) = \sqrt[٣]{س}\ جاس$ جد $ق'(٠)$

الحل: تفشل القواعد لانه ينتج $\frac{صفر}{صفر}$

نذهب للتعريف.

$ق'(٠) = \lim_{ع \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{ع}\ جاع - صفر}{ع} = \lim_{ع \to ٠} \sqrt[٣]{ع} \times \frac{جاع}{ع}$

$= صفر \times ١ = صفر$.

(٣٣) جد معدل تغير مساحة مربع بالنسبة لمحيطه عندما محيطه ٤٨ سم.

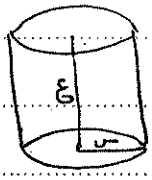
الحل: مساحة $= س^٢$

محيط $= ٤س$

$\frac{دم}{دح}\Big|_{ح = ٤٨}$ ، $٤٨ = ٤س \leftarrow س = ١٢$

$\frac{دم}{دح} = \frac{د(س^٢)}{د(٤س)} = \frac{٢س}{٤} = \frac{٢٤}{٤} = ٦$

(٣٤) . اسطوانة تتمدد محافظة على شكلها بحيث يزيد ارتفاعها بمقدار وحدة عند نصف قطرها . احسب معدل تغير حجمها بالنسبة لـ طول نصف قطرها عندما يكون قطرها ١٢ سم .



الحل: ع = س + ٢ ، ع = ١٢
س = ٦

المطلوب $\frac{دم}{دس}$ ؟

م = ٢π س ع

م = ٢π س (س+٢) = ٢π س^{٢} + ٤π س

$\frac{دم}{دس}$ = ٤π س + ٤π = نفرض = ٢٨π

(٣٥) . اثبت ان (هـ ٥ هـ)$'$(س) = هـ$'$(هـ(س)) × هـ$'$(س)

الحل: نفرض ص = (هـ ٥ هـ)(س) = هـ(هـ(س))

نفرض ع = هـ(س)

ص = هـ(ع) ، ع = هـ(س)

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ = هـ$'$(ع) × هـ$'$(س)

= هـ$'$(هـ(س)) × هـ$'$(س)

(٣٦) . هـ(س) = م س + ب (كثيرة حدود درجة اولى) ومعدل تغيره (٧) ومنحناه يمر بالنقطة (١،٩) جد قاعدة هـ .

الحل: دائماً المقدار الطفلي معدل تغيره = معامل س

∴ م = ٧

∴ هـ(س) = ٧ س + ب

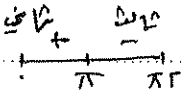
(١،٩) تحقق المعادلة هـ(١) = ٧ × ١ + ب = ٩

ب = ٢

هـ(س) = ٧ س + ٢

(٣٧) . هـ(س) = | جا س | ابحث قابلية الاشتقاق عند س = π .

الحل: بعد تعريف



هـ(س) = { جا س ، ٠ ≤ س < π
{ -جا س ، π ≤ س < ٢π

هـ متصل عند س = π لأن

نهـا هـ(س) = نهـا هـ(س) = هـ(π) = ٠
س←π^{+} س←π^{-}

أي أن هـ(س) = { جتا س ، ٠ < س < π
{ -جتا س ، π < س < ٢π

هـ$'_{+}$(π) = -جتا π = ١

هـ$'$(س) هـ$'_{-}$(π) = جتا π = -١

⇐ هـ$'$(π) غير موجودة

∴ هـ غير قابل للاشتقاق عند س = π

(٣٨) . هـ(س) = { [س] ، ١ ≤ س < ٢
{ |س-٣| ، ٢ ≤ س < ٤

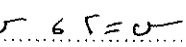
ابحث قابلية اشتقاق هـ على مجاله .

الحل: نعرف هـ(س)

هـ(س) = { ١ ، ١ ≤ س < ٢
{ ٣-س ، ٢ ≤ س ≤ ٣
{ س-٣ ، ٣ ≤ س < ٤

نبحث اتصال هـ عند س = ٢ ، س = ٣ (يجب توضيح الاتصال)

هـ(س) = { ١ ، ١ ≤ س < ٢
{ -١ ، ٢ < س < ٣
{ ١ ، ٣ < س < ٤
{ غير موجودة ، س = ٢ ، ٣



(٣٩) . ق(س) = |٢س − ٢| جد (ق²)′ عند س = ١

الحل: (|٢س − ٢|²)′ ← ((٢س − ٢)²)′ التربيع بلغي المطلق

← ٢(٢س − ٢)¹ × ٢ نعوض ← صفر

(٤٠) . ق(س) = ٥س ، هـ(س) = ٨√(١ − س)

كان هـ′(ق(س₁)) = −١ جد

أ) . (هـ ٥ ق)′(س₁)

ب) . س₁

الحل: أ) (هـ ٥ ق)′(س₁) = هـ′(ق(س₁)) × ق′(س₁)

= −١ × ٥ = −٥

ب) . هـ′(س) = −٤ / √(١ − س)

هـ′(ق(س₁)) = −١

−٤ / √(١ − ق(س₁)) = −١ ⟸ ٤ = √(١ − ق(س₁))

⟸ ١٦ = ١ − ق(س₁) ← ق(س₁) = −١٥

٥س₁ = −١٥ ← س₁ = −٣

(٤١) . ق(س) = قاس ، س ∈ [−٢π ، ٢π]

جد س التي تحقق المعادلة ق′(س) = صفر

الحل: ق′(س) = قاس ظاس = صفر

١ / جتاس × جاس / جتاس = صفر

جاس = ٠

س = ٠ ، π ، ٢π ، −π ، −٢π

لاحظ −٢π ، ٢π ∉ مجال المشتقة (اطراف)

ق′(س) = جاس / جتا²س

← س = ٠ ، π ، −π

اذا كان

(٤٢) . دص/دس = س ، جد د²س/دص²

الحل: دس/دص هي مقلوب دص/دس

لكن د²س/دص² ≠ مقلوب د²ص/دس²

∴ دس/دص = ١/س

← د²س/دص² = −١ × (دس/دص)/س² = −١ × (١/س)/س² = −١/س³

(٤٣) . اذا كان √(٢س/ص) + √(٢ص/س) = √٨ اثبت

أن دص/دس = ١

الحل: نبسط السؤال قبل الاشتقاق

√٢ √س/√ص + √٢ √ص/√س = √٢ × ٢ نوحد مقامات

س + ص = ٢√(س × ص) نربع الطرفين

س² + ٢س ص + ص² = ٤س ص

س² + ص² − ٢س ص = صفر

(س − ص)(س − ص) = صفر

(س − ص)² = صفر جذر للطرفين

س − ص = صفر

ص = س ⟸ دص/دس = ١

(٤٤) . ق(س) = س² ، هـ(س) = س² + ٥س

جد (ق ٥ هـ)′(٣س)

الحل: ق′(هـ(٣س)) × هـ′(٣س)

ق′(٩س² + ١٥س) × (٦س + ٥)

٢(٩س² + ١٥س) × (٦س + ٥)

(١٨س² + ٣٠س) × (٦س + ٥)

ورقة عمل (١)

١. إذا كان معدل تغير $هـ(س)$ على $[١، ٤]$ يساوي (٦)، وكان $هـ(س) = ٣س - هـ(س) + ٢$، جد معدل تغير $هـ(س)$ على $[١، ٤]$. الجواب: ٣

٢. إذا كان $ل(س) = س \, هـ(س)$ وكان معدل تغير $ل(س)$ على $[-٢، ٤]$ يساوي (١٢)، $ل(٤) = ٦$، جد $هـ(-٢)$. ج: ٣٣

٣. $ل(س) = س^{٢} \cdot هـ(س)$ كان معدل تغير $هـ$ على $[١، ٢]$ يساوي (٢) معدل تغير $ل(س)$ على $[١، ٣]$ يساوي ١٢. جد $هـ(١)$. ج: $\frac{٣}{٢}$

٤. $هـ(س) = ٩س^{٢} + ٣س - ب$، جد $ب$ إذا كان معدل تغير $هـ$ على $[٩، ٢٧]$ يساوي ١٩ ج: $\frac{٤}{٣٧}$

٥. إذا كان يقاطع المواصل بين $(١، هـ(١))$ $(٢، ٩)$ بمضلع زاوية ١٢٠° مع محور السينات الموجب. حيث تقع المقتطعة على محنى $هـ$، $هـ(١) = ٤$ جد ٩. ج: $٣\sqrt{٢} - ٤$

٦. إذا كان المحوري على يقاطع لمحنى $هـ(س)$ بمضلع زاوية $\frac{٣\pi}{٤}$ مع السينات الموجب على $[-١، ٢]$ وكان $هـ(س) = هـ(س) + س^{٢} - ٣$، جد معدل تغير $هـ(س)$ على $[-١، ٢]$ ج: ٢

٧. $هـ(س) = \begin{cases} س^{٣} + ١، & ١ \le س \le ٥ \\ ١٠، & ٥ \le س \le ٧ \end{cases}$ وكان $هـ(س) = ك^{٢} + هـ(س)$، ٥ ما معدل تغير $هـ(س)$ على $[١، ٥]$ ج: ٨

٨. $هـ(س) = ٩س^{٢}$ كان مقدار تغير $هـ(س)$ على $[-٢، ٤]$ يساوي ٢٤، جد ٩ ج: ٢

ورقة عمل (٢)

١. ق(س) = س − $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ ، جد ق`(١) باستخدام التعريف. (٣)

٢. اثبت ان $\lim_{ع \to س} \frac{ع\,ق(ع) - س\,ق(س)}{ع - س}$ = س ق`(س) + ق(س)

٣. اثبت ان $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س-هـ)}{هـ}$ = ٢ ق`(س)

٤. ق(س) = (س٢ − م٢) ل(س) ، حيث ل(س) متصل عند س = م
جد ق`(م) باستخدام تعريف المشتقة.

ع: ٢م٢ ل(م)

٥. ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{س} & ، س \geq ٤ \\ \frac{س}{٤} + ١ & ، س < ٤ \end{cases}$ جد ق`(٤) باستخدام تعريف المشتقة

ع: $\frac{١}{٤}$

٦. إذا كان معدل تغير ق(س) على [−٢ ، م] يساوي $\frac{م^٢ - ٤}{م + ٢}$
جد $\lim_{س \to -٢^+}$ ق`(س) ؟

ع: −٤

٧. ل(س) = ق٢(س) حيث ق(س) اقترانا قابل للاشتقاق
أثبت ان ل`(س) = ٢ ق(س) × ق`(س) .

٨. ق(س) = حتا٣ س ، جد ق`(س) بالتعريف.

٩. ق(س) = قا $\frac{س}{٢}$ ، جد ق`(س) بالتعريف .

د.اياد جاد الله
0788513659

ورقة العمل (٣) :-

١. ق(س) = $\frac{ك(س)}{هـ(س)}$ ، هـ(س) ≠ ٠
وكان كلاً من ك(س)، هـ(س) قابلاً للاشتقاق عند س = أ ، قَ(أ) = صفر.
اثبت ان ق(أ) = $\frac{كَ(أ)}{هـَ(أ)}$

٢. ق(س) = $\frac{١}{٣ + أس}$ حيث س ≠ $\frac{-٣}{أ}$
وكانت قَ(١) = ٢ ، جد الثابت أ

٣. ق(س) = [$\sqrt{٢س + ٠.٤}$] جد قَ(٠.٨)
أ. صفر ب. ١ جـ. ٢ د. غير موجودة

٤. اذا كان م(س) = $\frac{[٢س + ٠.٨]}{ق(س)}$ + س^٢
وكان م(١) = ٣ ، مَ(١) = ٦ ،
جد قَ(١).

٥. ق(س) = |س - ١| - |س|
أ. جد المشتقة الاولى من اليمين عند (٠، ١)
ب. جد المشتقة الاولى من اليسار عند (٠، ١)
جـ. حدد اذا كان الاقتران قابلاً للاشتقاق عند (٠، ١) أم لا

٦. ق(س) = $\sqrt{٢س - ١}$ ،
هـ(س) = |س^٢ - ٩| ،
جد $\frac{د}{دس}$ (ق(هـ(س))) عندما س = ٢

٧. اذا كان ق(١) = -٣ ، قَ(١) = ٢
جد ($\sqrt{س}$. ق(س))َ(١)

٨. ل = $\frac{٤س}{٢س + ١}$ ، ص = ل^٢ ، جد $\frac{دص}{دس}$

٩. ص = $\sqrt{س + ١}$ ، $\frac{دم}{دص}$ = $\frac{١}{٣}$ جد $\frac{دس}{دم}$ عندما ص = ٢

١٠. ق(س) = ٢ - س^٣ جد $\frac{د}{دس}$ (ق(س) × قَ(س)) عند س = ١
أ. ٦ ب. ٥ جـ. ٣ د. ١٥

١١. اذا كان ق، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان ق(س) = $\frac{هـ(س)}{س^٢ + ١}$ ،
ق(١) = $\frac{١}{٢}$ ، قَ(١) = صفر جد هـَ(١)
أ. -١ ب. صفر جـ. ٢ د. ١

١٢. اذا كان القاطع المار بالنقط (٠، أ) (-٣، $\sqrt{٣}$) الواقعتين على منحنى ق يصنع زاوية قياسها ($\frac{٥\pi}{٦}$) راد مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. فإن أ تساوي :-
أ. صفر ب. ٦ جـ. -٦ د. ٢$\sqrt{٣}$

١٣. ق(س) = |٨ - ٦س| فإن قَ(٥)
أ. ٦ ب. -٦ جـ. صفر د. غير موجودة

١٤. ق، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق، (ق ∘ هـ)َ(٣) = ١٠ ، (قَ ∘ هـ)(٣) = ٤
جد ٢ هـَ(٣) :
أ. $\frac{٥}{٢}$ ب. ٥ جـ. ٢ د. $\frac{٢}{٥}$

١٥. ق(س) = هـ(س) - $\frac{١}{هـ(س)}$ حيث هـ(س) ≠ صفر
هـ(٢) = $\frac{١}{٢}$ ، هـَ(٢) = -١ ، جد قَ(٢)
أ. ٣ ب. -٣ جـ. ٥ د. -٥

Doctor of mathematics

د.اياد جاد الله
0788513659

ورقة عمل (٤) :-

١. ق(س) = $\frac{١}{١٢}$ س^{ن} ، وكان ق$^{(٤)}$(س) = أ س^{٣} ، جد أ .

٢. ق(س) = { أ س^{٢} − ب س + ٥ ، س ≤ ٢ ؛ س^{٣} + جـ ، س > ٢ }

جد أ ، ب ، جـ التي تجعل ق″(٢) موجودة

٣. ق(س) = { |١ − س^{٢}| + ١٤س ، س < ١ ؛ س ل^{٢}(س) + ١٠ ، س ≥ ١ }

كان ل(س) قابلاً للاشتقاق حيث ل(١) = ل′(١) = ٢ ، ابحث قابلية الاشتقاق للاقتران ق(س) عند س = ١

٤. ص = (جا س + جتا س)^{٤} ، اثبت ان ص″ + ٤ص = ١٢ جتا^{٢} ٢س

٥. اذا كان ق(٣) = ٥ ، ق′(٣) = ٤ جد نها$_{س \to ٣}$ $\frac{٣ق(س) - س ق(٣)}{س - ٣}$

٦. اذا كان ق′(٨) = ٣ ، جد نها$_{س \to ٢}$ $\frac{ق(٤س) - ق(٨)}{س - ٢}$

٧. جد نها$_{هـ \to ٠}$ $\frac{جا(س + هـ) - جتا(\frac{\pi}{٢} - س)}{٣هـ}$

٨. ق(س) = |جا ٣س| حيث س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ابحث قابلية اشتقاق ق(س) عند س = $\frac{\pi}{٣}$

٩. ص = جا^{٢}(س + ب) حيث ب ثابت

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ = (٢ − ٤ص)

١٠. $\sqrt{س}$ + $\sqrt{ص}$ = ٣ ، جد النقط على منحنى العلاقة حيث ص′ = −٢

١١. ق(ص + ١) = س^{٣} ، ق(٥) = ٨ ، ق′(٥) = ٤

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما ص = ٤ .

١٢. ص = ن^{٢} − ٨ن ، س = $\frac{١}{٢}$ ن^{٢} − ٢ن ،

جد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ عندما ن = ٦ .

١٣. ص = جتا ٢س . اثبت ان

(ص′)^{٢} − ص ص″ = ٤

١٤. ص = جتا (س + $\frac{\pi}{٢}$) اثبت ان

ص + ص″ = صفر

١٥. ق(س) = س + جتا س ، س ∈ [−٢π ، ٢π]

جد س التي تحقق المعادلة ق′(س) = صفر

١٦. ص = $\frac{ظا س}{س}$ ، س ≠ ٠ ، اثبت ان

س ص″ + ٢ص′ − ٢س ص = ٢ ظا^{٣} س

١٧. جد نها$_{س \to \frac{\pi}{٦}}$ $\frac{٤ جا^{٢} س - ١}{٦س - \pi}$

١٨. ص = $\frac{١}{\sqrt{س^{٢} + ١}}$ اثبت ان

ص″ + ٣س ص^{٢} ص′ + ص^{٣} = صفر

١٩. اذا كانت جا ٢ص = جتا ٣س

اثبت ان ظا ٢ص = $\frac{٢ص″}{٤(ص′)^{٢} - ٩}$

٢٠. س = جا ص + جتا ص ،

اثبت ان ص″ = س (ص′)^{٣}

Doctor of mathematics