Math

التفوق

في الرياضيات

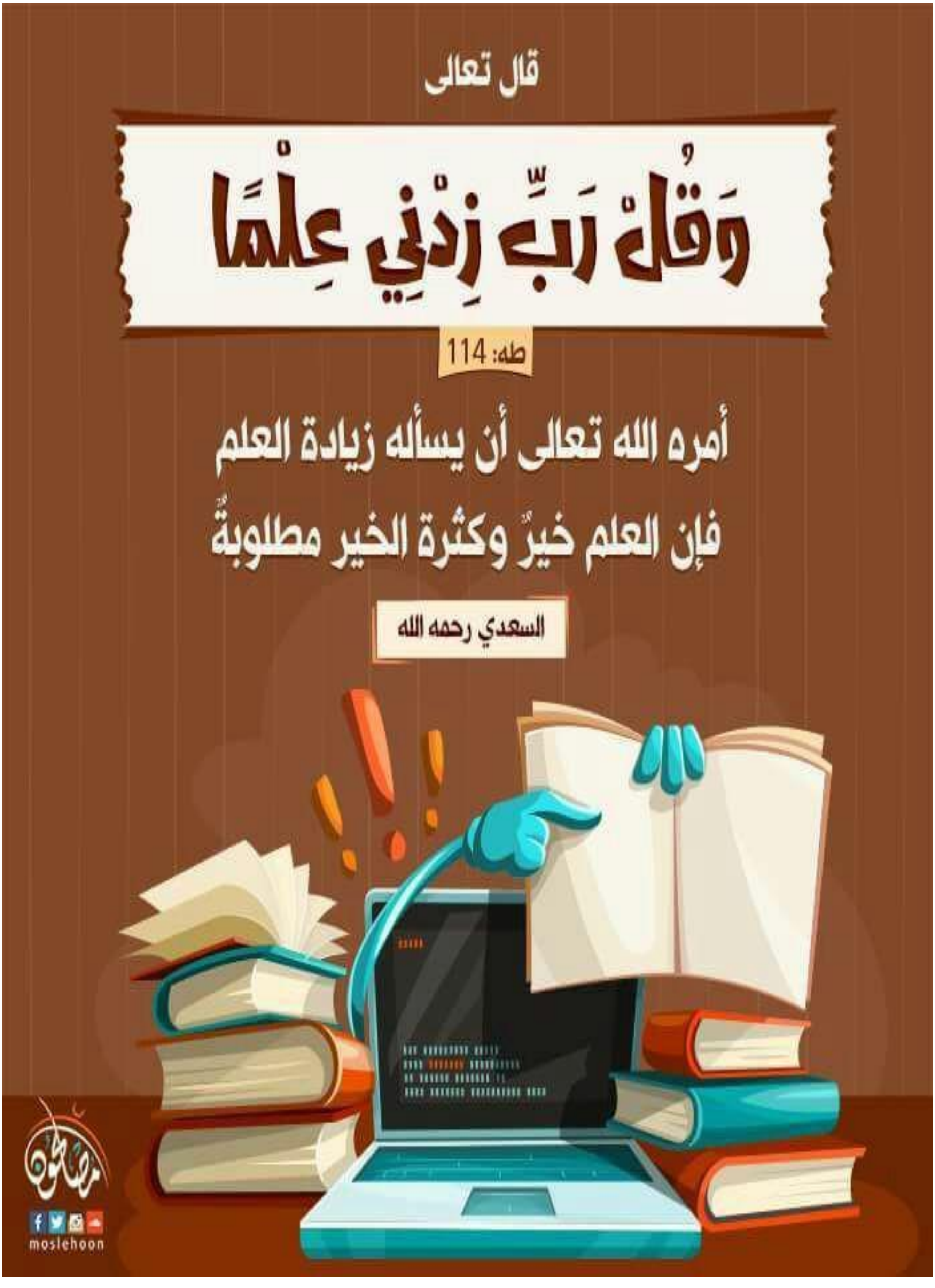
للمرحلة الثانوية الفرع (الأدبي) م٤

شرح مفصل ، أمثلة محلولة ، تمارين إضافية

إعداد

أ . بشار أبو العمّاش

٠٧٧٢٨٨٧٠٦٦


قال تعالى
وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا
طه: 114
أمره الله تعالى أن يسأله زيادة العلم
فإن العلم خيرٌ وكثرة الخير مطلوبةٌ
السعدي رحمه الله
moslehoon

الدرس الأول : التكامل غير المحدود .

- عزيزي الطالب ، لو طلب منك إيجاد اشتقاق الاقتران ق(س) = س^3 + 3س^2 ، لكان اشتقاقه كما مر معك في المستوى الثالث (3س^2 + 6س)
- لكن لو قلت لك ما هي قاعدة الاقتران الذي مشتقته (3س^2 + 6س) ؟. لكانت الاجابة ...

س^3 + 3س^2 – 5 أو س^3 + 3س^2 + 4 ، ....الخ .

فنلاحظ انه يختلف فقط في الحد الثابت (جـ) و هذا ما يسمى بالتكامل .

- اذا مما سبق يتبين ان التكامل ويرمز له بالرمز $\int$ ويقرأ (تكامل دس) ، هو عملية عكسية للاشتقاق .
- تحذف اشارة التكامل مع الاشتقاق ومثال ذلك ..

1- جد قَ (س) = $\int$ 2س^3 + 3س . دس .

نلاحظ بالمثال السابق انه طلب اشتقاق مع وجود تكامل ، لذا في هذه الحالة نأخذ الاقتران كما هو ، فيكون جواب المثال السابق (2س^3 + 3س) .

2- اذا كانت ق(س) = $\int$5س – 3 ، جد قَ (2) .

كما قلنا سابقا ، عند وجود تكامل مع اشتقاق نرجع للاقتران الاصلي (5س – 3) فيكون حل السؤال السابق هو (5 × 2 – 3) = 7 .

3- اذا كان ق(س) = س^2 – 4 ، فجد قَ (3) .

4- ق(س) = $\sqrt{س}$ - 5 ، فجد قَ (4) .

تذكر ....

عند وجود تكامل مع مشتقة ناخذ الاقتران كما هو .

قواعد التكامل غير المحدود ....

القاعدة الاولى : $\int$ أ . دس = أ س + جـ

حيث (أ) اي عدد حقيقي .

أمثلة :

1- $\int$ 7 . دس = 7 س + جـ .

2- $\int$ -4 . دس = - 4 س + جـ .

3- $\int$ $\sqrt{4}$. دس = $\sqrt{4}$ س + جـ .

- (لاحظ وجود (جـ) نهاية كل تكامل مما سبق ويدل على أي عدد ثابت ، لذا من الضروري وضع (جـ) في نهاية كل تكامل غير محدود .
- جد التكاملات التالية :

1- $\int$ -4 . دس .

2- $\int$ دس . ⟵ (هنا الحد الثابت = 1)

3- $\int$ $\frac{5}{13}$ دس.

القاعدة الثانية :

$$\int \text{س}^{\text{ن}} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{جـ} .$$

اي نضيف (1) للاس ونضع الاس بعد الاضافة في المقام .

أمثلة للتوضيح :

1- جد $\int$ س . دس . أولا نلاحظ ان الاس وهي قيمة (ن) = (1) لذا نضيف له (1) ثم نضعه في المقام

كالتالي .. $\frac{\text{س}^{1+1}}{1+1} = \frac{\text{س}^{2}}{2} + \text{جـ}$

2- جد $\int \text{س}^{5}$. دس . أولا قيمة (ن) = 5 فيكون الناتج

كالتالي ... $\frac{\text{س}^{5+1}}{5+1} = \frac{\text{س}^{6}}{6} + \text{جـ}$

3- $\int \sqrt{\text{س}}$. دس. (عزيزي الطالب هنا يجب تجهيز المقدار اولا ، اي وضع الجذر التربيعي على شكل اس ثم نجري عملية التكامل) . فيصبح

المقدار $\int \text{س}^{\frac{1}{2}}$. دس فيكون الناتج =

$$\frac{\text{س}^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\text{س}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\,\text{س}^{\frac{3}{2}}$$

قواعد مهمة ...

1) $\frac{1}{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{-\text{م}}$ مثال : $\frac{1}{\text{س}^{3}} = \text{س}^{-3}$

2) $\sqrt[\text{م}]{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{س}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$ مثال: $\sqrt{\text{س}^{5}} = \text{س}^{\frac{5}{2}}$

3) $\frac{\text{س}^{\text{م}}}{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{س}^{\text{م}-\text{ن}}$ مثال : $\frac{\text{س}^{6}}{\text{س}^{2}} = \text{س}^{6-2} = \text{س}^{4}$

جد ما يلي :

1- $\int \frac{1}{\text{س}^{4}}$. دس .

2- $\int \sqrt{\text{س}^{3}}$. دس .

3- $\int \sqrt[3]{\text{س}^{5}}$. دس .

تذكر ..

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + 1 = \frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{ب}}$

أي $\frac{\text{البسط} + \text{المقام}}{\text{المقام}}$

القاعدة الثالثة :

$\int$ أ ق (س) = أ $\int$ ق (س) . دس .

أي عند وجود ثابت يتم استخراجه خارج التكامل واجراء التكامل ثم نضرب الثابت بالناتج من عملية التكامل .

أمثلة ....

-1 $\int 6$ س^2 . دس .... = 6 $\int$ س^2 . دس (لاحظ اننا استخرجنا الثابت خارج التكامل) =

$6\left[\frac{س^{2+1}}{2+1}\right] = \cancel{6}^{2}\left[\frac{س^3}{\cancel{3}_1}\right] = 2س^3 +$ جـ

عملية اختصار (العامل المشترك الاكبر بين 6 و 3)

-2 $\int \frac{2}{\sqrt[3]{س}}$ دس

(تذكر انه يجب تجهيز المقدار على شكل (سⁿ) قبل اجراء عملية التكامل)

$\sqrt[3]{س} = س^{\frac{1}{3}}$

$\frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{2 \times 3}{2}$

الاول × مقلوب الثاني

$\int \frac{2}{\sqrt[3]{س}} = \frac{2 \times س^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1} = \frac{2 \times س^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = 3 س^{\frac{2}{3}} +$ جـ

تذكر انه يجب توحيد المقامات

تذكر عزيزي الطالب أن

$\frac{أ}{\sqrt[ن]{س^م}} = أ \times س^{\frac{-م}{ن}}$

جد ما يلي :

-1 $\int 2$ س . دس

-2 $\int \frac{3}{\sqrt[3]{س}}$ دس

القاعدة الرابعة :

$\int$ ق(س) ± هـ(س) = $\int$ ق(س) ± $\int$ هـ(س)

أي ان التكامل يوزع في حال الجمع والطرح .

أمثلة :

-1 $\int 2س^2 + 3$. دس =

$\int 2س^2 + \int 3$. دس = $\frac{3}{2}$ س$^{\frac{2}{3}}$ + 3س + ج

-2 $\int 4س^3 - 6س$. دس =

$\int 4س^3 - \int 6س$. دس = س^4 + 3س^2 + جـ

حل الأمثلة التالية : -

-1 $\int 3س^2 - 2س$. دس

-2 $\int \frac{1}{س^2} + \sqrt{س}$. دس

كلما كبر الله في قلبك ..
كلما صغر كل شيء

القاعدة الخامسة :

∫ ق(س) × هـ(س) (يتم ايجاد عملية الضرب اولا ثم نجري التكامل ونفس الحال في عملية القسمة .

امثلة : -

1- جد ∫ س (س^2 + 2) . دس (نفك الأقواس قبل اجراء عملية التكامل) .

∫ س (س^2 + 2) = ∫ س^3 + 2س . دس (أكمل الحل)

2- ∫ (3س – 2)^2 . دس (فك التربيع قبل إجراء عملية التكامل حسب القاعدة....

(أ – ب)^2 = أ^2 - 2 أ ب + ب^2 ... أي

(الحد الأول تربيع – 2 × الحد الاول × الحد الثاني + الحد الثاني تربيع)

وعليه فإن ∫ (3س – 2)^2 =

∫ 9س^2 – 12 س + 4 . دس (لا تنسى توزيع التكامل)

= 3س^3 – 6س^2 + 4س + جـ

3- $\int \dfrac{6س^3 – 8س^2 - 4}{س^2}$ (يتم اولا توزيع المقام على البسط)

∫ = $\int \dfrac{6س^3}{س^2} – \dfrac{8س^2}{س^2} - \dfrac{4}{س^2}$

= ∫ 6س + 8 – 4س$^{-2}$ (أكمل الحل)

الجواب (3س^2+ 8س + $\dfrac{4}{س}$ +جـ)

تذكر أن $\dfrac{س^{ن}}{س^{م}}$ = س$^{ن-م}$

القاعدة السادسة :

∫ جا س : لها حالتان :

الأولى اذا كان معامل س (1) فيكون تكاملها – جتا س + جـ ، مثال ...

∫ جاس = - جتاس + جـ

الثانية اذا كان معامل س غير الـ (1) فيكون تكاملها - $\dfrac{1}{أ}$ جتا أ س + جـ ، مثال

∫ جا2س = - $\dfrac{1}{2}$ جتا2س + جـ

∫ جتا س : لها حالتان :

الأولى اذا كان معامل س (1) فيكون تكاملها جا س + جـ ، مثال ...

∫ جتاس = جاس + جـ

الثانية اذا كان معامل س غير الـ (1) فيكون تكاملها $\dfrac{1}{أ}$ جا أ س + جـ ، مثال

∫ جتا2س = $\dfrac{1}{2}$ جا2س + جـ

∫ قا^{2}س لها حالتان :

الأولى اذا كان معامل س (1) فيكون تكاملها ظا + جـ ، مثال ...

∫ قا^{2}س = ظا س+ جـ

الثانية اذا كان معامل س (1) غير الـ (1) فيكون تكاملها $\dfrac{1}{أ}$ ظا أ س + جـ ، مثال

∫ قا^2 2س = $\dfrac{1}{2}$ ظا2س + جـ

أمثلة : -

1- ∫جا س . دس = - جتاس + جـ .

2- ∫ 4قا^{2}3 س + 2س . دس = ¾ **ظاس3س + س^2 +جـ**

3- ∫ 2 جتا س + جا 5س – 4س^2 . دس (اكمل حل السؤال)

4- ∫جتا س ظاس . دس (اكمل حل السؤال)

5- ∫ قاس جتاس . دس

تذكر أن :

قا س = $\dfrac{1}{جتا س}$

ظا س = $\dfrac{جا س}{جتا س}$

طريقة أخرى لحل الكسور

مثال جد $\int \frac{\text{س}^2 - \text{٥س}}{\sqrt[3]{\text{س}}}$.دس

الحل . أولا نجهز المقدار $\sqrt[3]{\text{س}} = \text{س}^{\frac{1}{3}}$

ثم نرفع هذا المقدار الى البسط فيصبح $\text{س}^{\frac{-1}{3}}$

$= \int (\text{س}^2 - \text{٥س}) \times \text{س}^{\frac{-1}{3}}$ (نجري عملية الضرب قبل التكامل)

$\text{س}^2 \times \text{س}^{\frac{-1}{3}} = \text{س}^{\frac{(3 \times 2 - 1)}{3}} = \text{س}^{\frac{5}{3}}$

$\text{س}^1 \times \text{س}^{\frac{-1}{3}} = \text{س}^{\frac{(3 \times 1 - 1)}{3}} = \text{س}^{\frac{2}{3}}$

$= \int (\text{س}^{\frac{5}{3}} - \text{٥س}^{\frac{2}{3}})$. دس (أكمل الحل)

سـلم النجـاح

✓ لايجاد قاعدة الاقتران ، نجد التكامل ونعوض النقطة المعطاه لايجاد قيمة (جـ) .

✓ أمثلة ...

مثال .يتحرك جسيم بخط مستقيم حيث ان سرعته بعد (ن) ثانية تُعطى بالعلاقة ع(ن)= 2ن^2 – 2ن جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (ن) ثانية علما بأن موقعه الابتدائي = 5م .

الحل . عزيز الطالب نلاحظ بالمثال السابق انه طلب قاعدة الاقتران لسرعة الجسيم بعد (ن) ثانية ، واعطاني موقعه الابتدائي أي ف(0) = 5 ، ومن هذه المعلومة نجد أولا التكامل ثم نعوض ف(0) لايجاد قيمة الثابت جـ ، كالتالي ...

- أولا ناخذ التكامل للاقتران .

$\int$ 2ن^2 – 2ن . دس = ن^3 – ن^2 + جـ (أخذنا التكامل مباشرة)

- ثانيا نعوض ف(0) = 5 في ن^3 – ن^2 + جـ لايجاد قيمة جـ .

ف(0) = ن^3 – ن^2 + جـ = 5

= 0 ^{3} – 0 ^{2} + جـ = 5 ؛ ... جـ = 5

- ثالثا نكتب قاعدة الاقتران كما طلب السؤال . قاعدة الاقتران لسرعة الجسيم بعد(ن) ثانية هي : = ن^3 – ن^2 + 5 وهو المطلوب .

مثال .اذا كان ميل المماس لمنحى الاقتران ق(س) عند النقطة (س ، ص) = 6 – 2س ، فجد قاعدة الاقتران عند النقطة (1 ، 2) .

الحل . $\int$ 6 – 2س . دس = 6س – س^2 + جـ

نحن تعرف ان النقطة (1 ، 2) تعني ان ق(1) = 2 ، ومنه نجد قيمة جـ .. (اكمل الحل) .

قاعدة الاقتران = 6س – س^2 – 3

أ . بشّار أبو العقّاش 0772887066

الدرس الثاني : التكامل المحدود .

القاعدة الأولى ...

$\int_{أ}^{ب} ك \,.\, دس$ (حيث ك عدد ثابت) = ك (ب – أ) .

حيث (ب) يمثل الحد العلوي ،و(أ) يمثل الحد السفلي

مثال1 : $\int_{2}^{4} 3 \,.\, دس = 3 (4 - 2) = 6$.

مثال2 : $\int_{-3}^{2} 4 \,.\, دس = 4 (2 - -3) = 20$.

مثال3 : اذا كانت $\int_{١}^{م} ٣ \,.\, دس = -٦$ فجد قيمة (م) .

الحل :

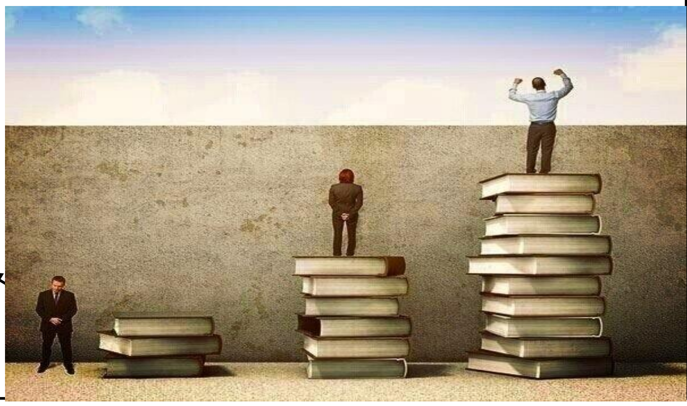
٣(م – ١) = -٦ (توزيع ٣ على داخل القوس)

٣ م – ٣ = -٦ (جمع ٣ للطرفين)

٣ م = -٦ (بقسمة ٣ على الطرفين)

م = -١

ت(ن)
التسارع



القاعدة الثانية :

$$\int_{أ}^{ب} س^{ن} \,.\, دس = \left. \frac{س^{ن+١}}{ن+١} \right|_{أ}^{ب} = \frac{ب^{ن+١} - أ^{ن+١}}{ن+١}$$ حيث ن ≠ صفرا

وبلغة أخرى نأخذ التكامل ثم نطرح $\frac{ق (أ) - ق (ب)}{ن + ١}$

ملاحظة . يمكن حل الامثلة (1+2) على قانون ق(أ) – ق(ب) . فمثلا حل مثال 1 كالتالي :

ق(4) – (2) = (4×3) – (2×3) = 12 – 6 = 6

مثال : اذا كان ق(٢) = ٥ ؛ ق(١) = ٢ فما قيمة $\int_{١}^{٢}$ هـَ(س) . دس

الحل : $\int_{١}^{٢}$ هـَ(س) = ق(٢) – ق(١) = ٥ – ٢ = ٣

مثال :

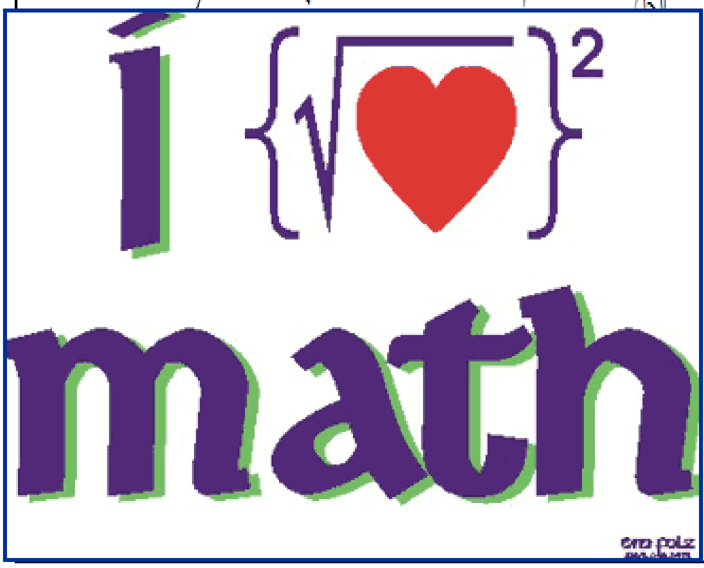
تذكر أن وحدات القياس ...

المسافة (ف) .... م

الزمن (ن) ..... ث

اذا كان ق(٢) = ٥ ؛ ق(١) = ٢ فما قيمة $\int^{١}$ قَ(س+١) . دس

الحل



مثال :

جد $\int_{2}^{5} \frac{10}{س^2}$ دس

تذكر يجب تجهيز على صورة $س^ن$ المقدار قبل اجراء التكامل

الحل : $\int_{2}^{5} \frac{10}{س^2}$ دس $= \int_{2}^{5} 10\,س^{-2}$. دس

$= \left[\frac{10\,س^{-2+1}}{-2+1}\right]_{2}^{5}$

$= \left[\frac{-10}{س}\right]_{2}^{5}$

$= \frac{-10}{5} - \frac{-10}{2} = -2 + 5 = 3$

مثال :

جد $\int_{0}^{3} 6\,هـ^{2س+1}$ دس

الحل : $\left[\frac{6}{2}\,هـ^{2س+1}\right]_{0}^{3}$ يمكن ايجاد ق(٣) لوحدها وق(٠) لوحده ثم تطبيق القانون

ق(٣) $= 3\,هـ^{2\times3+1} = 3\,هـ^{7}$

ق(٠) $= 3\,هـ^{2\times0+1} = 3\,هـ^{1}$

= ق(٣) − ق(٠)

$= 3\,هـ^{7} - 3\,هـ^{1}$ (اخراج ٣ عامل مشترك)

$= 3(هـ^{7} - هـ^{1})$

مثال :

اذا علمت ان $\int_{3}^{م} 3س^2$ دس = - ٣٥ فجد قيمة الثابت (م)

الحل :

$\left[\frac{3س^{2+1}}{2+1}\right]_{3}^{م} = -35$

$\left[\frac{\cancel{3}س^3}{\cancel{3}}\right]_{3}^{م} = -35$

$\boxed{ق(م) = م^3 \quad ق(3) = (3)^3 = 27}$

اذا ق(م) – (٣) = -٣٥

$م^3 - 27 = -35$ (جمع ٢٧ للطرفين)

$م^3 = -8$ (الجذر التكعيبي لـ -٨ = -٢)

$م = -2$

الدرس الثالث : خواص التكامل المحدود.

الخاصية الاولى :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{جـ} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,.$$ حيث جـ عدد ثابت

بمعنى انه نستطيع إخراج الحد الثابت خارج التكامل ثم إجراء عملية التكامل .

مثال : جد $\int_{1}^{3} 3\text{س}^2\,.\,\text{دس}$

الحل : $3\left(\dfrac{\text{س}^{2+1}}{2+1}\right) = 3\left[\dfrac{\text{س}^3}{3}\right]_{1}^{3}$

$= 3 \times \left(\dfrac{27}{3} - \dfrac{1}{3}\right) = 26$

$\text{ق}(3) = \dfrac{3^3}{3} = \dfrac{27}{3}$

$\text{ق}(1) = \dfrac{1^3}{3} = \dfrac{1}{3}$

الخاصية الثانية

$$\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{صفر}$$

مثال : جد $\int_{1}^{1} 3\text{س}^2\,.\,\text{دس} = \text{صفرا}$.

لاحظ عزيز الطالب ان الحد العلوي = الحد السفلي فالناتج دائما في هذه الحالة = صفرا

الخاصية الثالثة

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

أي عند قلب حدود التكامل فقط تقلب الإشارة التكامل الأصلي

مثال : اذا كان $\int_{3}^{6} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = 3$. فإن $\int_{6}^{3} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = -3$

لاحظ عزيز الطالب انه في هذا المثال قمنا فقط بعكس اشارة ناتج التكامل الاصلي لاننا قمنا بعكس حدود التكامل

مثال : اذا كان $\int_{-3}^{4} 2\,\text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = 10$. فإن $\int_{4}^{-3} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} =$ ....

عزيزي الطالب في هذا المثال لاحظ ان تكامل ق (س) مضروب في العدد (2) ، لذا يجب ان نتخلص من العدد 2 اي جعل معامل ق(س) = 1 ، وذلك بقسمة الطرفين على 2 ، ثم نقلب شارة الناتج أي تصبح كالتالي...

$\dfrac{\int_{-3}^{4} 2\,\text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس}}{2} = \dfrac{10}{2}$ ومنه $\int_{-3}^{4} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = 5$ وعليه فإن $\int_{4}^{-3} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = -5$

مثال : اذا كان $\int_{2}^{4} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = 3$. فإن $\int_{4}^{2} -2\,\text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} =$ ....

في هذا المثال نلاحظ ان المضروب في الحد -2 هو معكوس حدود التكامل ، لذا نأخذ اولا عكس اشارة ناتج التكامل الاصلي ثم نضرب الناتج في -2

$\int_{4}^{2} -2\,\text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = 6$

لاحظنا ان ناتج هذا السؤال بدون معامل ق(س) هو -3 ، وبعد ضرب الناتج في معامل ق(س) وهنا -2 يكون الناتج $-3 \times -2 = 6$

الخاصية الرابعة: اذا كانت (أ ب جـ) أعداد حقيقية ، حيث أ < ب < جـ فإن ...

$$\int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس + \int_{ب}^{جـ} ق(س)\,دس$$

التأكد من صحة الخاصية .

1: $\int_2^4 2س\,دس = [س^2]_2^4 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$

2: $\int_4^5 2س\,دس = [س^2]_4^5 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$

3: $\int_2^5 2س\,دس = [س^2]_2^5 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$

نلاحظ ان

1 + 2 = 3

12 + 9 = 21

مثال :

اذا كانت $\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٦$ و $\int_{٥}^{٣} ق(س)\,دس = ٢$ فجد قيمة $\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس$

عزيزي الطالب قبل البدء بعملية الحل ، عليك ان ترتب حدود التكامل من الاصغر الى الاكبر كالتالي :

$\int_{١}^{٥} = \int_{١}^{٣} + \int_{٣}^{٥}$ ثم بعد ذلك نبدأ بتطبيق خصائص التكامل الباقية

؟؟ = ٦ + $\boxed{-٢}$ عكسنا الاشارة لان حدود التكامل معكوسة

ومنه $\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس = ٤$ وهو المطلوب

مثال :

اذا كانت $\int_{١}^{٤} ٢ق(س)\,دس = ٦$ فجد قيمة $\int_{٤}^{١} ق(س) + ٣\,دس$

نذكر ان من خواص التكامل توزيع الجمع والطرح لذا فإن مثل هذه الامثلة نقوم بتوزيع الجمع او الطرح على عملية التكامل وفي هذا المثال ...

$\int_{٤}^{١} ق(س) + \int_{٤}^{١} ٣\,دس$

$\int_{٤}^{١} ق(س) = -٣$ قلب حدود التكامل

لان $\int_{١}^{٤} ٢ق(س)\,دس = ٦$ (قسمة الطرفين على ٢)

$\int_{١}^{٤} ق(س)\,دس = ٣$

$\int_{٤}^{١} ٣\,دس = ٣(١-٤) = -٩$

ومنه $\int_{٤}^{١} ق(س) + ٣\,دس = -٣ + -٩ = -١٢$

مثال

اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٥ & ،\ ٠ < س < ٢ \\ ٢س - ٣ & ،\ ٢ < س < ٤ \end{cases}$ فجد $\int_{٣}^{١} ٢ق(س)\ دس$

نلاحظ ان $\int_{١}^{٣} = \int_{١}^{٢} + \int_{٢}^{٣}$

$\int_{١}^{٢} ٥ = ٥(٢ - ١) = ٥$

$\int_{٢}^{٣} ٢س - ٣ = \Big[س^٢ - ٣س\Big]_{٢}^{٣} = ق(٣) - ق(١)$

$= ٠ - -٢ = ٢$

ومنه $\int_{١}^{٣} = \int_{١}^{٢} + \int_{٢}^{٣}$

$؟؟ = ٥ + ٢$

لكن السؤال طلب $\int_{٣}^{١} ٢ق(س)\ دس$ اي خاصية المعكوس بالاضافة الى 2x

وعليه فإن $\int_{٣}^{١} ٢ق(س)\ دس = -٧ \times ٢ = -١٤$

تحديد أوقات الاستراحة

كل من يتعب له الحق أن يستريح بل أن الاستراحة هي واجب حتى يستطيع الطالب أن يتابع مهماته بنشاط وكفاءة وبعض الطلاب ينسون حقهم في الاستراحة فيرتكبون أحد الأخطاء التالية : -

1 – بعض الطلاب يذاكرون على حساب علاقاتهم الاجتماعية فلا أصدقاء لهم ولا زيارات اجتماعية يقومون بها و هذا قد يسبب لهم مشكلات في التكيف الاجتماعي مستقبلا

2 – بعض الطلاب يذاكرون لمدة خمس ساعات و هذا إرهاق ويمكن أن تتخذ الاستراحة أشكالا متنوعة منها : -

أ – إن تناول وجبة الطعام وهو شكل من أشكال الاستراحة من المذاكرة

ب – إن أداء الصلاة هو أيضا استراحة من المذاكرة

ج – إن الاستحمام هو أيضا استراحة من المذاكرة

د – إن الاستماع الى كل ما هو مفيد سواء من الإذاعة أو عن طريق التلفاز يعد من أشكال الاستراحة

هـ – إن ممارسة الرياضة هي أيضا استراحة من

تدريب .

اذا كانت ق(س) = $\begin{cases} -٦ & ،\ ١ < س < ٣ \\ -٢ & ،\ ٣ < س < ٦ \\ ٤ & ،\ ٦ < س < ٨ \end{cases}$ فجد $\int_{٨}^{١} \frac{-١}{٢} ق(س)\ .\ دس$ ؟

مثال :

اذا كان $\int_{١}^{جـ} ٢س + ٣\ دس = ٦$ ، فجد قيمة جـ

الحل : $\int_{١}^{جـ} ٢س + ٣\ دس$

$= \Big[س^٢ + ٣س\Big]_{١}^{جـ} = ٦$

$ق(جـ) = جـ^٢ + ٣جـ$

$ق(١) = (١)^٢ + ٣\times١ = ٤$

ومنه

$ق(جـ) - ق(١) = ٦$

$جـ^٢ + ٣جـ - ٤ = ٦$ (بطرح ٦ من الطرفين)

$جـ^٢ + ٣جـ - ١٠ =$ صفر (بتحليل العبارة التربيعية)

$(جـ + ٥)(جـ - ٢) =$ صفر

وعليه فان مجموعة الحل (٢ ، -٥)

الدرس الرابع : التكامل بالتعويض

- نتذكر معا ان التكامل يوزع في حال الجمع والطرح ولا يوزع في حال الضرب والقسمة .
- الذي يميز هذا التكامل وجود اقتران مرفوع لقوة او مقسوم على مشتقة اقتران ، وان أحد الاقترانيين يكون مشتقة الاخر .
- خطوات الحل بهذا التكامل .

1- نفرض ان ص = الاقتران أي ص = ع(س)

2- نجد مشتقة ص وهي $ع'(س)$

3- نجد دس بدلالة دص .

4- الرجوع الى التكامل الاصلي ونعوض ص مكان ع(س) ونختصر .

5- كتابة التكامل بدلالة ع(س) اي نعوض قيمة ص في التكامل في النهاية .

تذكر ان $\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\text{المشتقة}}$

لا تنتظر أن يأتيك النجاح
بل إبحث عنه
و لكن ....
قبل أن تبحث عنه حولك
إبحث عنه فى داخلك
فإنك لا تعلم حجم القدرات
التى وهبها الخالق لك

محمد الفقى

حالات التكامل بالتعويض .

* الحالة الاولى .

$\boxed{(\text{مشتقة اقتران})\,(\text{اقتران})^{\text{ن}}}$

مثال :-

$\text{جد} \int (٣\text{س}^{٢})(\text{س}^{٣}+٢)^{٣}\,\text{دس}$

لاحظ ان الاقتران المرفوع لقوة (س³+٢)هو مشتقة الاقتران الاول

خطوات الحل :

اولا نفرض ان $\boxed{\text{ص} = \text{س}^{٣}+٢}$

ثانيا : نجد مشتقة $\text{ص} = ٣\text{س}^{٢}$

ثالثا نجد دس بدلالة دص $\boxed{\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}}}$

رابعا نعوض ص في $\int (٣\text{س}^{٢})(\text{س}^{٣}+٢)^{٣}\,\text{دس}$ كالتالي :

$\int (\cancel{٣\text{س}^{٢}})(\text{ص})^{٣} \dfrac{\text{دص}}{\cancel{٣\text{س}^{٢}}}$ $(\text{حذف } ٣\text{س}^{٢})$

خامسا نجري عملية التكامل

$\int \text{ص}^{٣}\,\text{دس} = \dfrac{\text{ص}^{٤}}{٤} + \text{جـ}$ وفي النهاية نعوض قيمة ص في ناتج التكامل النهائي $\dfrac{(\text{س}+٢)^{٤}}{٤} + \text{جـ}$

* الحالة الثانية :

$$\frac{\text{مشتقة اقتران}}{(\text{اقتران})^{ن}}$$

مثال :

جد $\int \frac{٢س + ٥}{(س^{٢} + ٥س + ١٠)}$ دس.   لاحظ ان البسط مشتقة المقام

الحل :- نفرض أن $\boxed{ص = س + ٥س + ١٠}$

نجد مشتقة دص $\frac{دص}{دس} = ٢س+٥$ اذا دس $= \frac{دص}{٢س+٥}$

نرجع للتكامل الاصلي ونعوض ص

$$\int \frac{\cancel{٢س+٥}}{(ص)} \times \frac{دص}{\cancel{٢س+٥}} دس \Longleftarrow \int \frac{١}{ص} دس$$

$= لو_{هـ}|ص| + جـ$ (نعوض قيمة ص) $= لو_{هـ}|(س +٥س +١٠)| + جـ$

* الحالة الثالثة :-

(مشتقة اقتران) × (جتا (اقتران الزاوية)

الفرض دائما في هذه الحالات ان ص = اقتران الزاوية

ما ينطبق على جتا ينطبق على جا الزاوية وقا^{٢} الزاوية

مثال :

جد $\int$ (٢س) × (جتا (س^{٢} - ٣) دس.

الحل :

نفرض ان جتا الزاوية هو ص

$\boxed{ص = س^{٢} - ٣}$

مشتقة ص $\Longleftarrow$ $\frac{دص}{دس} = ٢س$ ؛ ومنه دس $= \frac{دص}{٢س}$

$= \int \cancel{٢س}$ جتا ص $\times \frac{دص}{\cancel{٢س}}$ دس.

= جاص + جـ (نعوض قيمة ص)

$\boxed{= جا(س^{٢} - ٣) + جـ}$

مثال :

$$\text{جد } \int (\text{س}) \times (\text{جا}(\text{س}^{٢} - ٣)) \, .\text{دس}$$

الحل:

نفرض ان جا الزاوية هو ص

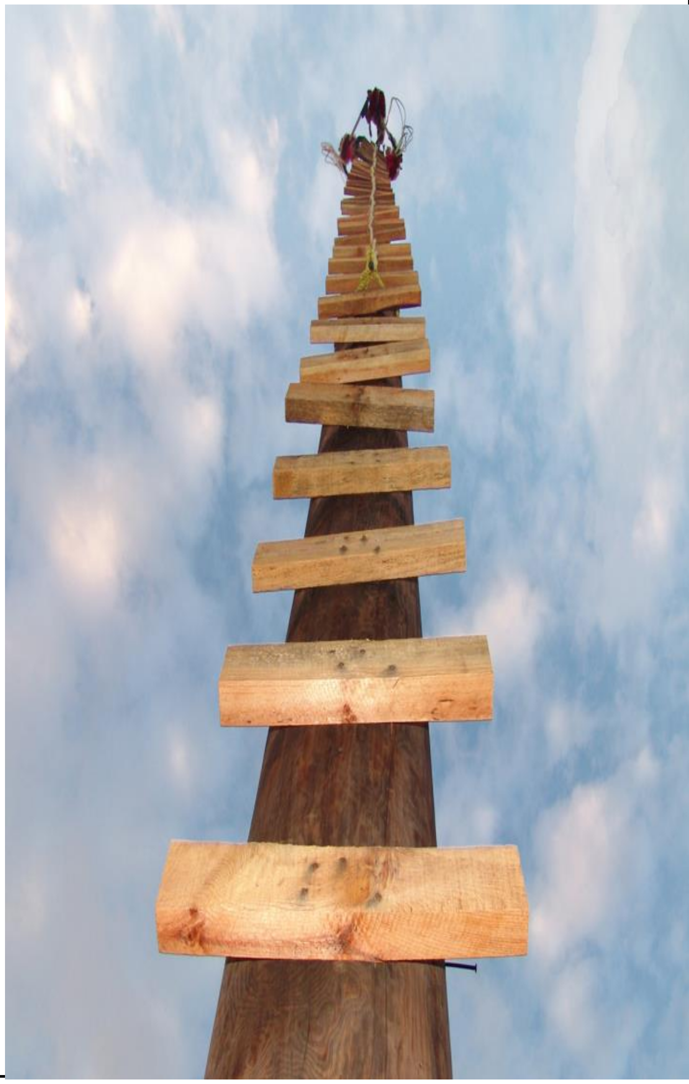
$$\boxed{\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٣}$$

$$\text{مشتقة ص} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\,\text{س} \text{ ؛ ومنه دس } = \frac{\text{دص}}{٢\,\text{س}}$$

$$= \int \cancel{\text{س}} \text{ جا ص} \times \frac{\text{دص}}{٢\,\cancel{\text{س}}} \, .\text{دس} \quad (\text{ اختصار س مع س })$$

$$= \int \frac{١}{٢} \text{ جاص} = \frac{-١}{٢} \text{ جتاص} + \text{جـ}$$

$$\boxed{= \frac{-١}{٢} \text{ جتا}(\text{س}^{٢} - ٣) + \text{جـ}} \quad (\text{ نعوض قيمة ص })$$



مثال :

$$\text{جد } \int \frac{٢\,\text{س} + ٣}{\text{جتا}^{٢}(\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س})} \, .\text{دس}$$

الحل

$$\text{نفرض ان } \boxed{\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٣\,\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\,\text{س} + ٣ \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\,\text{س} + ٣}$$

$$\int \frac{\cancel{٢\,\text{س} + ٣}}{\text{جتا}^{٢}(\text{ص})} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{٢\,\text{س} + ٣}} \, .\text{دس}$$

$$\int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}(\text{ص})} \, .\text{دس}$$

$$= \int \text{قا}^{٢}\text{ص} \, .\text{دس} = \text{ظا ص} + \text{جـ}$$

$$= \text{ظا}(\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س}) + \text{جـ}$$

$$\boxed{\text{تذكر ان قا}^{٢} = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}}}$$

مهارات قراءة أسئلة الاختبارات النهائية

أصدِقائيَ الأعِزّاءُ: السّلامُ عليكُم ورحمةُ الله وبركاتُه.

الاختبارُ يا أحبائي يحتاج إلى تركيز وهدوء وثقة بالنفس، وللأسف نجدُ بعض الطلاب يجتهدونَ ويحفظونَ الدروس عن ظهرِ قلب، ولكنّهم يرتبكون في أثناءِ تقديمِ الاختبار ويضطربون، ويتسرّعونَ في الإجابةِ فيمضي الوقتُ قبلَ أن يُكملوا حلّ الأسئلة. لذا آملُ أن تنتبهوا إلى هذه النّصائح المفيدة، وتعملوا بها:

١ سَمُّوا الله، وتوكّلوا عليهِ، وكونوا واثِقينَ من أنفسكم.

٢ اقرؤوا السؤال بتمعُّن وتركيز، واقرؤوه أكثرَ من مرّة لتفهَموا المطلوبَ منه، ولا تَكتفوا بقراءةِ جُزءٍ من السؤال.

٣ انتَبهوا لعلاماتِ التّرقيم لأنها تساعدُ على فهم السؤال (الفاصلة– النقطة– إشارة الاستفهام– إشارة التعجُّب– النُّقطتان الرأسيتان بعد القول).

٤ انتبهوا لضبط أواخر الكلمات، والكلمات المتشابهة (إنسان– أسنان– فلاح– فلّاح– ذَهَبْ– ذَهبَ).

٥ التأكد من الكلمة الرئيسية في السؤال (عرِّف– علِّل– اشرَح– اذكر السبب– عَدِّد– اختَرِ الإجابة الصحيحة).

٦ أعيدوا قراءة ما كَتبتُموه، وتأكّدوا أن ما كتبتموه مقروءًا وصحيحا من الناحية الإملائية.

أتمنى لكم النجاح والتوفيق

الحالة الرابعة :

$\int$ (مشتقة اقتران) $هـ^{ق(س)}$

$\boxed{\text{نفرض في هذه الحالة ان ص = ق(س)}}$

مثال :

جد $\int ٦س\, هـ^{س^٢}\, دس$

الحل :

نفرض أن $\boxed{ص = س^٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٢س \longleftarrow دس = \frac{دص}{٢س}$

$\int \cancel{٦}^{٣}\, \cancel{س}\, هـ^{ص}\, \frac{دص}{\cancel{٢}\cancel{س}}$

$\int ٣ هـ^{ص}\, دس = ٣\, هـ^{ص} + جـ$ (نضع قيمة ص)

$\boxed{= ٣\, هـ^{س^٢} + جـ}$

الحالة الخامسة :

$\int$ (اقتران من الدرجة الاولى $)^{ن}$ دس

$\boxed{\text{نفرض ان ص = الاقتران}}$

مثال :

جد $\int (٥س + ٢)^{٧}\, دس$

نفرض ان $\boxed{ص = ٥س + ٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٥ \longleftarrow دس = \frac{دص}{٥}$

$\int ص^{٧} \times \frac{دص}{٥}\, دس = \frac{ص^{٨}}{٥ \times ٨} + جـ$

$= \frac{١}{٤٠} ص^{٨} + جـ$ (نكتب قيمة ص)

$\boxed{= \frac{١}{٤٠} (٥س+٢)^{٨} + جـ}$

قاعدة عامة عندما $\int (\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}} . \text{دس}$

$$= \frac{(\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ} \times (\text{ن} + 1)} + \text{جـ}$$

مثال على هذه القاعدة :

جد $\int (٥ \text{س} + ٣)^{٣} . \text{دس}$

$$= \frac{(٥ \text{س} + ٣)^{٤}}{٢٠} + \text{جـ}$$

ملاحظة .
لا تستخدم هذه القاعدة الا للتأكد من الحل او عندما يكون المطلوب خيار متعدد .

التكامل بالتعويض عند وجود حدود تكامل

* هناك طريقتين لتعويض حدود التكامل ...

الطريقة الاولى : اجراء التكامل بخطواته السابقة الذكر ثم بعد كتابة بدلالة (س) نعوض حدود التكامل كالمعتاد .

مثال :

جد $\int_{٠}^{١} ٦\text{س} (\text{س}^{٢} + ٢)^{٢} . \text{دس}$

نفرض أن $\boxed{\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٢}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{المشتقة}} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

$\int_{٠}^{١} \cancel{٦}^{٣}\cancel{\text{س}} (\text{ص})^{٢} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{٢\text{س}}} . \text{دس}$

$\int_{٠}^{١} ٣ (\text{ص}^{٢}) . \text{دس} = \text{ص}^{٣} \Big]_{٠}^{١}$ (نعوض ص بدلالة س)

$= (\text{س}^{٢} + ٢)^{٣} \Big]_{٠}^{١} = \text{ق}(١) - \text{ق}(٠) = (١^{٢} + ٢)^{٣} - (٠^{٢} + ٢)^{٣} = ٢٧ - ٨ = ١٩$

(لاحظ عزيزي الطالب انه اتممنا عملية التكامل كما هو الحال في التكامل غير المحدود ثم بعد كتابة ص بدلالة س عوضنا حدود التكامل) .

قواعد :

١) $\int (\text{أ}\text{س} + \text{ب})^{\text{ن}} \, \text{ء}\text{س} = \frac{(\text{أ}\text{س} + \text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن} + 1)} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{جا}(\text{أ}\text{س} + \text{ب}) \, \text{ء}\text{س} = \frac{-\text{جتا}(\text{أ}\text{س} + \text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$

٣) $\int \text{جتا}(\text{أ}\text{س} + \text{ب}) \, \text{ء}\text{س} = \frac{\text{جا}(\text{أ}\text{س} + \text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$

٤) $\int \text{قا}^{2}(\text{أ}\text{س} + \text{ب}) \, \text{ء}\text{س} = \frac{\text{ظا}(\text{أ}\text{س} + \text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$

الطريقة الثانية :

نجري خطوات التكامل كما هي ، لكن قبل كتابة ص بدلالة س نجد حدود التكامل الجديدة اي نعوض الحد السفلي من التكامل بقانون ص ، (فرض (ص) ، ونعوض كذلك الحد العلوي كما هو الحال في الحد السفلي لنحصل على حدود جديدة للتكامل ، ولنحل المثال السابق بهذه الطريقة كالتالي .

$$\text{جد } \int_{٠}^{١} ٦\text{س} \left(\text{س}^{٢} + ٢\right)^{٢} . \text{دس}$$

نفرض ان $\boxed{\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٢}$

نعوض حدود التكامل .

الحد السفلي (٠) . $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٢ = ٠^{٢} + ٢ = ٢$

الحد العلوي (١) . $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٢ = ١ + ٢ = ٣$

حدود التكامل الجديدة . السفلي = ٢ ، العلوي = ٣

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{المشتقة}} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$$

$$\int_{٢}^{٣} \cancel{٦}^{\,٣}\cancel{\text{س}} \left(\text{ص}\right)^{٢} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{٢\text{س}}} . \text{دس}$$

$$\int_{٢}^{٣} ٣\left(\text{ص}^{٢}\right) . \text{دس} = \text{ص}^{٣} \Big]_{٢}^{٣}$$ (لاحظ هنا اننا كتبنا حدود التكامل الجديدة)

$$= \text{ق}(٣) - \text{ق}(٢) = ٣^{٣} - ٢^{٣} = ٢٧ - ٨ = ٩$$

(في هذه الطريقة بعد ايجاد التكامل عوض مباشرة حدود التكامل الجديدة مكان ص بدون ان تكتب ص بدلالة س)

تدريب 1.

$$\text{جد } \int_{-٢}^{٢} \left(٣\text{س}^{٣} + ٥\right)^{٨} \text{س}^{٢} . \text{دس}$$

تدريب 2

$$\text{جد } \int_{٢}^{١٠} ٣\left(٥\text{س} - ١\right)^{\frac{-١}{٢}} . \text{دس}$$

تطبيقات فيزيائية و هندسية

مثال- يتحرك جسيم بسرعة مُعطى بالعلاقة :

ع(ن) = 3ن^{2} – 2ن م/ث . جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (3) ثواني من بدء الحركة علما بأن موقعه الابتدائي = 5 م .

الحل . ∫ 3ن^{2} – 2ن . دس = ن^{3} – ن^{2} + جـ .

موقعه الابتدائي = 5 م ؛ اذا ف(0) = 5 منها نجد جـ

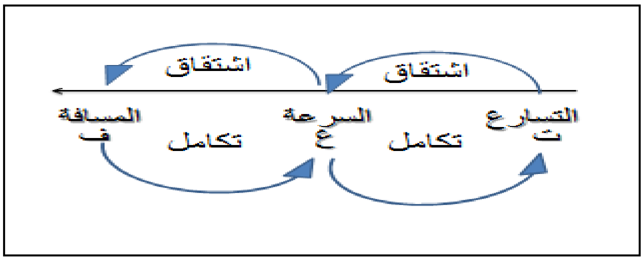
ف(0) = 3ن^{2} – 2ن + جـ = 5 ——— جـ = 5

(لكن السؤال طلب السرعة بعد 3 ثواني ؛ اذا بعد كتابة قاعدة الاقتران نعوض (3) فيها لنجد مسافته بعد هذا الزمن . ف (3) = 3ن^{2} – 2ن + 5) لاحظ هنا اننا عوضنا مكان (جـ) قيمتها التي هي (5) .

وبعد التعويض يكون ف(3) = 23 م . و هو الطلوب .

مثال : يتحرك جسيم بخط مستقيم بتسارع ثابت = ت(ن) = - 6 م/ث^{2} ؛ جد المسافة التي يقطعها بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة علما بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع (0) = 5 م /ث ، وموقعه الابتدائي ف(0) = 6 م .

الحل . عزيزي الطالب في مثل هذه الاسئلة سوف نعتمد على هذه القاعدة للحل و هي ..



من المخطط السابق نلاحظ ان ∫ التسارع يعطينا سرعة ، و ∫ السرعة يعطينا مسافة :-

اذا نجد أولا تكامل التسارع لنجد قاعدة السرعة من خلال ع (0) = 6 كالتالي ...

∫ -6 . د س = - 6 ن + جـ ..... ع (0)=5

ع (0)= - 6 ن + ج = 5 ..... اذا (ج) = 5 .

ومنه قاعدة السرعة لهذا الجسيم = -6س +5 .

نجد الان تكامل السرعة لنجد قاعدة المسافة

∫ -6ن +5 . . دس = -3س^{2} + 5س + جـ .

من السؤال ف (0) = 6 ... لنجد قيمة (جـ)

ف(0) = -3ن^{2} + 5ن + جـ = 6 ومنه جـ = 6

اذا قاعدة الاقتران للمسافة = -3ن^{2} + 5ن + 6 .

عزيزي الطالب لا تنسى مطلوب السؤال (جد المسافة التي يقطعها بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة)

اذا نعوض قيمة(1) في اقتران المسافة ....

ف(1) = -3ن^{2} + 5ن + 6 = 8 م . وهو المطلوب .

سؤال : يتحرك جسيم بتسارع ثابت مُعطى بالعلاقة ت(ن) = 8م/ث^{2} ؛ جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة علما بأن السرعة الابتدائية ع(0) = 2 م/ث ، وموقعه الابتدائي ف(0) = 10 م .

تدريب: يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث انتقل من الموقع الابتدائي ف(0) =4م، اذا كانت سرعته بعد مرور ن ثانية معطى بالعلاقة ف(ن)=6-2ن+6ن^2 م/ث، جد موقعه بعد مرور ثلاث ثوان من بدء الحركة.

تدريب: يتحرك قطار بخط مستقيم بتسارع ثابت مقداره ت(ن)= 12ن – 6 م/ث^2 اذا علمت ان موقعه الابتدائي ف(0)= 2م ، وسرعته الابتدائية ع(0)=3م/ث جد ما يلي :

1- سرعته بعد مرور ثانية واحدة .
2- موقعه بعد مرور 3 ثواني .

تدريب: اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق يساوي (2س +2)^3 وكان المنحنى يمر بالنقطة (6،1)فجد قاعدة الاقتران.

الدرس الخامس : تطبيقات التكامل (المساحات)

- سوف نقوم بتقسيم الدرس الى عدة حالات .

الحالة الأولى .

مساحة المنطقة المحصورة بين اقتران ومحور السينات ومستقيمين $س_1 = أ$ ، $س_2 = ب$ ، حيث ان الاقتران لا يقطع محوسر السينات بين العددين أ و ب فتكون مساحة المنطقة المحصورة هي ...

$$م = \int_{أ}^{ب} ق(س) . دس$$

مثال : أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحى الاقتران ق(س) = $3س^2$ ومحور السينات خلال الفترة [1 ، 3] .

الحل .

أولا : نرى ان الاقتران ق(س) لا يقطعه خلال الفترة المحددة [1 ، 3] ، من خلال ق(س) = صفر أي...

$3س^2$ = صفر ومنه س = صفر .

نلاحظ ان الصفر لا يقع ضمن الفترة [1 ، 3] اذا الاقتران لا يقطعه .

ثانيا نأخذ تكامل الاقتران ق(س) وحدود التكامل تكون الفترة المحددة في السؤال كالتالي ...

$$م = \int_{١}^{٢} ٣س^٢ . دس$$

$$= س^٣ \Big]_{١}^{٢} = ق(٢) - ق(١) = ٢^٣ - ١^٣ = ٧$$

$\boxed{\text{ومنه المساحة المطلوبة = ٧ وحدات}}$

مثال : احسب المساحة المحصورة بين منحى الاقتران ق(س) = 2س – 4 ، ومحور السينات والمستقيمين $س_1 = -1$ ، $س_2 = 2$.

الحل : ..

2س – 4 = صفر ؛ 2س = 4 ؛ س = 2 ؛ اذا المنحنى لا يقطع ق(س) .

$$م = \int_{-١}^{٢} ق(س) . دس$$

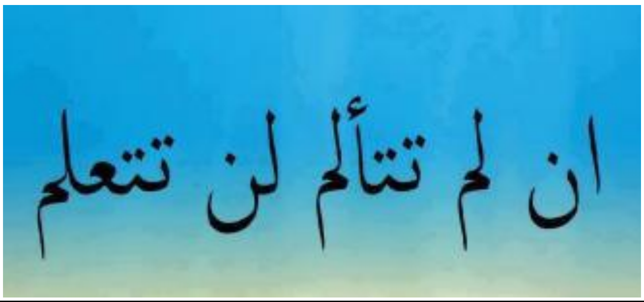
$$= \int_{-١}^{٢} ٢س - ٤ . دس$$

$$= س - ٤س \Big]_{-١}^{٢} = ق(٢) - ق(-١)$$

$$= (٤ - ٨) - (١ + ٤) = -٩$$

$$= |-٩| = ٩ \text{ وحدات}$$

ملاحظة : اذا كان الجواب سالبا للمساحة نأخذ القيمة المطلقة لان المساحة ≠ سالب .



الحالة الثانية :

مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) والمستقيمين $س_1$ = أ ؛ $س_2$ = ب ، والاقتران ق(س) يقطع محور السينات بين العددين أ ،ب ، اي عندما نعمل ق(س) =صفر ، تكون قيمة س تقع بين العددين أ ، ب .

$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) . دس}$$

مثال : اذا كان ق(س) = 4 – 2س ، فأحسب المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات خلال الفترة [-1 ، 3] .

الحل :

- ق(س) = صفر ... 4 – 2س = صفر ؛ اذا س = 2

نلاحظ (2) تقع ضمن الفترة [-1 ، 3] ، اذا الاقتران يقطع محور السينات لذا يكون الحل على فترتين الاولى من -1 لـ 2 ، والثانية من 2 لـ 3 كالتالي :

$$\text{م} = \underbrace{\int_{-1}^{2} \text{ق(س)}}_{\text{م}_1} + \underbrace{\int_{2}^{3} \text{ق(س) . دس}}_{\text{م}_2}$$

$$\text{م}_1 = \int_{-1}^{2} 4 - 2\text{س . دس} = \left[4\text{س} - \text{س}^2\right]_{-1}^{2} = (8-4) - (-4-1) = 9$$

$$\text{م}_1 = \int_{2}^{3} 4 - 2\text{س . دس} = \left[4\text{س} - \text{س}^2\right]_{2}^{3} = (12-9) - (8-4) = |-1| = 1$$

المساحة الكلية = $\text{م}_1 + \text{م}_2$

$$\boxed{= 9 + 1 = 10 \text{ وحدات}}$$

تدريب :

جد المساحة المحصورة بين ق(س) = 2س-6 والمستقيم $س_1$ = 0 ، $س_2$ = 5 .

تدريب

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحى الاقتران ق(س) = س – 4 ، ومحور السينات خلال الفترة [1 ، 3] .

الحالة الثالثة .

المساحة المحصورة بين اقتران ومحور السينات ،

اي نجد نقاط تقاط الاقتران مع محور السينات عن طرق جعل ق(س) = صفر ، ومنه نجد $س_1$ و $س_2$

$$م = \int_{س_1}^{س_2} ق(س) \,.\, دس$$

مثال : اذا كان ق(س) = 9 – $س^2$ ، فأحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات .

الحل :

- أولا نجد $س_1$ و $س_2$ من خلال جعل ق(س) = صفر

9 – $س^2$ = صفر . 9 = $س^2$ ، اذا النقطة [3 ،-3]

$$اذا\ المساحة = \int_{-3}^{3} ق(س) \,.\, دس$$

$$م = \int_{-3}^{3} 9 - س^2 \,.\, دس = \left[9س - \frac{س^3}{3} \right]_{-3}^{3}$$

$$م = ق(3) - ق(-3) = \left(27 - \frac{27}{3} \right) - \left(-27 - \frac{-27}{3} \right)$$

$$\boxed{م = 18 - - 18 = 36 \ وحدة}$$

مثال : احسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)=$س^2$ – 4س +3 ، ومحور السينات .

الحل :

ق(س) = صفر .

$س^2$ -4س+3 = صفر ← (س-1) (س-3) =صفر

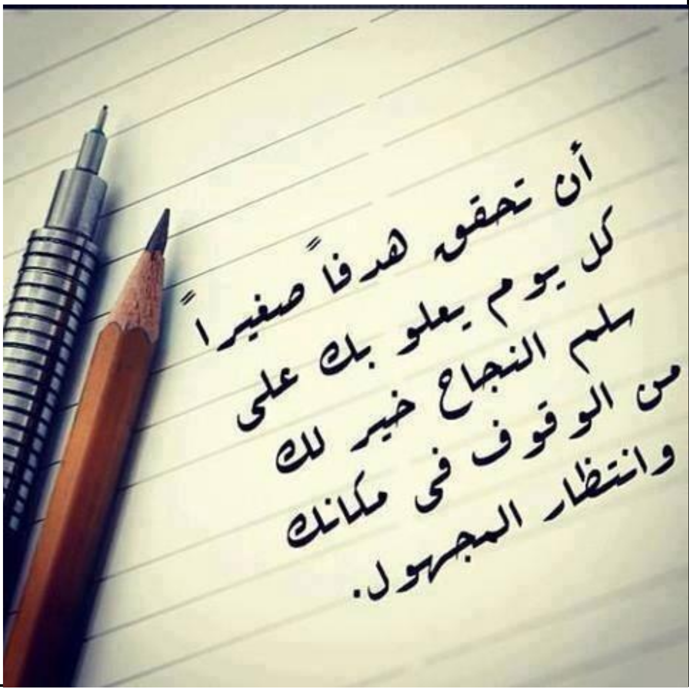
ومنه $س_1$ = 1 ، $س_2$ = 3 .

$$اذا\ المساحة = \int_{1}^{3} ق(س) \,.\, دس$$

$$م = \int_{1}^{3} س^2 - 4س + 3 \,.\, دس$$

$$م = \left[\frac{س^3}{3} - 2س^2 + 3س \right]_{1}^{3} = ق(1) - ق(3)$$

$$\boxed{= \frac{-4}{3} = \frac{4}{3} \ وحدة .}$$



الحالة الرابعة :

المساحة المحصورة بين اقترانين ق(س) و هـ(س)

نجد اولا نقطة تقاطع الاقترانين بجعل ....

ق(س) = هـ(س) فتكون المساحة هي : -

$$م = \int_{س_١}^{س_٢} ق(س) - هـ(س) .دس$$

أو

$$م = \int_{س_١}^{س_٢} هـ(س) - ق(س) .دس$$

مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانيين ق(س) = 3 – $س^2$ ، و هـ(س) = 2س .

الحل :

أولا نساوي ق(س) مع هـ(س) لايجاد $س_1$ و $س_2$.

ق(س) = هـ(س)

3 – $س^2$ = 2س ومنه ... $س^2$ + 2س -3 = 0

اذا (س+3) (س – 1) = 0 ومنه $س_1$ = -3 ؛ $س_2$=1

$$م = \int_{-٣}^{١} ق(س) - هـ(س) .دس$$

$$= \int_{-٣}^{١} س^٢ + ٢س - ٣ .دس$$

$$= \left[\frac{س^٣}{٣} + س^٢ - ٣س\right]_{-٣}^{١} = ق(١) - ق(-٣)$$

$$\boxed{= \left|\frac{-٣٢}{٣}\right| = \frac{٣٢}{٣} \text{ وحدة}}$$

تدريب :

جد مساحة المنقطة المغلقة بين منحنيي الاقترانيين ق(س) = $س^2$- س ، هـ(س) = 2س .

تدريب :

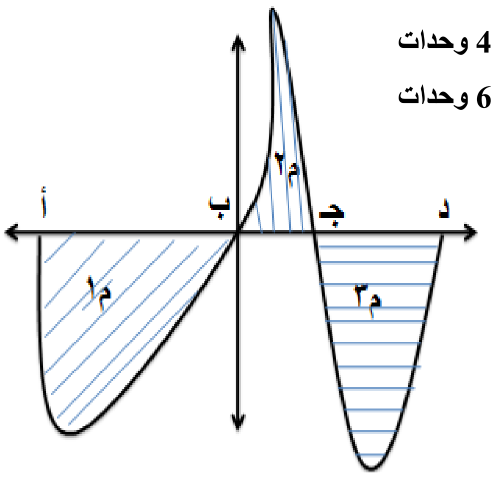
جد مساحة المنقطة المحصورة بين الاقترانيين ق(س)= $3س^2$ ، هـ(س) = 6س .

ايجاد التكامل من خلال الرسم .

- دائما التكامل فوق محور السينات موجب .
- دائما التكامل تحت محور السينات سالب .

مثال : بالاعتماد على الشكل التالي جد ما يلي

حيث : - م1 = 8 وحدات
- م2 = 4 وحدات
- م3 = 6 وحدات



١ـ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس}$

٢ ـ $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس}$

٣ـ $\int_{\text{د}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس}$

٤ـ $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس}$

٥ـ $\text{م}\int_{\text{أ}}^{\text{د}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس}$

الحل :

١ـ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} = -8$ (لانه تحت محور السينات)

٢ ـ $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} = -4$ (خاصية المعكوس) لان $\int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} = 4$

٣ـ $\int_{\text{د}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} = \text{م}_2 + \text{م}_3 = \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{د}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس}$

$\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} = 4 - 6 = -2$ (خاصية المعكوس) اذا $\int_{\text{د}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} = 2$

٤ـ $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} = \underline{-8} + 4 = -4$

لانه تحت محور السينات

٥ـ $\text{م}\int_{\text{أ}}^{\text{د}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس}$ (لاحظ هنا انه طلب مساحة)

$\text{م}\int_{\text{أ}}^{\text{د}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{د}} \text{ق(س)} \,.\, \text{دس}$

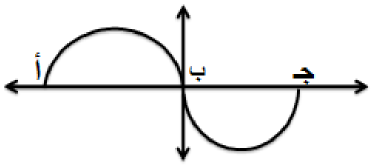
$= |-8| + 4 + |-6| = 18$ وحدة

(لاحظ اننا اخذنا القيمة المطلقة لانها مساحة)

مثال :

معتمدا على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) خلال الفترة [أ ، جـ] ، فاذا علمت ان المساحة المغلقة خلال الفترة [أ ، جـ] = ١٤ وحدة مربعة ، وكان $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس = ٦ فما قيمة $\int_{ب}^{جـ}$ ق(س) دس ؟

الحل :



الشكل أ

$\int_{أ}^{جـ} = \int_{أ}^{ب} + \int_{ب}^{جـ}$ ،

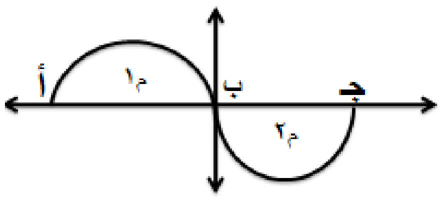
١٤ = ٦ + $\int_{ب}^{جـ}$ ومنه

$\int_{ب}^{جـ}$ = ٨ (لكن لاحظ ان $\int_{ب}^{جـ}$ تحت محور السينات)

$\boxed{\int_{ب}^{جـ} = -٨}$ لانها تحت محور السينات

تدريب :

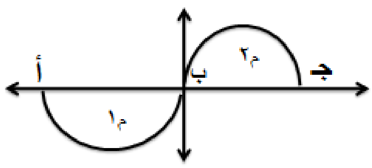
بالاعتماد على الشكل ب الذي يبيّن المنطقة المغلقة بين منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [أ ، جـ] ، فاذا علمت ان $م_١$ = ٩ وحدات و $م_٢$ = ٤ وحدات ، فما قيمة $\int_{أ}^{جـ}$ ق(س) دس.



الشكل ب

تدريب :

بالاعتماد على الشكل جـ الذي يبيّن المنطقة المغلقة بين منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [أ ، جـ] ، فاذا علمت ان $م_١$ = -٥ وحدات و $م_٢$ = ٣ وحدات ، فما قيمة المساحة خلال الفترة من [أ ، جـ] .



الشكل جـ

التفاؤل وقت الفشل ذكاء ،
والثقة في النفس وقت اليأس قوة ،
والإصرار برغم المعوقات نجاح بحد ذاته .

الوحدة الثانية

(الاحصاء والاحتمالات)

لن نقول

" تجري الرياح بما لا تشتهي به السفنُ"

بل سنقول

" تجري الرياح كما تجري سفينتنا

نحن الرياح ونحن البحر والسفنُ"

كلمات مؤثرة

kllmat

الدرس الأول : مبدأ العد .

* القاعدة العامة لمبدأ العد هو ...

(عند إجراء تجربة تتكون من (ن) خطوة ، وكان عدد إجراء الخطوة الأولى ن$_1$ والخطوة الثانية ن$_2$ والخطوة الثالثة ن$_3$ ... الخ . فإن عدد طرق إجراء العملية كاملة هو ن$_1$ × ن$_2$ × ن$_3$ ..... ن$_ن$) .

مثال : دخل أحد الأشخاص مطعم لتناول وجبة الفطور ، وهذا المطعم يقدم وجبتان من الطعام (حمص أو فول) وثلاث أنواع من المشروبات (شاي ، قهوة ، حليب) . بكم طريقة يمكن لهذا الشخص ان يختار وجبة مكونه من وجبة طعام ومشروب واحد ؟ .

الحل :

لمعرفة عدد الطرق التي يمكن ان يختار بها هذا الشخص وجبة الفطور المكونة من طعام وشراب علينا ان نحدد كم نوعا من الطعام موجود وكم نوعا من الشراب موجود .

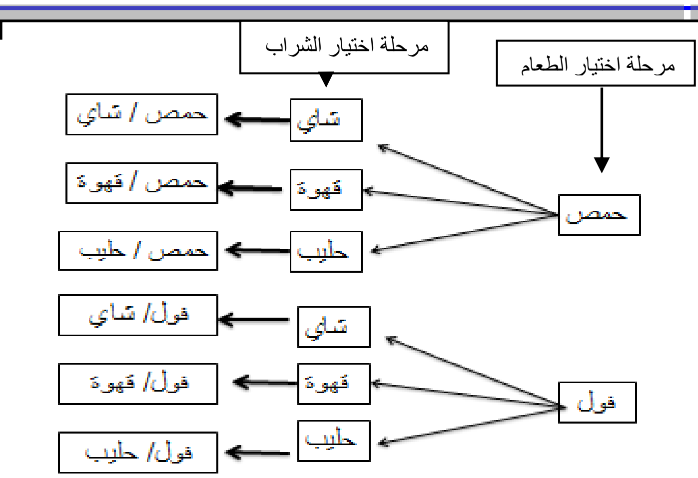
عدد طرق اختيار الطعام ... 2 .

عدد طرق اختيار الشراب ... 3 .

اذا عدد طرق اختيار الوجبة كاملة = ن$_1$ × ن$_2$

= 2 × 3 = 6 طرق

لاحظ انه يمكن تمثيل ذلك عن طريق الشجرة بالشكل التالي ..



مثال : نجحت في الثانوية العامة وأردت ان تكمل دراستك الجامعية فوجدت أمامك 8 جامعات وفي كل جامعة 5 كليات وفي كلية 3 تخصصات ترغب ان تكمل دراستك بها ، بكم طريقة يمكن لك ان تكمل دراستك الجامعية في التخصص الذي تحبه ؟.

الحل :

- عدد طرق اختيار الجامعة = 8 .
- عدد طرق اختيار الكلية = 5 .
- عدد طرق اختيار التخصص = 3 .

ومنه طرق اختيار العينة كاملة = ن$_1$ × ن$_2$ × ن$_3$

= 8 × 5 × 3 = 120 طريقة .

مثال : اذا كان لديك (1 ، 2 ، 3 ، 4) كم عدد مكون من منزلتين يمكن تكوينه من هذا الرقم .

أ- اذا سمح بتكرار الرقم .

ب-اذا لم يسمح بتكرار الرقم .

الحل :

أ- اذا سمح بتكرار الرقم (اي الرقم الذي نختاره أول مرة يمكن ان تختاره مرة اخرى) .

عدد مرات اختيار الرقم الاول × عدد طرق اختيار الرقم الثاني

$4 \times 4 = 16$ طريقة .

ب-اذا لم يسمح بتكرار الرقم (اي الرقم الذي نختاره اول مرة لا يمكن اختياره المرة الثانية) بمعنى عدد مرات الرقم الثاني تقل عن الرقم الاول بمقدار 1 وهكذا ...

عدد مرات اختيار الرقم الاول × عدد طرق اختيار الرقم الثاني

$4 \times 3 = 12$ طريقة .

مثال : بكم طريقة يمكن ان يجلس بها اربع اشخاص على اربع مقاعد مرقمة .

الحل : لاحظ انه لا يمكن ان يجلس على المقعد اثنان لذلك يكون امام الشخص الاول 5 مقاعد والرجل الثاني 4 مقاعد والثالث 3 مقاعد والرابع 2 والخامس مقعد واحد فقط .

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ طريقة .

- يطلق على العملية السابقة $5\times4\times3\times2\times1$ مضروب العدد ويكتب $5!$ ويقرأ خمسة مضروب

$ن! = (ن) \times (ن-1) \times (ن-2) .... 3 \times 2 \times 1$.

مثال : جد قيمة ما يلي :

-$(2!)$ - $(0!)$ - $(4-3)! \times 3!$

الحل :

- $(2!) = 2 \times 1 = 2$ - $(0!) = 1$

- $(4-3)! \times 3! = 1! \times 3\times2\times1 = 1 \times 6 = 6$

تدريب : جد ما يلي .

- $6! - 4! =$
- بكم طريقة يمكن جلوس 3 اشخاص على 3 مقاعد مرقمة ؟ =
- $(3 + 2)! =$
- $(6 \div 2)! =$
- $6! \div 2! =$

مثال : جد قيمة ن في كل مما يلي .

✓ ن! = 6

✓ ن! = 1

✓ 3ن! = 360

✓ 3! – ن! = 4

✓ (2ن + 1)! = 120

الحل :

❖ ن! = 6 . (نبحث عن الرقم مجموعة ارقام متتالية حاصل ضربها 6 .. وهي 3 ، 2 ، 1

3! = 3 × 2 × 1 . ومنه ن! = 3! اذا **ن = 3**

❖ ن! = 1 هنا يوجد رقمان مضروبهما 1 وهما (0 ، 1) اذا 0! = 1 ، 1! = 1

ومنه ن = (0 ، 1) .

❖ 3ن! = 360 . (بقسمة الطرفين) ن! = 120 . لمعرفة مضروب 120 على اعداد بدأ من العدد 1 نلاحظ انه في قسمة الشجرة ان الاعداد هي

1×2×3×4×5

وهذه تمثل 5!

ن! = 5!

ن = 5

120	1
120	2
60	3
20	4
5	5
1	

- ن! – 4! = 96 . 4! = 4×3 × 2 × 1 = 24

ن! – 24 = 96 . (جمع 24 من الطرفين)

ن! = 96 + 24

ن! = 120 (استخرجنا 120 على شكل مضروب بالسؤال السابق وهو 5)

ن! = 5! ومنه **ن = 5** .

- (2ن + 1) ! = 120 .

(2ن + 1)! = 5! ومنه

2ن + 1 = 5 (طرح 1 من الطرفين)

2ن = 4 ومنه **ن = 2**

تدريب : جد قيمة ن في كل من :

- (3ن)! = 720 .
- (3ن – 1) ! = 120 .
- 3 × ن! = 72 .
- (ن – 1) ! = 24 .
- ن! + 3! = 8

الدرس الثاني : التباديل و التوافيق .

- التباديل .

- عندما يتأهل لمباراة نهائية 3 أفرقة مثلا فريق الاردن ومصر وفلسطين) لتحديد المركز الاول والثاني منهم ، فان الترتيب (الاردن وفلسطين) يختلف عن الترتيب (فلسطين والاردن) لان في الاول تعني ان الاردن هي المركز الاول وفلسطين هي في المركز الثاني ويمكن حل هذا السؤال بمبدأ العد

عدد طرق اختيار المركز الاول × عدد طرق اختيار المركز الثاني

3 × 2 =6 طرق (لاحظ ان الترتيب مهم)

ويمكن حل هذا السؤال بالتباديل حيث تكتب :

ل (3 ، 2) وتقرأ تباديل 3 مأخوذه 2 في كل مرة وتحل وفق القانون التالي :

$$\text{ل}(\text{ن}\text{، }\text{ر}) = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!}$$

حيث ر تمثل عدد الحدود

وفي السؤال السابق يحل بالتباديل ...

$$\text{ل}(٣\text{، }٢) = \frac{٣!}{(٣-٢)!}$$

$$\text{ل}(٣\text{، }٢) = \frac{٣!}{١!} = ٦ \text{ طرق}$$

مثال : جد ما يلي :

ل(٩، ٣) ؛ ل(٨، ٢) ؛ ل(٩، ٠) ؛ ل(٣، ١) ؛ ل(٣، ٣)

الحل :

-1

$$\text{ل}(٩\text{، }٣) = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!}$$

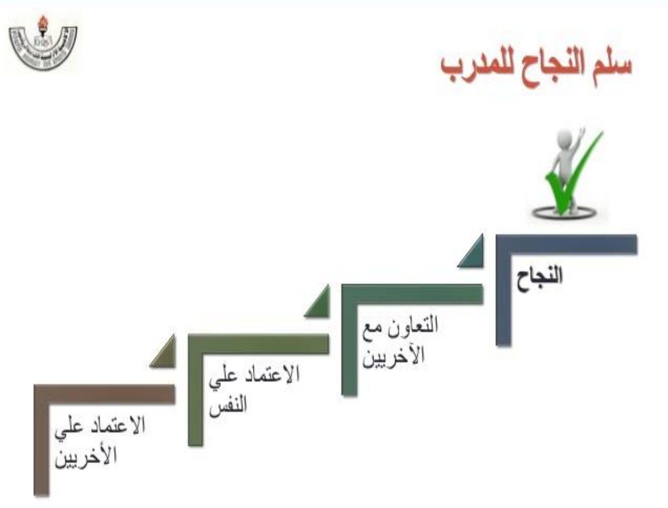
$$\text{ل}(٩\text{، }٣) = \frac{٩!}{(٩-٣)!}$$

$$\text{ل}(٩\text{، }٣) = \frac{٩!}{٦!}$$

لاحظ ان $٩! = ٩\times٨\times٧\times\underbrace{٦\times٥\times٤\times٣\times٢\times١}_{=٦!}$

$$\text{ل}(٩\text{، }٣) = \frac{٩\times٨\times٧\times\cancel{٦!}}{\cancel{٦!}}$$

$$\text{ل}(٩\text{، }٣) = ٩\times٨\times٧ = ٥٠٤$$



-2

$$\text{ل}(٨ ، ٢) = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - \text{ر})!}$$

$$\text{ل}(٨ ، ٢) = \frac{٨!}{(٨ - ٢)!}$$

$$\text{ل}(٨ ، ٢) = \frac{٨!}{٦!}$$

لاحظ ان $٨! = ٨ \times ٧ \times \underbrace{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}_{= ٦!}$

$$\text{ل}(٨ ، ٢) = \frac{٨ \times ٧ \times \cancel{٦!}}{\cancel{٦!}}$$

$$\text{ل}(٨ ، ٢) = ٨ \times ٧ = ٥٦$$

-3

$$\text{ل}(٩ ، ٠) = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - \text{ر})!}$$

$$\text{ل}(٩ ، ٠) = \frac{٩!}{(٩ - ٠)!}$$

$$\text{ل}(٩ ، ٠) = \frac{٩!}{٩!} = ١$$

قاعدة :

$$\text{ل}(\text{ن} ، ٠) = ١$$

-4

$$\text{ل}(٣ ، ١) = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - \text{ر})!}$$

$$\text{ل}(٣ ، ١) = \frac{٣!}{(٣ - ١)!}$$

$$\text{ل}(٣ ، ١) = \frac{٣ \times ٢!}{٢!} = ٣$$

قاعدة

$$\text{ل}(\text{ن} ، ١) = \text{ن}$$

-5

$$\text{ل}(٣ ، ٣) = \frac{٣!}{(٣ - ٣)!}$$

$$\text{ل}(٣ ، ١) = \frac{٣!}{(٣ - ٣)!}$$

$$\text{ل}(٣ ، ١) = \frac{٣!}{٠!} = ٣!$$

$$\text{ل}(٣ ، ١) = ٣! = ٦$$

قاعدة

$$\text{ل}(\text{ن} ، \text{ن}) = \text{ن}!$$

مثال : جد قيمة المتغير فيما يلي .

1- ل (7 ، ر) = 210 .

2- 2ل (6 ، ر) = 60 .

3- ل (ن ، 2) = 56 .

4- ل (ن ،3) = 4ل (ن ، 2) .

الحل :

١- ل (٧ ، ر) = ٢١٠ .

في هذه الحالة هناك طريقتين للحل .

الطريقة الاولى وهي ان تكتب العدد ٢١٠ على شكل حاصل ضرب اعداد متتالية اكبرها ٧ ، ويكون قيمة (ر) مساويا لعدد هذه الاعداد اي ..

٢١٠ = ٧×٦×٥ فتكون قيمة (ر) = ٣

الطريقة الثانية وهي ان تقسم العدد ٢١٠ على العدد ٧ أولا ثم تقسم الناتج على ٦ وهكذا الى ان تصل الى الناتج ١ كالتالي ..

٧	٢١٠
٦	٣٠
٥	٥
	١

فيكون العدد ٢١٠ هو حاصل ضرب الاعداد ٧ × ٦ × ٥

فتكون قيمة ر = ٣

٢- $\frac{\text{٢ل (٦ ، ر)}}{\text{٢}} = \frac{\text{٦٠}}{\text{٢}}$ (نقسم الطرفين على ٢)

ل (٦ ، ر) = ٣٠ .

نستخدم لايجاد قيمة ر أحدى الطريقتين في الفرع الاول .

٣٠ = ٦ × ٥ ومنه ر = ٢

(تأكد من الحل باستخدام طريقة القسمة)

٣- ل (ن ، ٢) = ٥٦ .

نبحث عن رقمين متتالين حاصل ضربهما ٥٦ حسب القانون ن × (ن-١)

٥٦ = ٨ × ٧ (نأخذ أكبر رقم)

ومن ن = ٨

٤- ل (ن ،٣) = ٤ل (ن ، ٢) .

تذكر ان ل (ن،ر) = ن × (ن-١) × (ن-٢) ....× ٢× ١

ل (ن ، ٣) = ن × (ن – ١) × (ن – ٢)

عدد الحدود   الحد الاول   الحد الثاني   الحد الثالث

ل (ن ، ٢) = ن × (ن – ١)

عدد الحدود   الحد الاول   الحد الثاني

ومنه ... ل (ن ،٣) = ٤ل (ن ، ٢) .

~~ن~~ × ~~(ن – ١)~~ × (ن – ٢) = ٤ × ~~ن~~ × ~~(ن – ١)~~

اختصار مع بعض   اختصار مع بعض

(ن – ٢) = ٤ **ومنه ن = ٦ وهو المطلوب .**

تدريبات :

1- ما عدد تباديل مجموعة من خمس عناصر مأخوذ ثلاث في كل مرة ؟.

2- بكم طريقة يمكن ان يجلس ثلاث اشخاص على ثلاث مقاعد مرقمة ؟.

3- 3ل (ن ،1) = 21 ، جد قيمة ن .

4- ل (6 ، ر) = 120 فما قيمة ر .

5- ل (ن ، ن) = 120 فيما قيمة ن .

6- $\frac{١}{٣}$ ل (ن ، ٣) = ل (ن ، ٢) ، فجد قيمة ن

• التوافيق .

- عند اختيار لجنة ثنائية مكونة من ثلاث افراد (احمد ، محمد ، بشار) ، فنلاحظ ان اختيار (احمد، بشار) هو نفسه الاختيار (بشار ، احمد)

- الترتيب غير مهم في التوافيق .

قانون التوافيق :

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر! \times (ن - ر)!} \quad \text{أو} \quad \frac{ل(ن ، ر)}{ر!}$$

مثال : - جد ما يلي :

$$\binom{٤}{١} ، \binom{٤}{٢} ، \binom{٦}{٢} ، \binom{٥}{٢} \times \binom{٥}{٣} ، \binom{٧}{٠} ، \binom{٨}{٨}$$

الحل :

-1

$$\binom{٤}{١} = \frac{ن!}{ر! \times (ن - ر)!}$$

$$= \frac{٤!}{١! \times (٤ - ١)!}$$

$$= \frac{٤!}{١! \times ٣!} = \frac{٤ \times ٣!}{٣!}$$

$$= ٤$$

قاعدة $\binom{ن}{١} = ن$

-2

$$\binom{٤}{٢} = \frac{ن!}{ر! \times (ن - ر)!}$$

$$= \frac{٤!}{٢! \times (٤ - ٢)!}$$

$$= \frac{٤!}{٢! \times ٢!} = \frac{٤ \times ٣ \times \cancel{٢!}}{\cancel{٢} \times ٢!}$$

$$= ٦$$

-3

$$\binom{٦}{٢} = \frac{ن!}{ر! \times (ن - ر)!}$$

$$= \frac{٦!}{٢! \times (٦ - ٢)!}$$

$$= \frac{٦!}{٢! \times ٤!} = \frac{٦ \times ٥ \times \cancel{٤!}}{٢! \times \cancel{٤!}}$$

$$= \frac{٣٠}{٢} = ١٥$$

4- $\binom{5}{3} = \frac{ن!}{ر! \times (ن - ر)!} = \frac{5!}{3! \times (5-3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!} \times 2!} = \frac{20}{2} = 10$

$\binom{5}{2} = \frac{ن!}{ر! \times (ن - ر)!} = \frac{5!}{2! \times (5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{2! \times \cancel{3!}} = \frac{20}{2} = 10$

$\boxed{\binom{5}{2} \times \binom{5}{3} = 10 \times 10 = 100}$

لاحظ أن ...

$\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$

أي أنه

$\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ر}$ أو $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن - ر}$

وسيعاد شرح ذلك في حينه

قاعدة : $\binom{ن}{ن - 1} = ن$

مثال : $\binom{9}{8} = 9$

5- $\binom{7}{0} = \frac{ن!}{ر! \times (ن - ر)!} = \frac{7!}{0! \times (7 - 0)!} = \frac{7!}{7!} = 1$

قاعدة $\binom{ن}{0} = 1$

6- $\binom{8}{8} = \frac{ن!}{ر! \times (ن - ر)!} = \frac{8!}{8! \times (8 - 8)!} = \frac{8!}{8! \times 0!} = \frac{8!}{8!} = 1$

قاعدة $\binom{ن}{ن} = 1$

تدريب .

جد ما يلي :

-1 $\binom{٩}{٧}$ ، $\binom{٩}{٢}$

(ماذا تلاحظ بعد عملية الحل)

- لاحظ ان 7 + 2 = 9 أي $ر_1 + ر_2 = ن$

وبصورة عامة : -

$\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ر}$ أو $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن - ر}$

مثال : جد قيمة س في كل من :

١- $\binom{١٢}{س} = \binom{١٢}{٥}$

الحل :

(في هذه الحالة سيكون هناك قيمتان لـ س)

القيمة الاولى : س = ٥ حسب قانون $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ر}$

القيمة الثانية: س + ٥ = ١٢

ومنه س = ٧ حسب قانون $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن - ر}$

تذكر انه في حال طلب قيمة ر في مثل هذه الاسئلة يكون لها قيمتان دائما ، وهما أما
س = ر أو س + ر = ن

٢- $\binom{ن}{٣} = \binom{ن}{٥}$

الحل :

قيمة ن = $ر_١ + ر_٢$

= ٣ + ٥

= ٨

٣- $\binom{٨}{٦} = \binom{٨}{٢س}$

الحل :

القيمة الاولى : $ر_١ = ر_٢$

٦ = ٢س ومنه $\boxed{س = ٣}$

القيمة الثانية: ن = $ر_١ + ر_٢$

٨ = ٦ + ٢س ومنه $\boxed{س = ١}$

٤- ن! = $\binom{٤}{١}$ + ل (٥ ، ٢)

= $\dfrac{٤!}{١! \times ٣!}$ + ٥ × ٤

ن! = ٤ + ٢٠

ن! = ٢٤

$\boxed{\text{ن! = ٤! ومنه ن = ٤}}$

يمكن حل التباديل مباشرة بشكل ذهني عن طريق ضرب ن × ن-١ للوصول الى (ر)
فمثلا هنا ل (٥ ، ٢) ، ن = ٤ ، ر = ٢ ، اذا تضرب ن × ن – ١ = ٥ × ٤ = ٢٠ وتكون قيمة التباديل .

تحديد أوقات الاستراحة

كل من يتعب له الحق أن يستريح بل أن الاستراحة هي واجب حتى يستطيع الطالب أن يتابع مهماته بنشاط وكفاءة وبعض الطلاب ينسون حقهم في الاستراحة فيرتكبون أحد الأخطاء التالية : -

1 – بعض الطلاب يذاكرون على حساب علاقاتهم الاجتماعية فلا أصدقاء لهم ولا زيارات اجتماعية يقومون بها وهذا قد يسبب لهم مشكلات في التكيف الاجتماعي مستقبلا

2 – بعض الطلاب يذاكرون لمدة خمس ساعات وهذا إرهاق ويمكن أن تتخذ الاستراحة أشكالا متنوعة منها : -

أ – إن تناول وجبة الطعام وهو شكل من أشكال الاستراحة من المذاكرة

ب – إن أداء الصلاة هو أيضا استراحة من المذاكرة

ج – إن الاستحمام هو أيضا استراحة من المذاكرة

د – إن الاستماع الى كل ما هو مفيد سواء من الإذاعة أو عن طريق التلفاز يعد من أشكال الاستراحة

هـ – إن ممارسة الرياضة هي أيضا استراحة من

٥- $\binom{ن}{٢}$ = ٢٨

الحل

تذكر ان $\binom{ن}{٢}$ = $\dfrac{\text{ل (ن ، ٢)}}{٢!}$ (حسب قانون التوافيق)

٢٨ = $\dfrac{\text{ل (ن ، ٢)}}{٢!}$ (ضرب تبادلي)

ل (ن ، ٢) = ٢٨ × ٢!

ل (ن ، ٢) = ٥٦ (عددين متتالين حاصل ضربهما ٥٦)

ن × (ن – ١) = ٥٦ ــــــــ ٨ × ٧ = ٥٦ ومنه ن = ٨

٦- اذا كانت ل (ن ، ر) = ٢١٠ ، وكان $\binom{ن}{ر}$ = ٣٥ فجد قيمة (ن ، ر)

الحل :

$\binom{ن}{ر}$ = $\dfrac{\text{ل (ن ، ر)}}{\text{ر!}}$ (قانون التوافيق)

من السؤال $\binom{ن}{ر}$ = ٣٥ ؛ و ل (ن ، ر) = ٢١٠ اذا ...

٣٥ = $\dfrac{٢١٠}{\text{ر!}}$ (ضرب تبادلي)

٣٥ ر! = ٢١٠ (قسمة الطرفين على ٣٥)

$\boxed{\text{ر! = ٦ ومنه ر = ٣}}$

ومنه ل (ن ، ٣) = ٢١٠ (البحث عن ٣ ارقام متتالية حاصل ضربها ٢١٠ ، ٧ × ٦ × ٥) $\boxed{\text{ومنه ن = ٧}}$

7- بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة من 3 طلاب على الاقل من بين 5 طلاب ؟.

الحل : نلاحظ في السؤال كلمة <u>على الاقل</u> . وهنا نبدأ بالزيادة لحين الوصول الى قيمة ن . أي سنجد اولا عدد الطرق الممكنة لـ

أ- لجنة ثلاثة .

ب- لجنة رباعية .

ت- لجنةخماسية .

ثم نجمع الناتج في (أ + ب + ت) لنحصل على عدد الطرق الممكنة لتكوين لجنة من 3 طلاب <u>على الاقل</u> من بين 5 طلاب .

اختيار لجنة ثلاثية + اختيار لجنة رباعية + اختيار لجنة خماسية

$$\binom{٥}{٣} + \binom{٥}{٤} + \binom{٥}{٥}$$

$$١٠ + ٥ + ١$$

عدد الطرق الممكنة لتكوين اللجة = ١٦ طريقة

أسباب عادات الدراسة الخاطئة

1- عدم معرفة طرق الدراسة الصحيحة:

لا يعرف كثير من الطلاب كيف يدرسون، كونهم لم يتعلموا مهارات الدراسة الصحيحة في المدرسة أو في المنزل من قبل، أو أنها علمت لهم لكنهم لم يستخدموها أو لا توجد لديهم الدافعية الكافية لاستخدامها، أو لأن عادات الدراسة الخاطئة قد تحكمت بهم نتيجة ممارستها من قبل.

8- مجموعة مكونة من 8 معلمين و 4 طلاب ، ما عدد الطرق الممكنة لاختيار لجنة ثلاثية بيحث تتكون من معلم واحد على الاقل ؟.

الحل :

عدد الطرق الممكنة لتكوين اللجنة ...

معلم واحد + معلمان + ٣ معلمين

$$\binom{٨}{١} \times \binom{٤}{٢} + \underbrace{\binom{٨}{٢} \times \binom{٤}{١}}_{\text{لاحظ انه دائما ر١ + ر٢ = عدد اللجنة المطلوبة}} + \binom{٨}{٣} \times \binom{٤}{١}$$

لاحظ عزيز الطالب انه عند اختيار معلم واحد يتبقى لدينا ٢ لاكمال اللجنة لذا نكملهما من الطلبة .

$$(٨ \times ٦) + (٢٨ \times ٤) + (٥٦ \times ١)$$

$$\boxed{٤٨ + ١١٢ + ٥٦ = ٢١٦ \text{ طريقة}}$$

9- مجموعة مكونة من 4 معلمين و 6 طلاب ، فاذا طلب منك اختيار مجموعة من 4 اشخاص بيحث يكون رئيس اللجنة ونائبة من المعلمين والباقي من الطلبة ، ما عدد الطرقة المتاحة لديك لتكوين هذه اللجنة ؟ .

الحل :

عدد المعلمين = 4   عدد الطلبة = 6   اللجنة = 4

- لكن السؤال حدد لك ان رئيس اللجنة ونائبة من المعلمين (لاحظ الترتيب مهم هنا) لذلك عدد طرق اختيار الرئيس والنائب يكون ل (4 ، 2) . والباقي من الطلبة اي يكون عدد طرق اختيار الباقين $\binom{٦}{٢}$

طرق اختيار الرئيس والنائب × طرق اختيار الباقي

$= ل (٤ ، ٢) \times \binom{٦}{٢}$

$= ١٢ \times ١٥$

$\boxed{= ١٨٠ \text{ طريقة}}$

تدريبات :

- مجموعة مكونة من 4 معلمين ة 7 طلاب ، ما عدد الطرق الممكنة لتكوين لجنة رباعية بحيث تتكون اللجنة من طالب معلمان على الاكثر ؟ .

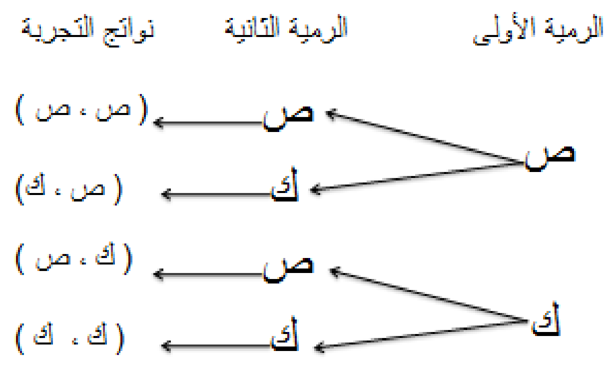
- بكم طريقة يمكن تشكيل مجلس الطلبة من 4 طلاب و 3 طالبات في احدى المدراس من بين 10 طلاب و طالبات ؟ .

- اذا كان ل (ن ، ٣) = $\binom{ن}{٤}$ فما قيمة ن

- اذا كانت ل (ن ، 3) = 9 ل (ن ، 2) فيما قيمة الثابت (ن) .

الدرس الثالث : المتغير العشوائي وتوزيع ذو الحدين

- عند رمي قطعة نقد مرتين فإن الفضاء العيني والذي يرمز له بالرمز Ω يكون ...



Ω = {(ص ،ص) (ص،ك) (ك،ص) (ك، ك) }

فمثلا لو سألتك كم مرة ظهرة صورة ؟ لقت مرة ظهرة في الرمتين ومرتان ظهرة في رمية واحدة .

احتمال الحادث = **عدد مرات ظهور الحادث / عددالفضاء العيني**

ويمكن كتابة ذلك بالجدول التالي :

س	٠	١	٢
ل (س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$

حيث س تمثل عدد مرات الظهور فمثلا عندما لم تظهر الصورة نهائياكان احتمالها $\frac{١}{٤}$ وعند ظهورها في المرتان كان احتمالها $\frac{٢}{٤}$ وعند ظهورها في رمية واحد كان الاحتمال $\frac{١}{٤}$

وهذا يسمى جدول التوزيع الاحتمال ، حيث ان مجموع ل(س) = واحد صحيح .

مثال : اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س) معطى بالجدول التالي ...

س	0	1	2	3
ل(س)	0.2	جـ	0.3	0.1

فجد قيمة (جـ) ؟ .

الحل : تذكر ان مجموع ل(س) = 1 .

0.2 + جـ + 0.3 + 0.1 = 1

0.6 + جـ = 1 ـــــــ جـ = 1 – 0.6 ومنه

جـ = 0.4

(ما عليك هنا سوى ان تطرح 10 من 6 والنتاج اجلعة جزء من عشرة) .

مثال : اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س) معطى بالجدول التالي ...

س	0	1	2	3
ل(س)	2أ	أ	3أ	4أ

جد قيمة الثابت (أ) .

الحل : Σ ل (س) = 1

2أ + أ + 3أ + 4أ = 1 ـــــــ 10أ = 1 ومنه أ=1

مثال

: اذا دل المتغير س على عدد الاطفال الإناث من بين 3 اطفال ، أكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير س .

الحل : أولا نكتب الفضاء العيني ...

Ω ={ (و و و ، و و ب ، ب ب و ، ب ب ب ، و ب و ، ب و ب ، ب و و ، و ب ب }

ثانيا نكتب قيم (س) ودائما لقيم س نبدأ من الصفر لغاية عدد مرات التجربة ، وهنا يكون قيم س هي ..

(0 ، 1 ، 2 ، 3) حيث ...

0 تعني انه لا يوجد ضمن المواليد الثلاثة انثى .

1 يعني انه يوجد طفل واحد انثى ضمن المواليد الثلاثة .

2 تعني انه يوجد طفلان انثى ضمن المو الد الثلاثة .

3 تعني ان جميع المواليد إناث .

ثانيا : تكتب جدول التوزيع الاحتمالي ...

س	٠	١	٢	٣
ل (س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

تدريب :

اذا دل المتغير العشوائي س على ظهور كتابة عند القاء قطعة نقد مرتين ، اكتب قيم س للمتغير العشوائي ثم اكتب جدول التوزيع الاحتمالي لـ س .

قانون توزيع ذو الحدين

$$\text{ل}(\text{س}=\text{ر}) = \binom{\text{ن}}{\text{ر}} \times \text{أ}^{\text{ر}} \times (\text{١} - \text{أ})^{\text{ن}-\text{ر}}$$

حيث :

ن ⟵ عدد مرات إجراء التجربة .

ر ⟵ احتمال نجاح التجربة كاملة .

أ ⟵ احتمال نجاح التجربة في مرة واحدة

مثال اذا كان س متغيرا عشوائيا ذا حدين معاملاه ن = 5 ، أ = 0.3 ، فجد كلا من ...

أ- ل (س = 2) .   ب- ل (س < 1) .

الحل : -

1- ل (س = 2) .

(لحل مثل هذه الاسئلة عليك أولا ان تحدد عدد مرات اجراء التجربة (ن) ، واحتمال نجاح التجربة (ر) ، وقيمة (1 – أ) وهنا ما عليك سوى ان تكمل للعشرة الصحيح وتجعل الناتج جزءا من عشرة ، فمثلا هنا في هذا السؤال (1 – 0.3) = نطرح 10 – 3 فيكون النتاج 7 ، ثم نجعل الناتج جزء من عشرة أي 0.7 ، و قيمـــة (أ) والتي تكون على صيغة ل (س = ...)) .

اذا من معطيات السؤال فإن ل (س = 2) =

$$= \binom{\text{ن}}{\text{ر}} (\text{أ})^{\text{ر}} (\text{١} - \text{أ})^{\text{ن}-\text{ر}}$$

$$= \binom{\text{٥}}{\text{٢}} (\text{٠.٣})^{\text{٢}} (\text{١} - \text{٠.٣})^{\text{٥}-\text{٢}}$$

$$= \frac{\text{ل}(\text{٥}،\text{٢})}{\text{٢}!} (\text{٠.٠٩})(\text{٠.٧})^{\text{٣}}$$

$$= \text{١٠} \times \text{٠.٠٩} \times \text{٠.٣٤٣} = \text{٠.٤٠٨٧}$$

2- ل (س < 1) تعني ان س = صفرا . اي المطلوب هو ل (س = 0) =

$$= \binom{\text{ن}}{\text{ر}} (\text{أ})^{\text{ر}} (\text{١} - \text{أ})^{\text{ن}-\text{ر}}$$

$$= \binom{\text{٥}}{\text{٠}} (\text{٠.٣})^{\text{٠}} (\text{١} - \text{٠.٣})^{\text{٥}-\text{٠}}$$

$$= \frac{\text{ل}(\text{٥}،\text{٠})}{\text{٠}!} (\text{٠.٣})^{\text{٠}} (\text{٠.٧})^{\text{٥}}$$

$$= (\text{٠.٧})^{\text{٥}}$$

تذكر أن $(\text{أ})^{\text{٠}} = \text{١}$

مثال : اطلق صياد 5 طلقات تجاه سربا من العصافير فاذا كان احتمال ان يصيب 0.7 ، فجد ما يلي :

1- قيم (س) ( ) .
2- اصابة الهدف 3 مرات .
3- عدم اصابة الهدف .
4- اصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر .
5- اصابة الهدف مرة واحدة على الاقل .

الحل :

نحدد (ن = 5 " مجموع الطلقات التي اطلقها الصياد")

(أ = 0.7) . (1 – أ = 1 – 0.7 = 0.3)

1- قيم س = (0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5) . تذكر ان قيم س تأخذ من الصفر لغاية ن .

2- اصابة الهدف 3 مرات . اي ل (س = 3) =

$$= \binom{\text{ن}}{\text{ر}} (\text{أ})^{\text{ر}} (١ - \text{أ})^{\text{ن} - \text{ر}}$$

$$= \binom{٥}{٣} (٠.٧)^{٣} (١ - ٠.٣)^{(٥ - ٣)}$$

$$= \frac{\text{ل}(٥ ، ٣)}{!٣} (٠.٧)^{٣} (٠.٣)^{٢}$$

$$= ٢٠ \times ٠.٣٤٣ \times ٠.٩$$

3- عدم اصابة الهدف تعني ل (س = 0) =

$$= \binom{\text{ن}}{\text{ر}} (\text{أ})^{\text{ر}} (١ - \text{أ})^{\text{ن} - \text{ر}}$$

$$= \binom{٥}{٠} (٠.٧)^{٠} (١ - ٠.٣)^{(٥ - ٠)}$$

$$= \frac{\text{ل}(٥ ، ٠)}{!٠} (٠.٧)^{٠} (٠.٣)^{٥}$$

$$= (٠.٣)^{٥} = ٠.٠٠٢٣٤$$

4- اصابة الهدف مرة واحد على الاكثر تعني انه اما يصيب مرة واحدة او لا يصيب اي س = 1 ؛ س =0

ل (س = 1) + ل (س = 0) =

$$\left\{= \binom{\text{ن}}{\text{ر}} (\text{أ})^{\text{ر}} (١ - \text{أ})^{\text{ن} - \text{ر}}\right\} + \left\{= \binom{\text{ن}}{\text{ر}} (\text{أ})^{\text{ر}} (١ - \text{أ})^{\text{ن} - \text{ر}}\right\}$$

$$\left\{= \binom{٥}{١} (٠.٧)^{١} (١ - ٠.٣)^{(٥ - ١)}\right\} + \left\{\binom{٥}{٠} (٠.٧)^{٠} (١ - ٠.٣)^{(٥ - ٠)}\right\}$$

$$\left\{= \frac{\text{ل}(٥ ، ١)}{!١} (٠.٧)^{١} (٠.٣)^{٤}\right\} + \left\{\frac{\text{ل}(٥ ، ٠)}{!٠} (٠.٧)^{٠} (٠.٣)^{٥}\right\}$$

$$\boxed{= (٠.٠٠٢٤٣) + (٥ \times ٠.٧ \times ٠.٠٠٨١)}$$

5- اصابة الهدف مرة واحدة على الاقل تعني اما يصيب الهدف مرة واحدة او مرتين او ثلاثة او اربعة او خمسة . بمعنى ...

ل(س=1)+ل(س=2)+ل(س=3)+ل(س=4)+ل(س=5)=

أو يمكن التعبير عنها بصورة اخرة حيث تلاحظ انه من ل(س=1) لغاية ل(س=5) هي قيم س كاملة باستثناء الصفر ، لذا فـ ل (س ≥ 1) = 1 – ل (س = 0)

= 1 – 0.00243

الدرس الرابع : العلامة المعيارية .

$$\text{العلامة المعيارية } (\text{ز}_{\text{س}}) = \frac{\text{العلامة الأصلية} - \text{الوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}}$$

$$\text{وبالرموز } (\text{ز}_{\text{س}}) = \frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\text{ع}}$$

مثال : اذا كان الوسط الحسابي لأحد الصفوف في مبحث الرياضيات 60 ، والانحراف المعياري 4 فما العلامة المعيارية لطالب حصل على علامة 48 ؟ .

الحل :

$$\text{ز}_{\text{س}} = \frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\text{ع}}$$

$$\text{ز}_{٤٨} = \frac{٤٨ - ٦٠}{٤}$$

$$\text{ز}_{٤٨} = \frac{٤٨ - ٦٠}{٤}$$

$$\text{ز}_{٤٨} = \frac{-١٢}{٤} = \boxed{-٣}$$

مثال : في توزيع تكراري كانت العلامة الخام 78 تقابل العلامة المعيارية 4 وكان الوسط الحسابي 60 فجد الانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟ .

الحل :

$$\text{ز}_{\text{س}} = \frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\text{ع}}$$

$$٣ = \frac{٧٨ - ٦٠}{\text{ع}} \quad \text{(ضرب تبادلي)}$$

$$٣\text{ع} = ٧٨ - ٦٠$$

$$٣\text{ع} = ١٨ \quad \text{(بقسمة الطرفين على ٣)}$$

$$\boxed{\text{ع} = ٦}$$

مثال : اذا كان الوسط الحسابي لمجموعة قيم = 80 والانحراف المعياري = 4 فجد القيمة التي تنحرف انحرافين تحت الوسط الحسابي ؟.

الحل :

بما ان الانحرافين تحت الوسط اذا تكون العلامة المعيارية -٢

ومنه ...

$$\text{ز}_{\text{س}} = \frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\text{ع}}$$

$$-٢ = \frac{\text{س} - ٨٠}{٤} \quad \text{(ضرب تبادلي)}$$

$$-٨ = \text{س} - ٨٠ \quad \text{(جمع ٨٠ للطرفين)}$$

ومنه العلامة الخام التي تنحرف تحت الوسط انحرافين = ٧٢

مثال : في امتحان رياضيات حصل طالبان على 70 و 84 على التوالي ، وكانت علامتهما المعيارية 1 ، 3 ، **فجد الوسط الحسابي والانحراف** المعياري لذلك الامتحان ؟

الحل : نلاحظ ان العلامة 70 علامتها المعيارية = 1 .

والعلامة 84 علامتها المعيارية = 3 .

ومنه ...

$$z_{70} = \frac{70 - \bar{س}}{ع}$$ (ضرب تبادلي)

وكذلك . $\boxed{ع = 70 - \bar{س}}$ (المعادلة الاولى)

$$z_{84} = \frac{84 - \bar{س}}{ع}$$ (ضرب تبادلي)

$\boxed{3ع = 84 - \bar{س}}$ (المعادلة الثانية)

بطرح المعادلة الاولى من المعادلة الثانية ...

$$ع = 70 - \bar{س}$$
$$3ع = 84 - \bar{س}$$
$$-2ع = -14$$ **بقسمة الطرفين على -2**

اذا ع = 7 . (الانحراف المعياري) .

ولايجاد قيمة الوسط الحسابي نعوض في المعادلة 1 او 2

ع = 70 – $\bar{س}$ ومنه الوسط الحسابي = 63

مثال : ثلاث طلاب علاماتهم المعيارية 1.5 ، -1 ، -2 وكان الوسط الحسابي لجميع العلامات 70 والفرق بين علامة الطالب الاول والثاني 10 فما العلامات الفعلية للطلبة الثلاثة ؟ .

الحل : معطيات السؤال :

علامة الطالب الاول(أ) المعيارية = 1.5

علامة الطالب الثاني (ب) المعيارية = -1

علامة الطالب الثالث (جـ) المعيارية = -2

الفرق بين أ وب = 10 (أ – ب = 10) .

الوسط الحسابي لجميع الطلبة = 70

نجد اولا الانحراف الميعاري (ع) من خلال (أ- ب =10)

الطريقة الأولى للحل :

$$z_{أ} = \frac{س_{أ} - \bar{س}}{ع}$$

$$1.5 = \frac{أ - 70}{ع}$$ (ضرب تبادلي)

$\boxed{1.5ع = أ - 70}$ —— م1

$$z_{ب} = \frac{س_{ب} - \bar{س}}{ع}$$

$$-1 = \frac{ب - 70}{ع}$$ (ضرب تبادلي)

$\boxed{-1ع = ب - 70}$ —— م2

(بطرح المعادلة ١ من ٢)

$$1.5ع = أ - 70$$
$$-1ع = ب - 70$$
$$2.5ع = أ - ب$$

(لكن من السؤال (أ - ب) = ١٠)

$2.5ع = 10$ (بقسمة الطرفين على 2.5)

$\boxed{ع = 4}$

بالتعويض في المعادلات لمعرفة العلامات الحقيقة للطلبة
أكمل الحل ...

الطريقة الثانية .. وهي على قانون ...

$$ع = \frac{\text{علامة الطالب الأول (أ) – علامة الطالب الثاني (ب)}}{\text{العلامة المعيارية للطالب الأول (أ) – العلامة المعيارية للطالب الثاني (ب)}}$$

$$ع = \frac{أ - ب}{ز_{أ} - ز_{ب}} = \frac{١٠}{٢.٥} = ٤$$

ومنه علامات الطلبة الثلاثة هي ...

$$\text{علامة أ} = (١.٥) = \frac{س - ٧٠}{٤} = ٧٦$$

$$\text{علامة ب} = (-١) = \frac{س - ٧٠}{٤} = ٦٦$$

$$\text{علامة جـ} = (-٢) = \frac{س - ٧٠}{٤} = ٦٢$$

تدريب : في توزيع تكراري كانت العلامة الخام 66 تقابل العلامة المعيارية 4 وكان الوسط الحسابي 54 فجد الانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟ .

تدريب : تقدم الطلبة احمد ومحمد وابراهيم لامتحان رياضيات ، فحصلوا على العلامات 90 ، 80 ، س ، وكانت علاماتهم المعيارية 3 ، 2 ، -1 ، فما هي علامة الطالب ابراهيم ؟.

الدرس الخامس : التوزيع الطبيعي .

التوزيع الطبيعي هو التوزيع الذي وسطه الحسابي = صفر وانحرافه المعياري = 1 .

قواعد عامه (يجب ان تحفظ) .

1- اذا كانت ل (ز ≥ أ) فاننا تستخرجها من الجدول مباشرة .

مثال : جد ل (ز ≥ 0.33) .

الحل : هنا نستخرج القيمة من جدول التوزيع الطبيعي مباشرة فتكون قيمة ل (ز ≥ 0.33) = 0.6293 .

2- اذا كانت ل (ز ≤ - أ) فاننا نقوم بعكس اشارة أ مع عكس اشارة المقارنة اي تصبح ل (ز ≥ أ) و هنا تكون مثل القاعدة الأولى اي نستخرجها من الجدول مباشرة .

مثال : جد ل (ز ≤ - 0.33) .

الحل : اولا نقوم بعكس اشارة (أ) وعكس اشارة المقارنة فتصبح ل (ز ≥ 0.33) " من الجدول مباشرة " فتكون ل (ز ≥ 0.33) = 0.6293 .

3- اذا كانت ل (ز ≤ أ) في هذه الحالة نستخرج القيمة من الجدول ثم نطرحها من الواحد الصحيح ، وبصيغة رياضية تكون ل (ز ≤ أ) = 1 – ل (ز ≥ أ)

مثال : جد ل (ز ≤ 2)

الحل : اولا نلاحظ ان قيمة س اكبر من او يساوي 2 اي نستخرج قيمة 2 من الجدول ثم نطرحها من الواحد صحيح كالتالي : ل (ز ≤ 2) = 1 – ل (ز ≥2)

= 1 – 0.9772

= 0.0228

طريقة طرح الواحد صحيح من الأجزاء

اولا نكمل العدد الاول من اليمن للعشرة ثم الاعداد الباقية للعدد ٩

مثال ١ – ٠.٩٧٧٢

العدد من اليمن ٢ نكمله للعدد ١٠
الاعداد المتبقية نكملها للعدد ٩

٠.٩٧٧٢
↓↓↓↓
٠.٠٢٢٨

لاحظ اننا أكملنا ٢ للعشرة فأصبحت ٨
والاعداد الباقية أكملناها للعدد ٩

4- اذا كانت ل (ز ≥ - أ) هنا نستخرج قيمة أ من الجدول ثم نطرحها من الواحد الصحيح . اي انها تكون .. ل (ز ≥ - أ) = 1 - ل (ز ≥ أ) .

مثال : جد ل (ز ≥ -0.45)

الحل : اولا نستخرج قيمة (0.45) من الجدول ، وقيمتها = 0.5160 ، ثم بعد ذلك نطرحها من الواحد الصحيح ...

1- 0.7054 = 0.2946

ل (ز ≥ -0.45) = 1 - ل (ز ≥ أ)

= 1 – 0.7054

= 0.2946

5- اذا كانت ل (- أ ≤ ز ≤ ب) حيث ب > أ دائما ، في هذه الحالة نجعل ل (ز ≤ ب) وهنا من الجدول مباشرة ، ثم ل (ز ≤ - أ) وهنا نجد قيمة أ من الجدول ثم نطرحها من الجدول ويمعنى اخر ...

ل(- أ ≤ ز ≤ ب) = ل(ز ≤ ب) – (1 – ل(ز ≤ ب)

مثال : جد ل (-0.4 ≤ ز ≤ 1.8) .

الحل : ل(-0.4 ≤ ز ≤ 1.8) =

ل (ز ≤ 1.8) ... من الجدول مباشرة = 0.9641

ل (ز ≤ -0.4) ... نستخرج قيمة 0.4 من الجدول ثم نطرحها من الواحد الصحيح (1 – 0.6554 = 0.3446)

ثم نطرح جواب ل(ز ≤ 1.8) من جواب ل(ز ≤-0.4)

ل(-0.4 ≤ ز ≤ 1.8) = ل(ز ≤ 1.8) – (1 - ل(ز ≤ 0.4)

= (0.9641) – (1 – 0.6554)

= 0.9641 - 0.3446

= 0.6195

تدريب : جد كلا من ...

1- ل (ز ≤ 0.34) .

2- ل (ز ≥ 1.32) .

3- ل (-1.2 ≤ ز ≤ 2).

4- ل (2.4 ≤ ز ≤ 3) .

مثال : اذا كان س متغير عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي 65 وانحرافه المعياري 6 ، فجد

1- ل (س ≤ 68) 2- ل (≥ 55) .

الحل :

1- ل (س ≥ 66) ... اولا نجد قيمة العلامة المعيارية لنستطيع ايجاد الاحتمال وذلك عن طريق قانون العلامة المعيارية كالتالي :

$$\text{ز}_{٦٨} = \frac{٦٨ - ٦٥}{٦} = ٠,٥$$

ومنه ل (س ≤ 68) = ل (س ≤ 0.5) من الجدول مباشرة = 0.6915 .

2- ل (ز ≥ 55) = ل

$$\left(\text{ز} \geq \frac{٥٥ - ٦٥}{٦}\right)$$

$$\left(\text{ز} \geq \frac{-١٠}{٦}\right)$$

لتحويلها الى كسر عشري استخدم القسمة الطويلة

$$\left(\text{ز} \geq -١.٦٦\right)$$

اذا ل (ز ≥ 55) = ل (ز ≥ -1.66) (من الجدول مباشرة) = 0.9515

مثال : تقدم لامتحان الرياضيات للثانوية العامة 5000 طالب وطالبة فاذا كانت نتائجهم تتخذ توزيع طبيعي وسطه الحسابي 70 وانحرافه المعياري 5 ، فاذا كانت علامة النجاح في الامتحان 60 واختير طالب عشوائيا منهم ، فجد ..

1- ان يكون الطالب من الناجحين .

2- ان يكون الطالب من الراسبين .

3- عدد الطلبة الناجحين .

الحل :

1- احتمال ان يكون الطالب المختار من الناجحين ....

لاحظ من السؤال ان علامة النجاح هي 60 ، وكل طالب حصل على 60 فأعلى فهو من الناجحين ، ومنه السؤال يكون بالصيغة التالية : جد ل (س ≥ 60) .

نجد العلامة المعيارية للعلامة 60 ...

$$\left(\text{ز}_{٦٠} \geq \frac{٦٠ - ٧٠}{٥}\right) = -٢$$

ومنه ل (س ≥ -2) " من الجدول مباشرة " = 0.9772

2- احتمال ان يبكون من الراسبين تعني ان س ≤ 60

أي ل (س ≤ -2) = 1 – 0.9772 = 0.0228

3- عدد الطلبة الناجحين ، دائما اذا طلب السؤال عدد فما عليك الا ان تأخذ أولا الاحتمال ثم تضرب الناتج بالعدد الكلي ... وهنا أخذنا احتمال الناجحين في الفرع الاول من السؤال وهو 0.9772 ... اذا

عدد الناجحين = العدد الكلي × الاحتمال

= 5000 × 0.9772 = 4886 طالب وطالبة

مثال : اذا كانت أوزان طلبة أحدى المدارس يتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي 45 وانحرافه المعياري 4 ، فاذا اختير أحد الطلبة عشوائيا فما احتمال ان يكون ممن تنحصر اوزانهم بين 43 كغم و 49 كغم ؟.

الحل ...

نلاحظ من السؤال ان الاوزان المطلوبة تنحصر بين 43 و 49 أي ان ل ($43 \leq$ س ≤ 49) ...

نجد العلامة المعيارية لـ 43 و 49 ...

$$ز_{43} \leq \frac{43 - 45}{4} = -0.5 \quad \Big| \quad ز_{49} \leq \frac{49 - 45}{4} = 1$$

$$\boxed{ل(43 \leq س \leq 49) = ل(-0.5 \leq س \leq 1)}$$

$ل(-0.5 \leq س \leq 1) = ل(س \leq 1) - ل(س \leq -0.5)$

$= ل(س \leq 1) - (1 - ل(س \leq 0.5))$

$= 0.8413 - (1 - 0.6915)$

$= 0.8413 - 0.3085 = 0.5328$

تدريب : اذا كان رواتب 10000 دينار موظف تتبع التوزيع الطبيعي وسطه الحسابي 200 دينار زانحراف معياري 10 دنانير ، اختير احد الموظفين عشوائيا فجد ..

1- عدد الموظفين الذين تقل رواتبهم عن 180 دينار .

2- عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين 190 و 220 دينار .

تدريب : اذا علمت ان علامات 1000 طالب في امتحان الرياضيات تتخذ التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 65 وانحراف معياري 10 ، فاذا اختير أحد الطلبة عشوائيا .

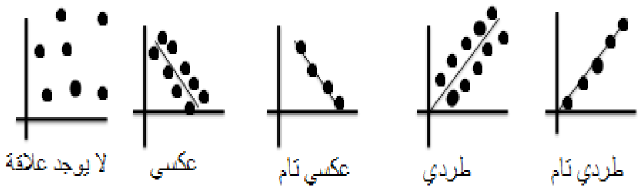
1- ان يكون الطالب ممن تزيد علامتهم عن 60 .

2- ان يكون الطالب ممن تنحصر علاماتهم بين 70 - 80

3- عدد الطلبة الناجحين اذا علمت ان علامة النجاح في هذا الامتحان 50 .

الدرس السادس : معامل الارتباط

- الارتباط هو علاقة تربط بين متغريين اما عكسية او طردية سواء كانت قوية او ضعيفة .
- اشكال الارتباط ...



تذكر ...

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع المشاهدات}}{\text{عدد المشاهدات}}$$

$$\text{معامل ارتباط بيرسون} = \frac{\sum (س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 (ص - \bar{ص})^2}}$$

حيث :

$س_ي$ ← ترمز لكل قيمة من قيم س

$ص_ي$ ← ترمز لكل قيمة من قيم ص

$\bar{س}$ ← ترمز للوسط الحسابي لقيم س

$\bar{ص}$ ← ترمز للوسط الحسابي لقيم ص

مثال : بين الجدول التالي العلاقة بين الخبرة والاجرة اليومية لاحدى الشركات ، احسب معامل ارتباط بيرسون

سنوات الخبرة	س	5	6	7	8	14
الاجرة	ص	6	7	8	9	10

الحل :

أولا : نقوم بحساب الوسط الحسابي لقيم س وقيم ص

$$\bar{س} = \frac{(٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ١٤)}{٥} = ٨$$

$$\bar{ص} = \frac{(٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠)}{٥} = ٨$$

ثانيا نكون الجدول التالي :

س	ص	$(س-\bar{س})$	$(ص-\bar{ص})$	$(س-\bar{س})(ص-\bar{ص})$	$(س-\bar{س})^2$	$(ص-\bar{ص})^2$
٥	٦	-٣	-٢	٦	٩	٤
٦	٧	-٢	-١	٢	٤	١
٧	٨	-١	٠	٠	١	٠
٨	٩	٠	١	٠	٠	١
١٤	١٠	٦	٢	١٢	٣٦	٤
المجموع		٠	٠	٢٠	٥٠	١٠

$$\text{معامل ارتباط بيرسون} = \frac{\sum (س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 (ص - \bar{ص})^2}}$$

$$= \frac{٢٠}{\sqrt{٥٠ \times ١٠}}$$

تدريب : يبين الجدول التالي علامات 5 طلاب في مبحثي الرياضيات والعلوم في امتحان قصيرة من 10 علامات ، احسب معامل ارتباط بيرسون بين س و ص .

رقم الطالب	1	2	3	4	5
الرياضيا س	2	5	3	7	9
العلوم ص	5	6	7	9	3

- اذا كان معامل الارتباط بين س ، ص يساوي (م) وعدلت المشاهدات حسب العلاقة التالية .

س* = أ س + ب ، ص* = جـ ص + د

فان معامل الارتباط في هذه الحالة إما ..

1- (م) اذا كانت اشارة أ (معامل س) واشارة (جـ) معامل ص متشابهتين .

2- (ـ م) اذا كانت اشارة أ (معامل س) واشارة (جـ) معامل ص مختلفتين .

مثال : اذا كان معامل الارتباط بين قيم س ص = 0.4 فجد س* و ص* في كل من ..

1- س* = 3 س + 2 ، ص* = 5 ص + 1 .

الحل : نلاحظ ان معامل س (3) ومعامل س (5) وهما متشابهين في الاشارة اذا معامل الارتباط الجديد هو(م) اي الارتباط القديم لكن موجب ... (0.4) .

2- س* = س - 9 ، ص* = - ص + 2

الحل : لاحظ ان معامل س = 1 ، معامل ص = -1 وهما مختلفين في الاشارة اذا معامل الارتباط = - م = - 0.4

تدريب : اذا كان معامل الارتباط بين س و ص = -0.1 فجد معامل الارتباط بين س* و ص* في كل من الحالات التالية ...

1- س* = س + ب ، ص* = -3 ص + 1

2- س* = 5 – س ، ص* = ص – 3

3- س* = - 5س - 8 ، ص* = -3 ص

الانحدار

- معادلة خط الانحدار هي ص = أس + ب

وتستخدم هذه المعادلة للتنبؤ بقيم ص اذا علمت قيم س

- عندما يطلب السؤال معادلة خط الانحدار عليك اولا ايجاد قيمة (أ) وقيمة (ب) من خلال القانون ..

$$\text{أ} = \frac{\text{مجموع (قيم س - الوسط الحسابي لـ س) (قيم ص - الوسط الحسابي لـ س)}}{\text{مجموع (قيم س - الوسط الحسابي لقيم س)}^2}$$

$$\text{وبالرموز أ} = \frac{\sum(\text{س} - \bar{\text{س}})(\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\sum(\text{س} - \bar{\text{س}})^2}$$

ب = (الوسط الحسابي لقيم ص) – أ (الوسط الحسابي لقيم س)

وبالرموز ب = ($\bar{\text{ص}}$ – أ $\bar{\text{س}}$)

مثال : يبين الجدول التالي علامات 6 طلاب في امتحان الرياضيات و عدد ساعات الدراسة اليومية ،فجد

1- معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص
2- قدّر علامة طالب درس على الامتحان 5 ساعات .
3- الخطأ بالتنبؤ لطالب درس 6 ساعات .

3	2	7	8	4	6	عدد ساعات الدراسة
2	5	8	10	8	9	العلامة

الحل : أولا نجد الوسط الحسابي لقيم س وقيم ص .

$$\bar{\text{س}} = \frac{3+2+7+8+4+6}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

$$\bar{\text{ص}} = \frac{2+5+8+10+8+9}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

تذكر ان الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

ثانيا نكون الجدول التالي :

$(\text{س} - \bar{\text{س}})^2$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})(\text{ص} - \bar{\text{ص}})$	$(\text{ص} - \bar{\text{ص}})$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})$	ص	س
1	2	2	1	9	6
1	1-	1	1-	8	4
9	9	3	3	10	8
4	2	1	2	8	7
9	6	2-	3-	5	2
4	10	5-	2-	2	3
28	28	0	0	42	30

لايجاد قيمة (أ) ...

$$أ = \frac{\sum(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum(س - \bar{س})^2} = \frac{28}{28} = 1$$

لايجاد قيمة (ب) ...

$$ب = \bar{ص} - أ\,\bar{س} = 7 - 1 \times 5 = 2$$

1- معادلة خط الانحدار (ص^) = أس + ب

ص^ = س + 2

2- تقدير علامة الطالب الذي يدرس 5 ساعات ، هنا فقط نعوض (5) في معادلة خط الانحدار ...

ص^ لطالب يدرس 5 ساعات = س + 2

= 5 + 2 = 7 .

3- الخطأ بالتنبؤ لطالب درس 6 ساعات . أولا نجد كم العلامة التي سيتم التنبؤ بها ...

ص^ = س + 2 = 6 + 2 = 8

اذا العلامة المقدرة لطالب درس 6 ساعات هو 8 .

الخطأ بالتنبؤ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ بها

= 9 - 8

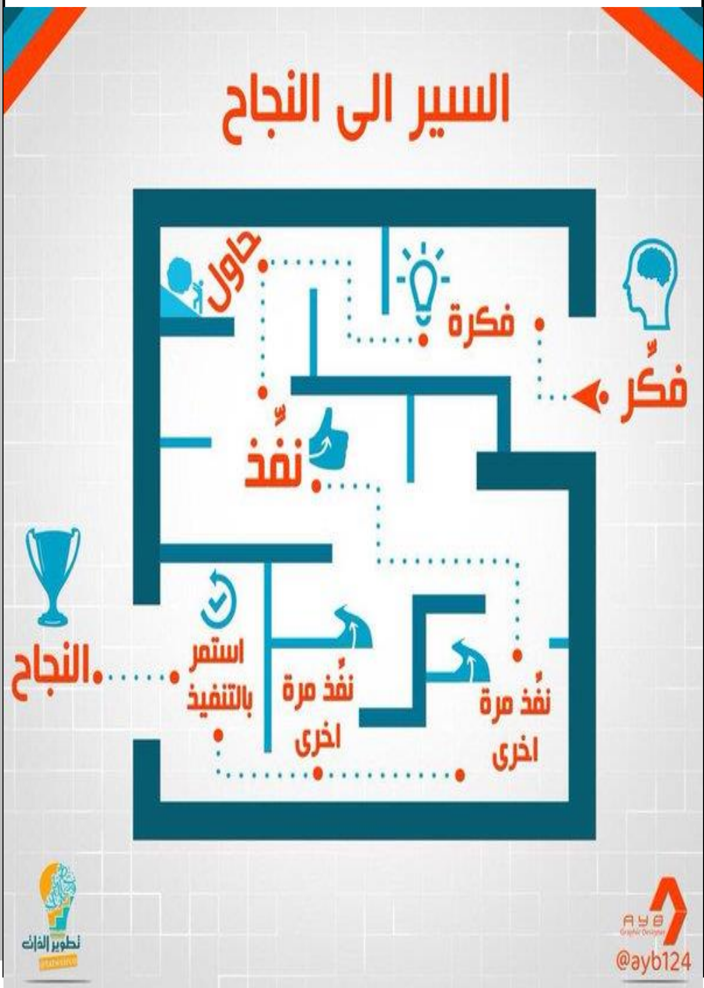
= 1

الخطأ بالتنبؤ = 1 .

تدريب : يبين الجدول التالي عدد الساعات اليومية التي يدرسها 5 طلاب على امتحان الرياضيات ، حيث س عدد الساعات التي يدرسها الطالب وص العلامة الحقيقية التي حصل عليها ، جد ..

1- معادلة خط الانحدار .
2- العلامة المتنبأ بها لطالب درس 6 ساعات .
3- الخطأ بالتنبؤ لطالب درس 7 ساعات .

عدد ساعات الدراسة	3	4	7	5	1
العلامة	14	16	20	11	9




ربّاه
مُنّ علينا
بحسن الخِتام
وطيبِ الأثر


اللهم صلِ وسلم وبارك على نبينا محمد

و فى النهاية أطلب دعواتكم الصالحة لى و لوالدى
لكم تحياتى و بالتوفيق للجميع إن شاء الله

الأستاذ بشار ابو العماش

0772887066