



# مهارات في الرياضيات

توجيهي الفرع العلمي - الفصل الدراسي الأول



الوحدة الثالثة الجزء الأول :

## تطبيقات التفاضل

التفسير الفيزيائي

و

التفسير الهندسي



اعداد المعلم :

# أياد جاد الله



مكتبة الوسام

ALWESAM tawjih Center & service store

موقع مكتبة الوسام التعليمي [www.alwesam.info](http://www.alwesam.info)



## وتطبيقات فيزيائية

إذا تحرك جسم حسب لعلاقة  $v(t)$  حيث  $v$  (م/ث) والمسافة  $s$  (م) الزمن  $t$  (ث) فإن:

السرعة اللحظية  $v$  (م/ث) هي مشتقة المسافة بالنسبة للزمن أي  $\frac{ds}{dt}$

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ أو } s = \int v dt$$

التسارع  $a$  اللحظي  $a$  (م/ث<sup>2</sup>) هو مشتقة السرعة بالنسبة للزمن، أي  $\frac{dv}{dt}$

$$a = \frac{dv}{dt} \text{ أو } v = \int a dt$$

## كلمات دالة : -

① عند أقصى ارتفاع

عند انعدام السرعة  $v = 0$

عند توقف الجسم

عندما يتغير اتجاه الحركة

② عند انعدام التسارع  $a = 0$  السرعة ثابتة

③ بداية الحركة

السرعة الابتدائية  $v_0$  لحظة قذف الجسم

④ السرعة المتوسطة

$$v_{\text{متوسطة}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

## أسئلة :

١. تحرك جسم حسب لعلاقة

$$v(t) = 3t^2 - 2t + 10 \text{ حيث}$$

$v$  (المسافة بالمتري)،  $t$  (الزمن بالثانية)

جد ١. سرعه المتوسطه على [٢، ٤].

٢. السرعه اللحظيه بعد ٣ ثواني.

الحل : ①  $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 2t + 10$

$$s = \int (3t^2 - 2t + 10) dt = t^3 - t^2 + 10t + C$$

②  $v = 3t^2 - 2t + 10$

$$v(3) = 3(3)^2 - 2(3) + 10 = 27 - 6 + 10 = 31$$

٣. تحرك جسم على أفق مستقيم حسب

$v(t) = 3t^2$ ، وكانت سرعة المتوسطه

على [٢، ٤] ثلاث أمثال السرعه اللحظيه

بعد ٢ ث. جد  $P$ .

الحل :  $v = 3t^2$

$$v(4) - v(2) = 3(4^2) - 3(2^2) = 36 - 12 = 24$$

$$v(2) = 3(2^2) = 12$$

$$24 = 12P$$

$$P = \frac{24}{12} = 2$$



$n = 0, n = 1$

∴

ع (1)  $= 18 - 1 \times 6 = 12$  م/ث

ع (5)  $= 18 - 5 \times 6 = 12$  م/ث

5. تحرك جسم على خط مستقيم حسب

ع (ن)  $= \sqrt{18 + 2n}$  جـ إضافة المقطوعه عند ما تصبح بسرعة 1 م/ث

الحل: ع (ن)  $= \frac{2n}{\sqrt{18 + 2n}}$

المطلوب الزمن  $\left\{ \begin{array}{l} 1 = ع \\ 1 = \frac{2n}{\sqrt{18 + 2n}} \end{array} \right.$

$18 + 2n = 1$

$18 + 2n = 1$

$2n = 1 - 18 = -17$

∴ ع (3)  $= \sqrt{36} = 6$  م/ث

6. تحرك جسم حسب علاقة

ع (ن)  $= 3 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$

ن  $\in [0, 3]$  جـ سرعة الجسم عند ما تكون سرعته (3) م/ث

الحل: ع (ن)  $= \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 + 3$

$\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 + 3 = 3$

المطلوب  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ع} = \text{صفر} \\ 18 - 6n = 18 \end{array} \right.$

$18 - 6n = 18$

$0 = 18 - 6n$

3. يتحرك جسم على خط مستقيم بسرعة

ابتدائية كم/ث حسب العلاقة:

ع (ن)  $= 2n^2 + 2n$  جـ 2 م/ث ثواني

احسب المسافة المقطوعة بعد 3 ثواني

من الحركة علماً انه يسارع 8 م/ث<sup>2</sup>

الحل: ع (ن)  $= 2n^2 + 2n$

ع (ن)  $= 2n^2 + 2n$

جـ 2 م/ث

$2 = 2n^2 + 2n$

ع (1)  $= 2(1)^2 + 2(1) = 4$  م/ث

∴ ع (3)  $= 2(3)^2 + 2(3) = 24$  م/ث

ع (3)  $= 2(3)^2 + 2(3) = 24$  م/ث

4. تحرك جسم حسب علاقة

ع (ن)  $= 2n^2 - 9n + 5$  م/ث

4. جـ سرعة الجسم لحظة انعدام تسارعه

ن. جـ تسارع الجسم لحظة انعدام سرعته

الحل: ع (ن)  $= 2n^2 - 9n + 5$

ع (ن)  $= 2n^2 - 9n + 5$

المطلوب  $\left\{ \begin{array}{l} \text{جـ التسارع} \\ \text{ع} = 0 \end{array} \right.$

$0 = 2n^2 - 9n + 5$

$n = 3$

ع (3)  $= 2(3)^2 - 9(3) + 5 = 10$  م/ث

ب. المطلوب  $\left\{ \begin{array}{l} \text{جـ التسارع} \\ \text{ع} = \text{صفر} \end{array} \right.$

$18 - 6n = 18$

$18 - 6n = 18$

$0 = 18 - 6n$

$0 = 18 - 6n$



### انتبه

ف، ع، ن اقتراانك

فأ = ع ، ع = ن

ف = ع ، ع = ن

٩. تحرك جسم حسب العلاقة

ع = ٢٧ - ٣ ن ، ف < ٠

إذا كان المسار ٨ م / ث ، ج ٢

الحل: ننته

ع × ٢ = ٨

ع = ٤

ع = ٤ ، ف = ٤ - ٤ = ٠

١٠. ع = ٦ ن تحرك جسم حسب

هذه العلاقة . ج المسار للجسم

الحل: ع = ٦ ن ننته

ع = ٦ ن

ع = ٦ ن

ع = ٦ ن

\* ٧. تحرك نقطة مادية على خط

متعقّب حسب العلاقة

ف (ن) = ٢٧ - ٣ ن . ابدأ من

هذه النقطة تبدأ العودة للنقطة للانطلاق

بعد ٩ ثواني . ثم ج سرعة تلك النقطة

الحل: ف (ن) = ٢٧ - ٣ ن

ع (ن) = ٢٧ - ٣ ن

عندما يبدأ العودة للنقطة للانطلاق

← السرعة = صفر

٢٧ - ٣ ن = ٠ → ٣ ن = ٢٧ → ن = ٩

ن = ٩

لحساب السرعة ←  $\frac{27 - 3 \times 9}{2} = \frac{27 - 27}{2} = \frac{0}{2} = 0$

∴ بعد ٩ ثواني تصبح السرعة سالبة

أي يبدأ الجسم العودة للنقطة للانطلاق

\* ملاحظة: عند تغيير الإشارة

السرعة من موجب إلى سالب أو من

سالب إلى موجب هذا يعني أن الجسم

يغير اتجاه حركته .

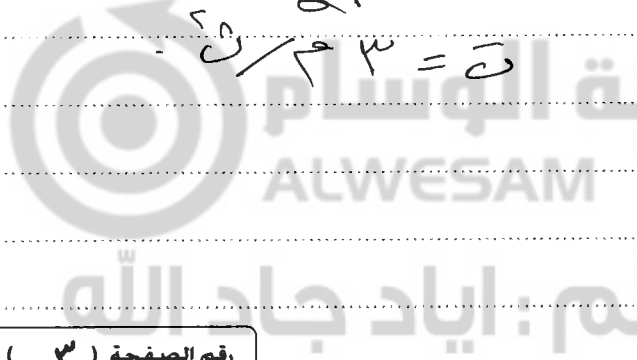
٨. تحرك جسم حسب العلاقة

ف (ن) = ١ (٢ + ن) - ٤ ن

ج المسار للجسم عند فائق سرعة

٨٩ م / ث

الجواب ٨٩ م / ث



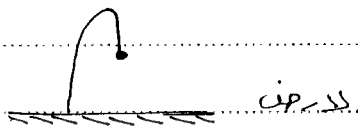




## الجزء (٢) من الدرس : قذف جسم لاعبا ولا سفل و سقوط ...

حين أنه عنز بسير اللامان  
قذف لاعبا ، قذف لاسفل ، سقط  
\* ملاحظات هامة \* أثناء المسئلة

١٤. قذف جسم رأسيا للاعلى من نقطة على جدار لارتفاعه  $n$  يكون ارتفاعه عن جدار لارتفاع الأمتار بعد  $n$  ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة  $f(n) = 3n - 5n^2$
١. السرعة الابتدائية للجسم
٢. أقصى ارتفاع ويصله الجسم
٣. اللحظة التي عندها سرعة الجسم  $0$  م/ث
٤. الزمن اللازم حتى يعود الجسم للأرض.
٥. سرعة الجسم لحظة وصوله للأرض
٦. مجموعة قيم  $n$  التي عندها السرعة سالبة.



الحل : ع (ن) =  $3n - 5n^2$  ان

ع (ن) =  $3n - 5n^2$

١. ع (٠) =  $3 \times 0 - 5 \times 0^2 = 0$

٢. المطبون { الزمن ع =  $3n - 5n^2 = 0$

ف (٣) =  $3 \times 3 - 5 \times 3^2 = 9 - 45 = -36$

=  $45 - 9$

١١. ع =  $3n + 1$  يتحرك جسم  
مترية حسب العلاقة . حد يسارع .  
الجواب :  $3$  م/ث<sup>٢</sup>

١٢. يتحرك جسم حسب العلاقة  
ع =  $1 - 3n^2$  ، يسير  $n$  يسارع  
-  $3$  في لحظة الكونه الكثر .

الحل : ع =  $1 - 3n^2$

ع =  $1 - 3n^2$

يبدأ (ف) من  $1$  ميل عننا ع =  $1 - 3n^2$

∴  $1 - 3n^2 = 0$  ∴  $1 = 3n^2$

ع =  $1 \times \frac{3}{3} = \frac{3}{3}$

١٣. يتحرك جسم على خط مستقيم  
مترية حيث  $n$  سرعته ع تعطى  
بالعلاقة ع (ن) =  $3n$  حيث  
ف (ن) =  $3n^2$  ان  $n$  الزمن بالتواني  
اهبط يسارع الجسم عندها  $n = 3$   
علا انه سرعته عندئذ  $\frac{1}{8}$  م/ث

الجواب  $\frac{1}{8}$  م/ث

١٤. يتحرك جسم على خط مستقيم  
حسب العلاقة

ف (ن) =  $3n^3 + 2n^2 + 3$  اثبت

١. الجسم يتوقف مرة واحدة دونه

٢. ان يغير اتجاه حركته .



$$\therefore (3-n)(1-n) = 0$$

$$\boxed{n=3} \quad \boxed{n=1}$$

$$ع(3) = 2 \times 22 - 64 = 20$$

$$ع(1) = 1 \times 22 - 64 = 32$$

لكل سرعة الاستجابة ع(ن) =  $22n - 64$

$$64 =$$

لاحظ أن السرعة عند ارتفاع ٤٨ قدم

هي ٣٢ (الصعود) أو (٣٢-) (الهبوط)

وهي نصف ع(١) (السرعة الاستجابة)

١٦. قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح

الارض حسب فن(ن) =  $16n - 5n^2$

وكان أقصى ارتفاع وصله الجسم ٨٠ متر.

جد ثابتة P.

الحل: تلمة أقصى ارتفاع (معلومة)

فن(ن) =  $16n - 5n^2$  ، ع(ن) = صفر

$$0 = 16n - 5n^2 \quad , \quad 80 = 16n - 5n^2$$

$$\boxed{16n = 5n^2} \rightarrow$$

$$80 = 16n - 5n^2 \rightarrow 80 = 16n - 5n^2$$

$$16 = 5n$$

$$n = 3.2$$

$$\therefore 16 \times 3.2 = P$$

$$\boxed{P = 51.2}$$

٣. المظليون ن؟ عندما ع = ١٠ (الجسم)

$$10 = 10 - 3n$$

$$\boxed{n=0} \leftarrow 10 = 10 - 3n$$

٤. المظليون ن؟ عندما يعود الجسم للارض

فن = صفر الجسم للارض = صفر

$$0 = 10 - 3n$$

$$n = (10 - 3) = 7$$

$$\boxed{n=7} \quad \boxed{n=صفر}$$

عند بداية حركته عند الرجوع للارض

$$ع(7) = 10 - 3 \times 7 = -11 \text{ م/ث}$$

لا يمكن الجسم في حالة هبوط السرعة صفر

٦. افحص المسألة - السرعة ع(ن) خط

الأعداد ع =

$$3 - 10 = n \rightarrow n = 7$$

$$10 - 3n = 0 \rightarrow n = 3.33$$

$$n \in [3.33, 7]$$

٥. قذف جسم رأسياً لأعلى من نقطة على

سطح الارض ، فإذا كان بعده عن نقطة

القذف بعد ن ثانية هو فن(ن) =  $16n - 5n^2$

بيد أن الجسم بعد نصف سرعته الاستجابة

مع ارتفاع ٤٨ قدماً.

$$\text{الحل: ع(ن) = } 16n - 5n^2 = 48$$

عند ارتفاع ٤٨ قدم

$$48 = 16n - 5n^2$$

$$48 = 16n - 5n^2$$

$$\therefore 48 + 5n^2 - 16n = 0$$

$$\therefore n^2 - 4n + 9.6 = 0$$



\* ١٧. قذف جسم رأسياً لأعلى من نقطة على ارتفاع ١٠٠ متر من سطح الأرض وفيه العلاقة  $f(n) = ٤n - ١٠$  حيث  $n$  : زمن ثواني ،  $f$  : مسافة أمتار.

جد ١. اوقته ارتفاع وصوله الجسم عن الأرض .

٢. سرعة الجسم لحظة وصوله الأرض .

٣. سرعة الجسم وهو على ارتفاع ١٣٥ متر عن الأرض .

٤. الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يعود لنقطة إقذفه .

الحل :  $f(n) = ٤n - ١٠$  ،  $f = ١٣٥$  مسافة من نقطة الإقذف

$f(n) = ٤n - ١٠ = ١٣٥$  من الأرض

ع  $(n) = ٤n - ١٠$

ن  $(n) = ١٣٥ + ١٠$

ع (١)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الصعود

ع (٧)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١٠)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١٠)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١٠)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١٠)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١٠)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١٠)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١٠)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١٠)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١٠)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١٠)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١٠)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١٠)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١٠)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (٢) . المثلثات الزرع

ع (٢)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (٢)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (٢)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (٢)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (٢)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (٢)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (٢)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (٢)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (٢)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١) . المثلثات الزمن

ع (١)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

ع (١)  $= ٤ \times ١٠ - ١٠ = ٣٠$  م/ث عند الهبوط

بداية الحركة  
الارتفاع  
السرعة  
العمارة  
الزمن  
الارتفاع  
السرعة  
العمارة  
رقم الصفحة ( ٦ )



١٩. ليترك جسم على ارتفاع مستقيم بحيث  $n$  تمر به. عنه نقطة لأهل بالامتداد حسب العلاقة  $f(n) = 2n$ . جد سرعة الجسم لحظة انقضاء الساعة لأول مرة بعد الحرة.

الجواب ام / ن

٢٠. أقط جسم من ارتفاع ٢٠ متر عن سطح الأرض بحيث أنه يسافر إلى يقطرها  $f = 5n$ . جد سرعة الجسم عندما يصب على ارتفاع ٢٠ متر عن سطح الأرض؟  
الحل: المسافة المقطوعة = ٨٠ متر (نعمت عليها)  
 $g = 10$  ان لله  $f = 5n = 80$

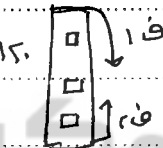


$n = 8$

$g = 8 \times 10 = 80$

٢١. أقط جسم من ارتفاع ٢٠ متر عموداً "مرا" حسب العلاقة  $f(n) = 5n$  ونفسه لوقت قد ف من سطح الأرض للأعلى حسب العلاقة  $f(n) = 6n - 5n$ . جد سرعة ظل من الجسم عندما يتجه لها نفسه للارتفاع عن الأرض؟

الحل: عند ما يتقيان  
 $f_1 + f_2 = 20$   
 $5n - 6n + 5n = 20$   
 $n = 2$



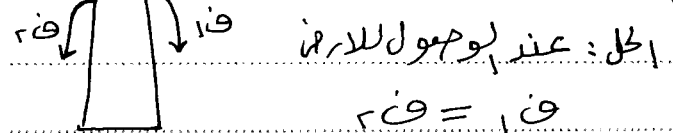
$g_1(n) = 10 = 2 \times 10 = 20$  م / ث  
 $g_2(n) = 2 \times 10 - 6 = 10 - 6 = 4$

٢٢. قذف جسم رأسياً لأعلى تمرين حسب العلاقة  $f(n) = 2n - 5n$ . من سطح بناء ارتفاعها ٧٠ متر. ما سرعة الجسم وهو على ارتفاع ٥٠ متر عن الأرض؟  
الجواب : - ٣٠

ب. قوط جسم من ارتفاع ٢٠ متر حسب  $f(n) = 5n$  ، جد :

١. سرعة الجسم لحظة وصوله للأرض. (٢٠)
٢. سرعة الجسم عندما يتجه ارتفاعه ١٥ م عن سطح الأرض. (٢١)

٢٣. قوط جسم من يكون من سطح لبنانية حسب  $f(n) = 16n$  ، ونفسه لحظة قذف جسم آخر عمودياً للأسفل بسرعة ابتدائية (٢٠ قدم / ث) ، حسب  $f(n) = 16n + 20$ . ارتفاع الجسم لأول بعد  $\frac{1}{2}$  من ارتفاع نظام الجسم الثاني بالأرض. جد ارتفاع لبنانية وسرعة الجسم الأول؟



الحل: عند لوصول للأرض  $f_1 = f_2$

مع احترام اختلاف الزمن الزمن الأقل هو (ن) للجسم الثاني  
∴ الزمن الذي احتاجه الجسم لأول =  $n + \frac{1}{2}$   
 $f_1(n) = f_2(n + \frac{1}{2})$   
 $16n = 16(n + \frac{1}{2}) + 20$   
 $16n = 16n + 8 + 20$   
 $16n = 16n + 28$   
 $n = 1$





$$ع (٣) = ٣٢ = ٣ \times ٣٢ = ٣ \times ٤٨ \text{ م/ن}.$$

٢٦. من قمة برج ارتفاعه ٤٨ قدم  
قذف جسم للأعلى من ف (ن) = ١٦ + ٣٢

ونفسه لحظة قذف جسم آخر من الأرض

٢٤. قذف جسم من أعلى  
مكون لعمارة للأعلى من ف (ن) = ١٦ + ٣٢

جد ع (السرعة الابتدائية) عند ما يساوي  
أقصى ارتفاع للجسم عن سطح الأرض؟

حل: نركز على كلمة أقصى ارتفاع

الجسم لأول ف (ن) = ١٦ + ٣٢ + ٤٨

ع = ١ = ٣٢ + ٣٢

عند أقصى ارتفاع

ف (ن) = ٤٨ + ٣٢ + ١٦ = ٩٦

ع = ٣٢ + ٣٢ = ٦٤

ف (ن) = ٩٦ = ١٨ × ٢ + ١ × ١٦

عند أقصى ارتفاع للجسم

ع = ٦٤

ع = ٣٢ + ٣٢ = ٦٤

عند أقصى ارتفاع

ع = ٦٤ = ١٦ + ٣٢ + ١٦

ع = ٣٢ + ٣٢ = ٦٤

ع = ٦٤ = ١٦ + ٣٢ + ١٦

ع = ٦٤ = ١٦ + ٣٢ + ١٦

ع = ٦٤ = ١٦ + ٣٢ + ١٦

ع = ٦٤ = ١٦ + ٣٢ + ١٦

ع = ٦٤ = ١٦ + ٣٢ + ١٦

ع = ٦٤ = ١٦ + ٣٢ + ١٦

ع = ٦٤ = ١٦ + ٣٢ + ١٦

$$ع (١) = ٣٢ + ٢٠ = ٥٢ \text{ م/ن}.$$

ف (١) = ٢٦ ، ف (١١) = ٢٦ لازم نفس  
الجواب

٢٤. قذف جسم من أعلى  
مكون لعمارة للأعلى من ف (ن) = ١٦ + ٣٢

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

ع = ١٦ + ٣٢ = ٤٨



٢٧. قذف جسم رأسياً لأعلى من نقطة تبعد ٥٥ مترًا تحت سطح الأرض حسب العلاقة  $f(n) = 5n - 5n^2$  . حدد

- أقصى ارتفاع يصله الجسم من سطح الأرض .
- سرعة الجسم على ارتفاع ٢٠ متر عن سطح الأرض أثناء صعوده .

ع (٣) =  $2 \times 10 - 5 = 15$  (متر)  $x$   
 ع (٥) =  $5 \times 10 - 5 = 45$  (متر)  $x$

استنتاج عددي ②

عند قذف جسم رأسياً لأعلى من نقطة فوق الأرض ←  
 $f(n) = f(n) + (المسافة التي يقطعها الجسم)$

٢٨. قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح الأرض بحاله ارتفاعاً ٥٥ متر حسب العلاقة  $f(n) = 5n - 5n^2$  . بنفس النقطة  $f(n) = 5n - 5n^2$  (المسافة التي يقطعها الجسم) قذف جسم رأسياً لأعلى من قاع بئر عمق ٦٥ متر حسب العلاقة  $f(n) = 5n - 5n^2$  . حدد

- سرعة الجسم اللاول عندما يصل إلى الأرض .
- سرعة الجسم الثاني عندما يصل إلى الأرض .
- سرعة الجسم الثالث عندما يتوقف تماماً نفسه .

الارتفاع عن الأرض ؟

الحل : استنتاج ①

$x$  إذا قذف الجسم من نقطة تحت الأرض (لأعلى)  $f(n) = 5n - 5n^2$  (قذف)  $f(n) = 5n - 5n^2$  (قذف)  $f(n) = 5n - 5n^2$  (قذف)

ع (٣) =  $5n - 5n^2 = 50 - 5n^2$   
 ع (٥) =  $5n - 5n^2 = 10 - 5n^2$   
 ع (٧) =  $5n - 5n^2 = 10 - 5n^2$

① المطلوبون { الزمن  
 أقصى ارتفاع  
 $f(n) = 5n - 5n^2 = 50 - 5n^2$   
 $0 = 5n - 5n^2$   
 $0 = 5n(1 - n)$   
 $n = 1$  أو  $n = 0$   
 $f(1) = 5(1) - 5(1)^2 = 5 - 5 = 0$   
 $f(0) = 5(0) - 5(0)^2 = 0 - 0 = 0$

② المطلوبون { الزمن  
 $f(n) = 5n - 5n^2 = 10 - 5n^2$   
 $0 = 5n - 5n^2$   
 $0 = 5n(1 - n)$   
 $n = 1$  أو  $n = 0$   
 $f(1) = 5(1) - 5(1)^2 = 5 - 5 = 0$   
 $f(0) = 5(0) - 5(0)^2 = 0 - 0 = 0$

الجواب : ① . - ٦٠ م / ن

⑤ . ٦٠ م / ن

- ٦٠ م / ن

⑥ . ١٤ م / ن = ١٤

ع = ١٠ م / ن = ١٠



## ورقة عمل " ١ " :-

## التفسيـر الفيزيائي

١. قذف جسم رأسياً للأعلى من سطح  
برج ارتفاعه ١٣٥ متر عن سطح

الارضين حسب العلاقة  
في (ن) =  $P = n - 5n^2$  ،  $P < 0$  ، و  
كانت سرعته لحظة وصوله الارضين

- ٦٠ م / ث . حدد

١. الثانية  $P$  (٣٠)

٢. سرعة الجسم لحظة وصوله مستوى

الارض  $P$  (٣٠-)

٢. يتحرك جسم على خط مستقيم حسب

العلاقة في (ن) =  $(n) = 2n^3 - 17n^2 + 44n + 10$

جاءت سرعة الجسم وكما رسمه عندما

في (ن) = ٤٦ متر " .

$$\frac{40}{1.0} = \frac{40}{1.0}$$

٣.  $P = 5$  في علاقة حركة جسم .

اثبت انه يتسارع  $\frac{P}{2}$

٤. سقط جسم من ارتفاع ٢٠٠ متر

عن سطح الارضين حسب العلاقة

في (ن) =  $5n^2$  . حدد سرعة الجسم

عندما يكون على ارتفاع ٢٠ متر

عن الارضين .

(٤٠) م / ث

٥. قذف جسم رأسياً للأعلى حسب

في (ن) =  $5n - n^2$  . اذا اعلنت انه

اعتقد ارتفاع وصل له الجسم ٢٠ متر .

حدد  $n$  (٣٠)

٦. يتحرك جسم حسب العلاقة

في (ن) =  $9n - 7n^2 + n^3 + 1$  . حدد

تسارع الجسم عندما تكون سرعته  $10$  م / ث .

(١٠) (١٠)

٧. يتحرك جسم حسب في (ن) =  $5n^2 + 5n$  وكان

ن = ٣٠ [٣٢٠] حدد التسارع عندما يكون

السرعة  $10$  م / ث .

(٣٧) (٣٧)

٨. يتحرك جسم حسب في (ن) =  $2n^2 - 2n$

حدد التسارع بعد ثانياً عندما  $n = 1$  السرعة عند

$n = 6$  تكون  $33$  م / ث .

(٣١) م / ث

٩. يتحرك جسم حسب في (ن) =  $6n^2 - \frac{2}{3}n^3$

حدد  $n$  . سرعة الجسم بعد ثواني (٢٥)

١٠. تسارع الجسم عندما نغادر سرعته (١٣) (١٣)

١. يتحرك جسم على خط مستقيم فيقطع

مسافة في وقتاً في زمن قدره (ن)

ثانيه حين في (ن) =  $5n^2 - n^3 + 2n - 63$

حدد مجموعة قيم ن التي تكون فيها

السرعة موجبة

الجران (٧٦٣)



## التطبيقات الهندسية

ندرس هذا الموضوع من عدة جوانب :-

شرح عام للموضوع :-

١. اذا كان  $ص = عد (س)$  وكانت

$(س١، س٢)$  نقطة واقعه عليه حيث

عد  $(س١)$  موجودة ، فإنه يمكن رسم مماس

وحيد عند تلك النقطة .

٢. زاوية الجيل : هي الزاوية التي يصنعها

المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

منز  $\geq$  زاوية الجيل  $> ١٨٠^\circ$

٣. المماس : هو المستقيم الذي يقطع

منحن عد  $(س)$  عند النقطة  $(س١، س٢)$

بشرط  $\text{ظاها} = عد (س١)$  ويسمى

ميل المماس  $\llcorner$

ميل المماس =  $\text{ظاها} = عد (س١)$

٤. معادلة المماس

$$ص - س٢ = م (س - س١)$$

٥. معادلة العمودي على المماس

$$ص - س٢ = م \frac{س - س١}{-١}$$

٦. ميل المماس  $\times$  ميل العمودي = -١

يمكن حساب ميل المماس  
بر ٤ طرق :-

١. ميل المماس = عد  $(س١)$

مشتق معناه

٢. ميل المماس =  $\frac{ص - س٢}{س - س١}$

$$\frac{ص - س٢}{س - س١}$$

حيث  $(س١، س٢)$   $(س٣، س٤)$

نقطتان يمر بهما المستقيم .

٣. ميل المماس =  $\text{ظاها}$

حيث  $ه$  : زاوية الجيل .

٤. معادلة المستقيم  $ص - س٢ = م (س - س١) + س٢$

ميل المستقيم = معامل  $س$

**تظير ... تظير ... تظير :-**

١. نقطة المماس  $(س١، س٢)$  تحقق

شأن معادلات :

المماس ، العمودي على المماس ،

المحني .

٢. نقطة تقاطع المماس والعمودي

على المماس هي دائما نقطة

المماس .





# كيف نعرف أن النقطة هي نقطة تماس أو نقطة خمبية (خارجية)

الجواب :

نقطة التماس تكون دائما معاودة الخفى ، وتكون ملتصق في نفس السوال حد معاودة التماس عند النقطة أو عندنا .

\* لنفقه الخارجية (خمينية)

لا تقوى الخفى .

٢ . جد معاودة العمودي على الخفى عند  $s = 1$  ،  $s = 3$  ،  $s = \frac{\pi}{6}$  .

الحل : العمودي على الخفى يعني العمودي على التماس الخفى هذا لاقتان .

عند  $s = \frac{\pi}{6}$  فان  $s = 1$  ،  $s = 3$  ،  $s = \frac{\pi}{6}$  .

$$0 = \frac{\pi}{6} + 3 + \frac{\pi}{6}$$

∴  $(\frac{\pi}{6}, 0)$  نقطة التماس .

جد الخفى عند  $s = 1$  ،  $s = 3$  ،  $s = \frac{\pi}{6}$  .

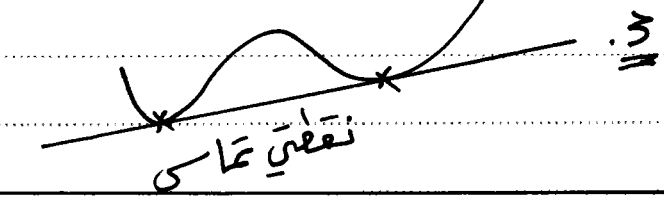
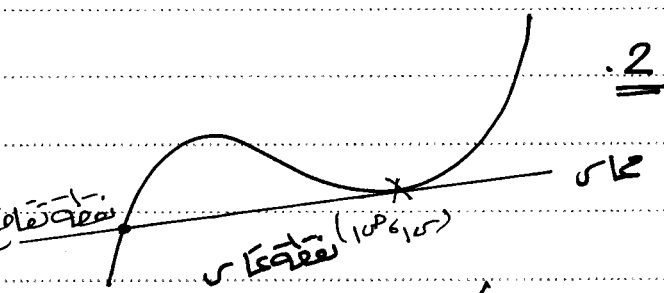
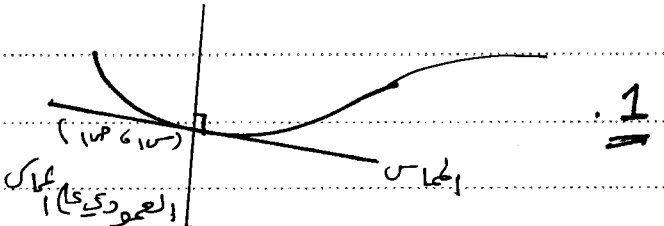
$$2 - = (\frac{\pi}{6})$$

معاودة العمودي

$$0 - s = \frac{1}{\frac{\pi}{6} - s}$$

$$0 - s = \frac{1}{\frac{\pi}{6} - s}$$

## أشكال توضيحية للفكرة :-



## فكرة ٧ : وجود نقطة بالسوال

١ . جد معاودة التماس والعمودي على التماس الخفى عند  $s = 1$  ،  $s = 3$  ،  $s = \frac{\pi}{6}$  .

الحل : النقطة  $(1, 1)$  ، النقطة  $(3, 1)$  ، النقطة  $(\frac{\pi}{6}, 0)$  .

$$\frac{1}{3 + s + 2} = \frac{1}{3 + 1 + 2}$$

$$\frac{1}{6} = (1)$$

المعاودة التماس  $s = 1$  ،  $s = 3$  ،  $s = \frac{\pi}{6}$  .

معاودة العمودي  $s = 1$  ،  $s = 3$  ،  $s = \frac{\pi}{6}$  .

$$0 - s = \frac{1}{\frac{\pi}{6} - s}$$



٣. جد معادلة الجماس لـ  $x^2 - 2x + 1 = 0$  للاختصار

حل:  $(x-1)^2 = 0$  جاس عند

$x = 1$

الحل:  $x^2 - 2x + 1 = 0$  جاس عند

نقطة الجماس  $(1, 1)$

جد الميل  $m = 2x - 2$  جاس

عند  $(1, 1) = 2(1) - 2 = 0$

معادلة الجماس  $(x-1)^2 = 0$

٤. جد معادلة الجماس و المعودي عليه

لـ  $x^2 - 2x + 1 = 0$  عند

$(1, 1)$

الحل:  $(1, 1)$  نقطة الجماس

جد  $m = 2x - 2 = 0$

عند  $(1, 1) = 2(1) - 2 = 0$

معادلة الجماس  $(x-1)^2 = 0$

معادلة المعودي  $x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

٥. جد معادلة الجماس و المعودي عليه

لـ  $x^2 - 2x + 1 = 0$  عند

$(1, 1)$

الحل:  $(1, 1)$  نقطة الجماس

جد الميل  $m = 2x - 2$

عند  $(1, 1) = 2(1) - 2 = 0$

نقطة

$x^2 - 2x + 1 = 0$

جد  $m = 2x - 2$

معادلة المعودي

$(x-1)^2 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

٦. رسم من النقطة  $(1, 1)$

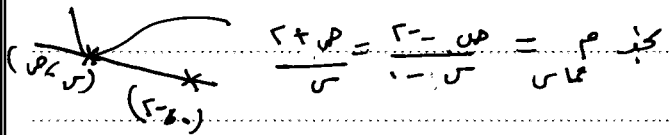
معادلة الجماس و المعودي عليه

جد معادلة الجماس لـ  $x^2 - 2x + 1 = 0$  عند

الحل: النقطة  $(1, 1)$  خارجة

لأنها لم تحقق المعادلة و غير ملتصقة بالنقطة

∴ نغير من نقطة الجماس  $(1, 1)$



جد ميل الجماس  $m = 2x - 2 = 0$  عند

$(1, 1) = 2(1) - 2 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

معادلة الجماس  $(x-1)^2 = 0$

الاصولية

و تحول من  $(1, 1)$

$(x-1)^2 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

∴ نقطتي الجماس  $(1, 1)$  و  $(2, 1)$

الميل  $m = 2x - 2 = 0$  عند

نقطة  $(1, 1) = 2(1) - 2 = 0$

$(x-1)^2 = 0$



نقطة إحداثياتها الأولى (٢، ٤)  $\rightarrow 1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

من  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

نقطة إحداثياتها الثانية (٣، ٥)  $\rightarrow 1 = \frac{3}{2} = \frac{5}{4} = 2 = 3$

من  $1 = \frac{3}{2} = \frac{5}{4} = 2 = 3$

٩. إيجاد معادلة الخماس لخطي العلاقة

من  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

من النقطة (٠، ٤)

الجواب:  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

من  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

١٠. إيجاد جميع نقاط التقاطع على

خطي العلاقة  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

حيث يمر بمماس من خطي العلاقة عند كل من

النقطة (٠، ٤)

الجواب: (٣، ٥) (٢، ٤)

١١. إيجاد معادلة الخماس لخطي التقاطع

من  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

على الخطين  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

الحل: ميل الخماس =  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

ميل العمودي =  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

$1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

$1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

$1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

نقطة تقاطع  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

معادلة الخماس الأولى  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

معادلة الخماس الثانية  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

٧. إيجاد معادلة الخماس لخطي

الجواب: إيجاد معادلة الخماس الأولى  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

معادلة الخماس الثانية  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

ب. إيجاد معادلة الخماس لخطي

من  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

الخماس مرسوماً من النقطة (٠، ٤)

الجواب: إيجاد معادلة الخماس  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

معادلة الخماس  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

٨. إيجاد معادلة الخماس لمماس

النقطة (٠، ٤) لخطي العلاقة  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

$1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

الحل: (٠، ٤) هي نقطة

$1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

إيجاد الميل بطريقة أخرى  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

$1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

$1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

$1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

$1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

$1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

$1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

نقطة التقاطع لإيجاد  $1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

$1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$

$1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 2 = 3$



(٢)

فكرة:  
إيجاد مساحة مثلث

١٣. جد مساحة المثلث المثلون من المماس لخطي عرض (س) = س عند (٤, ٢) وعمودي عليه ومحور السين.

الحل: النقطة (٤, ٢) نقطة تماس

① من إيجاد وعمودي المثلث

⑤  $x_2 = 4 = 2 + 2$  عند  $x_1 = 2$  - أقل من

⑥ عند  $x_2 = 2 = 3 + 1 = 4$  - أقل من  $x_1 = 3$

⑦  $x_2 = 2 = 3 + 1 = 4$  - أقل من  $x_1 = 3$

⑧ عند  $x_2 = 2 = 3 + 1 = 4$  - أقل من  $x_1 = 3$

$x = 4 = 3 + 1 = 4$  - أقل من  $x_1 = 3$

المماس من  $4 - 2 = 2$

$4 - 2 = 2$

①  $4 - 2 = 2$

العمودي من  $4 = \frac{1}{2}(2 - 3)$

④  $\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} = 4$

التقاطعات: لاحظ محور السين  $x = 2$

①  $\Leftrightarrow x = 2 = 2 - 3 = -1$

②  $\Leftrightarrow x = 2 = \frac{4}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{\frac{1}{2}}$

③  $\Leftrightarrow x = 2 = 4 - 3 = 1$

لنفعل  $(1, 2), (2, 2), (2, 4)$

$\frac{1}{2} \times (1-2) \times (1-4) = \frac{1}{2} \times (-1) \times (-3) = \frac{3}{2}$

$3 \times \frac{1}{2} = 1.5$

$x_2 = 3 = 2 + 1 = 3$

$x_2 = 2 = 3 + 1 = 4$

$x_2 = 2 = 3 + 1 = 4$

$x_2 = 2 = 3 + 1 = 4$

$x_2 = 2 = 3 + 1 = 4$

$x_2 = 2 = 3 + 1 = 4$

عند  $x_2 = 2 = 3 + 1 = 4$

معادلة المماس الأول  $x_2 = 3 = 3 - 2 = 1$

$x_2 = 3 = 3 - 2 = 1$

$x_2 = 3$

عند  $x_2 = 3 = 3 + 1 = 4$

معادلة المماس الثاني  $x_2 = 2 = 4 - 2 = 2$

عند  $x_2 = 2 = 3 + 1 = 4$

معادلة المماس الثاني  $x_2 = 2 = 4 - 2 = 2$

١١. بيّن أن لخطي عرض (س) = س + ٢ وعمودي عليه هما مماسان من النقطة (١, ٤)

الجواب: المماس الأول من  $x_2 = 13 = 6 - 3 = 3$   
المماس الثاني من  $x_2 = 0 = 0 - 0 = 0$

ب. إذا كان من  $x_2 = 6$

س = ١ - جان، جد معادلة المماس لخطي العلاقة

من  $x_2 = 6$  عند  $x_1 = \frac{13}{2}$

الجواب: من  $x_2 = 6 = \frac{13}{2} - 3 = \frac{7}{2}$





١٣. من نقطة P(٢, ١) رسم مماسان لمخنف من = ٢ - س - س٢ في معاشه  
 في نقطة (٠, ٢) و (١, ٠) جد  
 مساحة المثلث P و Q ؟

الحل: النقطة (٢, ١) هي نقطة

تفر من نقطة التماس (س, م)

$$٢ - م = ٣ \quad \text{و} \quad ٢ - ٢ = ٣$$

$$\therefore \frac{٢ - م}{١ - س} = \frac{٢ - ٢}{١ - ٢}$$

$$\leftarrow \text{من} \quad ٢ - م = ٢ - ٢ \quad \text{و} \quad ٢ - ٢ = ٣$$

$$\text{لكنه من} \quad ٢ - س = ٣$$

$$\leftarrow \text{من} \quad ٢ - س = ٣ \quad \text{و} \quad ٢ - ٢ = ٣$$

$$\text{من} \quad ٢ - س = ٣ \quad \text{و} \quad ٢ - ٢ = ٣$$

∴ التقاطع المثلثي موجود

$$(٢, ١) \quad (١, ٠) \quad (٠, ٢)$$

$$\text{مساحة} = \frac{1}{2} \times (١ - ٢) \times (٠ - ٢) = ١$$

١٤. جد مساحة المثلث المتكون من

المماسين و العمودي على المماس

لمخنف من = ٢ - س - س٢ عند النقطة

(٠, ٢) و المماس من = ١ - س

ان معادلة العمودي من = ١ - س

الحل: (٠, ٢) نقطة تماس

$$٣ = ٢ - س = ٢ - ٠$$

$$\leftarrow \text{معادلة المماس} \quad ٠ - ٣ = ٢ - س$$

$$٣ - س = ٢$$

التقاطعات

$$\text{من} \quad ١ = ٣ - س \quad \text{و} \quad ١ = \frac{١ - س}{٢} + س$$

$$\text{من} \quad ١ = ٣ - س \quad \text{و} \quad ١ = \frac{١ - س}{٢} + س$$

$$\text{من} \quad ١ = ٣ - س \quad \text{و} \quad ١ = \frac{١ - س}{٢} + س$$

$$\text{من} \quad ١ = ٣ - س \quad \text{و} \quad ١ = \frac{١ - س}{٢} + س$$

$$(١, ١) \quad (١, ١) \quad (٠, ٢)$$

$$\therefore \text{مساحة} = \frac{1}{2} \times (١ - ٠) \times (١ - ٠) = ٠,٥$$

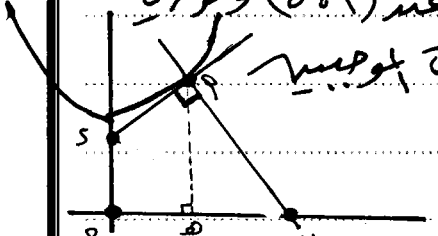
العلامة (س, م) و (س, م)

١٥. جد مساحة المثلث المتكون من

تقاطع المماس و العمودي على المماس لمخنف

من = ٢ - س - س٢ عند (٠, ٢) و عمودي

النقطة و الصدارة هو



الحل: نقطه P عمود

المساحة = مساحة مثلث + مساحة مثلث

$$\text{مساحة} = \frac{1}{2} \times (١ - ٢) \times (٠ - ٢) = ١$$

نقطة P(٠, ٢) نقطة تماس

$$\text{من} \quad ٢ = ١ - س = ١ - ٠$$

$$\text{معادلة المماس من} \quad ٠ - ٣ = ١ - س$$

$$\text{و التقاطع مع الصدارة من} \quad ٣ = ١ - س$$

$$\text{العمودي من} \quad ٠ - ٣ = ١ - س$$

$$\text{من التقاطع مع الصدارة من} \quad ٠ = ٣ - س$$

$$\therefore \text{من} \quad (٠, ١)$$

$$\text{المساحة} = \text{مساحة} PQR + \text{مساحة} PQR$$

$$= \frac{1}{2} \times (٢ + ٠) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times ١ \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

\* يوجد حل آخر !! او حل ثالث ايضا



١٦. ٢. ما مساحة مثلث لذى  
 عمرة أضلاعه محور السينات والمحاس  
 مع العمودين لخطين  $٤س + ٥م = ٢٠$   
 عند  $(٤, -٦)$  ؟ الجواب ١٦

ب. جد مساحة مثلث يتكون من  
 المحاسية  $٤س + ٥م = ٢٠$  لخطين  
 العلاقة  $٤س + ٥م = ٢٠$  وخط الموازي  
 بين نقطتي  $(٤, -٦)$  ؟ الجواب ١٦

٣. اذا وازى مستقيم محور الصادات  
 الميل =  $\frac{\text{عدد غير معرف}}{\text{صفر}}$   
 \* ومعادلة هذا المستقيم دائماً  $س = \text{عدد}$   
 نجد نقطة التقاطع الاولى  
 أكثر منه طريقة

ب. العلاقات (حذف وتعودين)  
 اقتارات  $١$  لاقتاره الاول = لاقتاره الثاني  
 تقاطع اقتاراته مع محور السينات = نفوس  $١$   
 تقاطع اقتاراته مع محور الصادات = نفوس  $١$

**أمثلة :-**

١٧. اذا كان  $٤محاس$  معنى  
 $٤س = ٣ + ٥م$  عند  $س = ١$   
 يصنع زاوية قياسها  $\frac{\pi}{٤}$  مع الاتجاه  
 الموجب لمحور السينات . جد معادلة  
 المحاس ؟

الحل: الميل =  $٤ = (٣ + ٥س)$

الميل =  $\frac{\pi}{٤} = ٣ + ٥س$

$١ = ٣ + ٥س$

$٢ = ٥س$

نجد عند  $(٢, -١) = (٢, -١) = ٣ + ٥(٢)$

∴ وجدنا نقطة التقاطع  $(٢, -١)$

الميل =  $٤ = (٣ + ٥س)$

عند  $(٢, -١) = ٣ + ٥(٢) = ١$

∴ المعادلة

$١ = ٣ + ٥(٢)$

**فكرة :-**  
 كلمات ليست  
 كاللغات ...  
 (٣)

«لا يوجد نقطة»

التقاطع . التوازي . التقاطع . التماس

∴ اذا من اقتارة  $١$  اقتارة  $٢$

آخر ، فانه

قاعدة الاول = قاعدة الثاني

مستوية الاول = مستوية الثاني

ميل الاول  $\times$  ميل الثاني =  $-١$

∴

١. اذا توازي مستقيمان  $٢م = ١٣$

٢. اذا وازى مستقيم محور السينات

$٣ =$  صفر (أعطني)



١٨. جد معادلة المحاس لغني لاقرانه  
 عند نقطة تقاطعه مع محور السينات  
 حينه (س) = س<sup>٣</sup> - ١ = ٠  
 الحل : نقطة التماس هي نقطة التقاطع مع  
 محور السينات  $\Rightarrow$   $س^٣ - ١ = ٠ \Rightarrow س = ١$   
 نفون هـ (١) = ١ - ١ = ٠ هـ  
 $\therefore$  نقطة التماس (١, ٠)  
 الميل = قه = ٣ - ٣ = ٠ عوفن هـ (١) = ٣  
 $\therefore$  المعادلة هـ = ٠  $\Rightarrow$   $س^٣ = ١$   
 هـ = ٣ - ٣ = ٠

$(٠, ٠) (٠, ٠) \Rightarrow$  نقطتي التماس  
 لايجاد الميل نسق العلاقة هـ = ١  
 $١ = ٢س - ٤س$  نفون  
 $(٠, ٠) \Rightarrow ١ = ٠ - ٤س \Rightarrow س = -\frac{١}{٤}$   
 المعادلة هـ = ٠  $\Rightarrow$   $س = -\frac{١}{٤}$   
 هـ =  $٢ \times (-\frac{١}{٤}) - ٤(-\frac{١}{٤}) = ١$   
 $\frac{١}{٤} = ١$   
 المعادلة هـ = ٤ - ٤ = ٠  $\Rightarrow$   $س = ٠$

١٩. بيه ان لغني هـ (س) = ٢س<sup>٢</sup> + ٦س - ٤  
 محاس "افقياً" عند نقطة (٣, ٣)؟  
 الحل : افقي = ميله هـ  
 $\Rightarrow$  قه (س) = ٠  $\Rightarrow$   $٦س - ٨س = ٠ \Rightarrow س = ٠$   
 $\left[ س = ٣ \right]$  عوفن هـ (٣) = ٣  
 نقطة تماس (٣, ٣)  
 الميل = قه (٣) = هـ  $\Rightarrow$  المحاس افقي

٢١. بيه ان محاس هـ مغني لاقرانه  
 هـ (س) =  $\frac{٤}{س}$  ، ومحاس هـ لاقرانه  
 هـ (س) = س<sup>٢</sup> متعادلان عند نقطة تقاطعهما  
 الحل : نجد التقاطع  $\frac{٤}{س} = س = س \Rightarrow س = ٢$   
 نقطة التقاطع (٢, ٢) (٢, ٢)  
 عند نقطة (٢, ٢)  
 هـ =  $\frac{٤}{٢} = ٢$  ، هـ = ٢  
 $\therefore$  المحاس متعادلان

٢٠. جد معادلتى المحاس هـ لغني  
 العلاقة هـ = هـ<sup>٢</sup> - ٤ هـ عند  
 نقطتي تقاطع هـ مع محور الصادات؟  
 الحل : نقطة التماس هي نقطة تقاطع  
 مع محور الصادات  $\Rightarrow$  نفون هـ = ٠  
 $\therefore$  هـ = ٤ - ٤ هـ = ٠  $\Rightarrow$  هـ = ٤

عند نقطة (٢, ٢)  
 هـ =  $\frac{٤}{٢} = ٢$  ، هـ = ٢  
 $\therefore$  المحاس متعادلان  
 عند نقطة (٢, ٢)  
 هـ =  $\frac{٤}{٢} = ٢$  ، هـ = ٢  
 $\therefore$  المحاس متعادلان



٢٤. بيّن أن  $\pi$  لخطي  $(s) = \text{حاس}$   
 حاس أفقي في  $[\pi, 6]$  ثم جد  
 معادلة هذا الخط  $s$  ؟

الحل: ميل الخط = صفر

$$2 \text{ حاس حاس} = \text{صفر}$$

$$\leftarrow \text{حاس حاس} = \text{صفر}$$

$$2\pi \leq \pi \leq 6$$

$$s = \frac{\pi}{6}$$

لذا  $\pi$  يصل المرافقة عندها

$$\frac{\pi}{6} = s$$

$$\text{عد } \left(\frac{\pi}{6}\right) = \text{حاس} = 1$$

$$\left(\frac{\pi}{6}, 1\right) \text{ نقطة حاس } , m = 0$$

$$\therefore \text{المعادلة } m - 1 = (s - \frac{\pi}{6})$$

$$m = 1$$

٢٥. جد معادلة الخط  $s$

$$\text{عد } (s) = 7 + 5s - 9s^2 \text{ عند}$$

نقطة تقاطعه مع المستقيم

$$m - 3 = s + 1$$

$$\text{الجواب: } m - 23 = 10(1 - s) \text{ معادلة 1}$$

$$\text{عد } -2 = 8(1 - s) \text{ معادلة 2}$$

٢٦. اكتب أن الخط  $s$  لمسوية

$$\text{العلاقة } 4 + 9s^2 = 20$$

$$s^2 - 4 = 0 \text{ عند نقطة تقاطعها بالربيع}$$

الاول معادان ؟

٢٢. جد معادلة الخط  $s$

$$\text{عد } (s) = 8 + s^2 \text{ حيث هذا}$$

$$\text{الخط } s \text{ موازي للمستقيم } 3 + 5s =$$

$$\text{الحل: الخط } s \text{ موازي للمستقيم}$$

$$\leftarrow \text{ميل الخط } s = \text{ميل المستقيم}$$

$$\leftarrow 3 = 8 + 5s$$

$$\text{جد عد } (3) = (8) + 5(2) = 10$$

$$\therefore \text{نقطة الخط } s (3, 10)$$

$$\therefore \text{المعادلة } 10 + m = 8 + 5s$$

٢٣. جد نقطة الواقعة على خطي

$$\text{العلاقة } (4 - m)^2 = 2 + s \text{ والتي}$$

$$\text{تكون عندها الخط } s \text{ موازي للمستقيم}$$

$$m + 6 = 2$$

$$\text{الحل: نقر من نقطة الخط } s (6, 4)$$

$$\text{نقطة العلاقة } 2(4 - m) = 1$$

$$\leftarrow \text{عد } = \frac{1}{1 - 4} = \frac{1}{-3}$$

$$\text{ميل المستقيم } 2 + 6 = m = 4 \leftarrow m = \frac{1}{-3}$$

عما الخط موازيان

$$\leftarrow \frac{1}{-3} = \frac{1}{1 - 4} \leftarrow m = 3$$

$$\text{نقر من العلاقة } (2 - 2) = 2 + s$$

$$2 + s = 1$$

$$s = -1$$

$$\therefore \text{نقطة الخط } s (-1, 3)$$





٢٦. جد معادلة المماس لمخني

الاعتراضي  $(s)$  عند نقطة  $s^3$  ، عند نقطة تقاطعه مع المستقيم  $s - 6 = 0$ .

الحل:

جد نقطة التقاطع  $s^3 = s - 6$

$s^3 - s + 6 = 0$  بالتحريبي

$s = 2$  قيمة تكسبه

| عدد  | $s^3$ | $s$ | $s^2$ |
|------|-------|-----|-------|
| ٦    | ١     | ١   | ٠     |
| ٦    | ٢     | ٤   | ٢     |
| مفرز | ١     | ٣   | ٢     |

الجواب  $s^3 + s^2 + 3s + 6 = 0$  (مميزها لا يمكن)

$\therefore$  عند  $s = 2$  يوجد مماس

عند  $(2) = (2)^3 = 8$

$(8, 2)$  نقطة تقاطع مماس

نقطة المماس

الميل = حدة  $(s) = 3s^2$

عند  $(2) = 12$

$\therefore$  معادلة المماس

من  $12 = 8 - (s - 2)$

٢٧. P. ٢٠٢. جد معادلة المماس لمخني

الاعتراضي  $(s)$  عند  $s^3 - 6s + 3 = 0$  حيث

يكون المماس عمودي على المستقيم

$6 - s^3 = 0$

الجواب: من  $3 = (s - 1)$

ب. جد نقطة على مخني من  $s^3 = 6 - s$  حيث  $s = 2$  ،  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  حيث  $s^3 = 6 - s$  عند هذا

يوافق المستقيم من  $2 - s = 0$  ، وجد معادلة المماس عند هذا .

الجواب:

من  $1 = 2 - (s - \frac{\pi}{2})$

ج. جد نقطة على مخني  $s^3 + 6s = 7$  حيث

يكون مماسها المماس عمودي على

المستقيم  $3 - 6s = 7$

(٤٦٦)

د. جد نقطة تقاطع مخني

عند  $(s) = \sqrt{s - 2}$  مع

له  $(s) = s^2$  . ثم جد معادلة

المماس عند هذا المخني عند  $(s)$  .

الجواب: من  $1 = \frac{1}{s} = (s - 1)$



المعلم : إياذ جاد الله



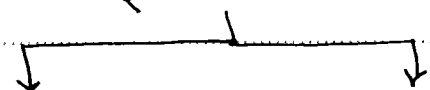
التوابت :-

٣. اذا كان هو (س) =  $s^3 - 3s^2 + 1$   
 وكان ميل العمودي على المماس لمنحنى  
 هو (س) عند  $s = 1$  هو  $\frac{1}{3}$  ،  
 جد الثابت P .

٢٨. اذا كان  $s^3 + 5s^2 + 1$   
 ممس لمنحنى هو (س) =  $s^3 + 5s^2 + 1$   
 عند  $s = 1$  ، جد P ، ب .

الحل: ميل العمودي =  $\frac{1}{3}$  ← ميل المماس = 0  
 ← هو (1) = 0  
 $0 = s^3 - 3s^2 + 1$   
 $0 = 1 - 3 + 1$  ←  $0 = 1 - 2$

الحل:  $s = 1$  نقطة تماس  
 معادلة التعميم من  $\frac{s^3 - 1}{3}$  نجد لها



٣١. اذا كان هو (س) =  $s^3 + 2s^2 + 1$   
 وزاوية ميل المماس لمنحنى هو عند  
 نقطة (2, 1) هو  $\frac{1}{3}$  .  
 اثبت ج ؟

معادلة لمنحنى = معادلة المماس  
 $\frac{s^3 - 1}{3} = s^3 + 2s^2 + 1$   
 $\frac{s^3 - 1}{3} = s^3 + 2s^2 + 1$   
 نفرض  $s = 1$   
 $\frac{s^3 - 1}{3} = s^3 + 2s^2 + 1$   
 $s^3 - 1 = 3s^3 + 6s^2 + 3$   
 $s^3 - 1 = 3 + 6 + 3$

الحل: الميل =  $\frac{1}{3}$  كما  $s = 1$   
 يعني هو (2) = 1  
 $1 = s^3 + 2s^2 + 1$   
 $1 = 1 + 2 + 1$   
 $1 = 1 + 2 + 1$   
 $\frac{1}{3} = 1$

$\frac{s^3 - 1}{3} = s^3 + 2s^2 + 1$   
 $\frac{1}{3} = 1 + 2 + 1$   
 $\frac{1}{3} = 4$   
 نفرض  $s = 1$   
 $\frac{1}{3} = 1 + 2 + 1$   
 $\frac{1}{3} = 4$

٢٩. اذا كان  $s^3 + 1$  مستقيم  
 تمرين  $s^3 - 3s^2 + 1 = 0$  : عند  
 منحنى هو (س) =  $\frac{s^3 - 1}{3}$  عند

٣٢. اذا كان  $s^3 + 1$  مستقيم ، بالنقطة  
 (1, 4) (0, 1) عند منحنى  
 هو (س) =  $s^3 + 1$  ، جد P .

النقطة (س، ١) ، (١، ٤) . جد الثابت

الجواب : ٤

الجواب : P = 4



أسئلة متنوعة :-

٣٥. جد معادلة العمودي على المحاك لطغني  
عند (س) = (س، س) - (س، س) ، س = [٦٠، ٠]  $\pi$   
جيبك يتواءم العمودي على المحاك موازياً  
لأحد المحاور ؟

الحل : نقطة المماس (س، س)  
قوة (س) = (س) - ١ = ٢ - ١ = ١ (محل المحاك)  
العمودي =  $\frac{1}{1-2}$  =  $\frac{1}{-1}$  (موازي المحاور)

س = ميل غير معرف س = ٢ = ٣

$\frac{1}{-1} = ٢ - ١ = ١$

س = ٢ = ٦٠ ، ٣٠٠

س = ٣ = ١٥٠ ، ٢١٠

س = ١ =  $\frac{\pi}{4}$  س = معادلة العمودي س =  $\frac{\pi}{6}$

س = ١ =  $\frac{\pi}{6}$  س = معادلة العمودي س =  $\frac{\pi}{7}$

لاحظ أن أي مستقيم موازي للمحاور  
معادلة دائماً س = عدد .

٣٦. اذا كان ل (س)  $\times$  ه (س) = پ (س)

حيث پ ثابت ، پ  $\neq$  ٠ ، وكان

ه (س) = ٢ = ص ، ه (س) = ٢ = -ص  
جد معادلة المحاك لطغني الاقترانه

ل (س) عند س = ٢ ؟

الحل : س = ٢ نجد ل (٢)

ل (٢)  $\times$  ه (٢) = پ (٢)

ل (٢)  $\times$  ه (٢) = پ (٢)

٣٣. اذا كان ه (س) = س<sup>٣</sup> - ٢س + ١  
وكان ميل العمودي على المحاك لطغني  
ه (س) عند س = ١ هو  $-\frac{1}{2}$  ، جد  
ال ثابت پ ؟

الحل :

ميل العمودي =  $-\frac{1}{2}$  س = ١

ه (١) = ٠

٠ = ٢س - ٢س + ١

$1 = ٢$

٣٤. اثبت ان المحاك للمخني  
طو

س = ٢ + ه = ٨ ، س = ٢

معادله عند النقطة (٠، ٠) ؟

الحل : س = ٢ + ه = ٨

٨ = ٢ + ه

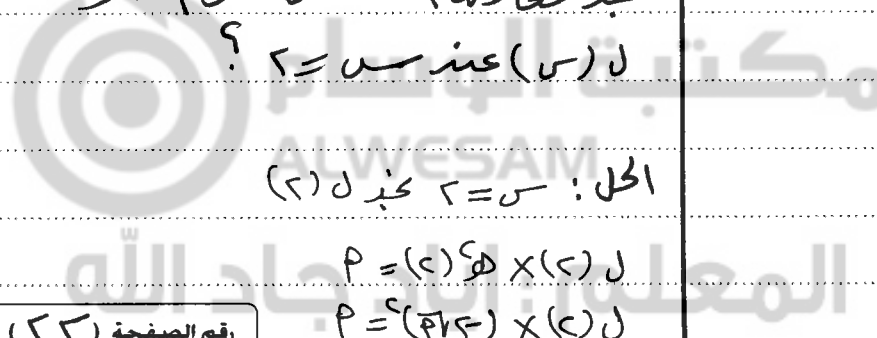
ه =  $\frac{٨-٢}{٢}$  = ٣

المحاك موازي للمحاور .

س = ٢ = ه = ٢

س = ه = صفر

المحاك الثاني افقى (موازي محور س)  
ال ثابت پ .





وهو (١-) = ١ - ١ + ١ - ١ = ٠

① ... ١ = ١ + ١ - ١

وهو (١-) = ١ - ١ + ١ - ١ = ٠

$1 = 0$

مطلوبه = مطلوبه بعينها = (١-) = (١-) = ٠

$\Sigma = ١ + ١ - ١ = ١$

$٦ = ١$

نقول من في ① ← ١ = ١ + ٦ - ١

$٥ = ١$

٢. معادلة الجماس لعنفه

النقطه (١-، ١) = ١ = ١ + ١ - ١

معادلة الجماس

$١ - ١ = ١ + ١ - ١$

$١ - ١ = ١ + ١ - ١$

$١ + ١ - ١ = ١ + ١ - ١$

.....

٣٨. اذا كان الاستقيم يمر بالنقطه

(١-، ١) = ١ = ١ + ١ - ١

وهو (١-) = ١ - ١ + ١ - ١ = ٠

الثابتة ١ ؟

الحل : نجد معادلة الجماس للار بالنقطه

$\Sigma = ١ + ١ - ١ = ١$

معادلة الجماس = ١ = ١ + ١ - ١

$١ - ١ = ١ + ١ - ١$

$١ - ١ = ١ + ١ - ١$

ل (٢) = ١ - ١ + ١ - ١ = ٠  
النقطه (١، ١) = ١ = ١ + ١ - ١

نجد الجمل = ل (٢)

ل (٣) = ١ - ١ + ١ - ١ = ٠

ل (٣) = ١ - ١ + ١ - ١ = ٠

ل (٤) = ١ - ١ + ١ - ١ = ٠

المعادلة ١ - ١ + ١ - ١ = ٠

.....  
٣٧. اذا كان منحني الاعتراسه

وهو (١-) = ١ - ١ + ١ - ١ = ٠

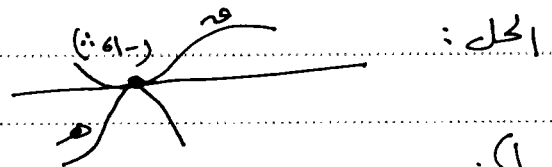
وهو (١-) = ١ - ١ + ١ - ١ = ٠

وقامه عند النقطه (١-، ١)

جد (١) الثوابه ١، ١، ١

٣. معادلة الجماس المشترك

لعنفه عند (١-، ١)



(١-، ١) = ١ = ١ + ١ - ١

وهو (١-) = ١ - ١ + ١ - ١ = ٠

وهو (١-) = ١ - ١ + ١ - ١ = ٠

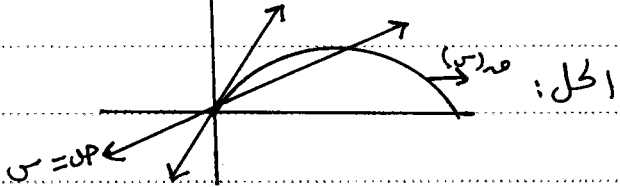
وهو (١-) = ١ - ١ + ١ - ١ = ٠

وهو (١-) = ١ - ١ + ١ - ١ = ٠





٤. بالمثل حد قياس الزاوية  
 المصهورة بين المستقيم  $OP = S$   
 ومحاور مختفي  $(S) = \sqrt{2} - S - S^2$   
 عند نقطة  $(0, 0)$  ؟



الزاوية بين المستقيمين  $OP$  و  $OX$  يعرفه  
 بين زاويتا المثل (التقريب - الصغرى)

حد  $S = 1$  حد  $OP = 1$   
 المثل = حد =  $1 = \text{ظل} 1 \leftarrow \text{حد} 1 = 65^\circ$

حد  $(S) = \sqrt{2} - S - S^2$

حد  $(0) = \sqrt{2} - 0 - 0 = \sqrt{2}$

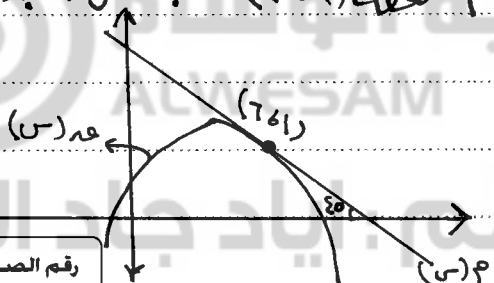
المثل = حد  $(0) = \sqrt{2} = \text{ظل} 60^\circ \leftarrow \text{حد} = 60^\circ$

الزاوية المصهورة =  $60^\circ - 65^\circ = 5^\circ$

وزاري (فهم) (٢٠١٦) / ٦ علاقات :-  
 حد  $(S)$  ، حد  $(S)$  اقدر انفسه قابلية للاشتقاق

جيب  $60^\circ$  حد  $(S) = (S+2) \times \text{حد} (S)$

كان  $M(S)$  جاسا "للاقترب" حد  $(S)$  عند  
 النقطة  $(1, 1)$  كما بالمثل. حد  $(S)$  ؟



عند نقطة التماس  $(S, S)$   
 ميل المماس = ميل المثنى

$2 + S = 2$

$1 + S = 2$

$1 = 2 - S \dots ①$

معادلة المثنى = معادلة المماس

$2 - S = 1 - \sqrt{2} + S^2$

$1 - \sqrt{2} + S^2 = S - 2$

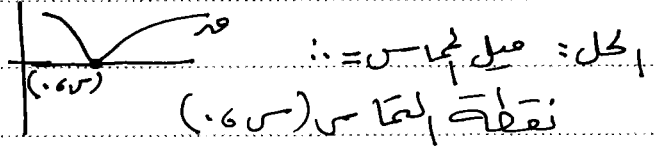
$1 - \sqrt{2} = S - 2$

$S = 1 \leftarrow P = 1$

"س" "س" "س" "س"

٣٩. حد  $(S) = S^2 - P - S - 1$

جد التابتة  $M$  التي تجعل محور التبتان  
 مماسا "للمثنى" حد  $(S)$  ؟



حد  $(S) = S^2 - P - S - 1$

$2 - S = P \leftarrow P - S - 2 = 0$

$(S, S)$  نقطة التماس تحقق حد  $(S)$

حد  $(S) = S^2 - P - S - 1 = 0$

$0 = 1 - S - S^2$

$0 = 1 - S - S^2$

$0 = 1 + S + S^2$

$0 = (1+S)(1+S)$

$1 = S$

$② = 1 - S = P \therefore$



## ورقة عمل "٢" :-

$$٣. \text{وه } (س) = \frac{ل(س) + ٤س}{ل(س)}$$

وكانه للاقتراء  $ل(س)$  ، هو  $(س)$

حاصل "افقياً" فقتراً كما عند  $(٣, ٢)$   
جد وة  $(٢)$  ؟

الجواب  $\frac{٤}{٣}$

$$٤. \text{وه } (س) = (س - ٤س - ٣س)$$

هو  $(س) = \frac{٥}{٣} =$  جد معاداة الجماس

لمخني  $(وه ٥ هـ)$   $(س)$  عند  $س = ٣$

$$\text{الجواب : } ٨ + ٥س = \frac{٤}{٥}(٣ + س)$$

٥. اذا كان المستقيم  $٤س - ٥س - ٣ = ٠$  :

عينه مخني جد عند  $(٢, ٣)$  وكانه المستقيم

$$٩س + ٤س - ٣ = ٠ \text{ عمودياً على الجماس}$$

لمخني ل عند  $(٢, ١)$  جد

$(وه ل) (٣)$

الجواب :  $\frac{٣}{٧}$

٦. اثبت با استخدام التقاطع ان

نصف قطر الدائرة  $٥س - ٣س = ٠$  عمودياً

على الجماس للدائرة عند نقطة

التماس ؟

١. جد معاداة الجماس لمخني

الاقتراء  $١ = (س) = \sqrt{٣}$  عند

نقطة  $٤س$  مع مخني

$$\text{هو } (س) = ٤س - \frac{٣}{٣} + س = \frac{٣}{٣}$$

الحل :  $١ - س = \frac{١}{٣} (١ - س)$

٢. اذا كان العمودي على الجماس

لمخني  $(س)$  يصنع زاوية  $٦٠^\circ$  معها

مع محور السينات  $١$  و  $٣$  وذلك

عند نقطة  $(١, ٣)$  جد

١. وة  $(١)$

$$٢. \text{نبا } (س) = \frac{٣ - (س)}{١ - س}$$

$$٢. \text{نبا } (١ + هـ) = \frac{٣ - (١ + هـ)}{هـ}$$

$$٤. \text{نبا } \frac{٥س}{٧س}$$

عند  $س = ١$

الجواب : جميع الخيارات معناها

$$\text{على الجماس } = \frac{١}{٣.٧}$$

