مدارس الجزيرة الثانوية
AL - Jazeera Schools

مهارات في الرياضيات

توجيهي الفرع العلمي - الفصل الدراسي الأول

الوحدة الثالثة الجزء الثاني :

تطبيقات التفاضل
خصائص الأقترانات

2019-20

اعداد المعلم :

أياد جاد الله

النقط الحرجة :-

تعريف :

تسمى النقطة (س١ ، ق(س١)) نقطة حرجة للاقتران ق(س) إذا كانت ق َ(س١) = صفر أو ق َ(س١) غير موجودة بشرط أن س١ ∋ مجال ق .

« يجب تحديد مجال السؤال أولاً »

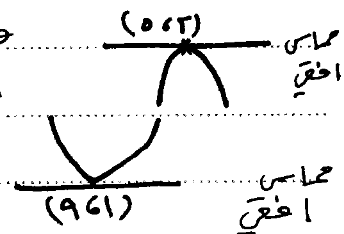
الحرجة { أطراف مغلقة ، جذور المشتقة (بسط . مقام) * نقاط تحول *

لاحظ أن :-

إذا أردنا إيجاد الحرجة من خلال منحنى ق(س) المرسوم نجد س التي تكون عندها

١. ق َ(س) = صفر ⇐ عند القمم والقاع وخط المستقيم الأفقي « لأن المماس أفقي »

٢. ق َ(س) غير موجودة ⇐ عند الأطراف، نقاط عدم الاتصال "الرؤوس المدببة" لأنه عندها لا يمكن رسم مماس وحيد.



ق(٢) = ٥

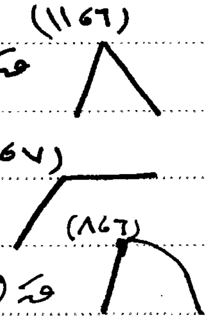
ق َ(٢) = صفر

ق(١) = ٩

ق َ(١) = ..

عند الرؤوس المدببة تكون ق َ غير موجودة،

الرأس المدبب (تقاطع منحنيين مستقيمين، أو مستقيم ومنحنى).

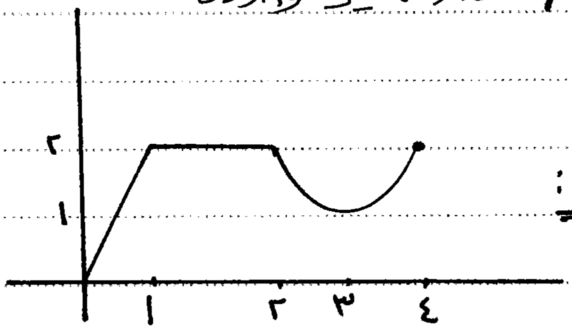


ق َ(٦) غير موجودة

ق َ(٧) غير موجودة

ق َ(٦) غير موجودة

س:



الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) المعرف على [٠ ، ٤]

جد

١. قيم س الحرجة للاقتران ق(س).

{٠ ، ٣ ، ٤} ∪ [١ ، ٢]

٢. جد ق َ(١.٥) = ٠ لأنه ق ثابت

ق َ(٣) = ٠ لأنه مماس أفقي

ق َ(٤) غير موجودة طرف فترة

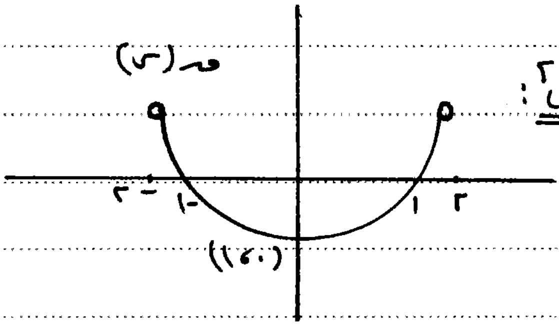
ق َ(٢) غير موجودة رأس مدبب

ق َ(١) غير موجودة رأس مدبب

ق َ($\frac{1}{2}$) ؟ نجد معادلة المستقيم المار بالنقط (٠ ، ٠) (١ ، ٢) ⇐ ص = ٢س

← ق َ(س) = ٢ ← ق َ($\frac{1}{2}$) = ٢ نفس الميل

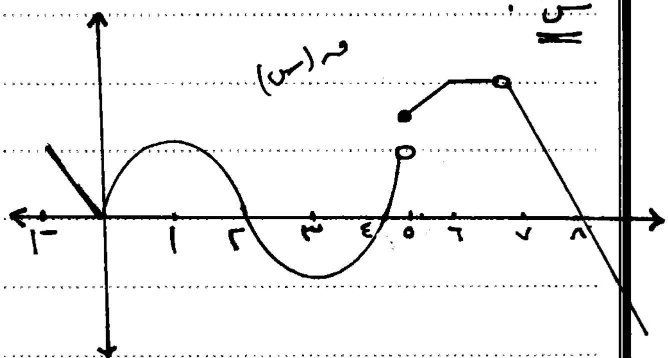
س٢ :



الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) المعرف على (-٢،٢) جد النقاط الحرجة؟

الحل : (٠،-١) النقطة الحرجة الوحيدة (قاع) المماس عندها أفقي .

س٣ :



الشكل يمثل منحنى ق(س) على مجاله ما مجموعة قيم س الحرجة ؟

الحل : المجال أولاً [-١، ∞) - {٧}

س الحرجة نوعين :

قَ(س) = صفر ⟸ س = ١ قمة

س = ٣ (قاع) ، [٦، ٧) خط أفقي

قَ(س) غير موجودة ⟸ س = -١ طرف

س = ٥ غير متصل عندها

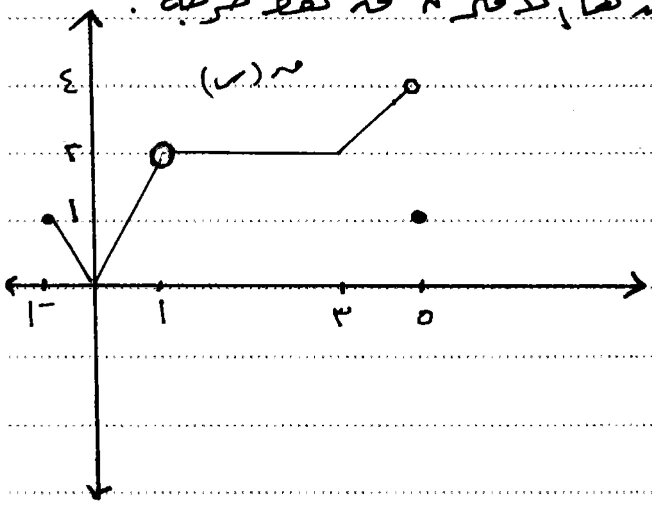
س = ٠، ٦ رأس مدبب

لاحظ س = ٧ ∉ للمجال «ليست حرجة»

∴ س الحرجة هي :

[٦، ٧) ∪ {-١، ٠، ١، ٣، ٥}

س٤ : الشكل يمثل منحنى ق(س) على مجاله . ما مجموعة قيم س التي عندها للاقتران ق نقط حرجة ؟



أ) . {-١، ٠، ١، ٣، ٥}

ب) . {-١، ٠، ٥} ∪ [١، ٣]

ج) . {-١، ٠، ٥} ∪ (١، ٣]

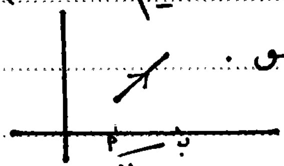
د) . {-١، ٥} ∪ (١، ٣]

الجواب :

التزايد و التناقص و القيم القصوى :-

تعريف :-

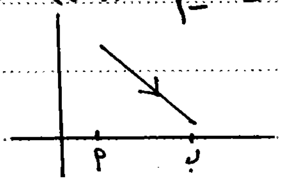
١. يكون ق(س) متزايداً على [أ، ب] اذا زادت قيم ق(س) كلما زادت قيم س.



بالرموز

اذا كانت س٢ > س١ لكل س١، س٢ ∈ [أ، ب] فإن ق(س٢) > ق(س١)

٢. يكون ق(س) متناقصاً على [أ، ب] اذا نقصت قيم ق(س) كلما زادت قيم س.

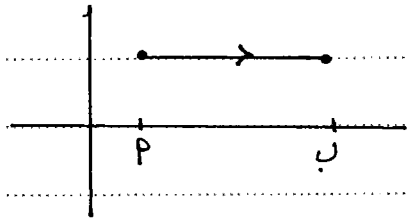


بالرموز

اذا كانت س٢ > س١ لكل س١، س٢ ∈ [أ، ب] فإن ق(س٢) < ق(س١)

٣. يكون ق(س) ثابت على [أ، ب] اذا بقي ق(س) ثابت كلما زادت قيم س.

بالرموز : اذا كانت س٢ > س١ لكل س١، س٢ ∈ [أ، ب] فإن ق(س٢) = ق(س١) .



لايجاد فترات التزايد و التناقص و القيم القصوى ، نتبع الخطوات التالية :-

١. نحدد مجال الاقتران.

٢. نجد ق'(س) و النقط الحرجة

← أطراف مغلقة

← جذور المشتقة (بسط ومقام)

← حول ؟

٣. نحدد اشارة ق'(س) على خط الاعداد (ضمن مجال الاقتران).

* حيث *

عندما ق'(س) موجبة ← ق متزايد.

عندما ق'(س) سالبة ← ق متناقص.

عندما ق'(س) = ٠ ← ق ثابت

٣ . القيم القصوى :-.

١) القيم العظمى المحلية هي أكبر قيمة (او تساوي ما حولها) على اصغر فترة حولها ممكنة وأكبر قيمة للاقتران (على مجاله) من ضمنها الاطراف تسمى المطلقة.

٢) القيمة الصغرى المحلية هي اقل قيمة (او تساوي ما حولها) (القاع) على اصغر فترة حولها ممكنة. واقل قيمة للاقتران (على مجاله) من ضمنها الاطراف تسمى المطلقة

ملاحظة:
القيم القصوى المطلقة يمكن ان تحدث عند اطراف الفترات او داخلها بينما القصوى المحلية تحدث داخل الفترة فقط اي ان الاطراف لا تمثل قيم قصوى محلية اطلاقاً
أي ان تكون قيم قصوى مطلقة او لا شيء

العلاقة بين المشتقة الاولى والتزايد والتناقص :-.

١. اذا كان ق(س) متزايد على [أ ، ب]
فان جميع المماسات المرسومة لمنحنى ق في (أ ، ب) تصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وبالتالي ق‌َ > ٠ لكل س ∈ (أ ، ب).

٢ . اذا كان ق(س) متناقص في [أ ، ب]
فان جميع المماسات المرسومة لمنحنى ق على (أ ، ب) تصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وبالتالي ق‌َ < صفر لكل س ∈ (أ ، ب).

التزايد والتناقص والقيم القصوى باختبار المشتقة الأولى :-

لكل من الاقترانات التالية جد ما يلي :-

١. قيم س الحرجة

٢. فترات التزايد والتناقص

٣. القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت).

① . $ق(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ١$ ، $س \in [-٢، ٤]$

الحل: مجاله $[-٢، ٤]$

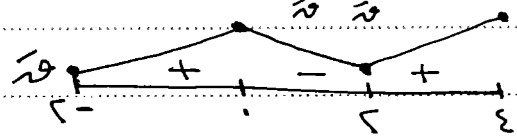
$ق'(س) = ٣س^٢ - ٦س = ٠$

$س(٣س - ٦) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٢$

حرجة $\{٠، ٢، -٢، ٤\}$

جذور جذر طرف طرف فترة فترة



ق(س) متزايد $[-٢، ٠]$ ، $[٢، ٤]$

ق(س) متناقص $[٠، ٢]$

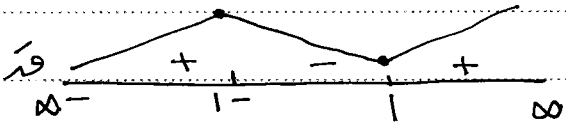
* عند $س = -٢$ صغرى مطلقة $ق(-٢) = -١٩$
* عند $س = ٢$ صغرى محلية $ق(٢) = -٣$
* عند $س = ٠$ عظمى محلية $ق(٠) = ١$
* عند $س = ٤$ عظمى مطلقة $ق(٤) = ١٧$

② . $ق(س) = س^٣ - ٣س + ٥$

الحل: المجال ح

$ق' = ٣س^٢ - ٣ = ٠ ⇐ س = \pm ١$

الحرجة $\{\pm ١\}$



ق متزايد $(-\infty، -١]$ ، $[١، \infty)$

ق متناقص $[-١، ١]$

* عند $س = -١$ عظمى محلية $ق(-١) = ٧$
* عند $س = ١$ صغرى محلية $ق(١) = ٣$

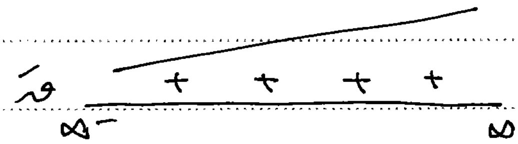
③ . $ق(س) = س^٣ + ٤س + ١$

الحل: المجال ح

$ق'(س) = ٣س^٢ + ٤ = ٠ ⇐$ لا يوجد

أصفار للمشتقة ولا يوجد قيم للمشتقة غير موجودة

∴ لا يوجد حرجة



ق متزايد على ح

ولا يوجد قيم قصوى محلية أو مطلقة.

٤) . ق(س) = ٦س² − س³ − ٩س + ٢
س ∈ [٠ ، ٥]

الحل: مجاله [٠ ، ٥]

ق′(س) = ١٢س − ٣س² − ٩ = ٠

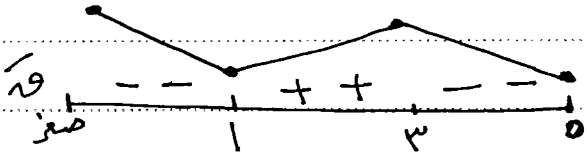
÷ (−٣)

س² − ٤س + ٣ = ٠

(س − ٣)(س − ١) = ٠

س = ٣ ، س = ١

قيم س الحرجة {٠ ، ٥ ، ١ ، ٣}



ق متزايد [١ ، ٣]

ق متناقص [٠ ، ١] ، [٣ ، ٥]

* س = صفر عظمى مطلقة ق(٠) = ٢
* س = ٣ عظمى محلية ومطلقة ق(٣) = ٢
* س = ١ صغرى محلية ق(١) = −٢
* س = ٥ صغرى مطلقة ق(٥) = −١٨

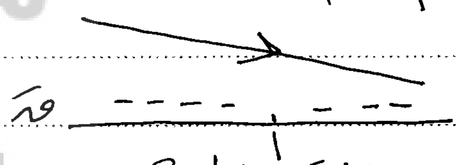
٥) . ق(س) = (١ − س)³

الحل: مجاله س ∈ ح

ق′(س) = ٣(١ − س)² × −١ = ٠

⇐ س = ١

قيم س الحرجة {١}



ق متناقص على ح

لا يوجد قيم قصوى

٦) . ق(س) = (س + ١)³ (س − ٢)⁶

الحل: المجال ح .

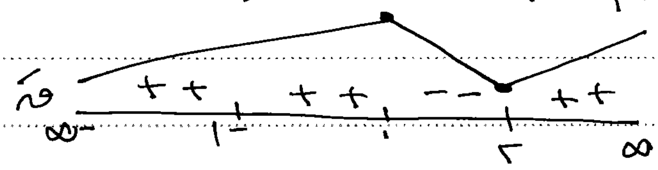
ق′(س) = (س + ١)³ × ٦(س − ٢)⁵ (١) + (س − ٢)⁶ × ٣(س + ١)² × ١ = ٠

⇐ (س + ١)² (س − ٢)⁵ (٦(س + ١) + ٣(س − ٢))

⇐ (س + ١)² (س − ٢)⁵ (٩س) = ٠

$\boxed{\text{س} = -١}$ $\boxed{\text{س} = ٢}$ $\boxed{\text{س} = ٠}$

قيم س الحرجة {−١ ، ٢ ، ٠}



ق متزايد ح (−∞ ، ٠] ، [٢ ، ∞)

ق متناقص ح [٠ ، ٢]

* عند س = ٠ عظمى محلية هي ق(٠) = ٦٤
* عند س = ٢ صغرى محلية هي ق(٢) = صفر

٧) . بالأفرع التالية جد ١. س الحرجة ٢. فترات التزايد والتناقص

أ. ق(س) = س(٤ − س)³ ، س ∈ [−١ ، ٥]
و١،٢

ب. ق(س) = س³ − ٣س + ٥ ، س ∈ (−٢ ، ٣)

ج. ق(س) = (س − ١)⁵

د. ق(س) = س⁵ − ٥س³/٣

هـ. ق(س) = س³ − ٣س ، س ∈ [٠ ، ٣)

اقترانات مثلثية

لاحظ : اقتراني جا ، جتا دائماً متصلة وقابلة للاشتقاق .

(8) . ق(س) = 2 جتا س ، س ∈ $[0 ، 2\pi]$

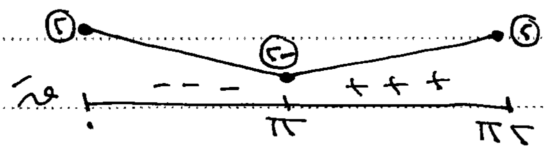
الحل : المجال س ∈ $[0 ، 2\pi]$

ق'(س) = −2 جا س = صفر

⇐ جا س = صفر

⇐ س = 0 ، π ، 2π

∴ قيم س الحرجة هي { 0 ، π ، 2π }



ق(س) متزايد في $[\pi ، 2\pi]$

ق(س) متناقص في $[0 ، \pi]$

* عند س = π صغرى محلية ومطلقة ق(π) = −2

عند س = 0 ∴ عظمى مطلقة ق(0) = 2

عند س = 2π عظمى مطلقة ق(2π) = 2

(9) . ق(س) = جتا س − $\frac{1}{2}$ جتا 2س

س ∈ $[0 ، 2\pi]$

الحل : ق متصل على $[0 ، 2\pi]$

وقابل للاشتقاق على $(0 ، 2\pi)$

ق'(س) = − جا س + جا 2س = 0 ∴

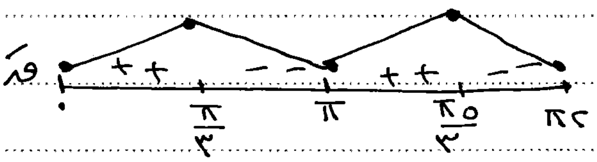
− جا س + 2 جا س جتا س = 0 ∴

جا س (−1 + 2 جتا س) = 0 ∴

جا س = 0 ، جتا س = $\frac{1}{2}$

س = 0 ، π ، 2π ، س = $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{5\pi}{3}$

قيم س الحرجة { 0 ، 2π ، π ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{5\pi}{3}$ }



ق متزايد $[0 ، \frac{\pi}{3}]$ ، $[\pi ، \frac{5\pi}{3}]$

ق متناقص $[\frac{\pi}{3} ، \pi]$ ، $[\frac{5\pi}{3} ، 2\pi]$

* س = $\frac{\pi}{3}$ عظمى محلية ومطلقة ق($\frac{\pi}{3}$) = $\frac{3}{4}$

س = $\frac{5\pi}{3}$ عظمى محلية ومطلقة ق($\frac{5\pi}{3}$) = $\frac{3}{4}$

~~س = 0 صغرى ق(0) = $\frac{1}{2}$~~

~~س = 2π صغرى ق(2π) = $\frac{1}{2}$~~

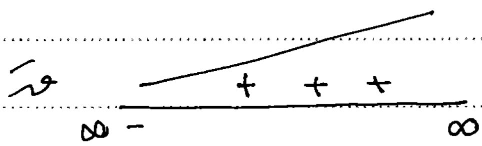
س = π صغرى محلية ومطلقة ق(π) = $\frac{-3}{2}$

(10) . ق(س) = 7س + جا س ، س ∈ ح

الحل : ق'(س) = 7 + جتا س ≠ 0 ∵

لأن −1 ≤ جتا س ≤ 1

لا يوجد حرجة



ق(س) متزايد على ح .

لا يوجد قيم قصوى محلية ومطلقة .

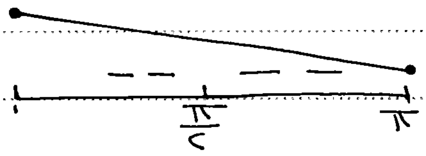
(١١) . ق(س) = $جتا^{٥}$ س ، س ∈ [٠ ، π]

الحل : ق'(س) = ٥ $جتا^{٤}$ س × − جا س = ٠

− ٥ $جتا^{٤}$ س = ٠ .

جتا س = ٠　　جا س = ٠

س = $\frac{π}{٢}$ ، $\frac{٣π}{٢}$ ×　　س = ٠ ، π ، ٢π ×



ق(س) متناقص على [٠ ، π]

س = ٠ : عظمى مطلقة وقيمتها ق(٠) = ١

س = π صغرى مطلقة وقيمتها ق(π) = −١

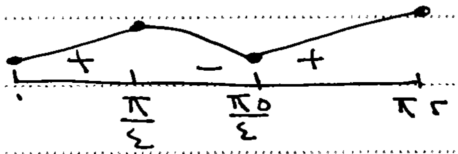
(١٢) . ق(س) = جا س + جتا س

س ∈ [٠ ، ٢π]

الحل : ق' = جتا س − جا س = ٠

← جتا س = جا س

← ظا س = ١ ← س = $\frac{π}{٤}$ ، $\frac{٥π}{٤}$



ق متزايد على [٠ ، $\frac{π}{٤}$] ، [$\frac{٥π}{٤}$ ، ٢π]

ق متناقص على [$\frac{π}{٤}$ ، $\frac{٥π}{٤}$]

* عند س = $\frac{π}{٤}$ عظمى محلية ومطلقة

ق($\frac{π}{٤}$) = $\sqrt{٢}$

عند س = $\frac{٥π}{٤}$ صغرى محلية ومطلقة

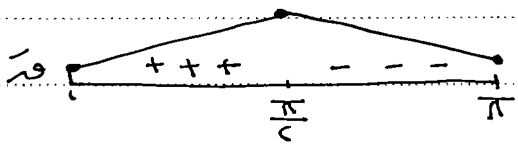
ق($\frac{٥π}{٤}$) = − $\sqrt{٢}$

(١٣) . ق(س) = $\sqrt{جا س}$ ، س ∈ [٠ ، π]

الحل : مجاله معرف على [٠ ، π]

ق'(س) = $\frac{جتا س}{٢\sqrt{جا س}}$

حرجة ← أطراف ٠ ، π
← جذور البسط جتا س = ٠ ← س = $\frac{π}{٢}$ ، $\frac{٣π}{٢}$ ×
← المقام (ق' غير موجودة) عند
جا س = ٠ ← س = ٠ ، π ، ٢π ×



متزايد على [٠ ، $\frac{π}{٢}$] ، متناقص على [$\frac{π}{٢}$ ، π]

{ علماً أنه نكتب متزايد على صورة ق' > ٠
وعلماً أنه نكتب متناقص على صورة ق' < ٠ }

* ($\frac{π}{٢}$ ، ١) عظمى محلية ومطلقة .

(٠ ، ٠) (π ، ٠) صغرى مطلقة .

(١٤) . ق(س) = جتا س − $\frac{١}{٣}$ $جتا^{٣}$ س ، س ∈ [٠ ، ٢π]　تدريب

أوجد

١. النقاط الحرجة .

٢. فترات التزايد والتناقص .

٣. القيم القصوى .

الجواب : ١. (٠ ، $\frac{٢}{٣}$) (٢π ، $\frac{٢}{٣}$) (π ، $\frac{-٢}{٣}$)

٢. متزايد [π ، ٢π] متناقص [٠ ، π]

٣. (π ، $\frac{-٢}{٣}$) صغرى مطلقة ومحلية

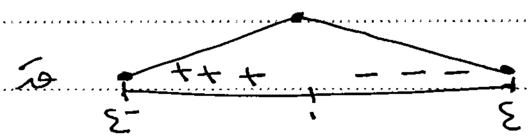
(٠ ، $\frac{٢}{٣}$) (٢π ، $\frac{٢}{٣}$) عظمى مطلقة

15. ق(س) = $\sqrt{16 - س^2}$

الحل: نبحث مجاله   المجال [-4، 4]

ق'(س) = $\frac{-2س}{2\sqrt{16-س^2}}$ ، البسط س = 0 ∈ ، المقام س = ±4 ∈

قيم س الحرجة {-4، 0، 4}



ق(س) متزايد في [-4، 0]

ق(س) متناقص في [0، 4]

* (0، 4) عظمى محلية ومطلقة

(-4، 0) (4، 0) صغرى مطلقة

16. ق(س) = $\sqrt{س^2 - 25}$ حيث |س| ≥ 5

الحل: |س| ≥ 5 ⟸ س ≥ 5 أو س ≤ -5

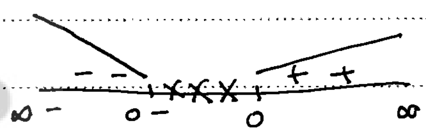
ق متصل على مجاله

ق'(س) = $\frac{2س}{2\sqrt{س^2-25}}$ البسط س = 0 ∉ مجال

المقام س = ±5 ∈ مجال

قيم س الحرجة {-5، 5}

ق'(س)



ق متناقص (-∞، -5]

ق متزايد [5، ∞)

(-5، 0) (5، 0) صغرى مطلقة

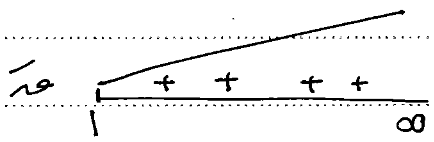
17. ق(س) = $\sqrt{4س - 4}$

الحل: نبحث مجاله س = 1   مجال [1، ∞)

ق'(س) = $\frac{4}{2\sqrt{4س-4}}$ البسط 4 ≠ 0

المقام 4س − 4 = 0

س = 1 ∈ مجال



متزايد [1، ∞)

* (1، 0) صغرى مطلقة.

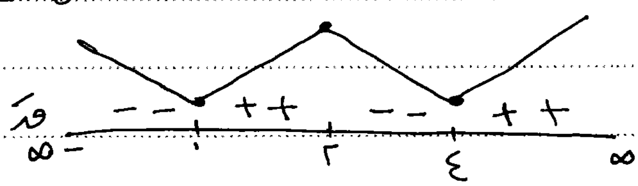
18. ق(س) = $\sqrt[3]{(س^2 - 4س)^2}$ المجال ح

الحل: ق(س) = $(س^2 - 4س)^{\frac{2}{3}}$

ق'(س) = $\frac{2}{3}(س^2 - 4س)^{\frac{-1}{3}}(2س - 4)$

= $\frac{2(2س-4)}{3\sqrt[3]{(س^2-4س)}}$ البسط س = 2

المقام س = 0، س = 4



ق متزايد [0، 2] [4، ∞)

ق متناقص (-∞، 0] [2، 4]

* (2، $\sqrt[3]{16}$) عظمى محلية

(0، 0) (4، 0) صغرى محلية ومطلقة

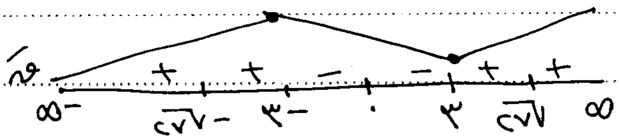
⑲ . $ق(س) = \sqrt[3]{س^{٣} - ٢٧س}$

الحل: مجاله $س \in ح$

$قَ(س) = \frac{١}{٣}(س^{٣} - ٢٧س)^{\frac{-٢}{٣}}(٣س^{٢} - ٢٧)$

$= \frac{٣س^{٢} - ٢٧}{٣\sqrt[3]{(س^{٣} - ٢٧س)^{٢}}}$ البسط $س = \pm ٣$ ، المقام ٠ ، $\pm\sqrt{٢٧}$

س الحرجة $\{\pm ٣ ، ٠ ، \pm\sqrt{٢٧}\}$



متزايد $(-\infty ، -٣] ، [٣ ، \infty)$

متناقص $[-٣ ، ٣]$

* $(-٣ ، \sqrt[3]{٥٤})$ عظمى محلية .

$(٣ ، \sqrt[3]{-٥٤})$ صغرى محلية .

⑳ . $ق(س) = ٣س^{\frac{١}{٣}} - س$ تدريب

جد ① . النقاط الحرجة

$(٠،٠)$ $(١ ، ٢)$ $(-١ ، -٢)$

② . التزايد $[-١ ، ١]$

التناقص $(-\infty ، -١] ، [١ ، \infty)$

نقطة قيمة

③ . $(-١ ، -٢)$ صغرى محلية .

نقطة قيمة

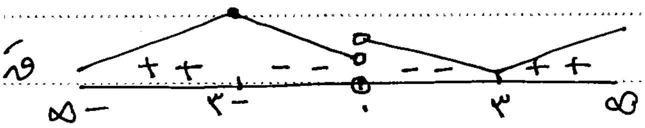
$(١ ، ٢)$ عظمى محلية .

㉑ . $ق(س) = س + \frac{٩}{س}$

الحل: المجال $ح - \{٠\}$

$قَ(س) = ١ + \frac{-٩}{س^{٢}} = \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢}}$ البسط ± ٣ ، المقام ٠ $\notin$

س الحرجة $\{\pm ٣\}$



ق متزايد $(-\infty ، -٣] ، [٣ ، \infty)$

ق متناقص $[-٣ ، ٠) ، (٠ ، ٣]$

* $س = -٣$ عظمى محلية $ق(-٣) = -٦$

$س = ٣$ صغرى محلية $ق(٣) = ٦$

㉒ . $ق(س) = س^{٣} + \frac{٤٨}{س}$ ، $س \neq ٠$.

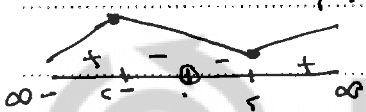
الحل: مجاله $س \in ح - \{٠\}$

$قَ(س) = ٣س^{٢} + \frac{-٤٨}{س^{٢}} = \frac{٣س^{٤} - ٤٨}{س^{٢}}$

البسط $س = \pm ٢$

المقام $س = ٠ \notin$ مجال

قيم س الحرجة $\{-٢ ، ٢\}$



متزايد $(-\infty ، -٢] ، [٢ ، \infty)$

متناقص $[-٢ ، ٠) ، (٠ ، ٢]$

* $(-٢ ، -٣٢)$ عظمى محلية (نقطة قيمة عظمى محلية)

$(٢ ، ٣٢)$ صغرى محلية (نقطة قيمة صغرى محلية)

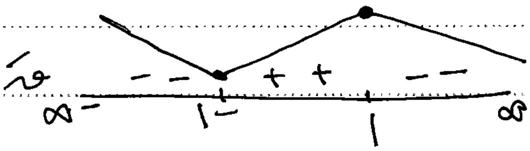
٢٣. ق(س) = $\frac{س}{س^2+1}$

الحل: مجاله ح

ق'(س) = $\frac{(س^2+1)(1)-(س)(2س)}{(س^2+1)^2}$

البسط س = ±١

المقام ∅ ⟸ س حرجه {±١}



متزايد [−١، ١]، متناقص (−∞، −١]، [١، ∞)

* (−١، −½) صغرى محلية.

(١، ½) عظمى محلية.

٢٤. ق(س) = $\begin{cases} 4-س^2 & ، س \le 1 \\ \frac{3}{س} & ، س > 1 \end{cases}$

الحل: مجاله ح

ق'(س) = $\begin{cases} -2س & ، س < 1 \\ \frac{-3}{س^2} & ، س > 1 \\ \text{غير موجودة} & ، س = 1 \end{cases}$

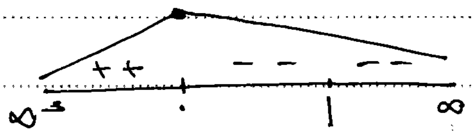
الحرجه ⟵ اطراف ×

⟵ جذور القاعدة١ −٢س = ٠ ⟸ س = ٠ ∈

القاعدة٢ بسط −٣ ≠ ٠

مقام س² = ٠ ∉

⟵ تحول س = ١



ق متزايد على (−∞، ٠]

ق متناقص على [٠، ∞)

* (٠، ٤) عظمى محلية ومطلقة

٢٥. ق(س) = $\begin{cases} س^{\frac{2}{5}}+16 & ، س \le 1 \\ س+\frac{16}{س} & ، س > 1 \end{cases}$

الحل: المجال ح

ق'(س) = $\begin{cases} \frac{2}{5}س^{\frac{-3}{5}} & ، س < 1 \\ 1-\frac{16}{س^2} & ، س > 1 \end{cases}$

غير موجودة ، س = ١

لاحظ ق متصل عند س = ١ لكن ق'(١)⁺ ≠ ق'(١)⁻

الحرجه ⟵ اطراف ×

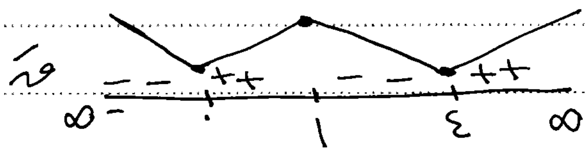
⟵ جذور ⟵ قاعدة١ ⟵ $\frac{2}{5\sqrt[5]{س^3}} \ne 0$ ⟸ س = ٠ ∈

⟵ قاعدة٢: $\frac{س^2-16}{س^2} = 0$ ⟸ س = ٤، −٤ ✓ ✗

س² = ٠ ⟸ س = ٠ ∉

⟵ التحول س = ١

الحرجه {٠، ٤، ١}



ق متزايد في [٠، ١]، [٤، ∞)

ق متناقص في (−∞، ٠]، [١، ٤]

* (١، ١٧) عظمى محلية

(٤، ٨) صغرى محلية ومطلقة

(٠، ١٦) صغرى محلية

(٣٦) ، ع(س) = { س^2 + ٦س + ٤ ، س ≤ ٠ ؛ [س + ٤] ، ٠ < س < ١ ؛ |٣س + ١| ، س ≥ ١ }

الحل : نغير تعريف الصحيح س = -٤ ، ل = ١

-٤　-٣　-٢　-١　٠　١　(٤)

نغير تعريف المطلق س = $-\frac{1}{3}$

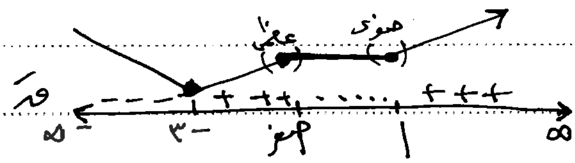
ع(س) = { س^2 + ٦س + ٤ ، س ≤ ٠ ؛ ٤ ، ٠ < س < ١ ؛ ٣س + ١ ، س ≥ ١ }

ع متصل على ح

ع'(س) = { ٢س + ٦ ، س < ٠ ؛ صفر ، ٠ < س < ١ ؛ ٣ ، س > ١ ؛ غير موجودة ، س ∈ {٠ ، ١} }

الحرجة ← أطراف ×
　　　　← جذور ع'١ ← س = -٣ ∈ مجالها
ع'٢ = ٠ ← كل الفترة المفتوحة (٠ ، ١)
ع'٣ ← ٣ ≠ ٠
∴ ← التحول {٠ ، ١}

الحرجة [٠ ، ١] ∪ {-٣}



ع متناقص (-∞ ، -٣]

ع متزايد [-٣ ، ٠] ، [١ ، ∞)

ع ثابت [٠ ، ١]

* (-٣ ، -٥) صغرى محلية ومطلقة

(٠ ، ٤) عظمى محلية

(١ ، ٤) صغرى محلية

(٢٧) ، ع(س) = س^2 |س - ٣|

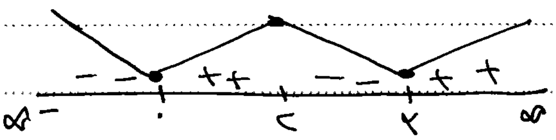
الحل : نغير تعريف المطلق　-- | ++ (٣)

ع(س) = { س^2(س - ٣) ، س ≥ ٣ ؛ س^2(٣ - س) ، س < ٣ }

ع(س) = { س^3 - ٣س^2 ، س ≥ ٣ ؛ ٣س^2 - س^3 ، س < ٣ }

ع'(س) = { ٣س^2 - ٦س ، س > ٣ ؛ ٦س - ٣س^2 ، س < ٣ ؛ غير موجودة ، س = ٣ }

الحرجة ← أطراف ××
　　　　← جذور ع'١ ← ٣س^2 - ٦س = ٠
← س = ٠ ، س = ٢
　　×　　　×
← ع'٢ ← ٦س - ٣س^2 = ٠
س = ٠ ، س = ٢
← التحول س = ٣
∴ قيم س الحرجة {٠ ، ٢ ، ٣}



ع متزايد [٠ ، ٢] ، [٣ ، ∞)

ع متناقص (-∞ ، ٠] ، [٢ ، ٣]

* (٢ ، ٤) عظمى محلية　نقطة

(٠ ، ٠) صغرى محلية ومطلقة　نقطة قيمة

(٣ ، ٠) صغرى محلية ومطلقة　نقطة قيمة

تعلم أن :

١. اذا كان ق(س) = [جـ س + د] ،
س ∈ [أ ، ب]
فإن قيم س الحرجة هي [أ ، ب]
(السبب) هو :
لأن المشتقة في هذه الحالة إمّا صفر
أو غير موجودة (وفي كل الأحوال هي حرجة)

٢. اذا كان ق(س) = جـ (ثابت)
س ∈ [أ ، ب]
فإن س الحرجة هي [أ ، ب]
(السبب) هو :
لأن المشتقة = صفر لكل س ∈ (أ ، ب)
و ق'(أ) ، ق'(ب) غير موجودة ← حرجة

مثال ١: ق(س) = [٣س - ٧] ، س ∈ [١ ، ٣]
فإن مجموعة قيم س الحرجة هي :
[١ ، ٣]

مثال ٢: ق(س) = ٩ ، س ∈ [-٤ ، ٦]
فإن الاحداثي السيني للنقاط الحرجة هي :
[-٤ ، ٦]

المجاهيل :

١) اذا كانت (أ، ب) تمثل نقطة حرجة فإن ١. ق(أ) = ب

٢. قَ(أ) = ٠ أو قَ(أ) غير موجودة ، ولكن اذا كان ق كثير حدود ، فإن قَ(أ) = صفر.

٢) كل قيمة (عظمى أو صغرى) هي حرجة ، والعكس غير صحيح.

س١ : اذا كان ق(س) = أ س² − ١٢س نقطة حرجة عندما س = ٢ ، جد الثابت أ.

الحل: قَ(٢) = صفر

قَ(س) = ٢أ س − ١٢

قَ(٢) = ٢أ × ٢ − ١٢ = ٠

٤أ − ١٢ = ٠ ← $\boxed{أ = ٣}$

س٢ : جد قاعدة كثير حدود من الدرجة الثالثة اذا علمت ان للاقتران نقطة حرجة عند (٠، ٥) وله قيمة صغرى عند النقطة (١، ٣).

الحل:

ق(س) = أ س³ + ب س² + جـ س + د

(٠، ٥) حرجة ← ق(٠) = ٥

قَ(٠) = ٠

قَ(س) = ٣أ س² + ٢ب س + جـ

(١، ٣) ← ق(١) = ٣

قَ(١) = صفر

ق(٠) = ٥ ← $\boxed{د = ٥}$

قَ(٠) = ٠ ← $\boxed{جـ = ٠}$

ق(١) = أ + ب + جـ + د = ٣

أ + ب + ٠ + ٥ = ٣

$\boxed{أ + ب = −٢}$ ١

قَ(١) = ٣أ + ٢ب + جـ = ٠

$\boxed{٣أ + ٢ب = ٠}$ ٢

بحل المعادلتين أ = ٤ ، ب = −٦

∴ ق(س) = ٤س³ − ٦س² + ٥

س٣ : ق(س) = م س² + ٣ جـ س ، ما قيمة الثوابت م ، جـ علماً انه يوجد للنقطة (١، ٦) قيمة قصوى.

الحل: (١، ٦) قصوى ← ق(١) = ٦

← قَ(١) = ٠

قَ(س) = ٢م س + ٣جـ

* ق(١) = م + ٣جـ = ٦ .... ١ معادلة ١

* قَ(١) = ٢م + ٣جـ = ٠ .... ٢ معادلة ٢

م١ − م٢ ⇐ −م = ٦ ← م = −٦

نعوض في ١

−٦ + ٣جـ = ٦

٣جـ = ١٢

جـ = ٤

س٤ : ق(س) = م س² + س³ + ب س + ٣ و
وزارية
جد الثوابت م، ن، و حيث عند النقطة (-١، ٥) قيمة عظمى، وعند س = ٢ قيمة صغرى.

س٥ : إذا كان
٢٠١٥
ق(س) = $(م س - ب)^{\frac{2}{3}}$ + ٥ب ،
م ≠ ٠ ، وكان للاقتران ق(س) قيمة قصوى عند النقطة (٤، ١٠)
جد قيمة كل من م، ب ؟

الحل: ق'(س) = $\frac{2}{3}(م س - ب)^{-\frac{1}{3}}$ × م + ٠
= $\frac{٢م}{٣\sqrt[3]{م س - ب}}$

ق(٤) = ١٠
$(٤م - ب)^{\frac{2}{3}}$ + ٥ب = ١٠ ...... ①

ق'(٤) = غير موجودة لأنّ
ق'(٤) مستحيل = صفر لأنّ البسط ثابت
∵ البسط ٢م ثابت
∴ المقام = ٠
$٣\sqrt[3]{٤م - ب}$ = ٠
⟸ ٤م − ب = ٠ ...... ②
$\boxed{٤م = ب}$ ⟵
نعوض بـ ①
$(٤م - ٤م)^{\frac{2}{3}}$ + ٥ب = ١٠
$\boxed{ب = ٢}$
∴ ٤م = ٢ ⟵ م = $\frac{1}{2}$

س٦ : إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين متصلين على [م، ب]، وقابلين للاشتقاق على (م، ب)، وكان كل من ق(س)، هـ(س) متزايداً على [م، ب] وكان
ل(س) = ق(س) + هـ(س)
اثبت أن ل(س) متزايداً على [م، ب].

الحل:
ل(س) = ق(س) + هـ(س)
ل'(س) = ق'(س) + هـ'(س)

نريد أن نثبت أن ل'(س) > ٠ لكل س ∈ (م، ب)

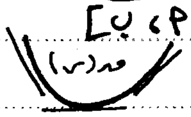
∵ ق متزايد على [م، ب] ⟸ ق'(س) > ٠ لكل س ∈ (م، ب)
∵ هـ(س) متزايد على [م، ب] ⟸ هـ'(س) > ٠ لكل س ∈ (م، ب)
(جمع عددين موجبين يعطي عدد موجب)
∴ ق' + هـ' > ٠
∴ ل'(س) > ٠ لكل س ∈ (م، ب)
∴ ل(س) متزايد على [م، ب].

س٧ : إذا كان ق(س) اقتران متصل على [م، ب]
وزارية
وقابلاً للاشتقاق على (م، ب)، وكان ق'(س) > ٠ لكل س ∈ (م، ب)، وكان هـ(س) = ق(س) + س³ ، اثبت أن هـ(س) متزايد على [م، ب].

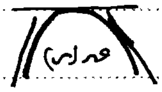
* التقعر *

تعريف : اذا كان ق اقتراناً "معرفاً" على [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق على (أ، ب)

١) يكون ق مقعراً للأعلى على الفترة [أ، ب] اذا وقعت جميع مماسات منحنى ق تحت منحنى ق في الفترة [أ، ب]



٢) يكون ق مقعراً للأسفل على الفترة [أ، ب] اذا وقعت جميع مماسات منحنى ق فوق منحنى ق في الفترة [أ، ب].



تعريف : نقطة الانعطاف

تسمى النقطة (س١، ق(س١)) نقطة انعطاف لمنحنى ق اذا تحقق شرطين هما :

١. ق متصل عند س = س١

٢. يتغير ق من اتجاه تقعره من أسفل إلى أعلى أو العكس " من أعلى لأسفل".

لا تنسى تحديد المجال أولاً...

العلاقة بين المشتقة الثانية والتقعر :-

١. اذا كان ق(س) مقعر للأعلى في [أ، ب]

* اذا زاد الاحداثي السيني لنقطة التماس ← زاد ميل المماس لمنحنى ق عند النقطة

← ∴ ق′(س) متزايد في (أ، ب)

← ق″(س) موجبة في (أ، ب)

∴ ق″ > ٠ لكل س ∈ (أ، ب)

٢. اذا كان ق(س) مقعر للأسفل في [أ، ب]

* اذا زاد الاحداثي السيني لنقطة التماس ← نقص ميل المماس لمنحنى ق عند النقطة

← ∴ ق′(س) متناقص على (أ، ب)

← ق″(س) سالبة في (أ، ب)

∴ ق″ < ٠ لكل س ∈ (أ، ب)

خطوات الحل لايجاد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف :-

① . نحدد مجال الاقتران .

② . نجد ق″(س) ثم نجد قيم س التي يكون عندها ق″(س) = ٠ أو غير موجودة بشرط ان تكون ضمن المجال (ونهمل غير ذلك).

③ . نحدد اشارة ق″(س) على خط الاعداد ضمن مجال الاقتران حيث

ق″(س) موجبة ← ق مقعر للأعلى ∪

ق″(س) سالبة ← ق مقعر للأسفل ∩

أسئلة شاملة على الموضوع :-

لكل من الاقترانات التالية جد ما يلي :-

١). فترات التقعر لأعلى ولأسفل (إن وجدت).

٢). نقط الانعطاف (إن وجدت).

كتاب ١. $ق(س) = ٦س^٣ - س^٤$

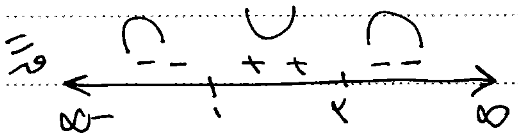
الحل: مجال ق(س) هو ح

$قَ = ١٨س^٢ - ٤س^٣$

$قً = ٣٦س - ١٢س^٢ = ٠$

$١٢س (٣ - س) = ٠$

س = ٠ ، س = ٣ ∈ مجال



ق مقعر لأسفل (−∞ ، ٠] ، [٣ ، ∞)

ق مقعر لأعلى [٠ ، ٣]

عند س = ٠ ، س = ٣ ق متصل لأنه كثير حدود ولأنه تغير اتجاه تقعره

∴ (٠ ، ٠) ، (٣ ، ٨١) نقط انعطاف

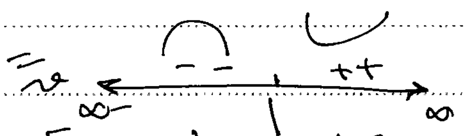
٢. $ق(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ٣س + ٤$

الحل: مجاله ح

$قَ(س) = ٣س^٢ - ٦س + ٣$

$قً(س) = ٦س - ٦ = ٠$

س = ١ ∈ مجال



ق مقعر لأسفل (−∞ ، ١]

ق مقعر لأعلى [١ ، ∞)

(١ ، ق(١)) نقطة انعطاف (١ ، ٥)

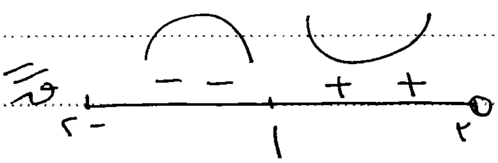
٣. $ق(س) = \frac{١}{٣}س^٣ - س^٢ + ٢$ ، س ∈ [−٢ ، ٣) ، جد
٢٠١٠

١. الفترات التي يكون فيها ق مقعر لأعلى.

٢. نقطة الانعطاف لمنحنى ق.

الحل: $قَ(س) = س^٢ - ٢س$

$قً(س) = ٢س - ٢ = ٠$ ⇐ س = ١ ∈ مجال



١. ق مقعر لأعلى [١ ، ٣)

٢. عند س = ١ ق متصل كثير حدود وتغير اتجاه تقعره

∴ $(١ ، ق(١)) = (١ ، \frac{٤}{٣})$

نقطة انعطاف

٤. $ق(س) = س^{٤} - ٦س^{٣} + ١٢س^{٢}$ ، كتاب

$س \in [-٥ ، ٥]$

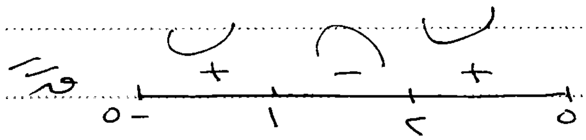
الحل: $قَ = ٤س^{٣} - ١٨س^{٢} + ٢٤س$

$قً = ١٢س^{٢} - ٣٦س + ٢٤ = ٠$

$\leftarrow س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س - ١) = ٠$

$س = ٢$ ، $س = ١ \in$ مجال



مقعر للأعلى $[-٥ ، ١]$ ، $[٢ ، ٥]$

مقعر للأسفل $[١ ، ٢]$

* عند $س = ١$ ، $س = ٢$ ق متصل لأنه كثير حدود و يغير ق اتجاه تقعره $(١ ، ٧)$ ، $(٢ ، ١٦)$ نقط انعطاف

٥. كتاب: $ق(س) = س^{\frac{١}{٥}}$ ، $س \in [-٢ ، ٢]$

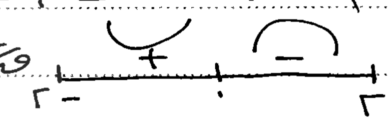
الحل: $قَ(س) = \frac{١}{٥} س^{\frac{-٤}{٥}}$

$قً(س) = \frac{-٤}{٢٥} س^{\frac{-٩}{٥}}$

$= \frac{-٤}{٢٥ \sqrt[٥]{س^{٩}}}$

البسط $-٤ \neq ٠$

المقام $س = ٠ \in$ مجال



مقعر للأعلى $[-٢ ، ٠]$

مقعر للأسفل $[٠ ، ٢]$

عند $س = ٠$ ق متصل

ق يغير اتجاه تقعره $(٠ ، ٠)$ نقطة انعطاف

٦. $ق(س) = س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{١}{٣}}$ ، $س \in ح$
كتاب ١٤٨/ س٢

الحل: $قَ = \frac{٢}{٣} س^{\frac{-١}{٣}} - \frac{١}{٣} س^{\frac{-٢}{٣}}$

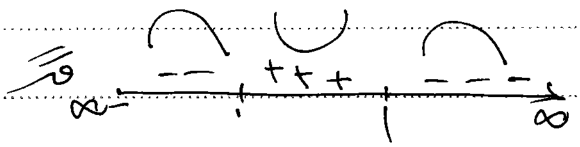
$قً = \frac{-٢}{٩} س^{\frac{-٤}{٣}} + \frac{٢}{٩} س^{\frac{-٥}{٣}}$

$= \frac{-٢ \times س^{\frac{١}{٣}}}{س^{\frac{١}{٣}} \times ٩ س^{\frac{٤}{٣}}} + \frac{٢}{٩ س^{\frac{٥}{٣}}}$ نوحد مقامات

$= \frac{-٢\sqrt[٣]{س} + ٢}{٩ \sqrt[٣]{س^{٥}}}$

البسط $= ٠ \longleftarrow س = ١ \in$ مجال

المقام $= ٠ \longleftarrow س = ٠ \in$ مجال



ق مقعر للأسفل $(-\infty ، ٠]$ ، $[١ ، \infty)$

ق مقعر للأعلى $[٠ ، ١]$

$(٠ ، ٠)$ $(١ ، ٠)$ نقط انعطاف

لأنه عند $س = ٠$ ، $س = ١$ ق متصل و يغير اتجاه تقعره.

٧. $ق(س) = \sqrt{١٦ - س^٢}$

الحل: نحدد مجال

$- \quad ٤- \quad + \quad ٤ \quad -$

مجاله $[-٤ ، ٤]$

$ق' = \frac{-٢س}{٢\sqrt{١٦-س^٢}} = -س \times (١٦-س^٢)^{-\frac{١}{٢}}$

$ق'' = -س \times -\frac{١}{٢}(١٦-س^٢)^{-\frac{٣}{٢}} \times -٢س + (١٦-س^٢)^{-\frac{١}{٢}} \times -١$

$= -س^٢(١٦-س^٢)^{-\frac{٣}{٢}} - (١٦-س^٢)^{-\frac{١}{٢}} = ٠$

$\frac{-س^٢}{(١٦-س^٢)^{\frac{٣}{٢}}} - \frac{١}{(١٦-س^٢)^{\frac{١}{٢}}} = ٠$

نوحد مقامات

$ق'' = \frac{-س^٢}{(١٦-س^٢)^{\frac{٣}{٢}}} - \frac{١ \times (١٦-س^٢)^١}{(١٦-س^٢)^{\frac{٣}{٢}}}$

$= \frac{-١٦}{\sqrt{(١٦-س^٢)^٣}}$

البسط $\neq ٠$

المقام $س = \mp ٤$

$ق''$: $٤-$ — — — — — ٤

مقعر لأسفل $[-٤ ، ٤]$

لا يوجد نقط انعطاف

٨. $ق(س) = س + \frac{١}{س}$

الحل: مجاله $ح - \{٠\}$

$ق'(س) = ١ + \frac{-١}{س^٢}$

$ق''(س) = \frac{١ \times ٢س}{س^٤} = \frac{٢}{س^٣}$

البسط $٢ \neq ٠$

المقام $س = ٠ \notin$ للمجال

$ق''$: $\infty-$ — — — ٠ + + + ∞

ق مقعر لأعلى $(٠ ، \infty)$

ق مقعر لأسفل $(-\infty ، ٠)$

لا يوجد نقط انعطاف لأن $س = ٠ \notin$ للمجال

٩. $ق(س) = \left(\frac{س-١}{س}\right)^٢$

الحل: المجال $ح - \{٠\}$

$ق(س) = \left(١ - \frac{١}{س}\right)^٢$

$ق'(س) = ٢\left(١ - \frac{١}{س}\right) \times \left(٠ + \frac{١}{س^٢}\right)$

$ق'(س) = ٢\left(\frac{١}{س^٢} - \frac{١}{س^٣}\right)$

$ق''(س) = ٢\left(\frac{-١ \times ٢س}{س^٤} - \frac{-١ \times ٣س^٢}{س^٦}\right)$

$= ٢\left(\frac{٣س^٢ - ٢س^٣}{س^٦}\right)$

البسط $س^٢(٣ - ٢س) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، س = \frac{٣}{٢}$

$\notin \quad \in$

المقام $س = ٠ \notin$ للمجال

$ق''$: $\infty-$ + ٠ + $\frac{٣}{٢}$ − ∞

ق مقعر لأعلى $(٠ ، \frac{٣}{٢}]$ ، $(-\infty ، ٠)$

ق مقعر لأسفل على $[\frac{٣}{٢} ، \infty)$

* $\left(\frac{٣}{٢} ، \frac{١}{٩}\right)$ نقطة انعطاف

١٠. ق(س) = جاس − جتاس ، س ∈ [٠ ، π]

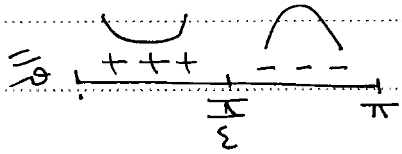
الحل : ق′(س) = جتاس + جاس

ق″(س) = − جاس + جتاس = ٠

جتاس = جاس

ظاس = ١

س = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$ ✗



مقعر للأعلى [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$]

مقعر للأسفل [$\frac{\pi}{٤}$ ، π]

($\frac{\pi}{٤}$ ، ٠) نقطة انعطاف

١١. ق(س) = جتاس + جاس + ١ ، س ∈ [٠ ، π]

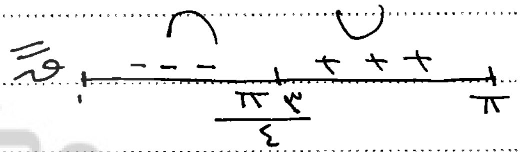
الحل : ق′ = − جاس + جتاس

ق″ = − جتاس − جاس = ٠

← − جتاس = جاس

← ظاس = −١

← س = $\frac{٣\pi}{٤}$ ، ٣١٥° ✗



ق مقعر للأعلى [$\frac{٣\pi}{٤}$ ، π]

ق مقعر للأسفل [٠ ، $\frac{٣\pi}{٤}$]

($\frac{٣\pi}{٤}$ ، ١) نقطة انعطاف

١٢. ق(س) = ١ + جتا²س − جتا٢س ، س ∈ [٠ ، π]

الحل : ق′(س) = ٢جتاس × −جاس + ٢جا٢س

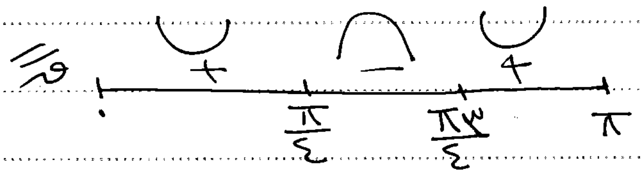
= − جا٢س + ٢جا٢س = جا٢س

ق″(س) = ٢جتا٢س = ٠

جتا٢س = ٠

← ٢س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$

← س = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$



ق مقعر للأعلى [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$] ، [$\frac{٣\pi}{٤}$ ، π]

ق مقعر للأسفل [$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$]

✱ ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣}{٢}$) نقطة انعطاف

($\frac{٣\pi}{٤}$ ، $\frac{٣}{٢}$) نقطة انعطاف

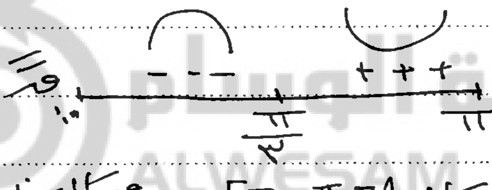
١٣. ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س² + ٢جتاس ، س ∈ [٠ ، π]

الحل : ق′(س) = س − ٢جاس

ق″(س) = ١ − ٢جتاس = ٠

جتاس = $\frac{١}{٢}$

س = ٦٠° ∈ ، ٣٠٠° ∉



ق مقعر للأعلى [$\frac{\pi}{٣}$ ، π] ، ق مقعر للأسفل [٠ ، $\frac{\pi}{٣}$]

✱ ($\frac{\pi}{٣}$ ، ق($\frac{\pi}{٣}$)) نقطة انعطاف .

١٤. $ق(س) = س - ظا س$ ، $س \in [\frac{-\pi}{2} ، \frac{\pi}{2}]$

كتاب ٥٢/١٩

الحل: $قَ(س) = ١ - قا^٢ س$

$قً(س) = -٢ قا س قا س ظا س = ٠$

$\frac{-٢ جا س}{جتا^٣ س} = ٠$

البسط $-٢ جا س = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، \cancel{\pi} ، \cancel{٢\pi}$

المقام $جتا^٣ س = ٠ \Leftarrow س = \frac{\pi}{2} ، \cancel{\frac{٣\pi}{2}}$

* لإيجاد الزوايا السالبة المقابلة للموجبة نطرح ٢π من الزوايا المعتمدة

$س = ٠ - ٢\pi = -٢\pi$ ✗

$س = \frac{\pi}{2} - ٢\pi = \frac{-٣\pi}{2}$ ✗

قً : ++ | −−
$\frac{-\pi}{2}$ ، ٠ ، $\frac{\pi}{2}$

ق مقعر للأعلى $[\frac{-\pi}{2} ، ٠]$

ق مقعر للأسفل $[٠ ، \frac{\pi}{2}]$

$(٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠)$ نقطة انعطاف

١٥. $ق(س) = \begin{cases} س^٣ ، & -١ \le س \le ٢ \\ س^٢ + ٤ ، & ٢ < س \le ٤ \end{cases}$

الحل: $قَ(س) = \begin{cases} ٣س^٢ ، & -١ < س < ٢ \\ ٢س ، & ٢ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} ، & س = ٢ \end{cases}$

التحول $س = ٢$ ، اتصال ، اشتقاق ✗ ، $قَ(٢)^- \ne قَ(٢)^+$

$قً(س) = \begin{cases} ٦س ، & -١ < س < ٢ \\ ٢ ، & ٢ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} ، & س = ٢ \end{cases}$

أصفار قً ← $٦س = ٠ \therefore س = ٠ \in (-١ ، ٢)$

$\Leftarrow ٢ \ne ٠$

−− | ++ | ++
−١ ، ٠ ، ٢ ، ٤

مقعر للأعلى $[٠ ، ٤)$ ، مقعر للأسفل $(-١ ، ٠]$

* $(٠ ، ٠)$ نقطة انعطاف

١٦. $ق(س) = \begin{cases} س^٢ ، & -١ \le س \le ٢ \\ ٣س ، & ٢ < س \le ٤ \end{cases}$

الحل: $قَ(س) = \begin{cases} ٢س ، & -١ < س < ٢ \\ ٣ ، & ٢ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} ، & س = -١ ، ٢ ، ٤ \end{cases}$

$قً(س) = \begin{cases} ٢ ، & -١ < س < ٢ \\ \text{صفر} ، & ٢ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} ، & س = -١ ، ٢ ، ٤ \end{cases}$

أصفار قً $٢ \ne ٠$ ، $(٠ = ٠)$ لكل $س \in (٢ ، ٤)$

+++ | لا يوجد تقعر
−١ ، ٢ ، ٤

ق مقعر للأعلى $[-١ ، ٢]$

* لا يوجد نقاط انعطاف

١٧. $ق(س) = |س^٢ - ٢٥|$

جد ١. مجالات التقعر للأعلى وللأسفل

٢. نقاط الانعطاف

الجواب: ١.
++ | −− | ++
$-\infty$ ، −٥ ، ٥ ، ∞

٢. $(-٥ ، ٠)$ ، $(٥ ، ٠)$ نقاط انعطاف.

ملاحظة : -

اذا كانت (م، ب) تمثل نقطة انعطاف ، فإن :

١. ق(م) = ب

٢. ق''(م) = ٠ أو ق''(م) غير موجودة

علماً انه ق''(م) = ٠ اذا كانه ق كثير حدود .

١. ق(س) = $س^٣$ − م $س^٢$ + ٩س − ٣ كان له نقطة انعطاف عند س = ٢ جد الثابت م .

الحل : ق''(٢) = صفر

ق'(س) = ٣$س^٢$ − ٢م س + ٩

ق''(س) = ٦س − ٢م

ق''(٢) = ١٢ − ٢م = ٠ ← $\boxed{م = ٦}$

٢. اذا كان ق(س) = ١٢س + ٦(م−٢)$س^٢$ حيث س ∈ ح ، جد الثابت م التي تجعل منحنى ق مقعراً للأسفل ؟

الحل: ق'(س) = ١٢ + ١٢(م−٢) س

ق''(س) = ١٢(م−٢)

بما أنه مقعر للأسفل ، فإن

∴ ق''(س) < ٠

١٢(م−٢) < ٠

← م < ٢

← م ∈ (−∞، ٢)

٣. عين قاعدة كثير حدود من الدرجة الثالثة الذي يمر منحناه بالنقطة (٠، ٥) ، ومعادلة المماس لمنحناه عند النقطة (١، ق(١)) هي ٩س + ص − ٩ = ٠ ولمنحناه نقطة انعطاف عند س = ٢ ؟

الحل: ق(س) = م$س^٣$ + ب$س^٢$ + جـ س + د

← (٠، ٥) تقع على المنحنى ق(٠) = ٥

ق(٠) = ٠ + ٠ + ٠ + د = ٥ ← $\boxed{د = ٥}$

← (١، ق(١)) نقطة تماس تحقق المنحنى والمماس

← ٩ × ١ + ص − ٩ = ٠ ← ص = ٠

∴ نقطة التماس (١، ٠)

← ق(١) = م + ب + جـ + ٥ = ٠ *

م + ب + جـ = −٥ .... (١)

ايضاً ميل المماس = ق'(١) = ص' ⟸

نشتق المماس ٩ + ص' = ٠ ← ص' = −٩

∴ ق'(١) = −٩

∴ ق'(س) = ٣م$س^٢$ + ٢ب س + جـ *

ق'(١) = ٣م + ٢ب + جـ = −٩ .. (٢)

← س = ٢ انعطاف ← ق''(٢) = ٠

← ق''(س) = ٦م س + ٢ب

ق''(٢) = ١٢م + ٢ب = ٠ *

$\boxed{ب = −٦م}$ ... (٣)

بحل المعادلات م = ١ ، ب = −٦ ، جـ = ٠

∴ ق(س) = $س^٣$ − ٦$س^٢$ + ٥

٤. $ق(س) = أس^{٣} + ٦س^{٢} + ب$ تدريب

له نقطة انعطاف عند (١،٠)

جد أ ، ب.

الجواب: أ = -٢ ، ب = -٤

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى:-

يمكن ايجاد القيم القصوى (العظمى والصغرى) من المشتقة الثانية كالتالي:

١. نجد أصفار المشتقة الأولى

٢. نجد المشتقة الثانية ونعوض فيها أصفار المشتقة الأولى، والنتيجة كالتالي:-

أ. عندما $ق'(م) = ٠$ ، $ق''(م) > ٠$

← عند س = م قيمة صغرى هي ق(م)

ب. عندما $ق'(م) = ٠$ ، $ق''(م) < ٠$

← عند س = م قيمة عظمى هي ق(م)

خطر ج. $ق'(م) = ٠$ ، $ق''(م) = ٠$ تفشل طريقة الاختبار، ونعود لاختبار المشتقة الأولى.

* نستخدمها اذا طلبها بشكل مباشر.

١) ضع دائرة :

اذا كان ق(٢) = ٨ ، $ق'(٢) = ٠$ ، $ق''(٢) = -٥$ ، فإن للاقتران قيمة

أ. عظمى محلية هي ٢

ب. صغرى محلية هي ٢

ج. عظمى محلية هي ٨

د. صغرى محلية هي ٨

٢) اذا كان ق(-١) = ٦ ، $ق'(-١) = ٠$ ، $ق''(-١) = \frac{١}{٣}$ ، فإن س = -١ نوعها هي

أ. عظمى محلية. ب) صغرى محلية.

٣) . جد القيم العظمى والصغرى المحلية باستخدام اختبار المشتقة الثانية:-

أ. $ق(س) = س + \frac{٤}{س}$ ، س ≠ ٠.

الحل: $ق'(س) = ١ + \frac{-٤}{س^{٢}} = ٠$

$\frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢}} = ٠ \leftarrow س = \pm ٢$

$ق''(س) = \frac{٨}{س^{٣}}$

* س = ٢ ← $ق''(٢) = \frac{٨}{٨} = ١$ موجب ←

عند س = ٢ صغرى قيمتها ق(٢) = ٤

* س = -٢ ← $ق''(-٢) = \frac{٨}{-٨} = -١$ سالب ←

عند س = -٢ صغرى قيمتها ق(-٢) = -٤

ب. $ق(س) = ٣س^{٢} - س^{٣} + ٧$

الحل: $ق'(س) = ٦س - ٣س^{٢} = ٠ \leftarrow س = ٠ ، ٢$

$ق''(س) = ٦ - ٦س$

$ق''(٠) = ٦$ (صغرى) عند س = ٠ صغرى هي ق(٠) = ٧

$ق''(٢) = -٦$ (عظمى) عند س = ٢ عظمى هي ق(٢) = ١١

ج. $ق(س) = |٤س - ٢| - |س + ١| + ٧$ ، $س \in ح$

الحل: نغير التعريف

$$ق(س) = \begin{cases} ٤س - ٩ & ، س \geq ٢ \\ -٤س + ٧ & ، -١ \leq س \leq ٢ \\ ٩ - ٢س & ، س \leq -١ \end{cases}$$

$$\bar{ق}(س) = \begin{cases} ٤ & ، س > ٢ \\ -٤ & ، -١ < س < ٢ \\ -٢ & ، س < -١ \end{cases}$$

لا علينا مساواة أي قاعدة بالصفر

∴ نفشل المشتقة $\bar{ق}(س)$

← نعود لاختبار المشتقة الأولى

عند س = ٢ صغرى محلية هي

$ق(٢) = -١$

د. $ق(س) = س^٢ + \frac{١٢٨}{س}$ ، $س \neq ٠$. (تدريب)

استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية.

الحل: س = ٤ جذر $\bar{ق}(س)$

ونعوض في $\bar{\bar{ق}}(٤) = ٦$ موجبة

∴ يوجد صغرى محلية هي

$ق(٤) = ٤٨$

هـ. $ق(س) = س^٤$

الحل: $\bar{ق}(س) = ٤س^٣ = ٠ ← س = ٠$

$\bar{\bar{ق}}(س) = ١٢س^٢$

$\bar{\bar{ق}}(٠) = صفر$ فشلت الطريقة

نرجع للمشتقة الأولى

عند س = ٠ صغرى محلية هي $ق(٠) = ٠$

تحليل الأشكال البيانية

١. رسم ق(س)

*معلومة:

← خطي: معامل س موجب ، معامل س سالب

← تربيعي: $س^٢$ ، $-س^٢$

← تكعيبي: $س^٣$ ، $-س^٣$

← درجة رابعة: $س^٤$ ، $-س^٤$

* نتعامل مع الشكل كما هو "من اليسار لليمين"

طالع يعني متزايد

نازل يعني متناقص

الوجه للفوق (مقعر للأعلى)

الوجه للتحت (مقعر للأسفل)

* الحرجة: قمة. قاع. حرف معرف.

الانفصال معرف. رأس مدبب، خط ثابت

٢. رسمة ق(س) :-.

← الحرجة ① . تقاطع مع السينات

② . دوائر وهمية

③ . أطراف معرف عليها ق.

← رسمة الاشارات فوق السينات + متزايد

تحت السينات — متناقص

← لإيجاد التقعر ننظر للشكل من اليسار لليمين

طالع (مقعر للأعلى) ، نازل (مقعر للأسفل).

٣. رسمة ق''(س) :-.

← التقاطع مع السينات (انعطاف)

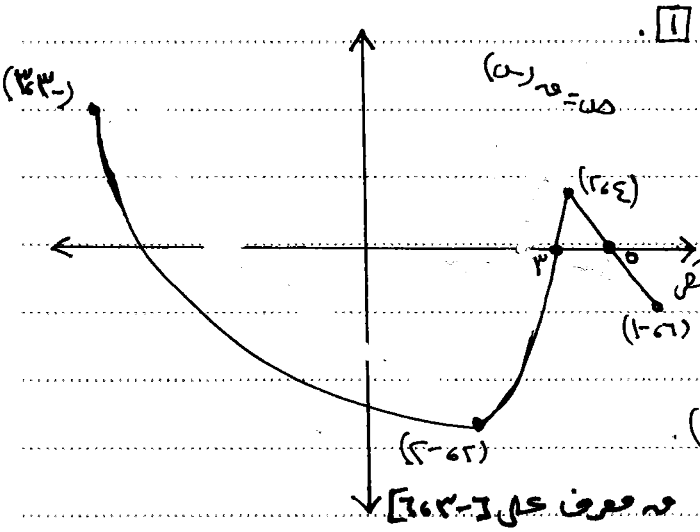
← رسمة اشارات

فوق السينات (موجب) مقعر للأعلى

تحت السينات (سالب) مقعر للأسفل

أسئلة على الأشكال :-.

١.



ق معرف على [-٣،٦]

جد : ١. فترات التزايد والتناقص

٢. القيم القصوى المحلية والمطلقة للاقتران ق.

٣. النقط الحرجة لـ ق.

٤. قيم س التي عندها ق' غير موجودة.

٥. الفترات التي عندها ق' موجبة

٦. ق'(٢) ، ق'(٣) ، ق'(٥) .

١). ق متناقص [-٣، ٢] ، [٤، ٦]

ق متزايد [٢، ٤]

٢). يوجد نقطة عظمى مطلقة عند س = -٣ وهي ق(-٣) = ٣

يوجد نقطة صغرى محلية ومطلقة عند س = ٢ وهي ق(٢) = -٢

يوجد نقطة عظمى محلية عند س = ٤ وهي ق(٤) = ٢

٣). الحرجة (-٣،٣) (٢،-٢) (٤،٢) (٦،-١)

٤). س = {-٣ ، ٦ ، ٤}

طرف طرف رأس مدبب

٥). ق' > ٠ عندما س ∈ (٢، ٤)

لأنه ق متزايد على [٢، ٤]

عند كتابة الفترات لإشارة ق' مفتوحة

٦) ق'(٢) = ٠ (مماس أفقي)

ق'(٣) > ٠ لأنه ق متزايد

ق'(٥) < ٠ لأنه ق متناقص.

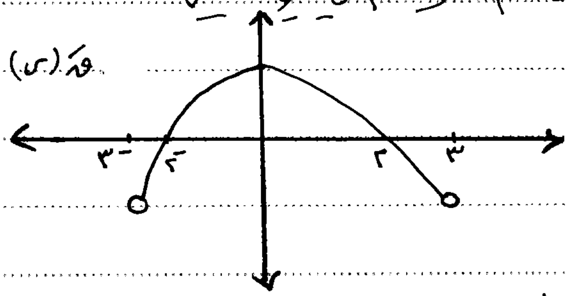
٢. ق معرف على [-٣، ٣]، كان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الأولى ق(س)، جد:

١. مجالات التزايد والتناقص.

٢. القيم القصوى المحلية للاقتران ق.

٣. الفترة التي فيها ق موجبة.

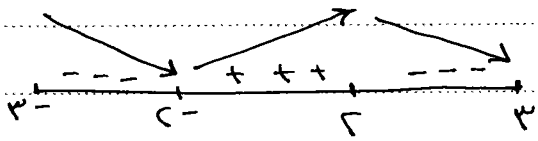
٤. الفترة التي يكون فيها ق متناقص



الحل:

① الحرجة {-٣، ٣، ٢، -٢}

طرفي طرفي تقطع السينات تقطع السينات



ق متناقص [-٣، -٢]، [٢، ٣]

ق متزايد [-٢، ٢]

② (-٢، ق(-٢)) نقطة صغرى محلية

(٢، ق(٢)) نقطة عظمى محلية

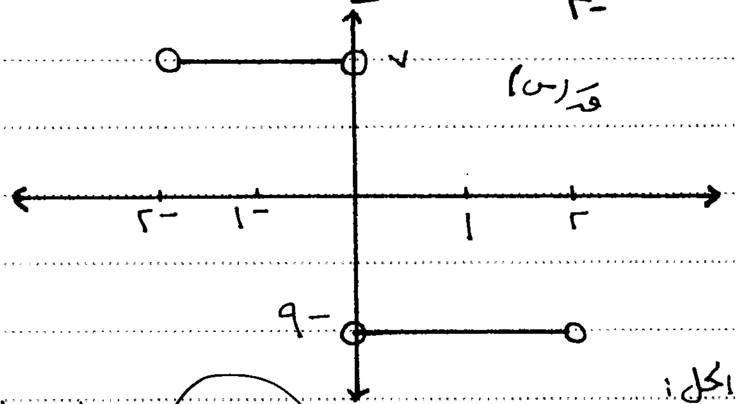
③ ق موجبة على (-٢، ٢)

④ ق(س) متناقص "لاحظ الحلي عن نفسه الشكل" [٠، ٣]

٣. الشكل يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق المتصل على [-٢، ٢]، جد

١. مجالات التزايد والتناقص لـ ق.

٢. قيم س التي عندها للاقتران ق قيم قصوى محلية.



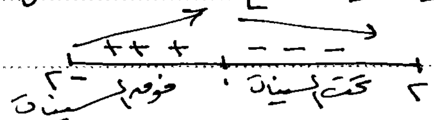
الحل:

① س الحرجة {-٢، ٠، ٢}

طرفي غ.م طرفي

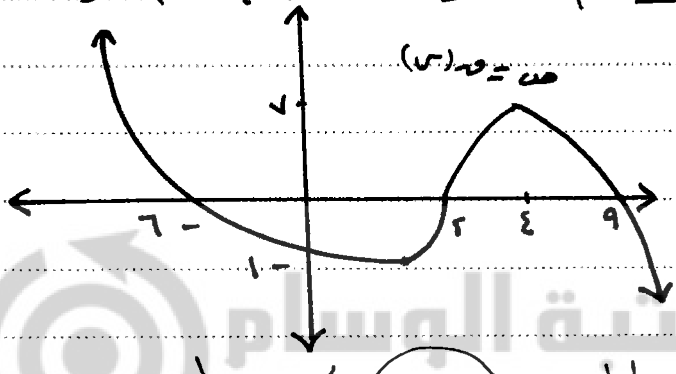
لاحظ ق معرفة عند ٠ لانه متصل على [-٢، ٢]

ق متزايد [-٢، ٠]، ق متناقص [٠، ٢]

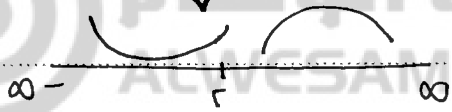


② عند س = ٠ عظمى محلية قيمتها ق(٠)

③ الشكل يمثل ق، جد مجالات التقعر ونقط الانعطاف



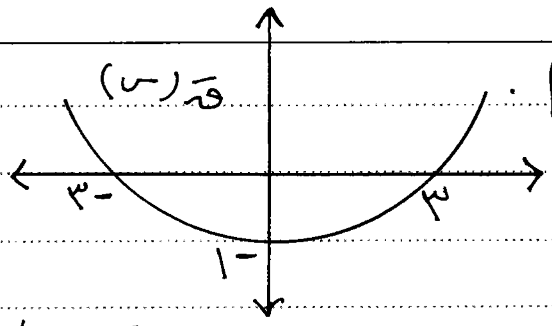
الحل:



ق مقعر لأعلى (-∞، ٢]، ق مقعر لأسفل [٢، ∞)

(٢، ق(٢)) نقطة انعطاف

٤ .



الشكل يمثل منحنى قه(س) للاقتران قه المعرف على ع

أ). الحرجة لِ قه(س).

ب). تزايد وتناقص قه(س).

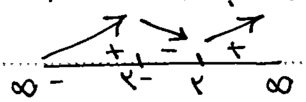
جـ). نقط القيم القصوى لِ قه(س).

د). تقعر قه(س) لأعلى ولأسفل.

هـ). نقط الانعطاف لِ قه(س).

الحل: أ) الحرجة {-٣، ٣}

ب)



قه متزايد (-∞، -٣]، [٣، ∞)

قه متناقص [-٣، ٣]

جـ) عظمى محلية (-٣، قه(-٣))

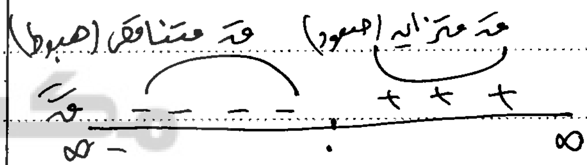
صغرى محلية (٣، قه(٣))

د) اشارة قً حسب اتجاه المماسات

طالع مقعر لأعلى ونازل مقعر لأسفل

لأنه اذا قه > ٠ ← قً > ٠

قه < ٠ ← قً < ٠

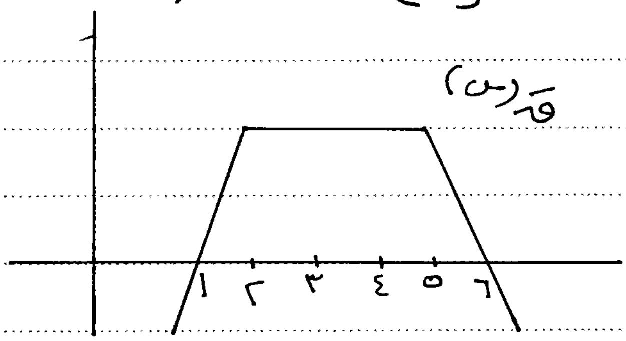


هـ) (٠، قه(٠)) نقطة انعطاف

٥ . الشكل يمثل منحنى قَ(س) للاقتران قه المعرف على ع

مجالات التزايد والتناقص لِ قه(س)، و

مجالات التقعر لأعلى ولأسفل لِ قه(س).

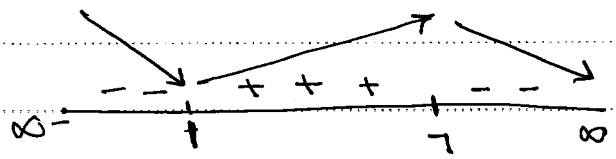


الحل: نحول شكل قَ إلى اشارات

{ فوق السينات ← قَ +

تحت السينات ← قَ -

قطع السينات ← قَ = ٠



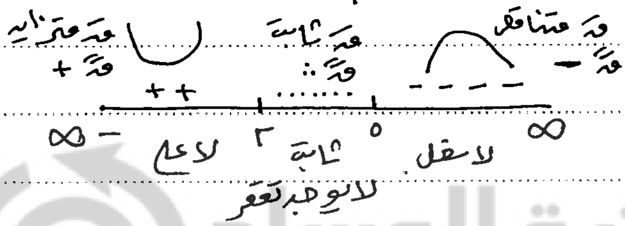
قه متزايد [١، ٦]

قه متناقص (-∞، ١]، [٦، ∞)

س الحرجة {١، ٦}

لتحديد اشارة قً(س)

حسب المماسات ← طالع نازل



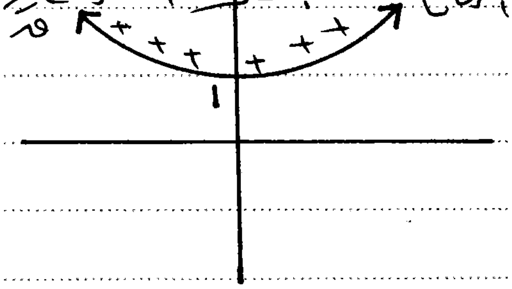
قه مقعر لأعلى (-∞، ٢]

قه مقعر لأسفل [٥، ∞)

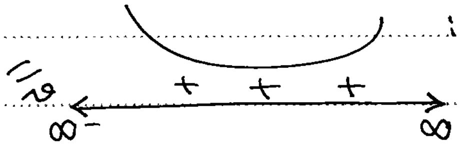
هل تعلم أن ق(٢) ما يعرفونها

قَ(٢) = ١ ، قَّ(٢) = صفر .

[٦] . الشكل يمثل منحنى قَّ(س) للاقتران ق ، المعرف على ح ، حدد فترات التقعر للأعلى ؟

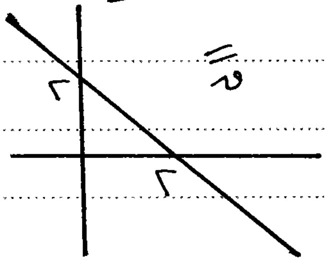


الحل:

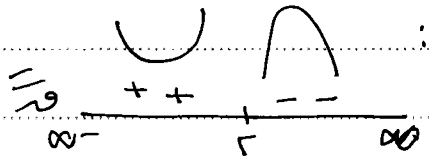


مقعر للأعلى (-∞ ، ∞)

[٧] . الشكل يمثل منحنى قَ (س) ؟

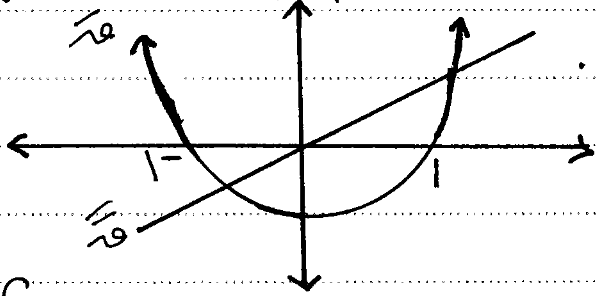


الحل :



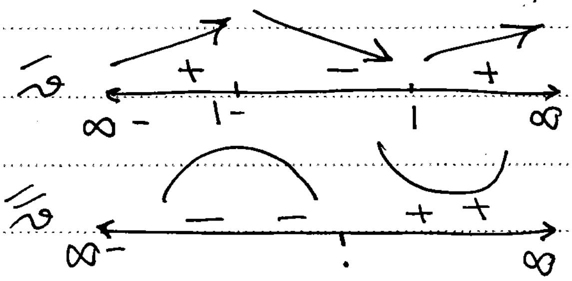
ق مقعر للأعلى (-∞ ، ٢] ، مقعر للأسفل [٢ ، ∞)

[٨] .



يمثل الشكل منحنى قَ(س) ، قَّ(س) ؟

الحل : نتعامل مع كل شكل لوحده



اكتب الخصائص ؟

* طبعاً علينا استنتاج التقعر من قَّ دون النظر لـ قَ

المعلم : إياد جادالله
0788513659

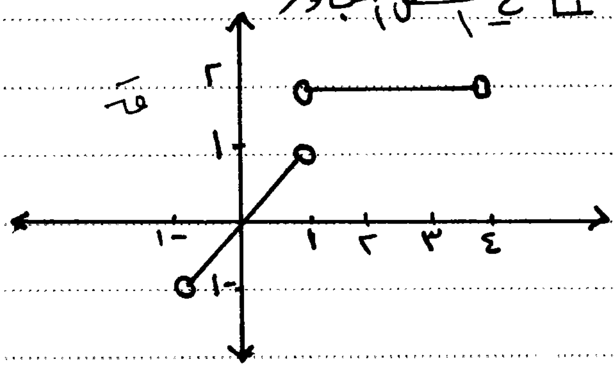
(أفكار إضافية)
(أسئلة مميزة)

1 . إذا كان ق(س) متصل على [-1 ، 4] وكان

وزارة 2015 (17 علامة)

ق(س) = { جـ $س^2$ + د س + هـ ، -1 ≤ س ≤ 1
أ س + ب ، 1 ≤ س ≤ 4

ومثّل منحنى المشتقة الأولى ق'(س) كما في الشكل المجاور



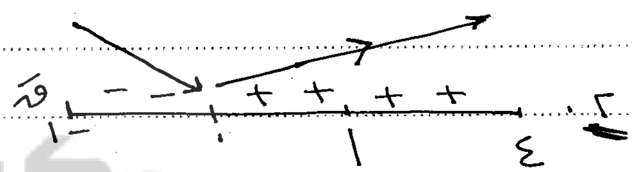
جد ما يلي:

1. مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق.
2. فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.
3. قيم س التي عندها للاقتران ق قيم قصوى محلية.
4. الثوابت أ ، ب ، جـ ، د ، هـ

علماً أن ق(-1) = 2 ، ق(4) = 8

الحل:

1. س الحرجة {-1 ، 0 ، 1 ، 4}

2. 

ق متناقص [-1 ، 0]

ق متزايد [0 ، 4]

3. عند س = 0 يوجد قيمة صغرى محلية

4. من الشكل نستنتج أن

ق'(0) = 0 ، $ق'_+(1)$ = 2 ،

$ق'_-(1)$ = 1

ق'(س) = { 2جـ س + د ، -1 < س < 1
أ ، 1 < س < 4

ق'(0) = د ← $\boxed{د = 0}$

$ق'_+(1)$ = أ ← $\boxed{أ = 2}$

$ق'_-(1)$ = 2جـ + د ⇐ 1 = 2جـ + 0

$\boxed{جـ = \frac{1}{2}}$

كذلك

ق(-1) = 2 معطيات

ق(-1) = جـ - د + هـ

2 = $\frac{1}{2}$ - 0 + هـ ← $\boxed{هـ = \frac{3}{2}}$

ق(4) = 8 معطيات

ق(4) = 4أ + ب

8 = 4 × 2 + ب ← $\boxed{ب = 0}$

(2) وهيب: ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة ، س ∈ ح ، معتمداً على الجدول المجاور ، جد

أ. س الحرجة ب. فترات التزايد جـ. القيم القصوى المحلية د. نقاط الانعطاف هـ. فترات التقعر للأسفل

س	ق'(س)	ق''(س)
-1	صفر	-6
صفر	-3	صفر
1	صفر	6

الحل: أ. س الحرجة {-1 ، 1}

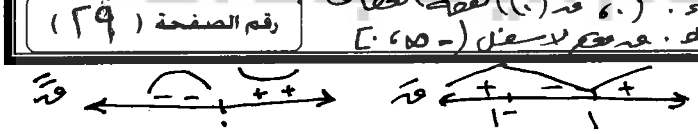
ب. متزايد (-∞ ، -1] [1 ، ∞)

جـ. ق(-1) عظمى محلية

ق(1) صغرى محلية

د. (0 ، ق(0)) نقطة انعطاف

هـ. ق مقعر للأسفل (-∞ ، 0]



٣. ق كثير حدود، ق′(١) = صفر، ق″(١) × ق″(٣) > ٠، ق″(٢) < ٠، فإن النقطة (١، ق(١)) هي نقطة

أ) قيمة عظمى محلية ب) قيمة عظمى مطلقة

جـ) قيمة صغرى محلية د) قيمة صغرى مطلقة

٤. إذا كان ق(س) = (س − أ)² + (س − ب)² + (س − جـ)²، أثبت أنه يوجد قيمة صغرى محلية عند

س = (أ + ب + جـ) / ٣

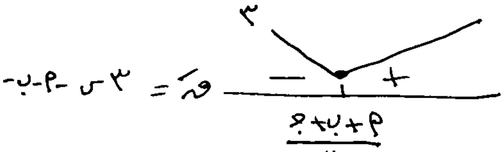
الحل: ق′ = ٢(س − أ) + ٢(س − ب) + ٢(س − جـ) = ٠

÷ ٢ ← س − أ + س − ب + س − جـ = ٠

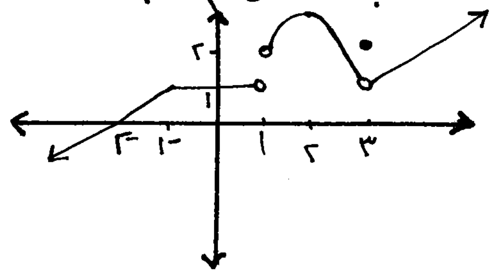
٣س = أ + ب + جـ

س = (أ + ب + جـ) / ٣

ق′ = ٣س − أ − ب − جـ



٥. الشكل يمثل منحنى ق المعرف على مجاله، جد س الحرجة للاقتران ق



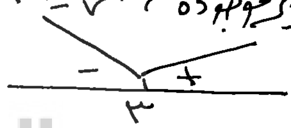
الجواب: [−١، ١] ∪ {٢، ٣}

٦. جد أصغر قيمة للاقتران

ق(س) = |س − ٣| − ٥

الحل: نعيد تعريف ق(س) = { س − ٨ ، س ≥ ٣ ؛ −٢ − س ، س < ٣ }

ق′(س) = { ١+ ، س > ٣ ؛ ١− ، س < ٣ ؛ غير موجودة ، س = ٣ }



عند س = ٣ صغرى محلية مطلقة هي ق(٣) = −٥

وهي أصغر قيمة للاقتران.

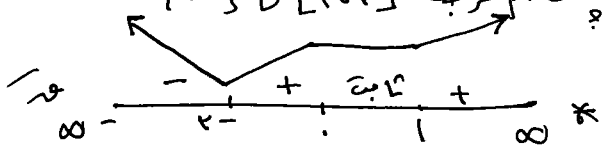
٧. ق(س) = ∛(س² − ٤)، س ∈ [−٣، ٣] جد س الحرجة؟

الحل: س = {−٢، ٢، ٣، −٣، ٠}

٨. ق(س) = { س² + ٦س + ٤ ، س ≤ ٠ ؛ [س + ٤] ، ٠ < س < ١ ؛ |٣س + ١١| ، س ≥ ١ }

جد فترات التزايد والتناقص، والقيم القصوى وبين نوعها.

الحل: س الحرجة [٠، ١] ∪ {−٣}



* (−٣، −٥) صغرى محلية ومطلقة
(٠، ٤) عظمى محلية
(١، ٤) صغرى محلية

فترات التناقص (−∞، −٣]

فترات التزايد [−٣، ٠]، [١، ∞)

٩. ق(س) = ٣ + ٣س + أس² + س³ ليس له حرجة، جد أ.

الحل: ق متصل وقابل للاشتقاق (ح)

ق′ = ٣ + ٢أس + ٣س² ≠ ٠ ← عبارة لا تحلل

← المميز < ٠ ← ب² − ٤أجـ < ٠

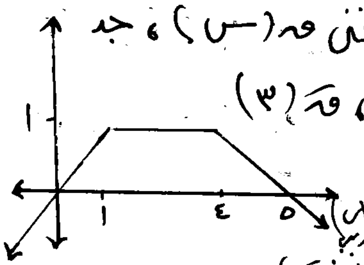
← ٤أ² − ٤ × ٣ × ٣ < ٠ ← أ² < ٩

← |أ| < ٣ ← −٣ < أ < ٣

١٠. جد قاعدة كثير حدود من الدرجة الثانية يمر بالنقطة (٠، ٣) وله قيمة صغرى مطلقة عند س = ١ هي ٢.

الجواب: ق(س) = س² − ٢س + ٣

١١. الشكل يمثل منحنى ق(س)، جد
قَ(٥)، قَ(١)، قَ(٣)

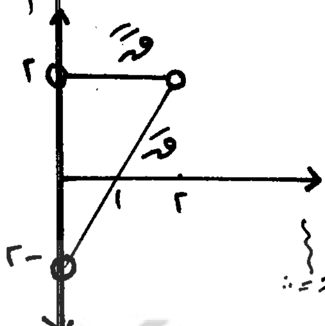


الجواب:
قَ(١) غير موجودة (رأس)
قَ(٣) = صفر (خط أفقي)
قَ(٥) = ميل الخط المار بالنقاط (١،٤)، (٠،٥)
$م = \frac{١-}{٤-٥} = (-١)$

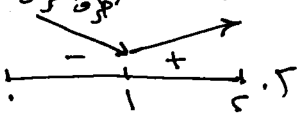
١٢. ق(س) = $\sqrt[٣]{(س-٢م)^٢}$ + ٣ب قيمة صغرى محلية عند س = ٤ وهي ٦، جد م، ب ؟

الحل: (٤، ٦) نقطة حرجة
← ق(٤) = ٦ = $\sqrt[٣]{(٤-٢م)^٢}$ + ٣ب ... ①
← قَ(س) = $\frac{٢}{٣}$ $(س-٢م)^{-\frac{١}{٣}}$ + ::
= $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{(س-٢م)}}$
← قَ(٤) غير موجودة
← $\sqrt[٣]{٤-٢م}$ = :: ← $\boxed{م = ٢}$
← $\boxed{ب = ٢}$

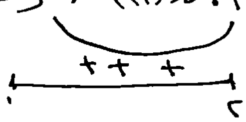
١٣. ق متصل على [٠، ٢]، جد
١. س الحرجة
٢. القيم القصوى المحلية.
٣. فترات التقعر



الحل: ١. س الحرجة = {٠، ٢، ١} (أطراف، قَ = ::)

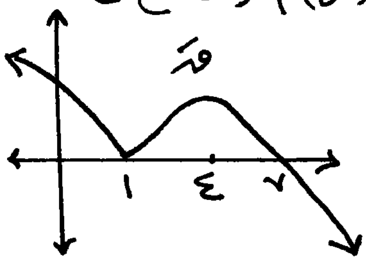


٢. (١، ق(١)) صغرى محلية ومطلقة

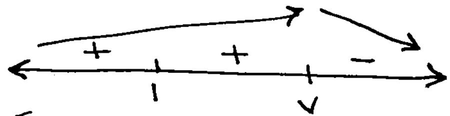


٣. مقعر للأعلى [٠، ٢]

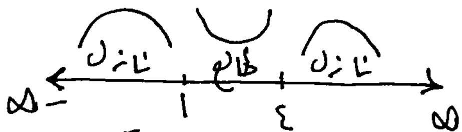
١٤. الشكل يمثل منحنى قَ(س) للاقتران ق(س) المعرف على ح.
جد:
١. س الحرجة
٢. فترات التزايد والتناقص.
٣. فترات التقعر للأعلى وللأسفل.



الحل: س الحرجة = {١، ٧}



التزايد (-∞، ٧]، التناقص [٧، ∞)



مقعر للأسفل (-∞، ١] [٤، ∞).
مقعر للأعلى [١، ٤].

١٥. ق(س) = ٦٢ك + ٦(م-٢) س^٢
جد الثابت م الذي يجعل ق(س) مقعر للأسفل.

الحل: قَ(س) = ٣٢ + ١٢(م-٢) س
قً(س) = ١٢(م-٢)
لأنه مقعر للأسفل ⇐ قً(س) < صفر
١٢(م-٢) < صفر
م < ٢