



مهارات في الرياضيات

توجيهي الفرع العلمي - الفصل الدراسي الأول



الوحدة الثالثة الجزء الثالث :

تطبيقات التفاضل

المعدلات المرتبطة بالزمن

و

المسائل العلمية على القيم القصوى



اعداد المعلم :

أياد جاد الله



مكتبة الوسام

ALWESAM tawjihi Center & service store

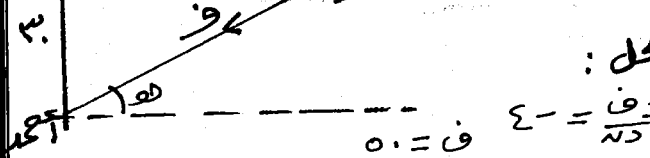
موقع مكتبة الوسام التعليمي www.alwesam.info



$$= \frac{0.4 \times 2 + 0.3 \times 4}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{1.4}{5} = 0.28 \text{ كم/س}$$

٤. عليك أحمد بيده حينها الطائرة
ورقيه تدير أفقياً على ارتفاع ٣٠ م
من سطح الأرض. إذا كانت سرعة الطائرة
يسحب فيها أحمد منطاً الطائرة ٤٠ م/س
جد ① : السرعة الأفقية للطائرة
عندما يتوقف طول المنط المحمد ٥٠ م.

② معدل تغير زاوية ارتفاع
الطائرة عندما يتوقف طول المنط
المحمد ٥٠ م. θ θ θ



الحل :

$$\frac{dx}{dt} = 40 - x = 0 \Rightarrow x = 40$$

١. حسب فيثاغورس

$$40^2 = x^2 + 30^2$$

$$1600 - 900 = x^2$$

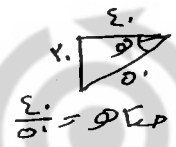
$$x = \sqrt{700} = 26.46$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{40 - x}{\sqrt{40^2 - x^2}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{40 - 26.46}{\sqrt{1600 - 700}} = \frac{13.54}{\sqrt{900}} = \frac{13.54}{30} = 0.451$$

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

٢. المطلوب مشتقة زاوية θ ؟

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{30}{x^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{30}{(26.46)^2} = \frac{30}{700} = 0.0429$$



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{30}{x^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{30}{(0.4 \times 20.0)} = \frac{30}{8} = 3.75$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{30}{x^2} = \frac{30}{(0.4 \times 20.0)^2} = \frac{30}{64} = 0.46875$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{0.4} = 7.5 \text{ راد/د}$$

الحل : $\frac{1.4}{5} = \frac{0.3}{5} + \frac{0.4}{5}$

$$0.28 = 0.06 + 0.22$$

$$\frac{0.3}{5} + \frac{0.4}{5} = \frac{0.7}{5} = 0.14$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$\frac{1}{(0.4)} + \frac{1}{(0.3)} = \frac{1.4}{0.12}$$

$$\frac{1.4}{0.12} = 11.67$$

$$\frac{2}{0} = \frac{0.4}{5}$$

٣. طريقان مستقيمان متعامدان في م.

يسير رجل على احداهما مبتعداً عن

م بسرعة ٤ كم/س، ويسير سيارة

على الطريق الآخر مقترباً منه م بسرعة

٥٣ كم/س، فاعدد التغير في البعد

بين الرجل والسيارة عندما يبعد

الرجل والسيارة عن م ٣ كم،

٤ كم على التوالي.

الحل : المطلوب $\frac{dD}{dt}$

عند $s = 3$

$u = 53$

حسب نظرية فيثاغورس

$$D^2 = s^2 + u^2$$

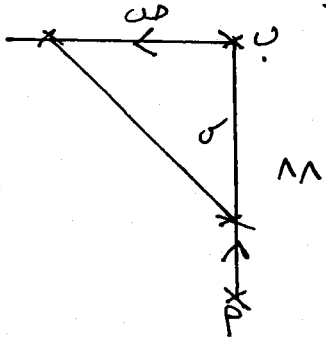
$$2D \frac{dD}{dt} = 2s \frac{ds}{dt} + 2u \frac{du}{dt}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{s \frac{ds}{dt} + u \frac{du}{dt}}{D}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{3 \times 0 + 53 \times 0}{\sqrt{3^2 + 53^2}} = 0$$



٦. سفينة P جنوب B، وبعد
بينهما ٨٨ كم. تجر P شمالاً
بسرعة ٢٤ كم/س، وتجر B
غرباً بسرعة ١٥ كم/س، فبعد
التغير في بعد بينهما بعد ساعتين
من البداية؟



الحل: $\frac{دس}{دس} = ٢٤$

$\frac{دس}{دس} = ١٥$

$س + س = ٢٤$

$س = ١٥$

لاحظ المسافة التي قطعها P
المسافة التي قطعها B

$٤٨ = ٢ \times ٢٤ =$
 $٤ = ٤٨ - ٨٨ = س$
المسافة التي قطعها B
 $٢ = ٢ \times ١٥ = س$

$$\frac{دس}{دس} + \frac{دس}{دس} = \frac{دس}{دس}$$

$$\frac{١٥س + ٢٤س}{\sqrt{(١٥س)^2 + (٢٤س)^2}} = \frac{دس}{دس}$$

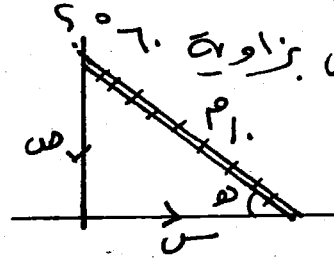
$$\frac{١٥ \times ٢ + ٢٤ \times ٢}{\sqrt{(٣٠)^2 + (٤٨)^2}} = \frac{١٥}{٢٤}$$

$\frac{١٥}{٢٤} =$

٧. سفينة P شرقاً من سفينة B، وبعد
بينهما ٣٨ كم. تبدأ السفينتان
بالارتفاع للأعلى بسرعة ٢٢ م/س، وبعد ٢٢
دقيقة تبدأ السفينتان بالارتفاع
بسرعة ١٥ م/س. بعد
عدول تغير المسافة بين السفينتين بعد
(٢) ن من بدء حركة السفينتين.

٥. سلم طوله (١٠) م يرتكز على حائط عمودي. بدأ ينزله أسفل السلم للارض مسبقاً عند حائط بعد ٣ م من طرفه. ما سرعة هبوط الطرف المرتكز على الحائط عند ما يكون السلم مائلاً على الارض بزاوية ٦٠°؟

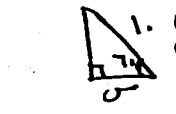
ب. ما معدل تغير الزاوية المحصورة بين السلم والارض عند ما يكون السلم مائلاً على الارض بزاوية ٦٠°؟



الحل: $\frac{دس}{دس} = ٣$

٥. اطوب دس؟

$١ = س + س = ١٠٠ \sqrt{٢} - س$



$\frac{دس}{دس} = \frac{دس}{دس} = \frac{٢س}{٢س - ١٠٠ \sqrt{٢}}$

$\frac{١}{١} = \frac{٢}{٢}$
 $\frac{١}{١} = \frac{٢}{٢}$
 $٥ = س$

$\frac{٢ \times ٥ \times ٢}{٢٥ - ١٠٠ \sqrt{٢}} =$

٦. حيا ه = س

$\frac{دس}{دس} = س - س = ١٠$

$\frac{دس}{دس} = \frac{٣}{١٠} = \frac{٣}{١٠ \times ١٠} = \frac{٣}{١٠٠}$

$\frac{٣}{٣٧٥} = \frac{٣}{٢٧ \times ١٠} =$



$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{4}{3} \times \frac{1}{3} + 1} = \text{ظاه}$$

$$\frac{50}{27+9} = \text{ظاه}$$

$$\frac{(50) \left(\frac{4}{3}\right) - (27+9)(50)}{2(27+9)} = \text{ده} \times \text{قاه}$$

$$2 = 1 \times 2 = \text{جد}$$

$$2 = \frac{50}{27}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{27 \times 50}{27+9} = \text{ظاه}$$

$$\frac{17}{17} = \text{قاه} \leftarrow \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \text{قاه}$$

$$\frac{170 - 270}{170} = \frac{17}{27} \times \frac{\text{ده}}{27}$$

$$\frac{32}{170} = \frac{17}{170} \times \frac{240}{170} = \frac{\text{ده}}{27}$$

A. خطان جديدان يميل احدهما على

الاخر بزاوية $\frac{\pi}{3}$ وملتقيانه في النقطة M

يسير لقطار P على احدهما بسرعة

٢٠ كم/س، مقتربا من M. ويسير

القطار B على الخط الاخر وبسرعة ١٠ كم/س

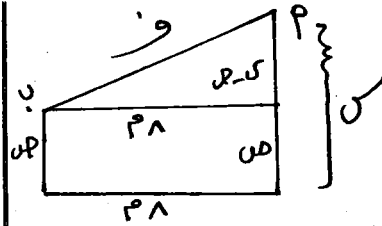
مقتربا من M. عند الساعة لعاشرة

صباحا اذا كان لقطار A، P، B

على بعد ١٠٠، ٢٠٠ كم وعلى لترتيب من M.

جد معدل اقتراب لقطار B من قطار A

البعين عند الساعة ١١ صباحا.



المثلث قائم الزاوية
 $8 = 4 \times 2 = 8$
 $2 = 2 \times 1 = 2$

المثلث:

$$\frac{200}{27} = \text{ده}$$

$$1 = \frac{\text{ده}}{27}$$

المطلوب ده/ده؟

$$27 + 9 = 36$$

$$\sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6$$

$$\frac{\text{ده}}{27} = \frac{(27 - 9)(200 - 100)}{\sqrt{27 + 9} \times 6}$$

$$\frac{27}{10} = \frac{(1 - 2)(2 - 1)}{\sqrt{27 + 9} \times 6}$$

٨ . P (٤٦٠) ، B (٩٠) نقطتان

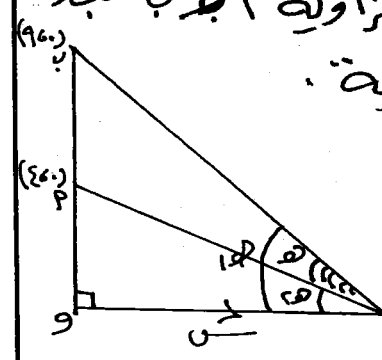
تأبثانه، وهي نقطة تقاطع على محور

السيارات، لوجب مسبقا عند نقطة

الداخل بمعدل ٢ وحدة/ث. جد

معدل تغير الزاوية P بمرور بعد

١٠ ثوانية من الحركة.



$$\frac{200}{27} = \text{ده}$$

المطلوب

$$\frac{\text{ده}}{27} = 1$$

لاحظ $P, B, A = \text{ده}$

$$\text{ده} = \text{ده} - 1$$

$$\text{ظاه} = (\text{ده} - 1) - \text{ده}$$

$$\text{ظاه} = \text{ظاه} - 1$$

$$1 + \text{ظاه} = \text{ظاه}$$



حبه قانون جيب تمام
 $\sin^2 P + \sin^2 C - \sin^2 A = 2 \sin P \sin C \cos A$

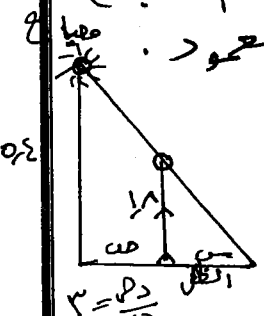
$$\sin^2 70^\circ + \sin^2 20^\circ - \sin^2 60^\circ = 2 \sin 70^\circ \sin 20^\circ \cos 60^\circ$$

$$\frac{\sin 70^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 60^\circ}$$

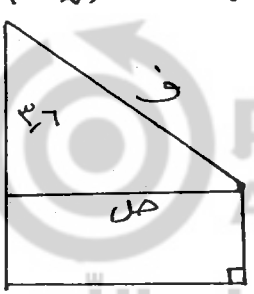
$$\therefore \frac{\sin 70^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 60^\circ}$$

١١. رجل طوله ١٨٠ سم ، يقف أمام عمود كهرباء ، يرتفع عن سطح الأرض مستوى ٤٠ سم ، فإذا أخذ الرجل بالابتعاد عنه ، لعمود بعد ٣ م / ث . جد معدل ازدياد طول ظله

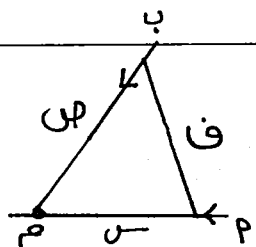
١٢. معدل التغير في البعد بين المصباح و رأس الرجل عندما يتحرك الرجل على بعد ١٨٠ سم من قاعدة العمود .



الحل :
 ١. بمشابهة المثلثين
 $\frac{180}{x} = \frac{40}{y}$
 $180y = 40x$
 $4.5y = x$
 $\frac{dx}{dt} = 4.5 \frac{dy}{dt}$
 $\frac{dx}{dt} = 4.5 \times 3 = 13.5$ م / ث



٢. $\sin^2 P + \sin^2 C = \sin^2 A$
 $\sin^2 70^\circ + \sin^2 20^\circ = \sin^2 60^\circ$
 $\frac{\sin 70^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 60^\circ}$
 $\frac{\sin 70^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 60^\circ}$
 $\frac{\sin 70^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 60^\circ}$
 $\frac{\sin 70^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 60^\circ}$
 $\frac{\sin 70^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 60^\circ}$



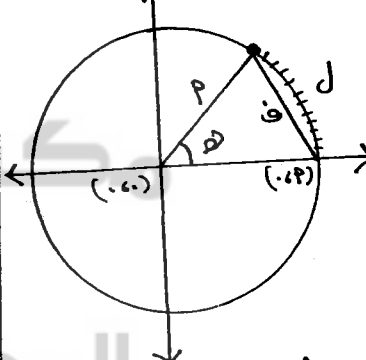
الحل : $\frac{70}{\sin 60^\circ} = \frac{80}{\sin 20^\circ}$
 $\frac{70}{\sin 60^\circ} = \frac{80}{\sin 20^\circ}$

٢. $\sin^2 P + \sin^2 C - \sin^2 A = 2 \sin P \sin C \cos A$
 $\sin^2 70^\circ + \sin^2 20^\circ - \sin^2 60^\circ = 2 \sin 70^\circ \sin 20^\circ \cos 60^\circ$

جد $\sin 60^\circ = 1 \times 70 - 1 \times 80 = 10$ حيث
 $\sin 60^\circ = 1 \times 80 - 1 \times 70 = 10$

$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \times 70 = 10 \times 70 = 700$ كم / س

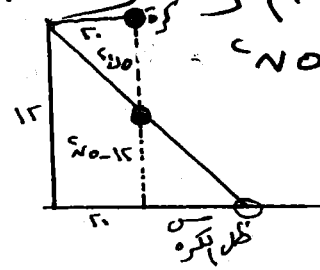
١٠. بدأت نقطة بحرية على دائرة مركزها (٠، ٠) ومنه نقطة (٠، ٤) عكس عقارب الساعة بحيث يزداد طول القوس الذي ترسمه أثناء حركتها بعد ٨ سم / ث ، جد معدل ابتعاد النقطة بالحركة عن النقطة (٠، ٤) عندما يقابل القوس الذي ترسمه زاوية مركزية قياسها $\frac{\pi}{3}$



الحل : $\frac{dl}{dt} = 8$
 $l = r \theta$
 $8 = 4 \frac{d\theta}{dt}$
 $\frac{d\theta}{dt} = 2$
 $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 2$



١٢. عمود ارتفاعه ١٢ متر في قمته
ومصباح اسطوانة كرة من يكون من
ناقذه تبعد ٢٠ م عنه المصباح وعلى
نفس الارتفاع. جد سرعة ظل الكرة
على الارض بعد ثمانية واحدة من
سقوطها على اية الكرة تتحرك حسب
العلاقة $v = 5t$



الحل: حسب التشابه

$$\frac{5t - 12}{s} = \frac{12}{20 + s}$$

$$(5t - 12)(20 + s) = 12s$$

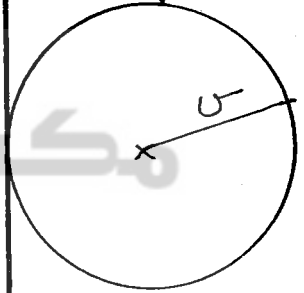
$$100t - 240 + 5t^2 - 12s = 12s$$

$$5t^2 - 240 = 24s$$

$$s = \frac{5t^2 - 240}{24}$$

السرعة $\frac{ds}{dt} = \frac{97}{3} = 32.33$ نفوس

١٣. صفيحة معدنية دائرية الشكل
تتعدد فتحاتها بعد
٥٠ سم / ٦، جد معدل تغير محيط
الصفيحة في اللحظة التي يصبح فيها
نصف القطر ٢٥ سم.



الحل: $\frac{ds}{dt} = 50$

المطلوب $\frac{ds}{dt} = s = 25$

$l = \pi r = \pi s$

جد $\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \times \pi = \frac{ds}{dt} \times \pi$

$\pi = 3.14$

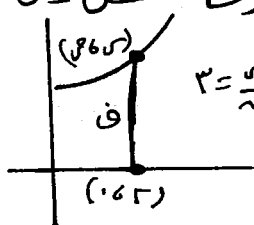
$\frac{ds}{dt} = \frac{3.14}{2} = 1.57$

$1.57 \times 20 \times \pi = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \times \pi$

$\therefore \frac{ds}{dt} = \frac{1.57}{\pi} \times \pi = 1.57$

١٤. تتحرك نقطة على عتق لاقتها

في $(s) = \sqrt{5 + s^2}$ بحيث يزداد
الاجزائي لسيئ لها معدل ٣ م/ث،
جد معدل تغير البعد بينها وبين
النقطة $(0, 2)$ عندما $s = 0$



الحل: المطلوب $\frac{df}{ds} = \frac{2}{2.5} = 0.8$

$f = \sqrt{(2-s)^2 + 5}$

لكن $df = \sqrt{5 + s^2} = 2.5$

$\therefore f = \sqrt{(2-s)^2 + 5}$

$\frac{df}{ds} = \frac{2}{2.5} = \frac{ds}{ds} + \frac{ds}{ds} (2-s)^2$

$\frac{2}{2.5} = \frac{2(2-s)}{\sqrt{(2-s)^2 + 5}}$

$2 \times 2 = 2.5 \times \frac{2(2-s)}{\sqrt{(2-s)^2 + 5}}$

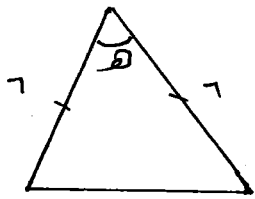
$4 = \frac{5(2-s)}{\sqrt{(2-s)^2 + 5}}$

$\frac{4}{5} = \frac{2(2-s)}{\sqrt{(2-s)^2 + 5}}$

$\frac{4}{5} \times \sqrt{(2-s)^2 + 5} = 2(2-s)$

$\frac{4}{5} \times \sqrt{(2-s)^2 + 5} = 4 - 2s$





الحل :
 $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 \times 6 = 9\sqrt{3}$
 $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \times 2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

$18 = 3$

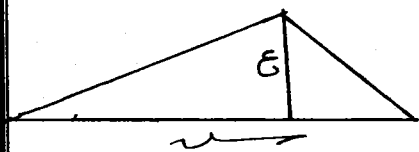
$\frac{18}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9$

$\frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$
 طول الزاوية اديا ٣

$\frac{\pi}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 18 = \frac{\pi}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 18 = 9\sqrt{3}$

$\frac{9\sqrt{3}}{1} = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

١٧. صغيره معدنيه مثلثه بشكل ارتفاعها يساوي نصف طول قاعدتها، تعدد الحرارة وتزداد مساحتها بمعدل ١٠٠. و. سم / ث. جد معدل تغير طول قاعدة الصغيره عندما يصبح طولها ١٠ سم.



الحل : $\frac{100}{\sqrt{3}} = 57.735$

$\frac{1}{2} = 1$

الطولون دس | $\frac{1}{2} = 1$

$\frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = 1$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\frac{100}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{50}{\sqrt{3}}$

$\frac{100}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{50}{\sqrt{3}}$

$\frac{100}{\sqrt{3}} = \frac{57.735}{1}$

١٥. تكبرك نقطه على صحن

$3 = 3 + 3$ اذا كان

الاجرائي لسيني يزداد بمعدل

٢ سم / ث. جد :

١. معدل التغير في الاجرائي لصادي

٢. معدل التغير في ميل الجاس عندما

$3 = 2$

الحل : (١) $\frac{3}{\sqrt{3}} = 3 = \frac{3}{\sqrt{3}} + 10 = \frac{3}{\sqrt{3}}$

لاحظ $3 = 2$ ، $2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

نعوض $2 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$24 = 20 + 4 =$

(٢) معدل تغير الميل = مشتقة الميل

خذ الميل اولاً $\frac{3}{\sqrt{3}} = 3 + 10 = 13$

$3 = 3 + 10 = 13$

$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} + 10 = \frac{3}{\sqrt{3}}$

$24 = 2 \times 10 + 2 \times 2 \times 2 =$

١٦. مثلث متساوي الساقية، طول

كل من ضلعيه المتساويين ٦ سم،

اذا كانت سرعة تغير الزاوية هـ

المحصورة بين الضلعيه المتساويين

لمثلث تساوي ٢ درجه / دقيقه .

جد سرعة تغير مساحة المثلث عندما

تصبح هـ = $\frac{\pi}{7}$ راديان

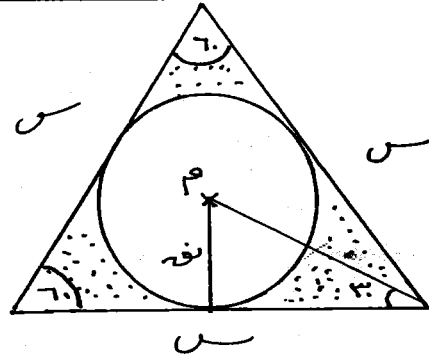




الحل:

$$\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$$

$$r = \frac{2}{3}R$$



$$3r = 6 - r$$

$$\frac{3r}{4} = 6 - r$$

$$\frac{3r}{4} + r = 6$$

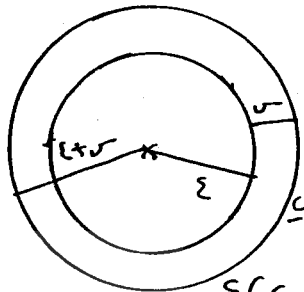
$$\frac{3r + 4r}{4} = 6$$

$$\frac{7r}{4} = 6$$

$$7r = 24$$

$$r = \frac{24}{7}$$

٢٢. كرة حديدية قطرها ٨ سم مغطاة بطبقة منتظمة من الجليد. إذا ابتداء الجليد بالذوبان بعد ١٠ احم / د ، فكم تكون سرعة تقطعها ساعة الطهي الخارجي للجليد عند حلولها ٢ سم.



الحل:

$$3 = 6 - 2r$$

$$2r = 6 - 3$$

$$2r = 3$$

$$r = \frac{3}{2}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{2R} = \frac{2}{3}$$

$$9 = 4R$$

$$R = \frac{9}{4}$$

نجد $\frac{r}{R}$ من الحجم

$$3 = 6 - r$$

$$3r = 6 - r$$

$$4r = 6$$

$$r = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

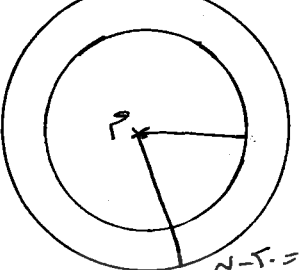
$$\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{3/2}{R} = \frac{2}{3}$$

$$9 = 4R$$

$$R = \frac{9}{4}$$

٢٣. دائرتان متحدتان بالمرکز. نصف قطرهما ٥ سم ، ٣ سم ، ابتداءً للكرة الصغرى تتسع بحيث يزداد طول نصف قطرها بعد ٢ سم / د . بنفس اللحظة اخذت الدائرة الكبرى تصغر بحيث يتناقص طول نصف قطرها بعد ١ سم / د . جد معدل تغير المساحة المحصورة بين الدائرتين في اللحظة التي تنطبق الدائرتان على بعضها.



الحل: نفرض $r + 2 = R + 1$

$$r - R = -1$$

$$r = R - 1$$

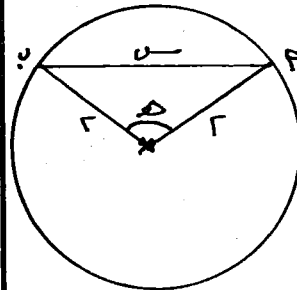
$$R - 1 = R + 1$$

$$-1 = 1$$

$$-2 = 0$$



٢٤. ب وتر في دائرة نصف قطرها ٣ م. يزداد طول الوتر بمعدل ١ سم/ثانية، حدد معدل تغير مساحة القطاع المركزي الذي يقع الوتر فيه عندما تكون زاوية المركز ٦٠°.



الحل:

$$\frac{1}{3} \text{ نصف } \times \text{هـ} = ٣$$

$$\text{هـ} \times \frac{1}{3} \times ٣ = ٣$$

$$\frac{\text{ده}}{\text{دو}} \times ٣ = \frac{٣}{\text{دو}}$$

محتاج ده / دو ؟

$$\frac{\text{دو}}{\text{دو}} = ١, \frac{\text{دو}}{\text{دو}} = ١$$

عنده ٦٠°

حسب قانون جيب تمام

$$\text{س} = ٤ + ٤ - ٤ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times \text{هـ} = ٤$$

$$\text{س} = \sqrt{٨ - ٨ \text{ هـ} + ٨}$$

$$\frac{\text{دو}}{\text{دو}} = \frac{٨ - \frac{\text{ده}}{\text{دو}} \times ٨ - ٨ \text{ هـ}}{\sqrt{٨ - ٨ \text{ هـ} + ٨}}$$

$$\sqrt{٨ - ٨ \text{ هـ} + ٨}$$

$$\leftarrow \frac{\text{ده}}{\text{دو}} = \frac{١}{٣٧} \leftarrow \text{الطول}$$

$$\frac{\text{دو}}{\text{دو}} = \frac{١}{٣٧} \times ٣٧ = \frac{\text{دو}}{\text{دو}}$$

٢٥. يقطع رجل من قلاب بمعدل ٣ م/ثانية بحيث يتشكل كونه مخروطية ارتفاعها يساوي ربع قطر قاعدتها. حدد سرعة ارتفاع كوفة الرجل عندما يكون ارتفاعها ٣ م؟



$$\text{الحل: } \frac{1}{3} \pi \text{ س} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \pi \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{\pi}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\text{ده}}{\text{دو}} \times \frac{\pi}{9} = \frac{2}{3}$$

نفوض

$$\frac{\text{ده}}{\text{دو}} = \frac{2}{3}$$

الطول / دو

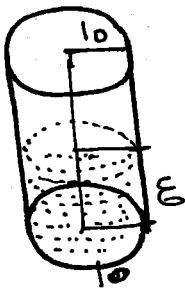
$$\frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{١٦}$$

$$\frac{٣}{١٦} = \frac{٣}{١٦}$$

$$\frac{٣}{١٦} = \frac{٣}{١٦}$$

$$\frac{\text{ده}}{\text{دو}} = \frac{1}{\pi \times ١٨} \times \frac{٣}{٣}$$

٢٦. خزان ماء اسطواني الشكل قطر قاعدته ٣ م، يخرج منه الماء بمعدل ٣ م^٣/د، حدد سرعة انخفاض سطح الماء في الخزان.



الحل:

$$\pi \times \text{هـ}^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

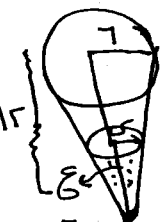
$$\frac{2}{3} \times \pi \times (١٠)^2 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\text{ده}}{\text{دو}} \times \pi \times ١٠٠ = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\text{ده}}{\text{دو}} \times \pi \times ١٠٠ = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\text{ده}}{\text{دو}} = \frac{2}{3 \times \pi \times ١٠٠}$$

٢٧. مخروط دائري قائم رأسه لأشغل ارتفاعه ١٢ م، وطول قطر قاعدته ٨ م، يتسكب فيه الماء بمعدل ٨ م^٣/ث، فما معدل ارتفاع سطح الماء فيه، عندما يكون ارتفاعه ٣ م؟



$$\text{الحل: } \frac{1}{3} \pi \times \frac{1}{3} \times \text{هـ}^2 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \pi \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{\pi}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\text{ده}}{\text{دو}} \times \frac{\pi}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\text{ده}}{\text{دو}} \times 9 \times \frac{\pi}{9} = 1$$

$$\frac{\text{ده}}{\text{دو}} = \frac{1}{\pi \times 9}$$

$$\frac{\text{ده}}{\text{دو}} = \frac{1}{\pi \times 9}$$

$$\frac{\text{ده}}{\text{دو}} = \frac{1}{\pi \times 9}$$



٢٤. مخروط دائري قائم رأسه
 لابع ارتفاعه ١٥ سم. نصف قطر
 قاعدته ٥ سم. ينسكب منه ماء بعد
 ٢ سم $\frac{2}{3}$ ن. ما معدل ارتفاع الماء في
 المخروط عندما يصبح حجم الماء $\frac{2}{3}$ من
 الكل : $\frac{دع}{دع} = ٢$ ، $\frac{دع}{دع} = ؟$

حجم الماء = $\frac{2}{3}$ من المخروط - حجم المخروط الصغير

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \pi \times 5^2 \times 15 - \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$2 = \frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 - \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15$$

$$2 = \frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 - \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 - \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 - \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 - \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 - \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 - \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 - \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 - \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 - \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 - \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 - \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 - \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 - \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 - \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

٢٨. خزانه ماء مخروطية الشكل
 رأسه للأسفل وزاوية رأسه
 ٦٠°، إذا طاب الماء يسرب منه
 بعد ٣ قدم $\frac{3}{4}$ ن، وكان فيه ثقب
 يسرب منه الماء. وكانت حقيقه
 تسب فيه بعد ثابتة هو
 ٣ قدم $\frac{3}{4}$ ن. جد الثابت ج حيث
 معدل ارتفاع الماء $\frac{2}{3}$ كلفة
 عمود الماء ٣ قدم.

الكل :

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

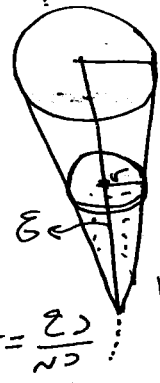
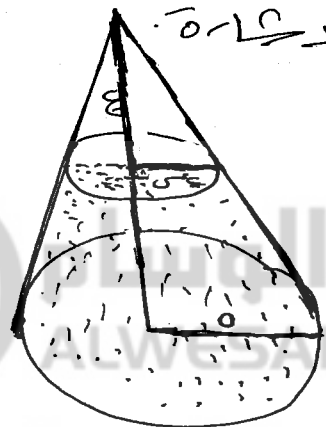
$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

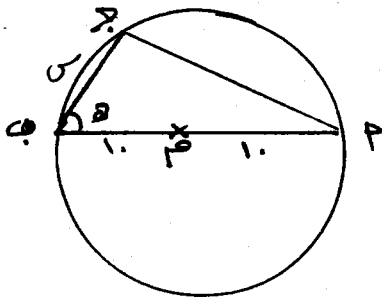
$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$

$$\frac{2}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 2$$





٣١. في مثلث ABC بجوار P بن قطر دائره
 طوله 2 حجم. تكبر النقطة B على
 القوس AP حيث يزداد قياس الزاوية
 BP عند 30° ، احب معدل
 تغير مساحة مثلث APB عند $توتوه$
 قياس الزاوية BP $\frac{\pi}{3}$.



الحل: $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \times 2 = \frac{\pi}{180} \times 2 = \frac{2\pi}{180}$
 المثلثون $\frac{d}{dt} = \frac{2\pi}{180}$ عند 30°

$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 30^\circ = 1$

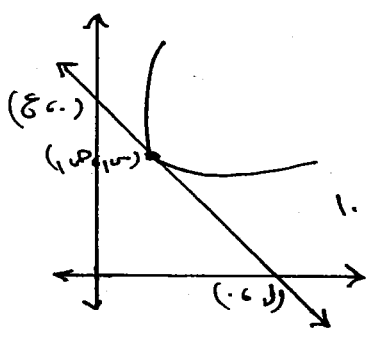
نقل من $\frac{d}{dt}$
 لا $\frac{d}{dt} \times 2 \times 2 \times \sin 30^\circ$
 دائره

$\frac{d}{dt} = \frac{2\pi}{180}$
 $\frac{d}{dt} = \frac{2\pi}{180} \times 2 \times 2 \times \sin 30^\circ$

$\frac{d}{dt} = \frac{2\pi}{180} \times 2 \times 2 \times \sin 30^\circ$
 $\frac{d}{dt} = \frac{2\pi}{180} \times 2 \times 2 \times \sin 30^\circ$

$\frac{d}{dt} = \frac{2\pi}{180} \times 2 \times 2 \times \sin 30^\circ$

٣٢. حجم حمارس لافني لافني
 $\theta = (s) = \frac{\pi}{180}$ في ربع الدل كما
 بالمثل. كما θ قطعاه السيني
 والهادي l ، $\frac{d}{dt}$ على الترتيب،
 اذا كان $\frac{d}{dt}$ لقطع السيني يزيد عند
 2 وحدة $\frac{d}{dt}$ ، $\frac{d}{dt}$ معدل تغير لافني
 الهادي عند $توتوه$ لقطع السيني
 ا وهدات.



الحل: $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} = 2$

$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} = 2$ عند $l = 1$

$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} = 2$
 $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} = 2$
 $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} = 2$

$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} = 2$

$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} = 2$

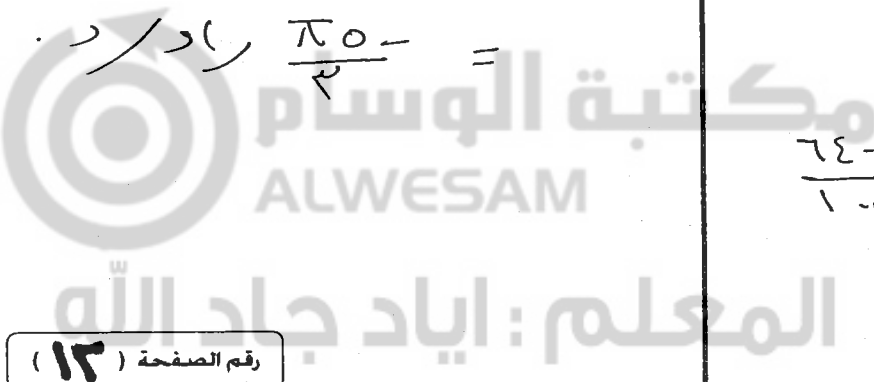
$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} = 2$

$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} = 2$

$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} = 2$

$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} = 2$

$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} = 2$





٢٧. واسورة حديد حجومه طولها ثابتة
 نصف قطرها الداخلي والخارجي متغيران ،
 حيث يبقى حجم حديد ثابت . حدد معدل تغير
 نصف قطر خارجي عند لحظة التي يتغير
 نصف قطر الداخلي ه حجم والخارجي
 ٧ سم ، ومعدل تغير نصف قطر
 الداخلي $\frac{1}{4}$ سم / ث .

الحل : الحجم ثابتة

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

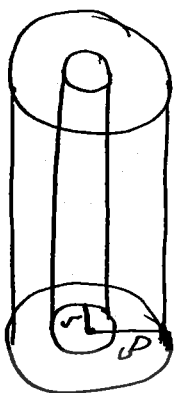
$$0 = 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} - 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore 0 = 4\pi \times 2 \times 7 \times \frac{dr}{dt} - 4\pi \times 2 \times 5 \times \frac{dR}{dt}$$

$$\therefore 0 = 56\pi \frac{dr}{dt} - 200\pi \frac{dR}{dt}$$

$$56\pi \frac{dr}{dt} = 200\pi \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{200}{56} \frac{dR}{dt} = \frac{25}{7} \frac{dR}{dt}$$



الشكل

$\frac{dr}{dt} = ?$

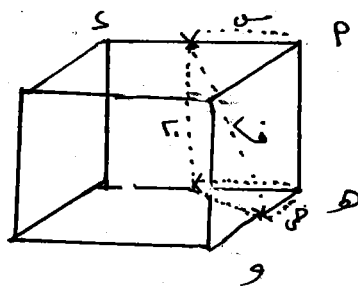
$\frac{dr}{dt} = \frac{25}{7}$

عند

$r = 5$

$R = 7$

٣٣. شكل مجاور يمثل ملعب خبثي
 طول حقله ٣٠ سم ، انطلقت عليه
 غلثتان بنفسه الكفة . الاولى من
 الرأس م (وعلى حرف SP) ، واتجاه
 الرأس د ، وسرعة ٤ سم / ث ، و
 الثانية من الرأس ه (على حرف PQ)
 باتجاه (و) بسرعة ٣ سم / ث . حدد معدل
 ابتعاد الغلثتين من بعضهما بعد ٤
 ثواني من لحظة انطلاقهما ؟



الحل :

$\frac{ds}{dt} = 4$ ، $\frac{dr}{dt} = 3$

$s = 4 \times 4 = 16$

$r = 3 \times 4 = 12$

$f = s^2 + r^2 = 16^2 + 12^2$

$f = \sqrt{16^2 + 12^2}$

$\frac{df}{dt} = 2s \frac{ds}{dt} + 2r \frac{dr}{dt}$

$\frac{df}{dt} = \sqrt{16^2 + 12^2}$

$= 2 \times 16 \times 4 + 2 \times 12 \times 3 =$

$128 + 72 = 200$

$\frac{200}{20} = \frac{100}{10} =$

$\frac{100}{10} = \frac{100}{10} =$

$\frac{100}{10} = 10$



تطبيقات القيم التقهوى

هي مسائل لإيجاد البقيّة تكامليّة متغيرة أو أصغر قيمتها.

طريقة الحل:

١. يتم رسم الآلة وتكرير متغيراتها.
٢. إذا كانت الآلة لها أكثر من متغير نستبدلها بـ ١ آلة متغير واحد.
٣. نشتق النسبة للمتغير المتبقي مناوي بالصفر (لإيجاد النقاط الحرجية).
٤. فتأكد من القيم الناتجة إنها تقهوى (عظمى أو صغرى)

« من اختيار المسألة الأولى أو الثانية »

١. ما هما العدداه للزناح مجموعهما ١٠ ، وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

الحل: العلاقة الإحصائية المعادة

$$10 = x + y$$

$$\boxed{y = 10 - x}$$

نعرّف $x = y$

من العددين x و y يعيد باقي

$$x = y = (10 - x) = 10 - x$$

نشتق $0 = 10 - 2x \Rightarrow \boxed{x = 5}$ نتأكد أنه اختيار



٢. جد العدد الذي ينتمي للفترة $[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}]$ الذي يجعل ناتج العدد و مقادير آبه فاعليه

الحل: نعرّف عدد x

العلاقة الإحصائية

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

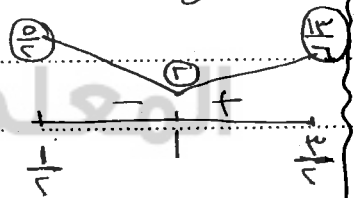
لاختراع معادة

نشتق $1 = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1-x}{x}$

نأخذ $x = 1$

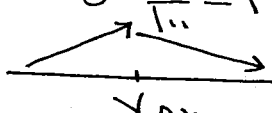
نتأكد من $[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}]$

عند $x = \frac{1}{3}$

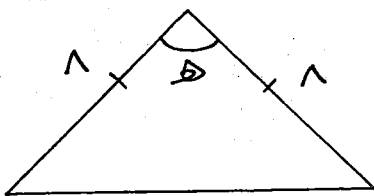




عبر
 $(س) ر = ع \times س - ل (س)$
 $(س) ر = (س \frac{1}{100} - ٢٠٠) \times س - (٥٠٠ + ٢٠)$
 $٢٠٠ = س \frac{1}{100} - ٢٠٠ - ٥٠٠ - ٢٠$

نستق
 $٧٥٠٠ = س \leftarrow ٠ = ٥٠٠ - س \frac{2}{100}$
 جهاز (٧٥٠٠) 

٥. مثلث متطابق الاضلاع ، طول كل ضلع ٨ سم ، اذا كانت زاوية رأس المثلث هي متغيرة . جد قياس الزاوية له لتي كجمل مساحة المثلث أكبر ماعليه ؟



الكل :

العلاقة لاصليه

$٣ = \frac{1}{2} \times ٨ \times ٨ \times \sin \alpha$ لا تحتاج قاعدة
 $٣ = ٣٢ \sin \alpha$

$\sin \alpha = \frac{٣}{٣٢} \leftarrow \alpha = \sin^{-1} \left(\frac{٣}{٣٢} \right)$

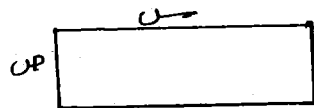
$\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{3} \times \frac{٣}{٣٢}$



٦. متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ، ومجموع اطوال أعمقه يساوي ٦٦ سم ، جد ابعاد متوازي المستطيلات التي تجعله أكبر حجماً .

تمرين : جد اعداديه بلذيه مجموع اهدما مع مثلي عدد اهنر يساوي ٤٠ ، بحيث يتوه ما هيل هنر بها أكبر ماعليه .
 الجواب : س = ١٠
 ص = ٢٠

٣. قطعة ا من مستطيلة مثلث ، محيطها ٨٠٠ متر . جد بقدي قطعة الا من لتتوه ما هنر بها أكبر ماعليه .



الكل :

العلاقة لاصليه

المعادة :

$٨٠٠ = ٢٢ + ٢٢$

$٣ = س \times ص$

$٤٠٠ = ص + س$

$٤٠٠ - ٤٠٠ = ص$

$٣ = (س - ٤٠٠) \times س$

$٣ = س - ٤٠٠ = س$

$٣ = ٤٠٠ - ٤٠٠ = س$

$٣ = ٤٠٠ - ٤٠٠ = ص$

٤. مصنع اجهزة كهربائيه ينتج سن جهازاً سنوياً ، ويبع كل جهاز بعر (٢٠٠ - ١٠٠٠) دينار ، اذا كانت كلفة انتاج هذه الاجهزة (٥٠٠ + ٢٠) دينار ، فكم جهازاً ينتج ا مصنع لتقيد أكبر ربح ممكن سنوياً ؟

الجواب : الربح = الايراد - الكلفة

$(س) ر = (س) د - ل (س)$



الحل:

المساحة

$$(2+u)(1+u) = 32$$

$$u = 2 - \frac{22}{1+u}$$

$$\sqrt{2} - \frac{22}{1+u} = (2 - \frac{22}{1+u}) \times u = 3$$

$$\therefore = 2 - \frac{(1)22 - (22)(1+u)}{(1+u)^2} = 3$$

$$2 = \frac{\sqrt{32} - 22 + u}{(1+u)^2}$$

$$(1+u)^2 = 32$$

$$2 = 1+u \leftarrow 17 = (1+u)^2$$

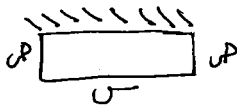
$$3 = u$$



$$7 = 2 - \frac{32}{1+3} = u \therefore$$

يعني الجاد لورقه طولها 8 عرضها 3
 عرضها 1+3

١.٨ من مسطحة مساحتها ٢٨٠٠ ،
 تقع على خفر ، زيد احاطتها بسياج
 ولانبع جبهة الخفر ، حد اقل طول
 للسياج .



الحل:

مساحته $800 = u \times s$

$\frac{800}{s} = u$

الاصليه

$u = s + 2$

$\frac{800}{s} \times 2 + s = 1$

$\frac{1600}{s} + s = 1$

ننتقل

$1 = \frac{1600}{s} + s$

$\frac{1600}{s} = 1 - s$

$\frac{1600}{1-s} = s$

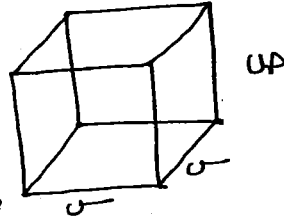
$\frac{1600}{1-s} = s$

الجواب $20 \times 40 = 800$

رقم الصفحة (16)

الاصليه

$u \times s = 3$



المساحة

$700 = u \times s + \sqrt{2}$

$100 = u + \sqrt{2}$

$\sqrt{2} - 100 = u$

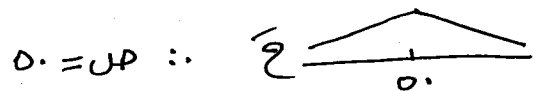
العلاقة بالاصليه

$u \times s \times s = 2$

$(\sqrt{2} - 100)^2 \times s = 2$
 $\sqrt{2} - 100 = s$

$\therefore = \sqrt{2} - 100 = s$

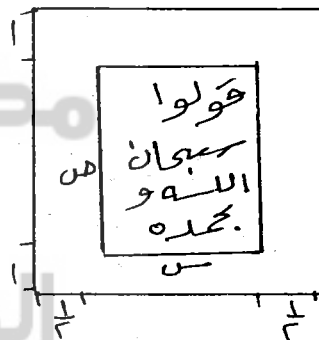
$0 = s, 0 = s \leftarrow 0 = (s - 100) \times s$



\therefore ابعاده $0 = u, 0 = s$

٧. ورقة مساحتها ٣٢ سم^٢ ، زياد
 طباعة اعلاه عليها بحيث نترك
 هوامشه من اعلى واسفل احمر ،
 ومن الجانبين $\frac{1}{2}$ سم ، ما ابعاد
 الورقة لتكويه المساحة المطبوعه
 اكبر ما عليه ؟

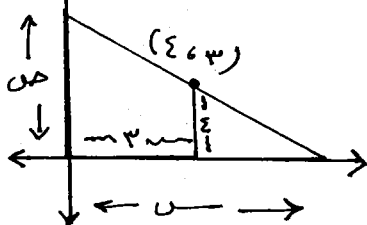
الحل:



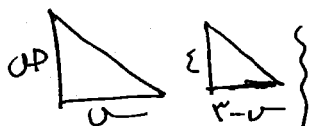


١٠. جد معادلة المستقيم المار بالنقطة

(٤, ٣) ودمج مع المحاور ليحدد المعادلة الجيبية مثلثاً قائماً



الحل:
المطلوب معادلة المستقيم للـ



الاجيبية (اقل)
 $3 = 4 \times u - \frac{1}{2} \times u^2$

$6 = 8u - \frac{1}{2}u^2$

$12 = 16u - u^2$

$\frac{u-4}{4-u} = \frac{4u}{4-u}$

$\frac{u-4}{4-u} = \frac{4u}{4-u}$

$\therefore = \frac{1 \times 12 - (4 \times 4) \times 2}{4(4-u)} = 6$

$\therefore = 12 - 16 - 8u$

$\therefore = 12 - 16 - 8u$

$7 = 5$

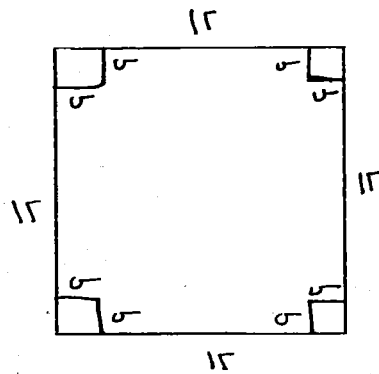
المستقيم يمر بالنقطة (٤, ٣) و (٠, ٦)

$\frac{3-6}{4-0} = \frac{y-6}{x-0}$

المعادلة هي $-\frac{3}{4} = \frac{y-6}{x}$

$\frac{3}{4} = \frac{6-y}{x}$

٩. هياوية معدنية مربعة الشكل طول ضلعها ١٢ سم، زيد قطعاً مربعان متساويين عند أطرافها ثم نشي الاجزاء المتبقية لتشكل هياوية معدنية عظاماً. ما هي حجم الهياوية.



الحل:

$2 = \text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع}$

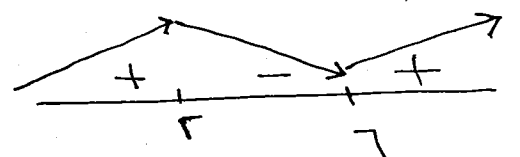
$2 = 6 \times (12-3) \times (12-3)$

$2 = 6 \times (12-3)$

$2 = 6 \times (12-3) \times 6 + 1 \times (12-3)$

$2 = (6 \times 6 - 3 \times 3) \times (12-3)$

$2 = 27 \times 9$



عند $3 = 27$ عظمي (الكبر معاً)

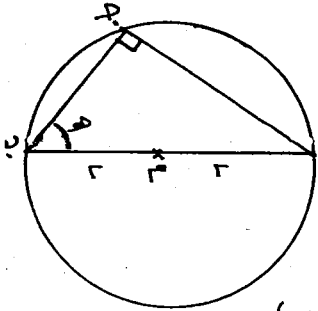
$27 \times (2 \times 6 - 3) \times (2 \times 6 - 3) = 2$

$27 \times 8 \times 8 =$

$1728 =$



قياسه $\angle P$ بـ $\angle Q$ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما عليه .



الحل :
$$م = \frac{1}{2} \times 4 \times ه$$

لازم نخلص من $ه$ بـ $ه١$

المساعدة

$$م = 2 \times ه١ \times ه$$

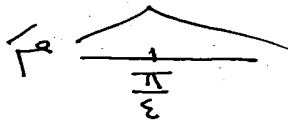
$$ه١ = 2 = ه$$

$$م = 8 = 2 \times ه$$

$$ه١ = 4 = 2 \times ه$$

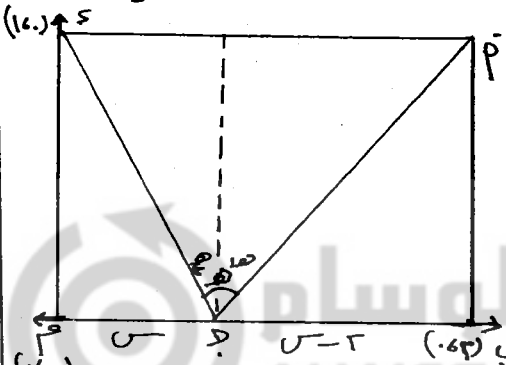
$$ه١ = 4 = 2 \times ه$$

$$ه١ = 4 = 2 \times ه$$



١٣. الشكل المجاور يمثل سطح P بـ 5 م

فيه $B(0, 2)$ و $S(1, 0)$. فوجدت النقطة D على القطع SB وعلى بعد 3 م من S من نقطة A لاهل $م$ ، ووجد P و D فتكونت الزاوية المتغيرة $ه$. جد $س$ التي تجعل $ه$ في حقيقتها العظمى



الحل :

$$م = 5$$

$$م = 5 = \frac{1}{2} \times 4 \times ه$$

$$ه = 2.5$$

١١. $P(4, 0)$ ، $B(9, 0)$ نقطتا $ه$ ثابتا . (ج) نقطة تتحرك على محور السينات الموجب . جد لإحداثي السيني لها الذي يجعل قياس الزاوية $\angle P$ بـ $\angle Q$ أكبر ما عليه .

الحل : $ه = ه١ - ه٢$

$$ظا ه = ظا (ه١ - ه٢)$$

$$ظا ه١ - ظا ه٢ = ظا ه١ + ظا ه٢$$

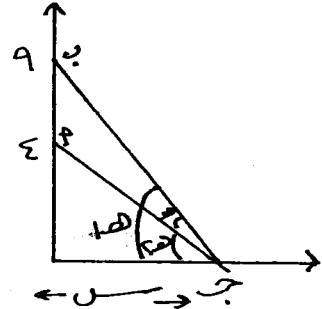
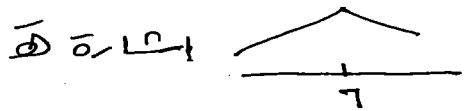
$$ظا ه = \frac{4}{5} - \frac{9}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

نشق

$$\frac{د ه}{د س} \times ق ا ه = \frac{5(5-9)}{5(5+9)}$$

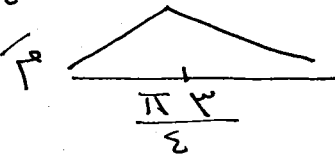
$$\frac{د ه}{د س} = \frac{5-9}{5+9} = \frac{-4}{14} = -\frac{2}{7}$$

$$س = 7 \leftarrow س = 7$$



١٣. الشكل المجاور يمثل دائرة قطر $ه$ و $ه١$ P بـ طوله 5 م . بدأت النقطة D الحركة على الباطن من B باتجاه P لتتسم مع القطر P بـ مثلثاً قائماً في D ، جد



$$\begin{aligned} 3 &= \frac{1}{r} \times (2 - \frac{5}{2}) + \text{حاس} \\ 3 &= \frac{5}{2} - \text{حاس} + \text{حاس} + \text{حاس} \\ 3 &= \frac{5}{2} + \text{حاس} \\ \text{حاس} &= 1 - \frac{5}{2} \\ \text{حاس} &= \frac{2-5}{2} = \frac{-3}{2} \\ \frac{\pi \times 3}{6} &= \frac{\pi \times 3}{6} \end{aligned}$$


$$\frac{\text{قاه}}{(r-2) + \text{حاس}} = \frac{2}{(r-2) - 1}$$

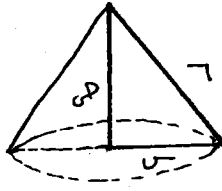
$$\frac{\text{قاه}}{r + \text{حاس} - 1} = \frac{2}{r-3}$$

$$\frac{\text{قاه} \times (r-3)}{r(r+\text{حاس}-1)} = \frac{2(r-3)}{r(r+\text{حاس}-1)}$$

$$\frac{\text{قاه}}{r} = \frac{2(r-3)}{r(r+\text{حاس}-1)}$$

$$\frac{\text{قاه}}{r} = \frac{2(r-3)}{r(r+\text{حاس}-1)}$$

١٥. ما حجم أكبر مخروط ينتج عن دوران مثلث قائم حول أحد ضلعيه لقائمة جيبته وتره ليكث ٦ حجم؟



المساحة

$$r + h = 26$$

$$h = 26 - r$$

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = 2$$

$$\frac{1}{3} \pi r^2 (26 - r) = 2$$

$$\frac{1}{3} \pi r^2 (26 - r) = 2$$

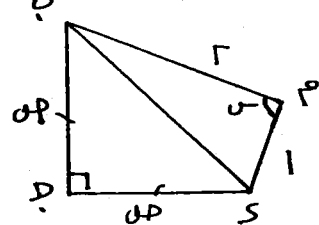


$$r = 26 - h$$

$$\frac{1}{3} \pi (26 - h)^2 h = 2$$

١٦. ما حجم أكبر مخروط ينتج عن دوران مثلث متساوي الساقين حول أحد أضلاعه؟

١٤. الشكل الرباعي م د ج ب، فيه الضلع م ب ثابت طوله ٢ سم، وفيه م د ثابت بطوله قدره ١ سم، إلا أنه ومنه ما حول يدور في مستوئح الشكل حول م، ويصنع مع الضلع ثابته م ب زاوية قدرها س، أعا الزاوية د ج ب قائمة. واصلنا ج د، ج ب متساويان دوماً. جد قيمة س التي تجعل مساحة الشكل الرباعي أكبر ما يمكن.



الحل:

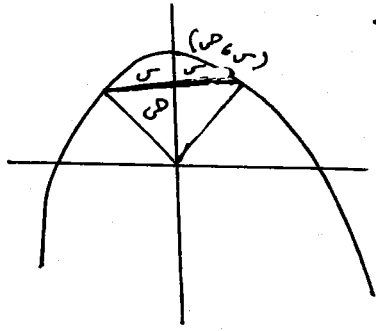
$$3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times \text{حاس}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \text{حاس} = 3 - 1 = 2$$

$$\begin{aligned} \text{حاس} &= 2 \\ \text{حاس} &= 2 \\ \text{حاس} &= 2 \end{aligned}$$



١٨. عميل اشعل الحجاور مثلثا متساوي الساقين مرسوما فوقه محور السينات، بحيث يقع رأسه في نقطة الادلل، ورأسه الآخران على صفتن $ص = ٢٧ - ٢$ و $ص = ٢٧ - ٢$ جد أكبر مساحة لهذا المثلث؟



الحل:

الاصليه:

$$ص \times \sqrt{٢} \times \frac{١}{٢} = م$$

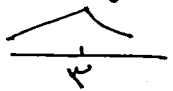
الماعدة:

$$ص = ٢٧ - ٢$$

$$(٢٧ - ٢) \times ص = م$$

$$ص = \sqrt{٢٧} = م$$

$$ص = ٧ \leftarrow م = ٢٧ - ٢ = ٢٥$$

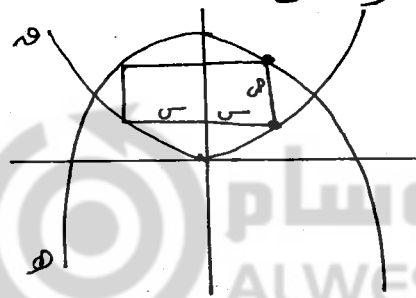


$$١٨ = ٩ - ٢٧ = ص$$

$$١٥٤ = ١٨ \times ٣ \times \frac{١}{٢} = م$$

١٩. ما مساحة أكبر مثلث متساوي الساقين مرسوما فوقه محور السينات، بحيث يقع رأسه في نقطة الادلل، ورأسه الآخران على صفتن $ص = ٦ - ٢$ و $ص = ٦ - ٢$ ؟

وه $(٦ - ٢) = ص$ و صفتن $ص = ٦ - ٢$ و $ص = ٦ - ٢$



الحل:

الاصليه:

$$ص \times ٢ = م$$

الماعدة:

$$ص = ٦ - ٢$$

$$ص = ٦ - ٢$$

$$ص = ٦ - ٢$$

رقم الصفحة (٢٠)

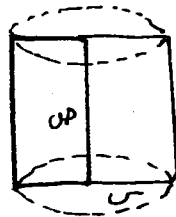
$$(٦ - ٢) \times ٢ = م$$

$$١٢ - ٤ = م$$

اكل:

الاصليه

$$ص \times \pi = م$$



الماعدة:

$$٢ + ص = م$$

$$١٠ = ص + م$$

$$ص = ١٠ - م$$

$$ص \times \pi \times (١٠ - ص) = م$$

$$١٠ \times \pi \times ص - ص^2 \times \pi = م$$

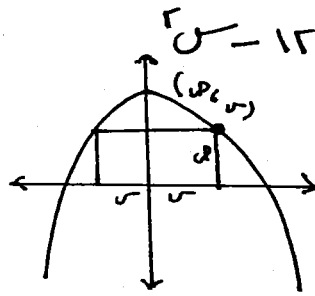
$$١٠ \times \pi \times ص - ص^2 \times \pi = م$$

$$\frac{١٠ \times \pi \times ص}{٢} = \frac{ص^2 \times \pi}{٢}$$

$$١٠ = ص$$

$$١٠ \times \pi \times \frac{١٠}{٢} = م$$

١٧. ما مساحة أكبر مثلث متساوي الساقين مرسوما فوقه محور السينات، بحيث يقع رأسه في نقطة الادلل، ورأسه الآخران على صفتن $ص = ١٢ - ٢$ و $ص = ١٢ - ٢$ ؟



الماعدة:

$$ص = ١٢ - ٢$$

$$ص \times ٢ = م$$

$$١٢ - ٢ = ص$$

$$١٢ - ٢ = ص$$



$$٨ = ٤ - ١٢ = ص$$

$$٨ \times ٢ \times ٢ = م$$

$$٣٢ = م$$



الحل:



ملاحظة: $\frac{1}{4} \pi r^2 s = 2$
 $s^2 + r^2 = h^2$
 $s = h - r$

$$\frac{1}{4} \pi (h-r)^2 s = 2$$

$$\frac{1}{4} \pi h^2 s - \frac{1}{2} \pi h r s + \frac{1}{4} \pi r^2 s = 2$$

$$\frac{1}{4} \pi h^2 s - \frac{1}{2} \pi h r s = 2$$

$$\frac{1}{4} \pi h^2 s = 2 + \frac{1}{2} \pi h r s$$



$$h^2 s = \frac{8}{\pi} + \frac{1}{2} h r s$$

$$h^2 s - \frac{1}{2} h r s = \frac{8}{\pi}$$

لأنه الحلون هو ؟
 ذلك خارج

طول لقوس = محيط قاعدة مخروط

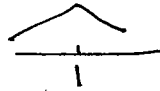
$$2\pi r = s$$

$$2\pi r \times \frac{1}{4} \pi r^2 s = 2$$

$$\frac{1}{2} \pi r^3 s = 2$$

$$\frac{1}{2} \pi r^3 s = 2$$

$$m = 12 - 12 \times 2 = 0 \rightarrow s = 1$$



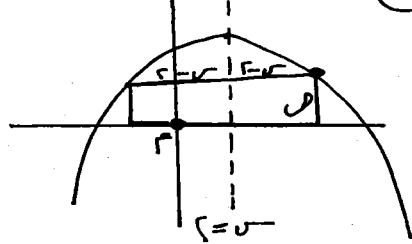
$$4 = 2 - 6 = 0 \text{ P} \therefore$$

$$3 = 4 \times 1 \times 2 = 8 \text{ وهران مربعة}$$

٣. مساحة أكبر مستطيل برسم

خوفه محور السينات و رأسه

الآخرانه على صغرى (س) = ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨



الحل:

$$\begin{cases} 4 = (4-s)s \\ (4-s)s = 4 \end{cases}$$

$$4 = 4s - s^2$$

$$s^2 - 4s + 4 = 0$$

$$(s-2)^2 = 0$$

$$s = 2$$



$$8 = 0 \text{ P} \therefore$$

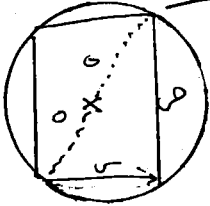
$$3 = 4 \times (4-4) = 0 \text{ وهران مربعة}$$

٢١. قطاع دائري زاوية المركزه

هو ، نصف قطر دائرته نصف
 حوسل الى مخروط دائري قائم نصف
 قطر قاعدته س و ارتفاعه ٤ .
 جد ه التي تجعل حجم المخروط اقل ما يمكن.



٢٣. حاد صاعده أكبر من سطح
يرسم داخل دائرة نصف قطرها



الحل:

$$3 = 5 \times 5$$

$$3 = 5 \times \sqrt{5 - 1.0}$$

$$3 = \sqrt{5 - 1.0} \times \sqrt{5 - 1.0}$$

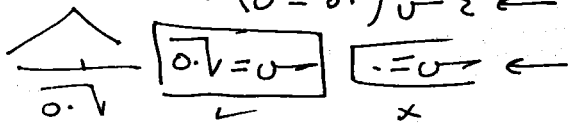
$$3 = \sqrt{5 - 1.0} \times \sqrt{5 - 1.0}$$

$$3 = \sqrt{5 - 1.0} \times \sqrt{5 - 1.0}$$

$$3 = \sqrt{5 - 1.0} \times \sqrt{5 - 1.0}$$

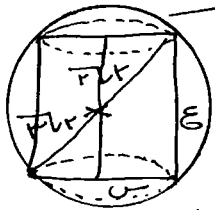
$$3 = \sqrt{5 - 1.0} \times \sqrt{5 - 1.0}$$

$$3 = \sqrt{5 - 1.0} \times \sqrt{5 - 1.0}$$



∴ $3 = 0.7 \times 0.7 = 0.49$

٢٤. ما حجم أكبر مخروط
داخل كرة نصف قطرها ٣



الحل:
العلاقة بينهما

$$3 = \pi \times 3 \times 3$$

الساعة

$$(3) = (r) + (x)$$

$$1.8 = 3 + x$$

$$\frac{3 - 1.8}{3} = x$$

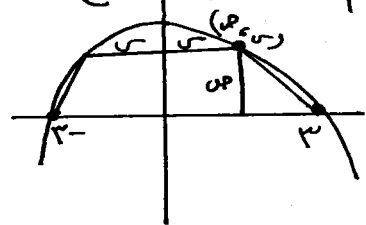
$$0.4 = x$$

$$3 = \pi \times 3 \times 3$$

∴ $3 = \pi \times 1.8 = 6 \times 1.8 \times \pi = 3$

٢٣. في مثلث قائم الزاوية (س) = 4 - س
يقطع محور السينات في نقطتي ب، ج.

ج. أكبر مساحة مثلثه أكبر من
ب. ج. د. وليزيد عليه جمعهما حيث
ب. ج. د. وليتساوا ج. د. على حافتين
ع. د. س.



الحل:

$$3 = \frac{1}{2} \times \text{القاعدتين} \times \text{الارتفاع}$$

$$3 = \frac{1}{2} \times (3 + 4) \times 3$$

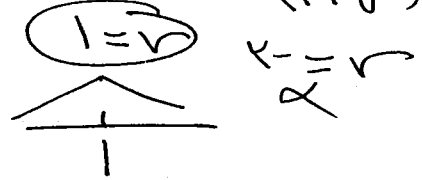
$$3 = \frac{1}{2} \times (3 + 4) \times 3$$

$$3 = 9 - 2\sqrt{3} + 3 = 6 - 2\sqrt{3}$$

$$3 = 6 - 2\sqrt{3} - 9 = -3 - 2\sqrt{3}$$

$$3 = -3 - 2\sqrt{3} + 3 = -2\sqrt{3}$$

$$3 = (1 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$$



$$1 = 1 - 9 = 3$$

$$3 = \frac{1}{2} \times (1 + 2) \times 1$$

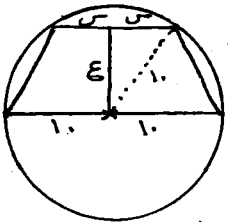
$$3 = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0.5$$



نقول من ع في الحجم

$$\begin{aligned} 2 &= \left(\frac{24}{3}\right) \frac{\pi}{3} - \left(\frac{24}{3}\right) \times \frac{\pi 2}{3} \\ 2 &= \frac{276}{27} \times \frac{\pi}{3} - \frac{16}{9} \times \frac{\pi 2}{3} \\ 2 &= \frac{2}{11} \pi \frac{72}{11} - \frac{3}{27} \pi \frac{32}{27} \\ 2 &= \left(\frac{2}{3} \pi \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{27} = \frac{3}{11} \pi \frac{2}{11} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

٢٧. مساحة أكبر شبه منحرف
 رسم داخل دائرة نصف قطرها
 اسم، بحيث قاعدة شبه منحرف
 البري تنطبق على قطر الدائرة.



المساحة:
 $\sqrt{s} + \sqrt{s} = 1 \dots$
 $\sqrt{s} = 1 - \sqrt{s}$

الحل:
 العلاقة لإقليدس
 $s \times (2 + \sqrt{s}) \times \frac{1}{2} = m$
 $m = (1 + s) \sqrt{1 - s}$
 جاهز

$$\sqrt{s} = 1 - \sqrt{s} + \frac{s}{\sqrt{s} - 1} \times (1 + s) = \sqrt{s}$$

$$\sqrt{s} - 1 = \frac{s - 1}{\sqrt{s} - 1}$$

$$\sqrt{s} + 1 = s - 1$$

$$\sqrt{s} = s - 2$$

$$s = 0 - s + 1$$

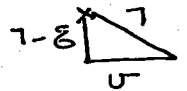
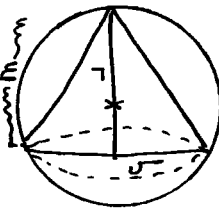
$$s = (0 - s)(1 + s)$$

$$\frac{1}{0} = \sqrt{s} = 1 - \sqrt{s}$$

نقول في *

$$\begin{aligned} \sqrt{s} + 1 &= s - 1 \\ \sqrt{s} &= s - 2 \\ \sqrt{s} &= 0 \end{aligned}$$

٢٥. ما حجم أكبر مخروط يوضع داخل
 كرة نصف قطرها ٦ سم.

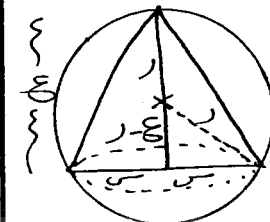


المساحة
 $(7-8) + s = 36$
 $s = (7-8) - 26$
 $s = (7+8) - 26$
 $s = 15 - 26 = -11$

الحل:
 $s = 7 - 4 = 3$

$$\sqrt{\frac{\pi 507}{3}} = 1 \times 2 \times \frac{\pi}{3} = 2$$

٢٦. رهن أن أكبر حجم للمخروط
 رسم داخل كره نصف قطرها
 (ر) هو $\frac{1}{27}$ حجم الكرة.



المساحة:
 $(7-8) + s = 9$
 $s = 7 - 8 = -1$

الحل:
 $s = 7 - 8 = -1$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

الحل:
 لإقليدس (أب)

$$s \pi \frac{1}{2} = 2$$

$$s \times (7-8) \pi \frac{1}{2} = 2$$

$$\left(\frac{3}{8} - \frac{2}{8}\right) \frac{\pi}{3} = 2$$

$$\frac{(7-8) \pi}{3} = 2$$

$$\frac{1}{1} = \frac{8}{8}, \frac{1}{1} = \frac{8}{8}$$

$$s = 7 - 4 = 3$$

$$s = 7 - 4 = 3$$

$$s = 7 - 4 = 3$$

$$s = 7 - 4 = 3$$

$$s = 7 - 4 = 3$$

$$s = 7 - 4 = 3$$

$$s = 7 - 4 = 3$$

$$s = 7 - 4 = 3$$

$$s = 7 - 4 = 3$$

$$s = 7 - 4 = 3$$

$$s = 7 - 4 = 3$$

$$s = 7 - 4 = 3$$

$$s = 7 - 4 = 3$$

$$s = 7 - 4 = 3$$

$$s = 7 - 4 = 3$$

$$s = 7 - 4 = 3$$



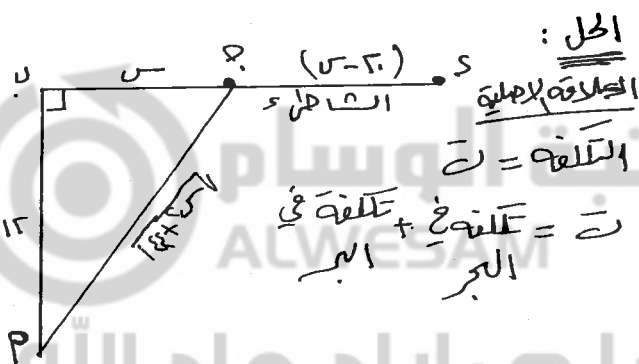


← ... ١ ان = ٤ ... ← ٤ = ن



∴ بعد ع ساعات يكون
البعد أقل مما عليه .

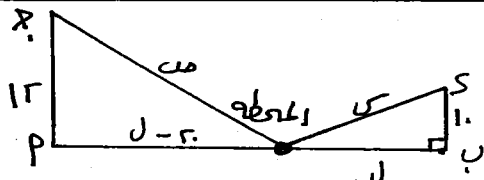
٣٢. تريد شركة أن تخذ ائتمون
نقطه من النقطة (P) ، في عرض البحر
إلى النقطة (S) ، لواقعه على الشاطئ
مستقيم . إذا كانت النقطة (B)
تقع على هذا الشاطئ وهي أقرب
نقطة إلى النقطة P ، وكانت
المسافة P = ١٢ كم والمسافة
B = ٥ كم . فعيّن موقع النقطة
(B) على الشاطئ بين B ، S
بحيث تكون تكلفت مدّ الائتمون
من P إلى S مروراً بالنقطة (B)
أقل مما عليه . علماً أن تكلفت
مدّ ائتم من الائتمون تحت الماء هي
(٥٠٠٠) دينار ، وتكلفت مدّه على
الشاطئ هي ٣٠٠٠ دينار .



الحل :

التكلفت = ٢٠٠٠
٢٠٠٠ + ٥٠٠٠ = ٧٠٠٠
في البحر

الحل :



العلاقة لاجلبيه
٣ = س + ٢٠٠٠
فإننا عورس من س
س = ٣ - ١٠٠٠
٣ = (٣-١٠٠٠) + ١٢٤

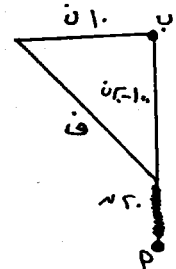
$$٣ = (٣-١٠٠٠) + ١٢٤ + ١٠٠$$

$$٣ = ١ - x (٣-١٠٠) + ١٢٤ + ١٠٠$$

$$١٠ = ٣ - ١٠٠ + ١٠٠٠ - ٣٠٠ + ١٢٤ + ١٠٠$$

بحيث تكون المسافة
بينهما أقل

٣١. ففنا P جنون B ،
البعد بينها .. ائتم . تبخر P فحالة
بسرعة ٢٠ كم / س ، وتبخر B غرباً
بسرعة ١٠ كم / س . متى يكون البعد
بينهما أقل مما عليه ؟



الحل : لوجود كلمة متى نضع

المسافات ببدالة (ن) حيث

$$\text{المسافة} = \text{السرعة} \times \text{الزمن}$$

$$٣ = (١٠٠ - ١٠٠) + (١٠٠)$$

$$٣ = \sqrt{١٠٠ + (١٠٠ - ١٠٠)^2}$$

$$٣ = \sqrt{١٠٠ + (١٠٠ - ١٠٠)^2}$$



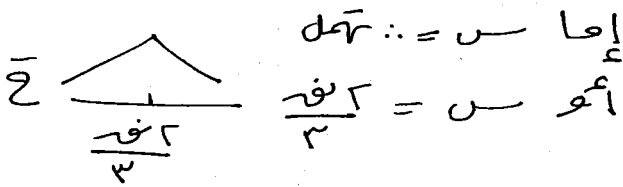
$$2 = \pi \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right)$$

$$2 = \pi \times \frac{4}{3} - \pi \times \frac{4}{3}$$

جاهز به

$$2 = \pi \times \frac{4}{3} - \pi \times \frac{4}{3}$$

$$2 = \pi \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right)$$



$$2 = \pi \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right)$$

$$2 = \pi \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right)$$

$$\frac{2}{\pi} = \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right)$$

$$\frac{2}{\pi} = \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right)$$

$$\frac{2}{\pi} = \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right)$$

تدريب جميل :-
 أثبتت باستخدام القطر لعمق القوس
 أن أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل
 دائرة هكلوه مربعاً دائماً =

$$2 = \pi \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right)$$

$$2 = \pi \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right)$$

$$2 = \pi \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right)$$

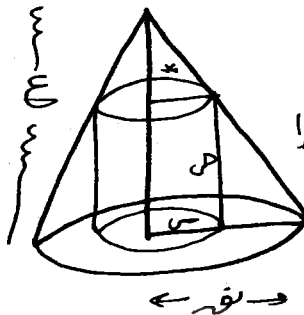
جاهز به

$$2 = \pi \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right)$$

$$\frac{2}{\pi} = \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{4}{3} - 1$$

٣٣. برهن انه أكبر حجم لا طوانه
 رسم داخل مخروط دائري
 قائم يساوي $\frac{8}{9}$ منه حجم
 المخروط



الحل: نعتبر نصف قطر المخروط
 نصف ارتفاعه h
 (ثوابت)

الارتفاع

$$\frac{2}{3} = \pi \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right)$$


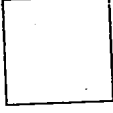
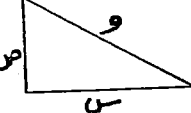
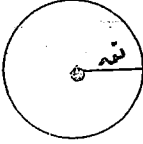
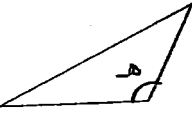

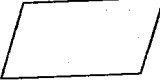

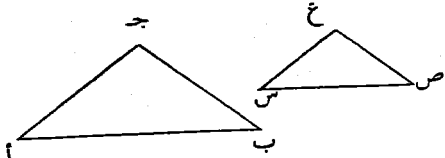


$$\frac{r}{h} = \frac{r'}{h'}$$

$$r = \frac{h' \times r'}{h}$$

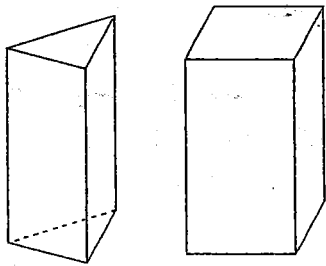


قوانين رياضية مهمة (المعدلات المرتبطة، تطبيقات القيم القصوى)

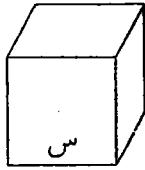
<p>(٩) محيط المستطيل = $2(s + ص)$ مساحة المستطيل = $(س \times ص)$ حيث س: الطول ص: العرض</p> 	<p>(١) المسافة بين نقطتين $(ص_١, س_١)$ و $(ص_٢, س_٢)$ $ف = \sqrt{(ص_١ - ص_٢)^2 + (س_١ - س_٢)^2}$</p>
<p>(١٠) محيط المربع = $4س$ مساحة المربع = $س^2$ حيث س طول الضلع</p> 	<p>(٢) نظرية فيثاغورس: مربع الوتر = مجموع مربعين الضلعين الآخرين. $و^2 = س^2 + ص^2$</p> 
<p>(١١) محيط الدائرة = 2π نق مساحة الدائرة = π نق^٢ حيث نق: نصف القطر</p> 	<p>(٣) قانون جيب التمام: لإيجاد ضلع في مثلث عُلِمَ فيه ضلعان وزاوية محصورة بينهما: $ل^2 = س^2 + ص^2 - 2سص \cos هـ$</p> 
<p>(١٢) مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ نق^٢ هـ طول القوس = نق \times هـ حيث هـ: الزاوية المركزية</p> 	<p>(٤) بعد النقطة (س, ص) عن المستقيم $أس + ب ص + ج = ٠$ البعد = $\frac{ أس + ب ص + ج }{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$</p>
<p>(١٣) مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^٢ (هـ - جا هـ) حيث هـ: الزاوية المركزية</p>	<p>(٥) إحداثيات منتصف نقطتين $(ص_١, س_١)$ و $(ص_٢, س_٢)$ هو: $(\frac{ص_١ + ص_٢}{2}, \frac{س_١ + س_٢}{2})$</p>
<p>(١٤) مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة \times الارتفاع</p> 	<p>(٦) قانون الجيب $\frac{أ}{جا} = \frac{ب}{جاب} = \frac{ج}{جاج}$</p> 
<p>(١٥) مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة \times الارتفاع إذا عُلِمَ فيه ضلعان وزاوية محصورة بينهما، هـ الزاوية المحصورة بين الضلعين مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ الضلع الأول \times الضلع الثاني \times جا هـ مساحة المثلث متساوي الأضلاع = $\frac{1}{4}$ س^٢ جا ٦٠ حيث س: طول ضلع المثلث متساوي الأضلاع</p>	<p>(٧) إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين الأضلاع المتناظرة متساوية $\frac{أ}{س} = \frac{ب}{ص} = \frac{ج}{ع}$</p> 
<p>(١٦) المسافة = السرعة \times الزمن</p>	<p>(٨) الربح = سعر البيع - سعر التكلفة</p>



(٢٣) المنشور القائم هو مجسم له قاعدتان مستويتان ومتطابقتان ومتوازيتان، وأسطحه الجانبية مستطيلات، إذا كانت قاعدته مثلثة الشكل يسمى منشورًا قائمًا ثلاثيًا، وإذا كانت قاعدته مربعة الشكل يسمى منشورًا قائمًا رباعيًا.
مساحة المنشور القائم الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع
حجم المنشور القائم = مساحة القاعدة × الارتفاع



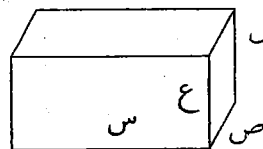
(١٧) مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع



(١٨) حجم المكعب = $س^3$
المساحة الكلية = $6س^2$
المساحة الجانبية = $4س^2$
حيث س: طول ضلع المكعب

(١٩) حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع
المساحة الجانبية = $2(س+ص)ع$

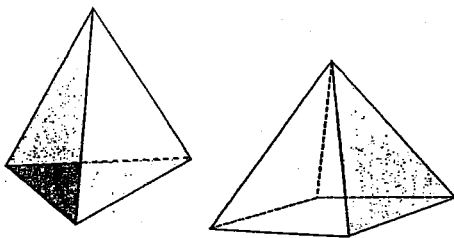
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين



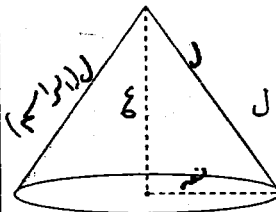
$2(س+ص)ع + 2سص$

(٢٤) الهرم القائم: عبارة عن مجسم تكون قاعدته منتظمة، والأوجه الجانبية عبارة عن مثلثات متطابقة الضلعين، ويسمى ارتفاع المثلث المتطابق الضلعين: الارتفاع الجانبي للهرم، ويسمى الهرم بالهرم القائم الثلاثي إذا كانت قاعدته مثلث متطابق الأضلاع، وهرمًا قائمًا رباعيًا إذا كانت قاعدته مربعة الشكل.

المساحة الجانبية للهرم = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع
حجم الهرم القائم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع



(٢٠) المخروط الدائري القائم

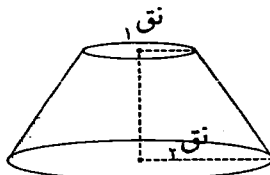


الحجم = $\frac{\pi}{3} نق^2 ع$

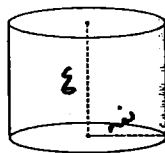
مساحة سطح المخروط = $\pi نق ل$

المخروط ناقص

الحجم = $\frac{\pi}{3} (نق^2 + نق^2 + نق^2) ع$



(٢١) الاسطوانة:

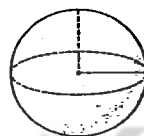


الحجم = $\pi نق^2 ع$

المساحة الجانبية = $2\pi نق ع$

المساحة الكلية = $2\pi نق^2 + 2\pi نق ع$

(٢٥) زاوية الارتفاع أو الانخفاض: هي الزاوية المحصورة بين خط البصر (النظر) والخط الأفقي المارّ بالعين.



(٢٢) الكرة

الحجم = $\frac{4\pi}{3} نق^3$

مساحة سطح الكرة = $4\pi نق^2$



المعلم: اياك جاد الله

