الاتصال والاشتقاق

Esam Shikh
0796300625

ملاحظة

لإيجاد المشتقة أو بحث قابلية الاشتقاق للاقتران ق عند س = أ يجب

أولاً : دراسة الاتصال عند أ

فإذا كان :

(1) ق متصل عند أ

⇓

نبحث قابلية اشتقاق ق عند س = أ

فإذا كان :

(1) $\text{ق}'_{+}(\text{أ}) = \text{ق}'_{-}(\text{أ})$

⇓

ق'(أ) موجودة

(2) $\text{ق}'_{+}(\text{أ}) \neq \text{ق}'_{-}(\text{أ})$

⇓

ق'(أ) غير موجودة

(2) ق غير متصل عند أ

⇓

ق'(أ) غير موجودة

نظرية (1)

إذا كان ق اقتران قابل للاشتقاق عند أ فإن ق يكون متصل عند أ

البرهان

بما أن ق قابل للاشتقاق عند أ ⇐

$$\text{ق}'(\text{أ}) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}}$$

المطلوب اثبات أن

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{أ})$$

$$\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ}) = \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ}) \times \frac{\text{س} - \text{أ}}{\text{س} - \text{أ}}$$

نأخذ النهاية للطرفين

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} (\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \left(\frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}}\right) \times (\text{س} - \text{أ})$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) - \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{أ}) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}} \times \lim_{\text{س} \to \text{أ}} (\text{س} - \text{أ})$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) - \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{أ}) = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{أ})$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{أ})$$

وبما أن ق(أ) معرفة

⇐

ق متصل عند س = أ .

نظرية (2)

ق غير متصل عند أ ⇐ ق'(أ) غير موجودة

ملاحظة

المشتقة عند أطراف الفترة غير موجودة .

إذا كان الاقتران ق معرفاً على الفترة [أ، ب] فإن

ق'(أ) غير موجودة

ق'(ب) غير موجودة

لأن ق غير معرف من يسار أ وغير معرف من يمين ب .

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٤\text{س} + ١ & -٣ < \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} + ٣ & ١ \leq \text{س} \leq ٥ \end{cases}$

جد قَ(١) (إن وجدت) مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

أولاً: نبحث الاتصال عند ١

$\text{ق}(١) = ٢ + ٣ = ٥$

$\lim_{\text{س} \to ١^+} \text{ق}(\text{س}) = ٥$

$\lim_{\text{س} \to ١^-} \text{ق}(\text{س}) = ٤ + ١ = ٥$

$\lim_{\text{س} \to ١} \text{ق}(\text{س}) = ٥ = \text{ق}(١)$

⟸ ق متصل عند س = ١

ثانياً: نبحث الاشتقاق عند ١

$\text{قَ}_-(١) = \lim_{\text{ع} \to ١^-} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(١)}{\text{ع} - ١}$

$= \lim_{\text{ع} \to ١^-} \frac{(٤\text{ع} + ١) - (٥)}{\text{ع} - ١}$

$= \lim_{\text{ع} \to ١^-} \frac{٤\text{ع} - ٤}{\text{ع} - ١}$

$= \lim_{\text{ع} \to ١^-} \frac{٤\cancel{(\text{ع} - ١)}}{\cancel{(\text{ع} - ١)}} = ٤$

$\text{قَ}_+(١) = \lim_{\text{ع} \to ١^+} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(١)}{\text{ع} - ١}$

$= \lim_{\text{ع} \to ١^+} \frac{(٢\text{ع} + ٣) - (٥)}{\text{ع} - ١}$

$= \lim_{\text{ع} \to ١^+} \frac{٢\text{ع} - ٢}{\text{ع} - ١}$

$= \lim_{\text{ع} \to ١^+} \frac{٢\cancel{(\text{ع} - ١)}}{\cancel{(\text{ع} - ١)}} = ٢$

⟸ $\text{قَ}_+(١) \neq \text{قَ}_-(١)$

⟸ قَ(١) غير موجودة

⟸ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ١

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ - \text{س} & ٠ \leq \text{س} \leq ٣ \\ ٥\text{س} - ٩ & ٣ < \text{س} < ٦ \end{cases}$

جد قَ(٣) (إن وجدت) مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

نبحث الاتصال عند ٣

$\text{ق}(٣) = ٩ - ٣ = ٦$

$\lim_{\text{س} \to ٣^-} \text{ق}(\text{س}) = ٦$

$\lim_{\text{س} \to ٣^+} \text{ق}(\text{س}) = ١٥ - ٩ = ٦$

⟸ $\lim_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س}) = ٦ = \text{ق}(٣)$

⟸ ق متصل عند س = ٣

نبحث الاشتقاق عند ٣

$\text{قَ}_-(٣) = \lim_{\text{ع} \to ٣^-} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٣)}{\text{ع} - ٣}$

$= \lim_{\text{ع} \to ٣^-} \frac{\text{ع}^٢ - \text{ع} - ٦}{\text{ع} - ٣}$

$= \lim_{\text{ع} \to ٣^-} \frac{\cancel{(\text{ع} - ٣)}(\text{ع} + ٢)}{\cancel{(\text{ع} - ٣)}} = ٣ + ٢ = ٥$

$\text{قَ}_+(٣) = \lim_{\text{ع} \to ٣^+} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٣)}{\text{ع} - ٣}$

$= \lim_{\text{ع} \to ٣^+} \frac{(٥\text{ع} - ٩) - (٦)}{\text{ع} - ٣}$

$$= \underset{ع \to ٣^+}{\text{نها}} \frac{٥ع - ١٥}{ع - ٣}$$

$$= \underset{ع \to ٣^+}{\text{نها}} \frac{٥(ع - ٣)}{ع - ٣} = ٥$$

$\Leftarrow$ $\text{ق}'_-(٣) = \text{ق}'_+(٣)$

$\Leftarrow$ $\text{ق}'(٣) = ٥$

$\Leftarrow$ ق قابل للاشتقاق عند س = ٣

مثال

إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ - ٢\text{س} & \text{س} < ٢ \\ ٢\text{س} - \text{س}^٢ & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

فابحث في قابلية ق للاشتقاق عند س=٢

الحل:

نبحث اتصال ٢

$\text{ق}(٢) = ٤ - ٤ =$ صفر

$\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \text{ق(س)} =$ صفر

$\underset{س \to ٢^-}{\text{نها}} \text{ق(س)} = ٤ - ٤ =$ صفر

$\Leftarrow$ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \text{ق(س)} =$ صفر $= \text{ق}(٢)$

$\Leftarrow$ ق متصل عند س = ٢

نبحث الاشتقاق عند ٢

$$\text{ق}'_-(٢) = \underset{ع \to ٢^-}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \underset{ع \to ٢^-}{\text{نها}} \frac{ع^٢ - ٢ع - ٠}{ع - ٢}$$

$$= \underset{ع \to ٢^-}{\text{نها}} \frac{ع(\cancel{ع - ٢})}{(\cancel{ع - ٢})} = ٢$$

$$\text{ق}'_+(٢) = \underset{ع \to ٢^+}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \underset{ع \to ٢^+}{\text{نها}} \frac{٢ع - ع^٢ - ٠}{ع - ٢}$$

$$= \underset{ع \to ٢^+}{\text{نها}} \frac{ع(٢ - ع)}{(ع - ٢)} = -٢$$

$\Leftarrow$ $\text{ق}'_+(٢) \neq \text{ق}'(٢)$

$\Leftarrow$ ق'(٢) غير موجودة

$\Leftarrow$ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٢

مثال

إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ + ٢\text{س} & ٠ \leq \text{س} < ٣ \\ ٦\text{س} - ٣ & ٣ < \text{س} \leq ٥ \end{cases}$

ابحث قابلية اشتقاق ق عند

س = ٠ ، س = ٥ ، س = ٣

الحل:

ق'(٠) غير موجودة لأن ٠ طرف

ق'(٥) غير موجودة لأن ٥ طرف

س = ٣

نبحث الاتصال عند ٣

ق(٣) غير معرفة

$\Leftarrow$ ق غير متصل عند س = ٣

$\Leftarrow$ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٣

مثال

إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} ٤\text{س} + ١ & -٣ \leq \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} + ٣ & ١ \leq \text{س} \leq ٥ \end{cases}$

جد ق'(−١) باستخدام تعريف المشتقة

Esam Shikh
0796300625

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (الاتصال والاشتقاق) ماجستير رياضيات

الحل :

ق(س) = ٤س + ١ عند س = -١

ق متصل عند س = -١ لأنه كثير حدود

$$ \acute{ق}(-1) = \underset{ع \to -1}{نها} \frac{ق(ع) - ق(-1)}{ع - -1} $$

$$ = \underset{ع \to -1}{نها} \frac{(٤ع + ١) - (-٣)}{ع + ١} $$

$$ = \underset{ع \to -1}{نها} \frac{٤ع + ٤}{ع + ١} $$

$$ = \underset{ع \to -1}{نها} \frac{٤\cancel{(ع+١)}}{\cancel{(ع + ١)}} = ٤ $$

مثال

إذا كان
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \sqrt{\text{س} + 1} & 0 \leq \text{س} < 2 \\ \text{س}^2 - 1 & 2 \leq \text{س} \leq 5 \end{cases}$$

ابحث قابلية الاشتقاق عند س = 2 وعند س = 4 . مستخدماً تعريف المشتقة

الحل:

س = 2

نبحث الاتصال عند 2

$\text{ق}(2) = 4 - 1 = 3$

$\lim_{\text{س} \to 2^+} \text{ق(س)} = 3$

$\lim_{\text{س} \to 2^-} \text{ق(س)} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

⟸ $\lim_{\text{س} \to 2} \text{ق(س)}$ غير موجودة

⟸ ق غير متصل عند س = 2

⟸ ق غير قابل للاشتقاق عند س = 2

س = 4

نبحث الاتصال عند س = 4

$\text{ق}(4) = 16 - 1 = 15$

$\lim_{\text{س} \to 4} \text{ق(س)} = 15$

$\lim_{\text{س} \to 4} \text{ق(س)} = 15 = \text{ق}(4)$

⟸ ق متصل عند س = 4

نبحث الاشتقاق عند س = 4

$$\text{ق}'(4) = \lim_{\text{ع} \to 4} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(4)}{\text{ع} - 4}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to 4} \frac{\text{ع}^2 - 1 - 15}{\text{ع} - 4}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to 4} \frac{\text{ع}^2 - 16}{\text{ع} - 4}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to 4} \frac{\cancel{(\text{ع} - 4)}(\text{ع} + 4)}{\cancel{(\text{ع} - 4)}} = 4 + 4 = 8$$

⟸ $\text{ق}'(4) = 8$

⟸ ق قابل للاشتقاق عند س = 4

مثال

إذا كان
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \sqrt{\text{س}} + 3 & \text{س} \geq 4 \\ 3\text{س} - 7 & \text{س} < 4 \end{cases}$$

ابحث قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س=4 مستخدماً التعريف .

الحل:

نبحث اتصال س = 4

$\text{ق}(4) = 2 + 3 = 5$

$\lim_{\text{س} \to 4^+} \text{ق(س)} = 5$

$\lim_{\text{س} \to 4^-} \text{ق(س)} = 12 - 7 = 5$

⟸ $\lim_{\text{س} \to 4} \text{ق(س)} = 5 = \text{ق}(4)$

⟸ ق متصل عند س = 4

نبحث الاشتقاق عند س = 4

$$\text{ق}'_+(4) = \lim_{\text{ع} \to 4^+} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(4)}{\text{ع} - 4}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to 4^+} \frac{(\sqrt{\text{ع}} + \cancel{3}) - (2 + \cancel{3})}{\text{ع} - 4}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to 4^+} \frac{\sqrt{\text{ع}} - 2}{\text{ع} - 4} \times \frac{\sqrt{\text{ع}} + 2}{\sqrt{\text{ع}} + 2}$$

Esam Shikh
0796300625

$$= \underset{ع \leftarrow ٤^+}{\text{نها}} \frac{\cancel{(ع-٤)}}{\cancel{(ع-٤)}(\sqrt{ع}+٢)} = \frac{١}{٤}$$

$$\text{ق}'(٤)^- = \underset{ع \leftarrow ٤^-}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(٤)}{ع - ٤}$$

$$= \underset{ع \leftarrow ٤^-}{\text{نها}} \frac{(٣ع - ٧) - (٥)}{ع - ٤}$$

$$= \underset{ع \leftarrow ٤^-}{\text{نها}} \frac{٣ع - ١٢}{ع - ٤}$$

$$= \underset{ع \leftarrow ٤^-}{\text{نها}} \frac{٣\cancel{(ع-٤)}}{\cancel{(ع-٤)}} = ٣$$

⇐ $\text{ق}'(٤)^- \neq \text{ق}'(٤)^+$

⇐ $\text{ق}'(٤)$ غير موجودة

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٤

مثال

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{٤}{س} + ١ & س \geq ٢ \\ ٥س - ١ & س < ٢ \end{cases}$

ابحث قابلية اشتقاق ق عند س = ٢ مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

نبحث الاتصال عند س = ٢

$ق(٢) = ٢ + ١ = ٣$

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ٣$

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = ١٠ - ١ = ٩$

⇐ $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ غير موجودة

⇐ ق غير متصل عند س = ٢

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٢

مثال

إذا كان $ق(س) = \frac{س}{س - ١}$ ابحث قابلية اشتقاق ق عند س = ١

الحل:

نبحث الاتصال عند س = ١

$ق(١) = \frac{١}{٠}$ غير معرف

⇐ ق غير متصل عند س = ١

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ١

مثال

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} & س \neq ٩ \\ ٦ & س = ٩ \end{cases}$

فجد $ق'(٩)$ (إن وجدت) مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

نبحث اتصال س = ٩

$ق(٩) = ٦$

$\lim_{س \to ٩} ق(س) = \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} \times \frac{\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س} + ٣}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{\cancel{(س - ٩)}(٣ + ٣)}{\cancel{(س - ٩)}} = ٦$

$\lim_{س \to ٩} ق(س) = ق(٩) = ٦$

⇐ ق متصل عند س = ٩

نبحث الاشتقاق عند س = ٩

$ق'(٩) = \lim_{ع \to ٩} \frac{ق(ع) - ق(٩)}{ع - ٩}$

$= \lim_{ع \to ٩} \frac{\frac{ع - ٩}{\sqrt{ع} - ٣} - \frac{٦}{١}}{ع - ٩}$

$= \lim_{ع \to ٩} \frac{(ع - ٩) - ٦(\sqrt{ع} - ٣)}{(\sqrt{ع} - ٣)} \times \frac{١}{ع - ٩}$

$= \lim_{ع \to ٩} \frac{ع - ٩ - ٦\sqrt{ع} + ١٨}{\sqrt{ع} - ٣} \times \frac{١}{ع - ٩}$

$= \lim_{ع \to ٩} \frac{ع - ٦\sqrt{ع} + ٩}{(\sqrt{ع} - ٣)} \times \frac{١}{(\sqrt{ع} - ٣)(\sqrt{ع} + ٣)}$

$= \lim_{ع \to ٩} \frac{\cancel{(\sqrt{ع} - ٣)}\cancel{(\sqrt{ع} - ٣)}}{\cancel{(\sqrt{ع} - ٣)}\cancel{(\sqrt{ع} - ٣)}(\sqrt{ع} + ٣)} = \frac{١}{٦}$

مثال

إذا كان ق(س) = |س − ١| فجد ق'(٣) باستخدام تعريف المشتقة.

الحل:

ق(س) = س − ١ عند س = ٣

ق متصل عند س = ٣ لأنه كثير حدود

ق'(٣) = نها (ع←٣) [ق(ع) − ق(٣)] / (ع − ٣)

= نها (ع←٣) [(ع − ١) − ٢] / (ع − ٣)

= نها (ع←٣) (ع − ٣) / (ع − ٣) = ١

مثال

إذا كان ق(س) = |س − ١| فجد ق'(٠) باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

ق(س) = ١ − س عند س = صفر

ق متصل عند س = صفر لأنه كثير حدود

ق'(٠) = نها (ع←٠) [ق(ع) − ق(٠)] / (ع − ٠)

= نها (ع←٠) (١ − ع − ١) / ع

= نها (ع←٠) (−ع) / ع = −١

مثال

إذا كان ق(س) = |س² − ٤| فجد ق'(١) باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

ق(س) = ٤ − س² عند س = ١

ق متصل عند س = ١ لأنه كثير حدود

ق'(١) = نها (ع←١) [ق(ع) − ق(١)] / (ع − ١)

= نها (ع←١) (٤ − ع² − ٣) / (ع − ١)

= نها (ع←١) (١ − ع²) / (ع − ١)

= نها (ع←١) (١ − ع)(١ + ع) / (ع − ١) = −(١ + ١) = −٢

مثال

إذا كان ق(س) = |س² − ٤| جد ق'(٢) (إن وجدت) مستخدمًا تعريف المشتقة

الحل:

ق(س) = { س² − ٤ ، س > ٢ ، س < −٢
        { ٤ − س² ، −٢ ≤ س ≤ ٢

نبحث اتصال س = ٢

ق(٢) = ٤ − ٤ = صفر

نها (س←٢⁻) ق(س) = صفر

نها (س←٢⁺) ق(س) = ٤ − ٤ = صفر

نها (س←٢) ق(س) = صفر = ق(٢)

⇐ ق متصل عند س = ٢

نبحث الاشتقاق عند س = ٢

ق'₊(٢) = نها (ع←٢⁺) [ق(ع) − ق(٢)] / (ع − ٢)

= نها (ع←٢⁺) (ع² − ٤ − ٠) / (ع − ٢)

= نها (ع←٢⁺) (ع − ٢)(ع + ٢) / (ع − ٢) = ٢ + ٢ = ٤

Esam Shikh
0796300625

$$\text{ق}'_{-}(٢) = \underset{ع \to ٢^-}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \underset{ع \to ٢^-}{\text{نها}} \frac{(٤ - ع^٢) - ٠}{ع - ٢}$$

$$= \underset{ع \to ٢^-}{\text{نها}} \frac{(\cancel{٢ - ع})(٢ + ع)}{(\cancel{ع - ٢})} = -(٢+٢) = -٤$$

$\Leftarrow \text{ق}'_{-}(٢) \neq \text{ق}'_{+}(٢)$

$\Leftarrow$ ق$'(٢)$ غير موجودة

$$\text{ق}'_{-}(١) = \underset{ع \to ١^-}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(١)}{ع - ١}$$

$$= \underset{ع \to ١^-}{\text{نها}} \frac{١ - ع - ٠}{(ع - ١)}$$

$$= \underset{ع \to ١^-}{\text{نها}} \frac{(\cancel{١ - ع})}{(\cancel{ع - ١})} = -١$$

$\Leftarrow \text{ق}'_{-}(١) \neq \text{ق}'_{+}(١)$

$\Leftarrow$ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ١

مثال

إذا كان ق(س) = |س − ١| فابحث في قابلية ق للاشتقاق عند س = ١ مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} س - ١ & س \geq ١ \\ ١ - س & س < ١ \end{cases}$$

بحث الاتصال عند س = ١

ق(١) = ١ − ١ = صفر

$\underset{س \to ١^+}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = \text{صفر}$

$\underset{س \to ١^-}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = ١ - ١ = \text{صفر}$

$\underset{س \to ١}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = \text{صفر} = \text{ق}(١)$

$\Leftarrow$ ق متصل عند س = ١

بحث الاشتقاق عند س = ١

$$\text{ق}'_{+}(١) = \underset{ع \to ١^+}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(١)}{ع - ١}$$

$$= \underset{ع \to ١^+}{\text{نها}} \frac{ع - ١ - ٠}{(ع - ١)}$$

$$= \underset{ع \to ١^+}{\text{نها}} \frac{(\cancel{ع - ١})}{(\cancel{ع - ١})} = ١$$

٢٠١٠ صيفي

أي من الاقترانات الآتية يعتبر مثالاً لاقتران متصل وغير قابل للاشتقاق عند س = صفر ؟

أ) [س]   ب) $\boxed{|س|}$

جـ) س|س| د) $\frac{س}{٢}$

الحل:

المطلوب يكون متصل وغير قابل للاشتقاق عند (صفره) أي العدد الذي يجعله صفر

٢٠١١ شتوي

إذا كان ق(س) = س |س − ٣| فابحث في قابلية اشتقاق الاقتران ق(س) عند س = ٣ باستعمال تعريف المشتقة.

الحل:

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} س^٢ - ٣س & س \geq ٣ \\ ٣س - س^٢ & س < ٣ \end{cases}$$

بحث الاتصال

ق(٣) = ٩ − ٩ = صفر

$\underset{س \to ٣^-}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = \text{صفر}$

$\underset{\text{س}\to ٣^+}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \text{صفر}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \text{صفر} = \text{ق(٣)}$

$\Leftarrow$ ق متصل عند س = ٣

نبحث قابلية الاشتقاق

$\text{ق}'_+(٣) = \underset{\text{ع}\to ٣^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق(٣)}}{\text{ع} - ٣}$

$= \underset{\text{ع}\to ٣^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{ع}^٢ - ٣\text{ع} - ٠}{\text{ع} - ٣}$

$= \underset{\text{ع}\to ٣^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{ع}\cancel{(\text{ع} - ٣)}}{\cancel{(\text{ع} - ٣)}} = ٣$

$\text{ق}'_-(٣) = \underset{\text{ع}\to ٣^-}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق(٣)}}{\text{ع} - ٣}$

$= \underset{\text{ع}\to ٣^-}{\text{نها}} \dfrac{٣\text{ع} - \text{ع}^٢ - ٠}{\text{ع} - ٣}$

$= \underset{\text{ع}\to ٣^-}{\text{نها}} \dfrac{\text{ع}\cancel{(٣ - \text{ع})}}{\cancel{(\text{ع} - ٣)}} = -٣$ (−١)

$\Leftarrow \text{ق}'_+(٣) \neq \text{ق}'_-(٣)$

$\Leftarrow$ ق'(٣) غير موجودة

$\Leftarrow$ ق غير قابل للاشتقاق عند س=٣

٢٠١٥ شتوي

ليكن ق(س) = س |جاس| ، س ∈ [٠ ، ٢π]

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س=π

الحل:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س جاس} & ٠ \le \text{س} \le \pi \\ -\text{س جاس} & \pi < \text{س} \le ٢\pi \end{cases}$$

نبحث الاتصال

ق(π) = π جا π = صفر

$\underset{\text{س}\to \pi^-}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \text{صفر}$

$\underset{\text{س}\to \pi^+}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \text{صفر}$

$\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \text{صفر} = \text{ق}(\pi)$

$\Leftarrow$ ق متصل عند س = π

نبحث قابلية الاشتقاق

$\text{ق}'_-(\pi) = \underset{\text{ع}\to \pi^-}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(\pi)}{\text{ع} - \pi}$

$= \underset{\text{ع}\to \pi^-}{\text{نها}} \dfrac{\text{ع جاع} - ٠}{\text{ع} - \pi}$

$= \underset{\text{ع}\to \pi^-}{\text{نها}} \dfrac{\text{ع جا}(\pi - \text{ع})}{(\text{ع} - \pi)}$

ص = π − ع

ع → π ⇐ ص → ٠

$= \underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(\pi - \text{ص})\ \text{جا ص}}{-\text{ص}} = \dfrac{\pi - ٠}{-١} = -\pi$

$\text{ق}'_+(\pi) = \underset{\text{ع}\to \pi^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(\pi)}{\text{ع} - \pi}$

$= \underset{\text{ع}\to \pi^+}{\text{نها}} \dfrac{-\text{ع جاع} - ٠}{\text{ع} - \pi}$

$= \underset{\text{ع}\to \pi^+}{\text{نها}} \dfrac{-\text{ع جا}(\pi - \text{ع})}{\text{ع} - \pi}$

$= -\pi \times -١ = \pi$

$\Leftarrow \text{ق}'_-(\pi) \neq \text{ق}'_+(\pi)$

$\Leftarrow$ ق'(π) غير موجودة

$\Leftarrow$ ق غير قابل للاشتقاق عند س = π.

٢٠١٦ شتوي

ليكن ق(س) = $\sqrt{س} + |س - ٢|$ ، س ∈ (٠ ، ٤) ابحث في قابلية ق(س) للاشتقاق عند س = ٢ باستخدام التعريف العام للمشتقة.

الحل:

$$ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س} - س + ٢ & ٠ < س < ٢ \\ \sqrt{س} + س - ٢ & ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$$

نبحث الاتصال

$ق(٢) = \sqrt{٢} + ٢ - ٢ = \sqrt{٢}$

$\lim\limits_{س \to ٢^+} ق(س) = \sqrt{٢}$

$\lim\limits_{س \to ٢^-} ق(س) = \sqrt{٢}$

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = \sqrt{٢} = ق(٢)$

$\Leftarrow$ ق متصل عند س = ٢

نبحث قابلية الاشتقاق

$$ق'_+(٢) = \lim_{ع \to ٢^+} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \lim_{ع \to ٢^+} \frac{(\sqrt{ع} + ع - \cancel{٢}) - (\sqrt{٢} + ٢ - \cancel{٢})}{ع - ٢}$$

$$= \lim_{ع \to ٢^+} \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{٢}}{ع - ٢} + \lim_{ع \to ٢^+} \frac{\cancel{(ع - ٢)}}{\cancel{(ع - ٢)}}$$

$$= \lim_{ع \to ٢^+} \frac{\cancel{(\sqrt{ع} - \sqrt{٢})}}{\cancel{(\sqrt{ع} - \sqrt{٢})}(\sqrt{ع} + \sqrt{٢})} + ١$$

$$= \frac{١}{\sqrt{٢} + \sqrt{٢}} + ١$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{٢}} + ١$$

$$ق'_-(٢) = \lim_{ع \to ٢^-} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \lim_{ع \to ٢^-} \frac{(\sqrt{ع} - ع + \cancel{٢}) - (\sqrt{٢} - ٢ + \cancel{٢})}{ع - ٢}$$

$$= \lim_{ع \to ٢^-} \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{٢}}{ع - ٢} - \lim_{ع \to ٢^-} \frac{\cancel{(ع - ٢)}}{\cancel{(ع - ٢)}}$$

$$= \lim_{ع \to ٢^-} \frac{\cancel{(\sqrt{ع} - \sqrt{٢})}}{\cancel{(\sqrt{ع} - \sqrt{٢})}(\sqrt{ع} + \sqrt{٢})} - ١$$

$$= \frac{١}{\sqrt{٢} + \sqrt{٢}} - ١$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{٢}} - ١$$

$\Leftarrow ق'_-(٢) \neq ق'_+(٢)$

$\Leftarrow$ ق'(٢) غير موجودة

$\Leftarrow$ ق غير قابل للاشتقاق عند س=٢

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = [\frac{1}{2}\text{س} + 2]$ ابحث قابلية اشتقاق ق عند

① س = ١

② س = ٣

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 2 & 0 \le \text{س} < 3 \\ 3 & 3 \le \text{س} < 6 \end{cases}$$

س = ١

ق متصل عند س = ١ لأنه ثابت

$$\text{ق}'(1) = \lim_{\text{ع} \to 1} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(1)}{\text{ع} - 1}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to 1} \frac{2 - 2}{\text{ع} - 1} = \text{صفر}$$

س = ٣

بحث الاتصال

ق(٣) = ٣

$\lim_{\text{س} \to 3^+} \text{ق}(\text{س}) = 3$

$\lim_{\text{س} \to 3^-} \text{ق}(\text{س}) = 2$

⇐ $\lim_{\text{س} \to 3} \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة

⇐ ق غير متصل عند س = ٣

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٣

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = [3 - 2\text{س}]$ ابحث قابلية اشتقاق الاقتران عند

① $\text{س} = \frac{1}{4}$ ② س = −١

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 5 & -\frac{3}{2} < \text{س} \le -1 \\ 4 & -1 < \text{س} \le -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} < \text{س} \le 0 \\ 2 & 0 < \text{س} \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\text{س} = \frac{1}{4}$

ق متصل عند $\text{س} = \frac{1}{4}$ لأنه ثابت

$$\text{ق}'(\tfrac{1}{4}) = \lim_{\text{ع} \to \frac{1}{4}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\frac{1}{4})}{\text{ع} - \frac{1}{4}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \frac{1}{4}} \frac{2 - 2}{\text{ع} - \frac{1}{4}} = \text{صفر}$$

س = −١

بحث الاتصال

ق(−١) = ٥

$\lim_{\text{س} \to -1^-} \text{ق}(\text{س}) = 5$

$\lim_{\text{س} \to -1^+} \text{ق}(\text{س}) = 4$

⇐ $\lim_{\text{س} \to -1} \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة

⇐ ق غير متصل عند س = −١

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = −١

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س} - 2)[\text{س}]$ فابحث في قابلية اشتقاق ق عند س = ٢ مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - 2 & 1 \le \text{س} < 2 \\ 2\text{س} - 4 & 2 \le \text{س} < 3 \end{cases}$$

بحث الاتصال عند ٢

ق(٢) = ٤ − ٤ = صفر

$\lim_{\text{س} \to 2^+} \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر}$

$\lim_{\text{س} \to 2^-} \text{ق}(\text{س}) = 2 - 2 = \text{صفر}$

$\lim_{\text{س} \to 2} \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر} = \text{ق}(2)$

⇐ ق متصل عند س = ٢

نبحث قابلية الاشتقاق عند ٢

$$\text{ق}'_{+}(٢) = \underset{\text{ع}\to ٢^{+}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع} - ٢}$$

$$= \underset{\text{ع}\to ٢^{+}}{\text{نها}} \frac{٢\text{ع} - ٤ - ٠}{\text{ع} - ٢}$$

$$= \underset{\text{ع}\to ٢^{+}}{\text{نها}} \frac{٢(\cancel{\text{ع} - ٢})}{(\cancel{\text{ع} - ٢})} = ٢$$

$$\text{ق}'_{-}(٢) = \underset{\text{ع}\to ٢^{-}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع} - ٢}$$

$$= \underset{\text{ع}\to ٢^{-}}{\text{نها}} \frac{\text{ع} - ٢ - ٠}{\text{ع} - ٢}$$

$$= \underset{\text{ع}\to ٢^{-}}{\text{نها}} \frac{(\text{ع} - ٢)}{(\text{ع} - ٢)} = ١$$

⇐ $\text{ق}'_{+}(٢) \neq \text{ق}'_{-}(٢)$

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٢

بحث قابلية الاشتقاق على المجال (فترة) مستخدما تعريف المشتقة.

مثال

إذا كان
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -١-٢\text{س} & \text{س} < -١ \\ \text{س}^٢ & -١ \le \text{س} \le ١ \\ \text{س} & \text{س} > ١ \end{cases}$$

ابحث قابلية اشتقاق ق على مجاله واكتب قاعدة $\text{قَ}(\text{س})$ مستخدما تعريف المشتقة.

الحل:

$-\infty \quad -١ \quad ١ \quad \infty$

$(-\infty ، -١)$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(\cancel{-١} - ٢\text{ع}) - (\cancel{-١} - ٢\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{-٢(\text{ع} - \text{س})}{(\text{ع} - \text{س})} = -٢$$

$(-١ ، ١)$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^٢ - \text{س}^٢}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(\text{ع} - \text{س})(\text{ع} + \text{س})}{(\text{ع} - \text{س})} = \text{س} + \text{س} = ٢\text{س}$$

$(١ ، \infty)$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع} - \text{س}}{\text{ع} - \text{س}} = ١$$

$\text{س} = -١$

نبحث الاتصال

$\text{ق}(-١) = ١$

$$\text{نها}_{\text{س}\to -١^-} \text{ق}(\text{س}) = -١ + ٢ = ١$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to -١^+} \text{ق}(\text{س}) = ١$$

$$\Leftarrow \text{نها}_{\text{س}\to -١} \text{ق}(\text{س}) = ١ = \text{ق}(-١)$$

$\Leftarrow$ ق متصل عند $\text{س} = -١$

نبحث الاشتقاق

$$\text{قَ}_-(-١) = \text{نها}_{\text{ع}\to -١^-} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(-١)}{\text{ع} - -١}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to -١^-} \frac{(-١ - ٢\text{ع}) - (١)}{\text{ع} + ١}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to -١^-} \frac{-٢\text{ع} - ٢}{\text{ع} + ١}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to -١^-} \frac{-٢(\text{ع} + ١)}{\text{ع} + ١} = -٢$$

$$\text{قَ}_+(-١) = \text{نها}_{\text{ع}\to -١^+} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(-١)}{\text{ع} - -١}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to -١^+} \frac{\text{ع}^٢ - ١}{\text{ع} + ١}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to -١^+} \frac{(\text{ع} - ١)\cancel{(\text{ع} + ١)}}{\cancel{(\text{ع} + ١)}} = -١ - ١ = -٢$$

$$\Leftarrow \text{قَ}_+(-١) = \text{قَ}_-(-١)$$

$$\Leftarrow \text{قَ}(-١) = -٢$$

$\text{س} = ١$

نبحث الانفصال

$\text{ق}(١) = ١$

$$\text{نها}_{\text{س}\to ١^+} \text{ق}(\text{س}) = ١$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to ١^-} \text{ق}(\text{س}) = ١$$

⟸ $\text{نهـا}_{س \to 1}$ ق(س) = 1 = ق(1)

⟸ ق متصل عند س = 1

نبحث الاشتقاق عند 1

$$ق'_{+}(1) = \text{نهـا}_{ع \to 1^{+}} \frac{ق(ع) - ق(1)}{ع - 1}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to 1^{+}} \frac{\cancel{(ع-1)}}{\cancel{(ع-1)}} = 1$$

$$ق'_{-}(1) = \text{نهـا}_{ع \to 1^{-}} \frac{ق(ع) - ق(1)}{ع - 1}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to 1^{-}} \frac{ع^2 - 1}{ع - 1}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to 1^{-}} \frac{\cancel{(ع-1)}(ع+1)}{\cancel{(ع-1)}} = 1 + 1 = 2$$

⟸ $ق'_{+}(1) \neq ق'_{-}(1)$

⟸ ق'(1) غير موجودة

⟸
$$ق'(س) = \begin{cases} -2 & س < -1 \\ 2س & -1 \leq س < 1 \\ 1 & س > 1 \\ \text{غير موجودة} & س = 1 \end{cases}$$

مثال

إذا كان
$$ق(س) = \begin{cases} 0 & س \leq 0 \\ 5 - س & 0 < س < 4 \\ \frac{1}{5 - س} & س \geq 4 \end{cases}$$

ابحث قابلية الاشتقاق للاقتران ق(س) على مجاله مستخدماً تعريف المشتقة

الحل :

$-\infty$ ... 0 ... 4 ... ∞ : 0 ، 5 − س ، $\frac{1}{5-س}$

(−∞ ، 0)

ق متصل لأنه ثابت

$$ق'(س) = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{0 - 0}{ع - س} = \text{صفر}$$

(0 ، 4)

ق متصل لأنه كثير حدود

$$ق'(س) = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{(\cancel{5} - ع) - (\cancel{5} - س)}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{-\cancel{(ع - س)}}{\cancel{(ع - س)}} = -1$$

(4 ، ∞)

ق متصل على الفترة لأنه معرف عليها

ما عدا س = 5 ⟸ ق'(5) غير موجودة

$$ق'(س) = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{\frac{1}{5 - ع} - \frac{1}{5 - س}}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{(5 - س) - (5 - ع)}{(5 - س)(5 - ع)} \times \frac{1}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{\cancel{(ع - س)}}{(5 - س)(5 - ع)} \times \frac{1}{\cancel{(ع - س)}}$$

$$= \frac{1}{(\text{٥}-\text{س})(\text{٥}-\text{س})} = \frac{1}{(\text{٥}-\text{س})^2}$$

س = ٠

نبحث الاتصال

ق(٠) = ٠

$\lim_{\text{س}\to 0^-} \text{ق(س)} = 0$

$\lim_{\text{س}\to 0^+} \text{ق(س)} = 5 - 0 = 5$

⇐ نها ق(س) عند س → ٠ غير موجودة

⇐ قَ(٠) غير موجودة

س = ٤

نبحث الاتصال

$\text{ق}(4) = \frac{1}{5-4} = \frac{1}{1} = 1$

$\lim_{\text{س}\to 4^+} \text{ق(س)} = 1$

$\lim_{\text{س}\to 4^-} \text{ق(س)} = 5 - 4 = 1$

⇐ $\lim_{\text{س}\to 4} \text{ق(س)} = 1 = \text{ق}(4)$

⇐ ق متصل عند س = ٤

نبحث الاشتقاق

$$\text{قَ}_-(4) = \lim_{\text{ع}\to 4^-} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(4)}{\text{ع} - 4}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to 4^-} \frac{5 - \text{ع} - 1}{\text{ع} - 4}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to 4^-} \frac{-1\,\cancel{(\text{ع}-4)}}{\cancel{(\text{ع}-4)}} = -1$$

$$\text{قَ}_+(4) = \lim_{\text{ع}\to 4^+} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(4)}{\text{ع} - 4}$$

$$\lim_{\text{ع}\to 4^+} \frac{\frac{1}{5-\text{ع}} - \frac{1}{1}}{\text{ع} - 4}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to 4^+} \frac{1 - (5-\text{ع})}{(5-\text{ع})} \times \frac{1}{(\text{ع}-4)}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to 4^+} \frac{\cancel{(\text{ع}-4)}}{(5-\text{ع})} \times \frac{1}{\cancel{(\text{ع}-4)}} = \frac{1}{1} = 1$$

⇐ $\text{قَ}_+(4) \neq \text{قَ}_-(4)$

⇐ قَ(٤) غير موجودة

$$\Leftarrow \text{قَ(س)} = \begin{cases} 0 & \text{س} < 0 \\ -1 & 0 < \text{س} < 4 \\ \frac{1}{(5-\text{س})^2} & \text{س} > 4 \\ \text{غير موجودة} & \text{س} = 0, 4 \end{cases}$$

مثال

إذا كان
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{6}{\text{س}} - 4 & 1 \le \text{س} \le 2 \\ 3\text{س} + 1 & 2 < \text{س} \le 5 \end{cases}$$

جد قَ(س) على مجاله مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

المجال [١،٥]

قَ(١) غير موجودة لأن ١ طرف

قَ(٥) غير موجودة لأن ٥ طرف

(١،٢)

ق متصل على الفترة لأنه معرف على الفترة

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\left(\frac{٦}{\text{ع}} - \cancel{٤}\right) - \left(\frac{٦}{\text{س}} - \cancel{٤}\right)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{٦}{\text{ع}} - \frac{٦}{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{٦\text{س} - ٦\text{ع}}{(\text{ع})(\text{س})} \times \frac{١}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{٦\cancel{(\text{س} - \text{ع})}}{(\text{ع})(\text{س})} \times \frac{١}{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}} \quad (-١)$$

$$= \frac{-٦}{\text{س} \times \text{س}} = \frac{-٦}{\text{س}^٢}$$

(٢،٥)

ق متصل على الفترة لأنه كثير حدود

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(٣\text{ع} + \cancel{١}) - (٣\text{س} + \cancel{١})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{٣\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}} = ٣$$

س = ٢

نبحث الاتصال

$$\text{ق}(٢) = \frac{٦}{٢} - ٤ = ٣ - ٤ = -١$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to ٢^-} \text{ق}(\text{س}) = -١$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to ٢^+} \text{ق}(\text{س}) = ٣ \times ٢ + ١ = ٦ + ١ = ٧$$

⇐ $\text{نها}_{\text{س}\to ٢} \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة

⇐ ق غير متصل عند س = ٢

⇐ ق'(٢) غير موجودة

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \frac{-٦}{\text{س}^٢} & ١ < \text{س} < ٢ \\ ٣ & ٢ < \text{س} < ٥ \\ \text{غير موجودة} & \text{س} = ١، ٢، ٥ \end{cases}$$

مثال

إذا كان
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س}] & ١ \le \text{س} < ٢ \\ |\text{س} - ٣| & ٢ \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

ابحث قابلية اشتقاق ق(س) على مجاله مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

المجال [١،٤]

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ١ & ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٣ - \text{س} & ٢ \le \text{س} < ٣ \\ \text{س} - ٣ & ٣ \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

(١،٢)

ق متصل لأنه ثابت

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{١ - ١}{\text{ع} - \text{س}} = \text{صفر}$$

(٣،٢)

ق متصل لأنه كثير حدود

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\cancel{٣}-\text{ع} - (\cancel{٣}-\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{-\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}} = -١$$

(٣،٤)

ق متصل على الفترة لأنه كثير حدود

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}-\cancel{٣} - (\text{س}-\cancel{٣})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{ع}-\text{س}}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} = ١$$

س = ٢

نبحث الاتصال

ق(٢) = ٣ − ٢ = ١

$\underset{\text{س}\to٢^+}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = ١$

$\underset{\text{س}\to٢^-}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = ١$

$\underset{\text{س}\to٢}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = ١ = \text{ق}(٢)$

⇐ ق متصل عند س = ٢

نبحث قابلية الاشتقاق

$$\text{ق}'_-(٢) = \underset{\text{ع}\to٢^-}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع} - ٢}$$

$$= \underset{\text{ع}\to٢^-}{\text{نها}} \frac{١-١}{\text{ع}-٢} = \text{صفر}$$

$$\text{ق}'_+(٢) = \underset{\text{ع}\to٢^+}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع} - ٢}$$

$$= \underset{\text{ع}\to٢^+}{\text{نها}} \frac{٣-\text{ع}-١}{\text{ع}-٢}$$

$$= \underset{\text{ع}\to٢^+}{\text{نها}} \frac{٢-\text{ع}}{\text{ع}-٢} = -١$$

⇐ $\text{ق}'_+(٢) \neq \text{ق}'_-(٢)$

⇐ ق′(٢) غير موجودة

س = ٣

نبحث الاتصال

ق(٣) = ٣ − ٣ = صفر

$\underset{\text{س}\to٣^+}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر}$

$\underset{\text{س}\to٣^-}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر}$

$\underset{\text{س}\to٣}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر} = \text{ق}(٣)$

⇐ ق متصل عند س = ٣

نبحث الاشتقاق

$$\text{ق}'_+(٣) = \underset{\text{ع}\to٣^+}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٣)}{\text{ع} - ٣}$$

$$= \underset{\text{ع}\to٣^+}{\text{نها}} \frac{\text{ع}-٣ - (٠)}{\text{ع}-٣}$$

$$= \underset{\text{ع}\to٣^+}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{ع}-٣}}{\cancel{\text{ع}-٣}} = ١$$

$$\text{ق}'_-(٣) = \underset{\text{ع}\to٣^-}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٣)}{\text{ع} - ٣}$$

$$= \underset{\text{ع}\to٣^-}{\text{نها}} \frac{٣-\text{ع} - ٠}{\text{ع}-٣}$$

$$= \underset{\text{ع}\to٣}{\text{نها}} \frac{-\cancel{\text{ع}-٣}}{\cancel{\text{ع}-٣}} = -١$$

Esam Shikh

0796300625

⇐ $ق'_{+}(٣) \neq ق'_{-}(٣)$

⇐ $ق'(٣)$ غير موجودة

الآن : الأطراف

$ق'(١)$ غير موجودة لأنها طرف

$ق'(٤)$ غير موجودة لأنها طرف

⇐ $ق'(س) = \begin{cases} ٠ & ١ < س < ٢ \\ ١- & ٢ < س < ٣ \\ ١ & ٣ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} & س = ١،٢،٣،٤ \end{cases}$