التزايد والتناقص

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

تعريف

① كلما زادت قيمة س وزادت قيمة ق(س) يكون الاقتران ق متزايد على الفترة

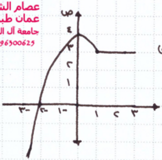
② كلما زادت قيمة س وقلت قيمة ق(س) يكون الاقتران ق متناقص على الفترة

③ كلما تغيرت س وكانت ق(س) ثابت يكون الاقتران ق ثابت على الفترة .

* رسمة ق(س) :

مثال

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625



ق(س) معرف على [-٣، ٣] جد فترات التزايد والتناقص

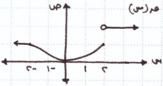
الحل :

[-٣، ٠] ق متزايد

[٠، ١] ق متناقص

[١، ٣] ق ثابت .

٢٠١٣ شتوي

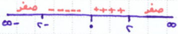


الشكل يمثل منحنى ق(س) المعرف على ح
إن ق(س) متزايد في الفترة

أ) [-٢، ∞) ب) $\boxed{\text{ب}}$ [٠، ٢]

ج) [-٢، ٠] د) (-∞، -٢]

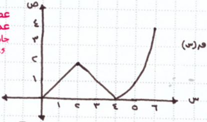
الحل :



رياضيات (العلمي) الوحدة (تطبيقات التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (التزايد والتناقص) ماجستير رياضيات

٢٠١٧ شتوي



الشكل يمثل ق(س) حيث س ∈ [٠، ٦]

جد

① النقط الحرجة للاقتران ق(س)

② مجموعة قيم س التي تكون عندها ق′(س) < صفر .

الحل :

① النقط الحرجة

(٠،٠) ، (٢،٢) ، (٤،٠) ، (٦،٤)

② ق′ < صفر عندما س ∈ (٢، ٤)

رياضيات (العلمي) الوحدة (تطبيقات التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (التزايد والتناقص) ماجستير رياضيات

تعريف

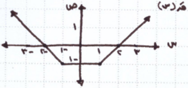
① اشارة قَ + ⟸ ق متزايد على الفترة

② اشارة قَ − ⟸ ق متناقص على الفترة

③ اذا كان قَ(س) = صفر يكون ق(س) ثابت على الفترة.

* رسمة قَ(س) :

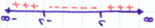
مثال



يمثل الشكل منحنى قَ(س) جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

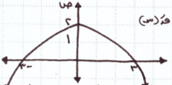
الحل :



(−∞ ، −٢] ، [٢ ، ∞) ق متزايد

[−٢ ، ٢] ق متناقص.

٢٠١٠ صيفي

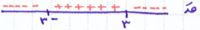


إذا كان الشكل يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) فإن مجال التزايد للاقتران ق(س) هو

أ) [٠ ، ∞) ب) (−∞ ، ٠]

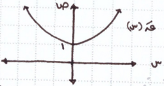
ج) [−٣ ، ٣] د) [٠ ، ٩]

الحل :



[−٣ ، ٣] ق متزايد

٢٠١١ صيفي



الشكل يمثل منحنى قَ(س) ، إن فترة التزايد للاقتران ق(س) هي

أ) [٠ ، ∞)   ب) (−∞ ، ٠]

ج) [١ ، ∞)   د) ح

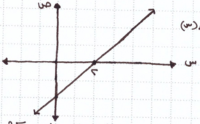
الحل:

+ + + + + + + + +

−∞ .... ∞

ح فترة التزايد (مجموعة الأعداد الحقيقية)

٢٠١٣ شتوي



الشكل يمثل منحنى قَ(س) حيث ق كثير حدود إن منحنى ق يكون متزايداً في الفترة

أ) (−∞ ، ∞)   ب) (−∞ ، ٢]

ج) [٢ ، ∞)   د) [٠ ، ∞)

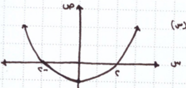
الحل:

قَ − − − − − − − − + + + + + +

−∞ ...... ٢ ...... ∞

[٢ ، ∞) ق متزايد

٢٠١٣ صيفي



إذا كان الشكل يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران كثير الحدود ق فإن منحنى ق يكون متناقصاً في الفترة .

■ (−∞ ، ٠]   ■ [٠ ، ∞)

■ [−٢ ، ٠]   ■ [−٢ ، ٢]

الحل

قَ + + + − − − − − − − + + +

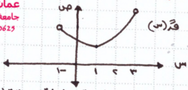
−∞ ... −٢ ...... ٢ ... ∞

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

⊛ رسمة قً(س)

٢٠٠٩ صيفي

عصام الشيخ
عمان صبربور
جامعة آل البيت
0796300625



الشكل يمثل منحنى المشتقة الثانية للاقتران ق(س) المتصل على [-١، ٣] فإن الاقتران قَ يكون متزايداً في الفترة

أ) [-١، ٣]　　ب) $\boxed{\text{ب)}}$ (-١، ٣)

ج) (١، ٣)　　د) [١، ٣]

الحل:

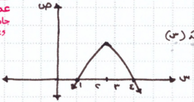
قً　+++ + + + + + + +　(من -١ إلى ٣)

⇐ قَ متزايد على (-١، ٣)

رسمة قَ والسؤال عن قً :

٢٠١٨ شتوي جديد

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

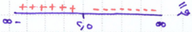


إذا كان الشكل يمثل منحنى الاقتران قَ(س) المعرف على ح فإن الفترة التي يكون فيها قً(س) > صفر هي :

أ) [٢,٥ ، ٤] ب) [٤ ، ∞)

جـ) [١ ، ٤] $\boxed{\text{د}}$) (−∞ ، ٢,٥]

الحل :



* معرفة فترات التزايد والتناقص من قواعد الاقترانات.

أولاً: كثيرات الحدود

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران
ق(س) = ٣س^{2} − س^{3} − ٢

الحل:

ق′(س) = ٦س − ٣س^{2}
٠ = ٦س − ٣س^{2}
٠ = ٣س(٢ − س)
⇐ س = ٠ ، س = ٢

----- ++++ -----
−∞ ، ٠ ، ٢ ، ∞

(−∞، ٠] ، [٢، ∞) ق متناقص
[٠، ٢] ق متزايد.

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران
ق(س) = ٤س − س^{2} س ∈ ح

الحل:

ق′(س) = ٤ − ٢س
٠ = ٤ − ٢س
٢س = ٤ ⇐ س = ٢

++++ -----
−∞ ، ٢ ، ∞

(−∞، ٢] ق متزايد
[٢، ∞) ق متناقص

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران
ق(س) = س^{3} − ٣س س ∈ [−٣، ٣]

الحل:

ق′(س) = ٣س^{2} − ٣
٠ = ٣(س^{2} − ١)
⇐ س = ١ ، −١

+++ ----- +++
−٣ ، −١ ، ١ ، ٣

[−٣، −١] ، [١، ٣] ق متزايد
[−١، ١] ق متناقص

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = (٢ - س)^{٤}$ ، س ∈ ح

الحل:

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

$ق\prime(س) = -٤(٢ - س)^{٣}$

$ق\prime(س) =$ صفر ⟸ س = ٢

(-∞ ، ٢] ق متناقص

[٢ ، ∞) ق متزايد

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = (١ - س)^{٣}$ ، س ∈ ح

الحل:

$ق\prime(س) = -٣(١ - س)^{٢}$

$ق\prime(س) =$ صفر ⟸ س = ١

(-∞ ، ∞) ق متناقص .

ثانياً: الاقترانات المثلثية.

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ق(س) = جتا س   س ∈ [0، 2π]

الحل:

ق'(س) = − جا س

0 = − جا س

⇐ جا س = صفر

⇐ س = π

$- - - - -$ | $+ + + + +$

0   π   2π

[0، π] ق متناقص

[π، 2π] ق متزايد

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ق(س) = جتا س − $\frac{1}{2}$ جتا 2س

س ∈ [0، 2π]

الحل:

ق'(س) = − جا س + $\frac{1}{2}$ جا 2س × 2

0 = − جا س + جا 2س

0 = − جا س + 2 جا س جتا س

0 = − جا س (1 − 2 جتا س)

جا س = 0   أو   جتا س = $\frac{1}{2}$

س = π   س = 60 = $\frac{\pi}{3}$

س = 300 = $\frac{5\pi}{3}$

$+ + +$ | $- - - -$ | $+ + +$ | $- - -$

0   $\frac{\pi}{3}$ π $\frac{5\pi}{3}$ 2π

[0، $\frac{\pi}{3}$]، [π، $\frac{5\pi}{3}$] ق متزايد

[$\frac{\pi}{3}$، π]، [$\frac{5\pi}{3}$، 2π] ق متناقص

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ق(س) = جا²س   س ∈ [0، 2π]

الحل:

ق'(س) = 2 جا س جتا س

0 = 2 جا س جتا س

جا س = 0   أو   جتا س = 0

س = π   س = $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$

$+ + +$ | $- - - -$ | $+ + +$ | $- - -$

0   $\frac{\pi}{2}$ π $\frac{3\pi}{2}$ 2π

[0، $\frac{\pi}{2}$]، [π، $\frac{3\pi}{2}$] ق متزايد

[$\frac{\pi}{2}$، π]، [$\frac{3\pi}{2}$، 2π] ق متناقص

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ق(س) = جتا²س   س ∈ [0، 2π]

الحل:

ق'(س) = −2 جتا س جا س

0 = −2 جتا س جا س

جا س = 0   أو   جتا س = 0

س = π   س = $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$

$- - - -$ | $+ + + +$ | $- - - -$ | $+ + +$

0   $\frac{\pi}{2}$ π $\frac{3\pi}{2}$ 2π

[0، $\frac{\pi}{2}$]، [π، $\frac{3\pi}{2}$] ق متناقص

[$\frac{\pi}{2}$، π]، [$\frac{3\pi}{2}$، 2π] ق متزايد

2008 شتوي

ليكن ق(س) = 4 − س + جا س حيث س ∈ [−π، π] جد الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق متناقصاً.

الحل:

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

قَ(س) = −١ + حتاس

٠ = −١ + حتاس

١ = حتاس

⇐ س = صفر

قَ : −π ، ٠ ، π

[−π ، π] ق متناقص

ثالثاً : الجذور

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = \sqrt{25 - س^2}$ ، $س \in [-5 ، 5]$

الحل:

$25 - س^2 = 0$

$س^2 = 25 \Leftarrow س = \pm 5$

المجال

-5 ++++++++++ 5

$$ق'(س) = \begin{cases} \dfrac{-2س}{2\sqrt{25 - س^2}} & -5 < س < 5 \\ \text{غير موجودة} & س = -5 ، 5 \end{cases}$$

$\dfrac{-2س}{2\sqrt{25 - س^2}} = 0 \Leftarrow -2س = 0$

$\Leftarrow س = 0$

ق' : -5 ++++++++ 0 − − − − − − 5

ق متزايد $[-5 ، 0]$

ق متناقص $[0 ، 5]$

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = \sqrt[3]{س - 1}$ ، $س \in ح$

الحل:

ق متصل وقابل للاشتقاق باستثناء صفر المقام في المشتقة.

$$ق'(س) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(س-1)^2}} & س \in ح - \{1\} \\ \text{غير موجودة} & س = 1 \end{cases}$$

$ق'(س) = \text{صفر}$

$\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(س-1)^2}} = \text{صفر} \Leftarrow$ لايوجد قيم س

ق' : $-\infty$ ++++++ 1 ++++++ ∞

ق متزايد $(-\infty ، \infty)$

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = \sqrt[3]{س^3 - 6س^2}$

الحل:

المجال ح

$$ق'(س) = \begin{cases} \dfrac{3س^2 - 12س}{3\sqrt[3]{(س^3 - 6س^2)^2}} & ح - \{0 ، 6\} \\ \text{غير موجودة} & س = 0 ، 6 \end{cases}$$

اصفار المقام للمشتقة

$س^3 - 6س^2 = 0$

$س^2 (س - 6) = 0$

$س = 0 ، 6$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow 3س^2 - 12س = 0$

$3س(س - 4) = 0$

$س = 0$ ، $س = 4$

ق' : $-\infty$ ++++ 0 − − − − 4 +++ 6 +++ ∞

ق متزايد $(-\infty ، 0]$ ، $[4 ، \infty)$

ق متناقص $[0 ، 4]$

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = \sqrt[3]{(س-٤)^٢}$ ، س ∈ ح

الحل:

ق متصل وقابل للاشتقاق ما عدا اصفار المقام للمشتقة

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

$قَ(س) = \frac{٢}{٣}(س-٤)^{-\frac{١}{٣}}$

$\Leftarrow$

$قَ(س) = \begin{cases} \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س-٤}} & س \ne ٤ \\ \text{غير موجودة} & س = ٤ \end{cases}$

قَ(س) = صفر $\Leftarrow$ لا يوجد قيم لـ س

قَ: $-\infty$ ‎- - - - - - - (٤) + + + + + +‎ ∞

$(-\infty ، ٤]$ ق متناقص

$[٤ ، \infty)$ ق متزايد

رابعاً: الاقترانات المتشعبة:

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} ٣ - س^٢ & س \le ١ \\ \frac{٢}{س} & س > ١ \end{cases}$$

الحل:

$٣ - س^٢$ متصل وقابل للاشتقاق (كثير حدود)

$\frac{٢}{س}$ متصل وقابل للاشتقاق على الفترة $س > ١$

$$ق'(س) = \begin{cases} -٢س & س \le ١ \\ \frac{-٢}{س^٢} & س > ١ \end{cases}$$

ق متصل عند ١ وقابل للاشتقاق.

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow -٢س = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$\frac{-٢}{س^٢} = ٠$. لا يوجد قيم لـ س

ق' : $-\infty$ ـــ + + + + + + ـــ صفر ـــ - - - - ـــ ١ ـــ - - - - ـــ ∞

ق متزايد $(-\infty ، ٠]$

ق متناقص $[٠ ، \infty)$

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} ٤ - س^٣ & س < ١ \\ \frac{٣}{س} & س \ge ١ \end{cases}$$

الحل:

$٤ - س^٢$ متصل وقابل للاشتقاق (كثير حدود)

$\frac{٣}{س}$ متصل وقابل للاشتقاق على الفترة $س > ١$

$$ق'(س) = \begin{cases} -٣س^٢ & س < ١ \\ \frac{-٣}{س^٢} & س \ge ١ \end{cases}$$

ق متصل وقابل للاشتقاق عند $س = ١$

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow -٣س^٢ = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$\frac{-٣}{س^٢} = ٠$. لا يوجد قيم لـ س

ق' : $-\infty$ ـــ - - - - - ـــ . ـــ - - - - - - - ـــ ∞

$(-\infty ، \infty)$ ق متناقص

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} ٤ - س^٢ & -٣ \le س \le ١ \\ ٣ & ١ < س \le ٣ \end{cases}$$

في الفترة $[-٣ ، ٣]$

الحل:

$٤ - س^٢$ متصل وقابل للاشتقاق

٣ متصل وقابل للاشتقاق

$$ق'(س) = \begin{cases} -٢س & -٣ < س < ١ \\ \text{صفر} & ١ < س < ٣ \\ \text{غير موجودة} & س = -٣ ، ٣ ، ١ \end{cases}$$

ق متصل عند ١ وغير قابل للاشتقاق

ق' : -٣ ـــ + + + ـــ . ـــ - - - - ـــ ١ ـــ صفر ـــ ٣

$-٢س = ٠ \Leftarrow س = ٠$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

[-٣، ٠] ق متزايد
[٠، ١] ق متناقص
[١، ٣] ق ثابت

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

رياضيات (العلمي) الوحدة (تطبيقات التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (التزايد والتناقص) ماجستير رياضيات

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$$\text{ق(س)} = |\text{س}^2 - 9| \ ، \ \text{س} \in [-5 ، 5]$$

الحل:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^2 - 9 & ، -5 \leq \text{س} < -3 \\ 9 - \text{س}^2 & ، -3 \leq \text{س} \leq 3 \\ \text{س}^2 - 9 & ، 3 < \text{س} \leq 5 \end{cases}$$

$\text{س}^2 - 9$ متصل قابل للاشتقاق

$9 - \text{س}^2$ متصل قابل للاشتقاق

$$\text{ق}'\text{(س)} = \begin{cases} 2\text{س} & -5 < \text{س} < -3 \\ -2\text{س} & -3 < \text{س} < 3 \\ 2\text{س} & 3 < \text{س} < 5 \\ \text{غير موجودة} & \text{س} = -5 ، 5 ، -3 ، 3 \end{cases}$$

ق متصل عند 3 ، -3 وغير قابل للاشتقاق

ق' : ----- +++ ---- ++++

-5 -3 0 3 5

$-2\text{س} = 0 \Leftarrow \text{س} = \text{صفر}$

ق متناقص $[-5 ، -3]$ ، $[0 ، 3]$

ق متزايد $[-3 ، 0]$ ، $[3 ، 5]$

على مجاله

الحل:

المجال ح

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^2 + 6\text{س} + 4 & \text{س} \leq 0 \\ 4 & 0 < \text{س} < 1 \\ 3\text{س} + 1 & \text{س} \geq 1 \end{cases}$$

$\text{س}^2 + 6\text{س} + 4$ متصل وقابل للاشتقاق

4 متصل وقابل للاشتقاق

$3\text{س} + 1$ متصل وقابل للاشتقاق

$$\text{ق}'\text{(س)} = \begin{cases} 2\text{س} + 6 & \text{س} < 0 \\ \text{صفر} & 0 < \text{س} < 1 \\ 3 & \text{س} > 1 \\ \text{غير موجودة} & \text{س} = 0 ، 1 \end{cases}$$

ق متصل عند صفر وغير قابل للاشتقاق

ق متصل عند 1 وغير قابل للاشتقاق

ق' : ----- +++ صفر +++

$-\infty$ -3 0 1 ∞

$2\text{س} + 6 = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = \frac{-6}{2} = -3$

ق متناقص $(-\infty ، -3]$

ق متزايد $[-3 ، 0]$ ، $[1 ، \infty)$

ق ثابت $[0 ، 1]$

مثال

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^2 + 6\text{س} + 4 & \text{س} \leq 0 \\ [\text{س} + 4] & 0 < \text{س} < 1 \\ |3\text{س} + 1| & \text{س} \geq 1 \end{cases}$$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796500625

مثال

إذا كان ق(س) اقترانًا متصلًا على [أ، ب]
وقابل للاشتقاق على (أ، ب)
وكان قَ(س) > صفر على (أ، ب)

وكان هـ(س) = ق(س) + $س^3$
فأثبت أن هـ(س) متزايدًا على [أ، ب]

الحل:

هـَ(س) = قَ(س) + $3س^2$

ق متزايد على [أ، ب] و $3س^2$ دائمًا موجب

⇐ هـَ : + + + + + + + + + + (من أ إلى ب)

⇐ هـ متزايد على [أ، ب] .