التكامل بالتعويض

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625
عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625
عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

فرض مباشر

مثال

جد $\int ٢س\,(س^{٢}+٣)^{٥}\,دس$

الحل:

$ص = س^{٢}+٣$

$دس = \frac{دص}{٢س}$

$\Leftarrow \int \cancel{٢س}\,ص^{٥}\,\frac{دص}{\cancel{٢س}}$

$= \int ص^{٥}\,دص$

$= \frac{ص^{٦}}{٦} + جـ$

$= \frac{(س^{٢}+٣)^{٦}}{٦} + جـ$

مثال

جد $\int ٦س^{٥}\,(س^{٦}+٤)^{٧}\,دس$

الحل:

$ص = س^{٦}+٤$

$دس = \frac{دص}{٦س^{٥}}$

$\Leftarrow \int \cancel{٦س^{٥}}\,ص^{٧}\,\frac{دص}{\cancel{٦س^{٥}}}$

$= \int ص^{٧}\,دص$

$= \frac{ص^{٨}}{٨} + جـ$

$= \frac{(س^{٦}+٤)^{٨}}{٨} + جـ$

مثال

جد $\int س^{٣}\,\sqrt[٣]{٣س^{٤}+٤}\,دس$

الحل:

$\int س^{٣}\,(٣س^{٤}+٤)^{\frac{١}{٣}}\,دس$

$ص = ٣س^{٤}+٤$

$دس = \frac{دص}{١٢س^{٣}}$

$\Leftarrow \int س^{٣}\,ص^{\frac{١}{٣}}\,\frac{دص}{١٢س^{٣}}$

$= \frac{١}{١٢}\int ص^{\frac{١}{٣}}\,دص$

$= \frac{١}{١٢}\times\frac{٣}{٤}\,ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$= \frac{١}{٤}\times\frac{١}{٤}\,(٣س^{٤}+٤)^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$= \frac{١}{١٦}\,\sqrt[٣]{(٣س^{٤}+٤)^{٤}} + جـ$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

مثال

جد $\int س^{٢}\,(٦س^{٣}+٥)^{٣}\,دس$

الحل:

$ص = ٦س^{٣}+٥$

$دس = \frac{دص}{١٨س^{٢}}$

$\Leftarrow \int س^{٢}\,ص^{٣}\,\frac{دص}{١٨س^{٢}}$

$= \frac{١}{١٨}\int ص^{٣}\,دص$

$= \frac{١}{١٨}\,\frac{ص^{٤}}{٤} + جـ$

$= \frac{1}{72} (6س^3 + 5)^4 + جـ$

مثال

جد $\int \frac{(5 + \sqrt{3س})^7}{\sqrt{3س}}$ دس

الحل:

ص $= 5 + \sqrt{3س}$

دس $= \frac{دص}{\frac{1}{\sqrt{3س}}} = 2\sqrt{3س}$ دص

$\Leftarrow \int \frac{ص^7}{\sqrt{3س}} \times 2\sqrt{3س}$ دص

$= \int 2 ص^7$ دص

$= 2 \frac{ص^8}{8} + جـ$

$= \frac{1}{4} (5 + \sqrt{3س})^8 + جـ$

مثال

جد $\int_0^{25} س \sqrt{س^2 + 9}$ دس

الحل:

$\int_0^{25} س (س^2 + 9)^{\frac{1}{2}}$ دس

ص $= س^2 + 9$

دس $= \frac{دص}{2س}$

$\Leftarrow \int_9^{25} س ص^{\frac{1}{2}} \frac{دص}{2س}$

$= \int_9^{25} \frac{1}{2} ص^{\frac{1}{2}}$ دص

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} \Big|_9^{25}$

$= \frac{1}{3} \sqrt{ص^3} \Big|_9^{25}$

$= \sqrt{\frac{ص^3}{3}}_{25} - \sqrt{\frac{1}{3} ص^3}_9$

$= \frac{125}{3} - \frac{27}{3} = \frac{98}{3}$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

مثال

جد $\int_0^2 (س+3) \sqrt{س^2 + 6س}$ دس

الحل:

$\int_0^2 (س+3) (س^2 + 6س)^{\frac{1}{2}}$ دس

ص $= س^2 + 6س$

دس $= \frac{دص}{2س + 6}$

$\left.\begin{array}{l} س = 0 \leftarrow ص = 0 \\ س = 2 \leftarrow ص = 16 \end{array}\right\}$

$\Leftarrow \int_0^{16} (س+3) ص^{\frac{1}{2}} \frac{دص}{2س+6}$

$= \int_0^{16} (س+3) ص^{\frac{1}{2}} \frac{دص}{2(س+3)}$

$= \int_0^{16} \frac{1}{2} ص^{\frac{1}{2}}$ دص

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{16}$

$= \frac{1}{3} \sqrt{ص^3} \Big|_0^{16}$

$= \frac{\sqrt[3]{16}}{3} - \frac{\sqrt[3]{0}}{3}$

$= \frac{64}{3} - 0 = \frac{64}{3}$

مثال

جد $\int (س+3) \sqrt[5]{س^2+6س-4}$ د س

الحل:

$\int (س+3)(س^2+6س-4)^{\frac{1}{5}}$ د س

ص $= س^2+6س-4$

د ص $= (2س+6)$ د س

$\Leftarrow \int (س+3) ص^{\frac{1}{5}} \frac{د ص}{2س+6}$

$= \int (س+3) ص^{\frac{1}{5}} \frac{د ص}{2(س+3)}$

$= \int \frac{1}{2} ص^{\frac{1}{5}}$ د ص

$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} ص^{\frac{6}{5}} + ج$

$= \frac{5}{12} \sqrt[5]{(س^2+6س-4)^6} + ج$

مثال

جد $\int \frac{6س-9}{(س^2-3س+1)^3}$ د س

الحل:

$\int (6س-9)(س^2-3س+1)^{-3}$ د س

ص $= س^2-3س+1$

د ص $= (2س-3)$ د س

$\Leftarrow \int (6س-9) ص^{-3} \frac{د ص}{2س-3}$

$= \int 3(2س-3) ص^{-3} \frac{د ص}{(2س-3)}$

$= \int 3 ص^{-3}$ د ص

$= 3 \frac{ص^{-2}}{-2} + ج$

$= \frac{-3}{2} (س^2-3س+1)^{-2} + ج$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

مثال

جد $\int_{1}^{e^2} \frac{1}{س \sqrt{1+\ln س}}$ د س

الحل:

$\int_{1}^{e^2} \frac{1}{3} (1+\ln س)^{-\frac{1}{2}}$ د س

ص $= 1+\ln س$

د ص $= \frac{د س}{س}$ $\Rightarrow$ د س $= س$ د ص

$س = 1 \Leftarrow ص = 1$

$س = e^2 \Leftarrow ص = 4$

$\Leftarrow \int_{1}^{4} \frac{1}{3} ص^{-\frac{1}{2}} \times س$ د ص

$= \int_{1}^{4} ص^{-\frac{1}{2}}$ د ص

$$\left. 2\,\text{ص}^{\frac{1}{2}} \right|_{1}^{4}$$

$$= \left. 2\sqrt{\text{ص}} \right|_{1}^{4}$$

$$= 2\times\sqrt{4} - 2\sqrt{1}$$

$$= 2\times 2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

مثال

جد $\int \frac{1}{\sqrt{\text{س}}\,(2+\sqrt{\text{س}})}\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = 2 + \sqrt{\text{س}}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}} = 2\sqrt{\text{س}}\,\text{دص}$

$\Leftarrow \int \frac{1}{\cancel{\sqrt{\text{س}}}\,(\text{ص})} \times 2\cancel{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دص}$

$= \int \frac{2}{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$

$= 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2+\sqrt{\text{س}}| + \text{جـ}$.

مثال

جد $\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}}}{5 - \text{س}\sqrt[3]{\text{س}}}\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}}$

$\text{ص}^3 = \text{س}$

$3\text{ص}^2\,\text{دص} = \text{دس}$

$\Leftarrow \int \frac{\text{ص}}{5 - \text{ص}^3\,\text{ص}} \times 3\text{ص}^2\,\text{دص}$

$= \int \frac{3\text{ص}^3}{5 - \text{ص}^4}\,\text{دص}$

$\text{ع} = 5 - \text{ص}^4$

$\text{دص} = \frac{\text{دع}}{-4\text{ص}^3}$

$= \int \frac{3\text{ص}^3}{\text{ع}} \cdot \frac{\text{دع}}{-4\text{ص}^3}$

$= -\frac{3}{4} \int \frac{1}{\text{ع}}\,\text{دع}$

$= -\frac{3}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| + \text{جـ}$

$= -\frac{3}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|5 - \text{ص}^4| + \text{جـ}$

$= -\frac{3}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|5 - (\sqrt[3]{\text{س}})^4| + \text{جـ}$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

٢٠١٠ صيفي

جد التكامل الآتي

$\int \frac{\text{دس}}{\sqrt{\text{س}}\,(1+\sqrt{\text{س}})^4}$.

الحل:

$\sqrt{\text{س}} = \text{ص}$

$\text{س} = \text{ص}^2$

$\text{دس} = 2\text{ص}\,\text{دص}$

$\Leftarrow \int \frac{2\text{ص}\,\text{دص}}{\text{ص}\,(1+\text{ص})^4}$

$$\int \frac{2}{(1+ص)^4}\, دص$$

$$= \int 2(1+ص)^{-4}\, دص$$

$$= \frac{2(1+ص)^{-3}}{-3} + جـ$$

$$= -\frac{2}{3}(1+ص)^{-3} + جـ$$

$$= -\frac{44}{3} + 12 =$$

$$= \frac{-36+44}{3} = \frac{8}{3}$$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

٢٠١٣ صيفي

جد التكامل الآتي

عودة للعرض

$$\int_{-1}^{4} \frac{س}{\sqrt{س+5}}\, دس$$

الحل:

$$ص = \sqrt{س+5}$$

$$ص^2 = س+5$$

$$2ص\, دص = دس$$

$$س = -1 \leftarrow ص = 2$$

$$س = 4 \leftarrow ص = 3$$

$$\int_{2}^{3} \frac{س}{ص} \times 2ص\, دص$$

$$= \int_{2}^{3} 2(ص^2 - 5)\, دص$$

$$= \int_{2}^{3} 2ص^2 - 10\, دص$$

$$\left[\frac{2ص^3}{3} - 10ص\right]_{2}^{3}$$

$$= (2\times 9 - 30) - (2\times\frac{8}{3} - 20)$$

$$= -12 - (\frac{16}{3} - 20)$$

$$= -12 - (\frac{16-60}{3})$$

• فرض واختصار

مثال

جد $\int (س^2+1)$ جا $(س^3+3س+1)$ دس

الحل:

ص = $س^3+3س+1$

دس = $\frac{دص}{3س^2+3}$

← $\int (س^2+1)$ جا ص $\frac{دص}{3س^2+3}$

= $\int (س^2+1)$ جاص $\frac{دص}{3(س^2+1)}$

= $\int \frac{1}{3}$ جاص دص

= $-\frac{1}{3}$ جتاص + جـ

= $-\frac{1}{3}$ جتا $(س^3+3س+1)$ + جـ

مثال

جد $\int (س+3)$ قتا^2 $(س^2+6س-4)$ دس

الحل:

ص = $س^2+6س-4$

دس = $\frac{دص}{2س+6}$

← $\int (س+3)$ قتا^2 ص $\frac{دص}{2س+6}$

= $\int (س+3)$ قتا^2 ص $\frac{دص}{2(س+3)}$

= $\int \frac{1}{2}$ قتا^2 ص دص

= $\frac{1}{2}$ ظتاص + جـ

= $\frac{1}{2}$ ظتا $(س^2+6س-4)$ + جـ

مثال

جد $\int س$ ظا^2 $(س^2+5)$ دس

الحل:

ص = $س^2+5$

دس = $\frac{دص}{2س}$

← $\int س$ ظا^2 ص $\frac{دص}{2س}$

= $\int \frac{1}{2}$ ظا^2 ص دص

= $\int \frac{1}{2}$ (قا^2 ص - 1) دص

= $\int \frac{1}{2}$ قا^2 ص - $\frac{1}{2}$ دص

= $\frac{1}{2}$ ظا ص - $\frac{1}{2}$ ص + جـ

= $\frac{1}{2}$ ظا $(س^2+6س-4)$ - $\frac{1}{2}$ $(س^2+6س-4)$ + جـ

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

مثال

جد $\int \frac{ظتا^2 \frac{1}{س}}{س^2}$ دس

الحل:

$\int \frac{1}{س^2}$ ظتا^2 $\frac{1}{س}$ دس

ص = $\frac{1}{س}$

← دس = $\frac{دص}{-\frac{1}{س^2}}$ = - $س^2$ دص

$\Leftarrow \int \frac{1}{س^2}$ ظتا^{2}ص × $-س^2$ دص

$= \int -$ ظتا^{2}ص دص

$= \int -$ (قتا^{2}ص $- 1$) دص

$= \int 1 -$ قتا^{2}ص دص

$=$ ص $+$ ظتاص $+$ جـ

$= \frac{1}{س} +$ ظتا $\frac{1}{س} +$ جـ

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

مثال

جد $\int \text{قا}^2 2\text{س}\ \text{هـ}^{\text{ظا}2\text{س}}\ \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{ظا}2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2 2\text{س}}$

$\Leftarrow \int \text{قا}^2 2\text{س}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2 2\text{س} \times 2}$

$= \int \frac{1}{2}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص}$

$= \frac{1}{2}\ \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{2}\ \text{هـ}^{\text{ظا}2\text{س}} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int_1^2 \frac{\text{هـ}^{\frac{3}{\text{س}}}}{\text{س}^2}\ \text{دس}$

الحل:

$\int_1^2 \frac{1}{\text{س}^2}\ \text{هـ}^{\frac{3}{\text{س}}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \frac{3}{\text{س}}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{-3}{\text{س}^2}} = \frac{\text{س}^2}{-3}\ \text{دص}$

$\begin{cases} \text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 3 \\ \text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = \frac{3}{2} \end{cases}$

$\int_3^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\text{س}^2}\ \text{هـ}^{\text{ص}} \times \frac{\text{س}^2}{-3}\ \text{دص}$

$= \int_3^{\frac{3}{2}} \frac{-1}{3}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{ص}}}{-3} \Big|_3^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{\text{هـ}^{\frac{3}{2}}}{-3} - \frac{-\text{هـ}^3}{3}$

مثال

جد $\int \frac{2\text{س} - 3}{2\text{س}^2 - 6\text{س} - 5}\ \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = 2\text{س}^2 - 6\text{س} - 5$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{4\text{س} - 6}$

$\Leftarrow \int \frac{2\text{س} - 3}{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{4\text{س} - 6}$

$= \int \frac{(2\text{س} - 3)}{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{2(2\text{س} - 3)}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\text{ص}}\ \text{دص}$

$= \frac{1}{2}\ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| + \text{جـ}$

$= \frac{1}{2}\ \text{لو}_{\text{هـ}} |2\text{س}^2 - 6\text{س} - 5| + \text{جـ}$

٢٠١٤ شتوي

جد $\int \text{ظتاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}\ \text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}} = \frac{\text{دص}}{\text{ظتاس}}$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

$\Leftarrow \int \text{ظتاس ص} \frac{\text{دص}}{\text{ظتاس}}$

$= \int \text{ص دص}$

$= \frac{\text{ص}^2}{2} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس})^2}{2} + \text{جـ}$

٢٠١١ شتوي

أثبت أن

$\int \frac{\text{ظتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}{\text{س}} \text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})| + \text{جـ}$

الحل:

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{1}{\text{س}}} = \text{س دص}$

$\int \frac{\text{ظتاص}}{\text{س}} \times \text{س دص}$

$= \int \text{ظتاص دص}$

$= \int \frac{\text{جتاص}}{\text{جاص}} \text{دص}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاص}| + \text{جـ}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})| + \text{جـ}$

٢٠١٨ شتوي قديم

قيمة $\int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^2} \frac{1}{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}} \text{دس}$ تساوي

أ) ١ $\boxed{\text{ب) لو}_{\text{هـ}}2}$ جـ) ٤ لو$_{\text{هـ}}$٢ د) $\frac{1}{2}$ لو$_{\text{هـ}}$٢

الحل:

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{س} = \text{هـ} \leftarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = \text{هـ}^2 \leftarrow \text{ص} = 2$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{1}{\text{س}}} = \text{س دص}$

$\Leftarrow \int_1^2 \frac{1}{\cancel{\text{س}}\,\text{ص}} \cancel{\text{س}}\,\text{دص}$

$= \int_1^2 \frac{1}{\text{ص}} \text{دص}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| \Big|_1^2$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}2 - \text{لو}_{\text{هـ}}1 = \text{لو}_{\text{هـ}}2$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

• تجهيز ثم الفرض

مثال

جد $\int \frac{1}{س^2} \sqrt{\frac{2س+1}{س}}\ دس$

الحل:

$\int \frac{1}{س^2} \left(\frac{2س}{س} + \frac{1}{س}\right)^{\frac{1}{2}} دس$

$= \int \frac{1}{س^2} \left(2 + \frac{1}{س}\right)^{\frac{1}{2}} دس$

$ص = 2 + \frac{1}{س}$

$دس = \frac{دص}{\frac{-1}{س^2}} = -س^2\ دص$

$\Leftarrow \int \frac{1}{\cancel{س^2}} ص^{\frac{1}{2}} \times -\cancel{س^2}\ دص$

$= \int -ص^{\frac{1}{2}}\ دص$

$= -\frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} + ج$

$= -\frac{2}{3} \left(2 + \frac{1}{س}\right)^{\frac{3}{2}} + ج$

مثال

جد $\int (7س^5 - 2س)^3\ دس$

الحل:

$\int (س(7س^4 - 2))^3\ دس$

$= \int س^3 (7س^4 - 2)^3\ دس$

$ص = 7س^4 - 2$

$دس = \frac{دص}{28س^3}$

$\Leftarrow \int \cancel{س^3}\ ص^3 \frac{دص}{28\cancel{س^3}}$

$= \int \frac{1}{28} ص^3\ دص$

$= \frac{1}{28} \frac{ص^4}{4} + ج$

$= \frac{1}{112} (7س^4 - 2)^4 + ج$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

مثال

جد $\int \sqrt[3]{4س^5 + 2س^3}\ دس$

الحل:

$\int \left(س^3 (4س^2 + 2)\right)^{\frac{1}{3}} دس$

$= \int (س^3)^{\frac{1}{3}} (4س^2 + 2)^{\frac{1}{3}} دس$

$= \int س (4س^2 + 2)^{\frac{1}{3}} دس$

$ص = 4س^2 + 2$

$دس = \frac{دص}{8س}$

$\Leftarrow \int \cancel{س}\ ص^{\frac{1}{3}} \frac{دص}{8\cancel{س}}$

$= \int \frac{1}{8} ص^{\frac{1}{3}}\ دص$

$= \frac{1}{8} \times \frac{3}{4} ص^{\frac{4}{3}} + ج$

$= \frac{٣}{٣٢} (٤س^{٢}+٢)^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

مثال

جد $\int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٧} + ٥س^{٣}}\ دس$

الحل:

$\int س^{٢} \left(س^{٣} (س^{٤} + ٥)\right)^{\frac{١}{٣}} دس$

$= \int س^{٢} (س^{٣})^{\frac{١}{٣}} (س^{٤} + ٥)^{\frac{١}{٣}} دس$

$= \int س^{٢} \times س (س^{٤} + ٥)^{\frac{١}{٣}} دس$

$= \int س^{٣} (س^{٤} + ٥)^{\frac{١}{٣}} دس$

$ص = س^{٤} + ٥$

$دس = \frac{دص}{٤س^{٣}}$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

$\Leftarrow \int \cancel{س^{٣}}\ ص^{\frac{١}{٣}} \frac{دص}{٤\cancel{س^{٣}}}$

$= \int \frac{١}{٤} ص^{\frac{١}{٣}} دص$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{١٦} (س^{٤} + ٥)^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

مثال

جد $\int \sqrt[٣]{س^{-\frac{٣}{٤}} + ١}\ دس$

الحل:

$\int \left(\frac{١}{س^{\frac{٣}{٤}}} + ١\right)^{\frac{١}{٣}} دس$

$= \int \left(\frac{١ + س^{\frac{٣}{٤}}}{س^{\frac{٣}{٤}}}\right)^{\frac{١}{٣}} دس$

$= \int \frac{(١ + س^{\frac{٣}{٤}})^{\frac{١}{٣}}}{(س^{\frac{٣}{٤}})^{\frac{١}{٣}}} دس$

$= \int س^{-\frac{١}{٤}} (١ + س^{\frac{٣}{٤}})^{\frac{١}{٣}} دس$

$ص = ١ + س^{\frac{٣}{٤}}$

$دس = \frac{دص}{\frac{٣}{٤} س^{-\frac{١}{٤}}}$

$\Leftarrow \int س^{-\frac{١}{٤}} ص^{\frac{١}{٣}} \frac{دص}{\frac{٣}{٤} س^{-\frac{١}{٤}}}$

$= \frac{٤}{٣} \int ص^{\frac{١}{٣}} دص$

$= \frac{٤}{٣} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$= ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$= (١ + س^{\frac{٣}{٤}})^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

مثال

جد $\int \frac{\text{جا}\,٣\text{س}}{١ + \text{جتا}\,٣\text{س}}\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = ١ + \text{جتا}\,٣\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جا}\,٣\text{س} \times ٣}$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

$\Leftarrow$

$\int \frac{\text{جا}\,٣\text{س}}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{-٣ \times \text{جا}\,٣\text{س}}$

$= -\frac{١}{٣} \int \frac{\text{دص}}{\text{ص}}$

$= -\frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$

$= -\frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|١ + \text{جتا}\,٣\text{س}| + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \text{هـ}^{\text{س}^{٣} + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{دس}$

الحل :

$\int \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} \times \text{هـ}^{٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٢}}\ \text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} \times \text{س}^{٢}\ \text{دس}$

$= \int \text{س}^{٢}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٣}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٣}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}}$

$\Leftarrow \int \text{س}^{٢}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}}$

$= \frac{١}{٣} \int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص}$

$= \frac{١}{٣}\ \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٣}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} + \text{جـ}$

مثال

جد $\int \text{هـ}^{\text{جاس} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}}\ \text{دس}$

الحل :

$\int \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{جتاس}\ \text{دس}$

$= \int \text{جتاس} \times \text{هـ}^{\text{جاس}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$\Leftarrow \int \text{جتاس}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص}$

$= \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{جـ}$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

عودة للخلف

مثال

جد $\int س^3 (س^2+4)^6 \, دس$

الحل:

$ص = س^2 + 4$

$دس = \frac{دص}{3س^2}$

$\Leftarrow \int س^3 ص^6 \frac{دص}{3س^2}$

$= \int \frac{1}{3} س^2 ص^6 \, دص$

لكن $س^2 = ص - 4$

$= \int \frac{1}{3} (ص-4) ص^6 \, دص$

$= \int \frac{1}{3} ص^7 - 2ص^6 \, دص$

$= \frac{1}{3} \frac{ص^8}{8} - 2\frac{ص^7}{7} + جـ$

$= \frac{1}{24} (س^2+4)^8 - \frac{2}{7} (س^2+4)^7 + جـ$

مثال

جد $\int س^5 (س^2+5)^4 \, دس$

الحل :

$ص = س^2 + 5$

$دس = \frac{دص}{2س}$

$\Leftarrow \int 2س^5 ص^4 \frac{دص}{2س}$

$= \int س^4 ص^4 \, دص$

لكن $س^2 = ص - 5 \Leftarrow س^4 = (ص-5)^2$

$= \int (ص-5)^2 ص^4 \, دص$

$= \int (ص^2 - 10ص + 25) ص^4 \, دص$

$= \int (ص^6 - 10ص^5 + 25ص^4) \, دص$

$= \frac{ص^7}{7} - 10\frac{ص^6}{6} + 25\frac{ص^5}{5} + جـ$

$= \frac{(س^2+5)^7}{7} - \frac{5}{3}(س^2+5)^6 + 5(س^2+5)^5 + جـ$

مثال

جد $\int س^7 \sqrt{س^4 - 3} \, دس$

الحل:

$\int س^7 (س^4-3)^{\frac{1}{2}} \, دس$

$ص = س^4 - 3$

$دس = \frac{دص}{4س^3}$

$\Leftarrow \int س^7 ص^{\frac{1}{2}} \frac{دص}{4س^3}$

$= \int \frac{1}{4} س^4 ص^{\frac{1}{2}} \, دص$

لكن $س^4 = ص + 3$

$= \int \frac{1}{4} (ص+3) ص^{\frac{1}{2}} \, دص$

$= \int \frac{1}{4} ص^{\frac{3}{2}} + 3ص^{\frac{1}{2}} \, دص$

$= \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} ص^{\frac{5}{2}} + 3 \times \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} + جـ$

$= \frac{1}{10} (س^4-3)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} (س^4-3)^{\frac{3}{2}} + جـ$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

مثال

جد $\int_{0}^{2} \frac{س^3}{\sqrt{(س^2+9)^3}}\, دس$

الحل:

$$\int_{0}^{2} س^3 (س^2+9)^{-\frac{3}{2}}\, دس$$

$ص = س^2 + 9$

$دص = 2س\, دس$

$دس = \frac{دص}{2س}$

$س = 0 \leftarrow ص = 9$

$س = 2 \leftarrow ص = 13$

$$\int_{9}^{13} س^3 \, ص^{-\frac{3}{2}} \frac{دص}{2س}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{9}^{13} س^2 \, ص^{-\frac{3}{2}}\, دص$$

لكن $س^2 = ص - 9$

$$= \frac{1}{2}\int_{9}^{13} (ص-9)\, ص^{-\frac{3}{2}}\, دص$$

$$= \frac{1}{2}\int_{9}^{13} ص^{-\frac{1}{2}} - 9ص^{-\frac{3}{2}}\, دص$$

$$= \frac{1}{2}\times 2ص^{\frac{1}{2}} - \frac{9}{2}\times -2ص^{-\frac{1}{2}} \Big|_{9}^{13}$$

$$= \sqrt{ص} + 9 \times \frac{1}{\sqrt{ص}} \Big|_{9}^{13}$$

$$= \left(\sqrt{13} + \frac{9}{\sqrt{13}}\right) - (3+3)$$

$$= \frac{13+9}{\sqrt{13}} - 6$$

$$= \frac{22}{\sqrt{13}} - 6$$

٢٠١٤ صيفي

جد التكامل الآتي:

$$\int_{0}^{1} \frac{-س}{(س+1)\sqrt{س+1} - \sqrt{س+1}}\, دس$$

الحل:

$ص = س + 1$

$دس = \frac{دص}{1} = دص$

$س = 0 \leftarrow ص = 1$

$س = 1 \leftarrow ص = 2$

$$\int_{1}^{2} \frac{-س}{ص\sqrt{ص} - \sqrt{ص}}\, دص$$

لكن $س = ص - 1$

$-س = 1 - ص$

$$\int_{1}^{2} \frac{1-ص}{\sqrt{ص}(ص-1)}\, دص$$

$$= \int_{1}^{2} \frac{(1-\sqrt{ص})(1+\sqrt{ص})}{\sqrt{ص}(\sqrt{ص}-1)}\, دص$$

$$= \int_{1}^{2} \left(\frac{1}{\sqrt{ص}} + \frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{ص}}\right) دص$$

$$= \int_{1}^{2} \left(ص^{-\frac{1}{2}} + 1\right) دص$$

$$= 2ص^{\frac{1}{2}} + ص \Big|_{1}^{2}$$

$$= 2\sqrt{ص} + ص \Big|_{1}^{2}$$

$$= (2\sqrt{2} + 2) - (2+1)$$

$$= 2\sqrt{2} + 2 - 3$$

$$= 2\sqrt{2} - 1$$

رياضيات (العلمي) الوحدة (التكامل وتطبيقاته) عصام محمد الشيخ

الفصل (الثاني) العنوان (التكامل بالتعويض) ماجستير رياضيات

٢٠١٥ صيفي

جد التكامل الآتي

$$\int_{0}^{4} \frac{س^{3}}{\sqrt{(س^{2}+9)^{3}}}\ دس$$

الحل:

$ص = س^{2} + 9$ ، $س = 0 \leftarrow ص = 9$ ، $س = 4 \leftarrow ص = 25$

$دس = \frac{دص}{2س}$

$$\int_{9}^{25} \frac{س^{3}}{ص^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{دص}{2س}$$

$$\frac{1}{2}\int_{9}^{25} س^{2}\ ص^{-\frac{3}{2}}\ دص$$

لكن $س^{2} = ص - 9$

$$\frac{1}{2}\int_{9}^{25} (ص - 9)\ ص^{-\frac{3}{2}}\ دص$$

$$\frac{1}{2}\int_{9}^{25} (ص^{-\frac{1}{2}} - 9\ ص^{-\frac{3}{2}})\ دص$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\ ص^{\frac{1}{2}} - 9 \times -2\ ص^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_{9}^{25}$$

$$= \sqrt{ص} + \frac{9}{\sqrt{ص}}\Big|_{9}^{25}$$

$$= (5 + \frac{9}{5}) - (3 + \frac{9}{3})$$

$$= 5 + \frac{9}{5} - 3 - 3$$

$$= \frac{9}{5} - 1$$

$$= \frac{9}{5} - \frac{5}{5}$$

$$= \frac{4}{5}$$

٢٠١٨ شتوي جديد

جد التكامل الآتي

$$\int \frac{(س-1)^{3}}{\sqrt{س^{2}-2س-4}}\ دس$$

الحل:

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

$ص = س^{2} - 2س - 4$

$دس = \frac{دص}{2س - 2}$

$$\int (س-1)^{3}\ ص^{-\frac{1}{2}}\ \frac{دص}{2س-2}$$

$$= \int \frac{(س-1)^{3}\ ص^{-\frac{1}{2}}\ دص}{2(س-1)}$$

$$= \frac{1}{2}\int (س-1)^{2}\ ص^{-\frac{1}{2}}\ دص$$

$$= \frac{1}{2}\int (س^{2} - 2س + 1)\ ص^{-\frac{1}{2}}\ دص$$

لكن $س^{2} - 2س = ص + 4$ من الفرض

$$= \frac{1}{2}\int (ص + 4 + 1)\ ص^{-\frac{1}{2}}\ دص$$

$$= \frac{1}{2}\int (ص + 5)\ ص^{-\frac{1}{2}}\ دص$$

$$= \frac{1}{2}\int ص^{\frac{1}{2}} + 5\ ص^{-\frac{1}{2}}\ دص$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}ص^{\frac{3}{2}} + 5 \times 2\ ص^{\frac{1}{2}}\right) + ج$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(س^{2}-2س-4)^{\frac{3}{2}} + 10\ (س^{2}-2س-4)^{\frac{1}{2}}\right) + ج$$

٣.١٨ صيفي قديم

جد قيمة

$$\int_{3}^{5} \frac{1}{س^2+2س-3} \sqrt{\frac{س+3}{1-س}}\, د س$$

الحل:

$$ص = \frac{س+3}{1-س}$$

$$س = 3 \leftarrow ص = 3$$

$$س = 5 \leftarrow ص = 2$$

$$د س = \frac{د ص}{\frac{(1)(1-س) - (1)(س+3)}{(1-س)^2}}$$

$$د س = \frac{د ص}{\frac{1-س-س-3}{(1-س)^2}}$$

$$د س = \frac{(1-س)^2 \, د ص}{-4}$$

$$\int_{3}^{2} \frac{1}{س^2+2س-3} \, ص^{-\frac{1}{2}} \times \frac{(1-س)^2 \, د ص}{-4}$$

$$\int_{3}^{2} \frac{1}{(1-س)(س+3)} \, ص^{-\frac{1}{2}} \frac{(1-س)^2}{-4} \, د ص$$

لكن $س+3 = ص(1-س)$ من الفرض

$$\int_{3}^{2} \frac{1}{(1-س)\, ص(1-س)} \, ص^{-\frac{1}{2}} \frac{(1-س)^2}{-4} \, د ص$$

$$-\frac{1}{4} \int_{3}^{2} ص^{-\frac{1}{2}} \, د ص$$

$$-\frac{1}{4} \times 2 \, ص^{\frac{1}{2}} \Big|_{3}^{2}$$

$$-\frac{1}{2} \sqrt{ص} \Big|_{3}^{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

• قانون وفرض

مثال

جد $\int \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{قتا}^5 س}$ دس

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

الحل:

$\int \text{جتا}^2 س \, \text{جا}^5 س$ دس

ص = جا س

دس = $\frac{\text{دص}}{\text{جتا}^2 س \times 2}$

$\int \text{جتا}^2 س \, ص^5 \frac{\text{دص}}{2 \text{جتا}^2 س}$

$= \int \frac{1}{2} ص^5$ دص

$= \frac{1}{2} \frac{ص^6}{6} + ج$

$= \frac{1}{12} (\text{جا} 2س)^6 + ج$

مثال

جد $\int \frac{\text{جاس} \sqrt{\text{جا}^2 س + 4}}{\text{قاس}}$ دس

الحل:

$\int \text{جاس جتاس} (\text{جا}^2 س + 4)^{\frac{1}{2}}$ دس

ص = $\text{جا}^2 س + 4$

دس = $\frac{\text{دص}}{2 \text{جاس جتاس}}$

$\int \text{جاس جتاس} \, ص^{\frac{1}{2}} \frac{\text{دص}}{2 \text{جاس جتاس}}$

$= \int \frac{1}{2} ص^{\frac{1}{2}}$ دص

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} + ج$

$= \frac{1}{3} (\text{جا}^2 س + 4)^{\frac{3}{2}} + ج$

مثال

جد $\int \frac{1 - \text{ظا}^2 س}{\text{جتا}^2 س}$ دس

الحل:

$\int (1 - \text{ظا}^2 س) \, \text{قا}^2 س$ دس

$= \int (\text{قا}^2 س - \text{قا}^2 س \, \text{ظا}^2 س)$ دس

$= \int \text{قا}^2 س$ دس $- \int \text{قا}^2 س \, \text{ظا}^2 س$ دس

ص = ظاس

دس = $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^2 س}$

$= \text{ظاس} - \int \text{قا}^2 س \, ص^2 \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2 س}$

$= \text{ظاس} - \int ص^2$ دص

$= \text{ظاس} - \frac{ص^3}{3} + ج$

$= \text{ظاس} - \frac{\text{ظا}^3 س}{3} + ج$

• متطابقة ثم الفرض

مثال

جد $\int$ جاس $(1+$ جتا٢س$)^{5}$ دس

الحل :

$\int$ جاس $(2$ جتا^{2}س$)^{5}$ دس

$= \int$ جاس $\times 2^{5} \times$ جتا^{10}س دس

$= \int 32$ جاس جتا^{10}س دس

ص = جتاس

دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$\Leftarrow \int 32$ جاس ص^{10} $\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$= \int -32$ ص^{10} دص

$= -32 \frac{\text{ص}^{11}}{11} +$ جـ

$= \frac{-32}{11}$ (جتاس)^{11} + جـ

مثال

جد $\int \frac{\text{جا٢س}}{(1+\text{جتا}^{2}\text{س})^{5}}$ دس

الحل :

$\int$ جا٢س $(1+$ جتا^{2}س$)^{-5}$ دس

$= \int 2$ جاس جتاس $(1+$ جتا^{2}س$)^{-5}$ دس

ص = $1+$ جتا^{2}س

دس = $\frac{\text{دص}}{-2\text{ جتاس جاس}}$

$\Leftarrow \int 2$ جاس جتاس ص$^{-5}$ $\frac{\text{دص}}{-2\text{ جتاس جاس}}$

$= \int -$ ص$^{-5}$ دص

$= -\frac{\text{ص}^{-4}}{-4} +$ جـ

$= \frac{1}{4}(1+$ جتا^{2}س$)^{-4} +$ جـ

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

مثال

جد $\int$ جتا٢س (جاس − جتاس)^{8} دس

الحل :

$\int$ (جتا^{2}س − جا^{2}س) (جاس − جتاس)^{8} دس

$= \int$ (جتاس + جاس) (جتاس − جاس) (جاس − جتاس)^{8} دس

$= \int$ (جتاس + جاس) $\times -$ (جاس − جتاس)^{9} دس

$= \int -$ (جتاس + جاس) (جاس − جتاس)^{9} دس

ص = جاس − جتاس

دس = $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس + جاس}}$

$\Leftarrow \int -$ (~~جتاس + جاس~~) ص^{9} $\frac{\text{دص}}{(\text{~~جتاس + جاس~~})}$

$= \int -$ ص^{9} دص

$= -\frac{\text{ص}^{10}}{10} +$ جـ

$= \frac{-1}{10}$ (جاس − جتاس)^{10} + جـ

مثال

$$\text{جد} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}\,2\text{س}}{\sqrt{1+\text{جتا}^2\text{س}}}\,\text{دس}$$

الحل:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}\,2\text{س}\,(1+\text{جتا}^2\text{س})^{-\frac{1}{2}}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = 1+\text{جتا}^2\text{س} \qquad \text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 2$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-2\,\text{جتاس جاس}} \qquad \text{س} = \frac{\pi}{2} \leftarrow \text{ص} = 1$$

$$\leftarrow \int_{2}^{1} 2\,\cancel{\text{جاس}}\,\text{جتاس}\,\text{ص}^{-\frac{1}{2}}\,\frac{\text{دص}}{-2\,\cancel{\text{جتاس}}\,\text{جاس}}$$

$$= \int_{2}^{1} -\text{ص}^{-\frac{1}{2}}\,\text{دص}$$

$$= -\times 2\,\text{ص}^{\frac{1}{2}}\Big|_{2}^{1}$$

$$= -2\sqrt{\text{ص}}\Big|_{2}^{1}$$

$$= -2\sqrt{1} - -2\sqrt{2}$$

$$= -2 + 2\sqrt{2}$$

مثال

$$\text{جد} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جتاس} - \text{جتا}^3\text{س}}\,\text{دس}$$

الحل:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جتاس}\,(1-\text{جتا}^2\text{س})}\,\text{دس}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جتاس}\,\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جتاس}}\,\sqrt{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}^{\frac{1}{2}}\text{س} \times |\text{جاس}|\,\text{دس}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جاس}\,\text{جتا}^{\frac{1}{2}}\text{س}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{جتاس} \qquad \text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 1$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}} \qquad \text{س} = \frac{\pi}{2} \leftarrow \text{ص} = 0$$

$$= \int_{1}^{0} \text{جاس}\,\text{ص}^{\frac{1}{2}}\,\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$$

$$= \int_{1}^{0} -\text{ص}^{\frac{1}{2}}\,\text{دص}$$

$$= -\frac{2}{3}\,\text{ص}^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{0}$$

$$= 0 - \frac{-2}{3}\sqrt{1^3} = \frac{2}{3}$$

مثال

$$\text{جد} \int \text{جا}\,2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$$

الحل:

$$\int 2\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{جتا}^2\text{س}$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\,\text{جتاس} \times -\text{جاس}}$$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

$\Leftarrow \int 2 جا س جتا س \, دو$ ، $و = جتا س$ ، $دو = \frac{دص}{-جا س}$

$= \int -2 ص \, دص$

$= -ص^2 + جـ$

$= -جتا^2 س + جـ$

٢٠٠٨ شتوي

جد التكامل الآتي

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + جا 2س) جتا^3 س \, دس$

الحل :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (جتا^3 س + جتا^3 س جا 2س) \, دس$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} جتا^3 س \, دس + \int_0^{\frac{\pi}{2}} جتا^3 س \times 2 جا س جتا س \, دس$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} جتا 2س) دس + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} جا س جتا^2 س \, دس$

$= \frac{1}{2} س + \frac{1}{4} جا 2س |_0^{\frac{\pi}{2}}$ ، $ص = جتا س$ ، $دس = \frac{دص}{-جا س}$

$س = 0 \leftarrow ص = 1$

$س = \pi \leftarrow ص = -1$

$= (\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} جا \pi) - (0 + 0) + 2 \int_1^{-1} جا س ص^2 \frac{دص}{-جا س}$

$= \frac{\pi}{4} - 2 \int_1^{-1} ص^2 \, دص$

$= \frac{\pi}{4} - 2 \frac{ص^3}{3} |_1^{-1}$

$= \frac{\pi}{4} - 2 (-\frac{1}{3} - \frac{1}{3})$

$= \frac{\pi}{4} - 2 \times 0 = \frac{\pi}{4}$

٢٠١٣ شتوي

جد التكامل الآتي

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} جا^3 س جتا س \, دس$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

الحل :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 جا س جتا س جتا س \, دس$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 جا س جتا^2 س \, دس$

$ص = جتا س$ ، $س = \frac{\pi}{2} \leftarrow ص = 0$

$دس = \frac{دص}{-جا س}$ ، $س = 0 \leftarrow ص =$ صفر

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 جا س ص^2 \frac{دص}{-جا س}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2 ص^2 \, دص$

$= -\frac{2}{3} ص^3 |_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 0 - (-\frac{2}{3} (\frac{1}{2})^3)$

$= \frac{1}{12}$

٢٠١٦ شتوي

جد التكامل الآتي:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2 س + \frac{1}{2} \text{جا}^2 س \text{ جتا} س}\ د س$$

الحل:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2 س + \frac{1}{2} \times 2 \text{جا} س \text{ جتا} س \text{ جتا} س}\ د س$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2 س + \text{جتا}^2 س \text{ جا} س}\ د س$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2 س (1 + \text{جا} س)}\ د س$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2 س}\ \sqrt{1 + \text{جا} س}\ د س$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} |\text{جتا} س|\ (1 + \text{جا} س)^{\frac{1}{2}}\ د س$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا} س (1 + \text{جا} س)^{\frac{1}{2}}\ د س + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\text{جتا} س (1 + \text{جا} س)\ د س$$

$ص = 1 + \text{جا} س$

$د س = \frac{د ص}{\text{جتا} س}$

$س = \frac{\pi}{4} \leftarrow ص = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$س = \frac{\pi}{2} \leftarrow ص = 2$

$س = \pi \leftarrow ص = 1$

$$\int_{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} \text{جتا} س\ ص^{\frac{1}{2}}\ \frac{د ص}{\text{جتا} س} + \int_{2}^{1} -\text{جتا} س\ ص^{\frac{1}{2}}\ \frac{د ص}{\text{جتا} س}$$

$$\int_{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} ص^{\frac{1}{2}}\ د ص - \int_{2}^{1} ص^{\frac{1}{2}}\ د ص$$

$$\left[\frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}}\right]_{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} - \left[\frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}}\right]_{2}^{1}$$

$$\left[\frac{2}{3} \sqrt{ص^3}\right]_{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} - \left[\frac{2}{3} \sqrt{ص^3}\right]_{2}^{1}$$

$$= \frac{2}{3} (\sqrt{8} - \sqrt{(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})^3}) - \frac{2}{3} (1 - \sqrt{8})$$

٢٠١٨ شتوي قديم

جد قيمة

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{ظا}^2 س\ د س$$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

الحل:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\text{ظا}^2 س)^2\ د س$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\text{قا}^4 س - 1)\ د س$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\text{قا}^4 س - 2 \text{قا}^2 س + 1)\ د س$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\text{قا}^2 س \text{ قا}^2 س - 2 \text{قا}^2 س + 1)\ د س$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} ((1 + \text{ظا}^2 س) \text{قا}^2 س - 2 \text{قا}^2 س + 1)\ د س$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\text{قا}^2 س + \text{قا}^2 س \text{ ظا}^2 س - 2 \text{قا}^2 س + 1)\ د س$$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\text{قا}^2 س \, \text{ظا}^2 س - \text{قا}^2 س + 1) \, د س$

$ص = \text{ظا} س$

$س = 0 \leftarrow ص = 0$

$د س = \frac{د ص}{\text{قا}^2 س}$ $\quad س = \frac{\pi}{4} \leftarrow ص = 1$

$\int_0^1 \text{قا}^2 س \, ص^2 \, \frac{د ص}{\text{قا}^2 س} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2 س + 1 \, د س$

$\int_0^1 ص^2 \, د ص - \left| \frac{\text{ظا}^3 س}{3} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} + 1(\frac{\pi}{4} - 0)$

$\left| \frac{ص^3}{3} \right|_0^1 - (\frac{\text{ظا}^3 \frac{\pi}{4}}{3} - \frac{\text{ظا}^3 0}{3}) + \frac{\pi}{4}$

$(\frac{1}{3} - 0) - (\frac{1}{3} - 0) + \frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}$

$\frac{2-6}{12} + \frac{\pi}{4}$

$= \frac{-4}{12} + \frac{\pi}{4}$

$= -\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}$

٢٠١٨ صيفي جديد

جـ ٤ قيمة

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{جتا}^4 س \, (2 - 2 \, \text{جتا}^2 س) \, د س$

الحل:

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{جتا}^4 س \, (2(1 - \text{جتا}^2 س))$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 16 \, \text{جتا}^4 س \, (\text{جا}^2 س)^4 \, د س$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 16 \times 16 \, \text{جتا}^4 س \, \text{جا}^8 س \, د س$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{جتا}^4 س \, \text{جا}^8 س \, د س$

$ص = \text{جا} س$

$س = 0 \leftarrow ص = 0$

$د س = \frac{د ص}{\text{جتا} س}$ $\quad س = \frac{\pi}{4} \leftarrow ص = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \text{جتا}^4 س \, ص^8 \, \frac{د ص}{\text{جتا} س}$

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \text{جتا}^3 س \, ص^8 \, د ص$

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - \text{جا}^2 س) \, ص^8 \, د ص$

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - ص^2) \, ص^8 \, د ص$

$\left| \frac{ص^9}{9} - \frac{ص^{11}}{11} \right|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$(\frac{1}{\sqrt{2}})^9 - 0$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \times (\frac{1}{\sqrt{2}})^8 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{16\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{9\sqrt{2}} \times \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{9}$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

• متطابقة + قانون + فرض

مثال

جد $\int \frac{\sqrt[3]{\text{ظتاس} + 3}}{2 - 2\,\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

الحل:

$$\int \frac{(\text{ظتاس} + 3)^{\frac{1}{3}}}{2(1 - \text{جتا}^2\text{س})}\,\text{دس}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(\text{ظتاس} + 3)^{\frac{1}{3}}}{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس}$$

$$= \frac{1}{2}\int \text{قتا}^2\text{س}\,(\text{ظتاس} + 3)^{\frac{1}{3}}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{ظتاس} + 3$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{قتا}^2\text{س}}$$

$$\Leftarrow \frac{1}{2}\int \text{قتا}^2\text{س}\,\text{ص}^{\frac{1}{3}}\,\frac{\text{دص}}{-\text{قتا}^2\text{س}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \text{ص}^{\frac{1}{3}}\,\text{دص}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\,\text{ص}^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$$

$$= -\frac{3}{8}\,(\text{ظتاس} + 3)^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$$

٢٠١٦ صيفي

جد $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ظاس}}{\text{جا}\,2\text{س}}\,\text{دس}$

الحل:

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ظاس}$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظاس}}} = \frac{\text{ظاس}\,\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$$

$$\int \frac{\text{ص}}{\text{جا}\,2\text{س}}\,\frac{\text{ظاس}}{\text{قا}^2\text{س}}\,\text{دص}$$

$$\int \frac{\text{ص}}{2\,\text{جاس}\,\text{جتاس}} \times \text{ظاس} \times \text{جتا}^2\text{س}\,\text{دص}$$

$$= \int \frac{\text{ص}}{2\,\cancel{\text{جاس}}\,\cancel{\text{جتاس}}} \times \frac{\cancel{\text{جاس}}}{\cancel{\text{جتاس}}} \times \cancel{\text{جتاس}}\,\cancel{\text{جتاس}}\,\text{دص}$$

$$= \int \frac{1}{2}\,\text{ص}\,\text{دص}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\text{ص}^2}{2} + \text{جـ}$$

$$= \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ظاس})^2}{4} + \text{جـ}$$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

عودة للعرض

مثال

جد $\int$ جتا^{3}س (١+ جاس)^7 دس

الحل:

ص = ١+ جاس

دس = $\frac{دص}{جتاس}$

$\Leftarrow$ $\int$ جتا^{3}س ص^7 $\frac{دص}{جتاس}$

= $\int$ جتا^{2}س ص^7 دص

الآن جاس = ص-١

$\Leftarrow$ $\int$ (١- جا^{2}س) ص^7 دص

= $\int$ (١- (ص-١)^2) ص^7 دص

= $\int$ (١- (ص^2-٢ص+١)) ص^7 دص

= $\int$ (١- ص^2+٢ص-١) ص^7 دص

= $\int$ (- ص^9 + ٢ص^8) دص

= $-\frac{ص^{10}}{10}$ + $\frac{2ص^9}{9}$ + جـ

= $-\frac{1}{10}$ (١+جاس)^{10} + $\frac{2}{9}$ (١+ جاس)^9 + جـ

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

٢٠١٩ شتوي جديد

جد التكامل الآتي

$\int$ جا^{3}س (١+ جتاس)^5 دس

الحل:

ص = ١+ جتاس $\Leftarrow$ جتاس = ص-١

دس = $\frac{دص}{-جاس}$ جتا^{2}س = (ص-١)^2

$\Leftarrow$ $\int$ جا^{3}س ص^5 $\frac{دص}{-جاس}$

= - $\int$ جا^{2}س ص^5 دص

= - $\int$ (١- جتا^{2}س) ص^5 دص

= - $\int$ (١- (ص-١)^2) ص^5 دص

= - $\int$ (١- (ص^2-٢ص+١)) ص^5 دص

= - $\int$ (-ص^2+٢ص) ص^5 دص

= - $\int$ (-ص^7 + ٢ص^6) دص

= $\int$ ص^7 - ٢ص^6 دص

= $\frac{ص^8}{8}$ - $\frac{2ص^7}{7}$ + جـ

= $\frac{(1+جتاس)^8}{8}$ - $\frac{2}{7}$ $(1+جتاس)^7$ + جـ

رياضيات (العلمي) الوحدة (التكامل وتطبيقاته) عصام محمد الشيخ

الفصل (الثاني) العنوان (التكامل بالتعويض) ماجستير رياضيات

٢٠١٤ شتوي

جد

$$\int \frac{1}{1+e^{3x}}\,dx$$

الحل:

$$\int \frac{1}{1+e^{3x}} \times \frac{e^{-3x}}{e^{-3x}}\,dx$$

$$= \int \frac{e^{-3x}}{e^{-3x}+1}\,dx$$

$$u = e^{-3x}+1$$

$$du = \frac{du}{-e^{-3x}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{e^{-3x}}{u} \cdot \frac{du}{-e^{-3x}}$$

$$= -\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= -\ln|u| + c$$

$$= -\ln|e^{-3x}+1| + c$$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{-3x}+e^{3x}} \times \frac{e^{3x}}{e^{3x}}\,dx$$

$$= \int \frac{e^{6x}}{e^{3x}+1}\,dx$$

$$u = e^{3x}+1$$

$$du = \frac{du}{3e^{3x}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{e^{3x}}{u} \cdot \frac{du}{3e^{3x}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{3}\ln|e^{3x}+1| + c$$

٢٠١٤ صيفي

جد

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{-3x}+e^{3x}}\,dx$$

الحل:

• توحيد الاسس

مثال

جد $\int \frac{(٢س+١)^{٥}}{س^{٧}}$ دس

الحل:

$\int \frac{(٢س+١)^{٥}}{س^{٢}\, س^{٥}}$ دس

$= \int \frac{١}{س^{٢}} \left(\frac{٢س+١}{س}\right)^{٥}$ دس

$= \int \frac{١}{س^{٢}} \left(\frac{٢س}{س} + \frac{١}{س}\right)^{٥}$ دس

$= \int \frac{١}{س^{٢}} \left(٢ + \frac{١}{س}\right)^{٥}$ دس

$ص = ٢ + \frac{١}{س}$

$دس = \frac{دص}{\frac{-١}{س^{٢}}} = -س^{٢}$ دص

$\Leftarrow \int \frac{١}{س^{٢}}\, ص^{٥} \times -س^{٢}$ دص

$= \int -ص^{٥}$ دص

$= -\frac{ص^{٦}}{٦} + جـ$

$= -\frac{١}{٦}\left(٢ + \frac{١}{س}\right)^{٦} + جـ$

مثال

جد $\int \frac{(س+١)^{٩}}{س^{١١}}$ دس

الحل:

$\int \frac{(س+١)^{٩}}{س^{٢}\, س^{٩}}$ دس

$= \int \frac{١}{س^{٢}} \left(\frac{س+١}{س}\right)^{٩}$ دس

$= \int \frac{١}{س^{٢}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٩}$ دس

$ص = ١ + \frac{١}{س}$

$دس = \frac{دص}{\frac{-١}{س^{٢}}} = -س^{٢}$ دص

$\Leftarrow \int \frac{١}{س^{٢}}\, ص^{٩} \times -س^{٢}$ دص

$= \int -ص^{٩}$ دص

$= -\frac{ص^{١٠}}{١٠} + جـ$

$= \frac{-١}{١٠}\left(١ + \frac{١}{س}\right)^{١٠} + جـ$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

مثال

جد $\int_{١}^{٢} \frac{(س+١)^{٥}}{س^{٧}}$ دس

الحل:

$\int_{١}^{٢} \frac{(س+١)^{٥}}{س^{٢}\, س^{٥}}$ دس

$= \int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٢}} \left(\frac{س+١}{س}\right)^{٥}$ دس

$= \int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٢}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٥}$ دس

$ص = 1 + \frac{1}{س}$

$دس = \frac{دص}{-\frac{1}{ص^2}} = -ص^2\ دص$

$س = 1 \leftarrow ص = 2$
$س = 2 \leftarrow ص = \frac{3}{2}$

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{س^2} \cdot س^5\ دس$$

$$= \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{1}{ص^2} \cdot ص^5 \times -ص^2\ دص$$

$$= \int_{\frac{3}{2}}^{2} -ص^5\ دص$$

$$= \left| -\frac{ص^6}{6} \right|_{\frac{3}{2}}^{2}$$

$$= -\frac{(2)^6}{6} - -\frac{(\frac{3}{2})^6}{6}$$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

مثال

أثبت أن $\int_{0}^{1} \frac{(س-1)^ن}{س^{ن+2}}\ دس$

$$= \begin{cases} \frac{-1}{ن+1} & ، ن \text{ عدد فردي} \\ \frac{1}{ن+1} & ، ن \text{ عدد زوجي} \end{cases}$$

الحل:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(س-1)^ن}{س^2 \cdot س^ن}\ دس$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{س^2} \left(\frac{س-1}{س}\right)^ن\ دس$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{س^2} \left(1 - \frac{1}{س}\right)^ن\ دس$$

$ص = 1 - \frac{1}{س}$

$دص = \frac{دص}{\frac{1}{س^2}} = س^2\ دص$

$س = 1 \leftarrow ص = 0$
$س = \frac{1}{2} \leftarrow ص = -1$

$$\Leftarrow \int_{0}^{-1} \frac{1}{س^2} \cdot ص^ن \times س^2\ دص$$

$$= \int_{0}^{-1} ص^ن\ دص$$

$$= \left| \frac{ص^{ن+1}}{ن+1} \right|_{0}^{-1}$$

$$= \frac{(-1)^{ن+1}}{ن+1} - 0$$

$$= \frac{-(-1)^{ن+1}}{ن+1}$$

$$= \begin{cases} \frac{-1}{ن+1} & ، ن \text{ عدد فردي} \\ \frac{1}{ن+1} & ، ن \text{ عدد زوجي} \end{cases}$$

٣.١٢ شتوي

جد التكامل الآتي:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1+س)^5}{س^7}\ دس$$

الحل:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{س^2} \frac{(1+س)^5}{س^5} \, دس$$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{س^2} \left(\frac{1}{س} + 1\right)^5 دس$$

$$ص = \frac{1}{س} + 1$$

$$دس = \frac{دص}{\frac{-1}{س^2}} = -س^2 \, دص$$

$$س = 1 \Leftarrow ص = 2$$

$$س = \frac{1}{2} \Leftarrow ص = 2 + 1 = 3$$

$$\int_{3}^{2} \frac{1}{س^2} ص^5 \times -س^2 \, دص$$

$$\int_{3}^{2} -ص^5 \, دص$$

$$\left. \frac{-ص^6}{6} \right|_{3}^{2}$$

$$= -\frac{1}{6} \left(2^6 - 3^6\right)$$

• عودة للزمن

مثال

جد $\int \frac{س^3}{(س+1)^5}$ دس

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

الحل:

$\int س^3 (س+1)^{-5}$ دس

ص = س + 1 ⇐ س = ص - 1

دس = دص

⇐ $\int س^3 (ص)^{-5}$ دص

⇐ $\int (ص-1)^3 ص^{-5}$ دص

= $\int (ص^3 - 3ص^2 + 3ص - 1) ص^{-5}$ دص

= $\int ص^{-2} - 3ص^{-3} + 3ص^{-4} - ص^{-5}$ دص

= $\frac{ص^{-1}}{-1} - \frac{3ص^{-2}}{-2} + \frac{3ص^{-3}}{-3} - \frac{ص^{-4}}{-4}$ + جـ

= $\frac{-1}{ص} + \frac{3}{2ص^2} - \frac{1}{ص^3} + \frac{1}{4ص^4}$ + جـ

= $\frac{-1}{1+س} + \frac{3}{2(1+س)^2} - \frac{1}{(1+س)^3} + \frac{1}{4(1+س)^4}$ + جـ

توقيع مرشد

٢٠١٩ شتوي قديم :

جد التكامل الآتي :

$$\int \frac{(\sqrt{3س} + ٢)^{٥}}{س^{٤}} \, دس$$

الحل :

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

$ص = \sqrt{3س}$

$ص^{٢} = 3س$

$٢ص \, دص = 3 \, دس$

$$\int \frac{(ص + ٢)^{٥}}{(ص^{٢})^{٤}} \times ٢ص \, دص$$

$$٢ \int \frac{(ص + ٢)^{٥}}{ص^{٧}} \, دص$$

$$٢ \int \frac{1}{ص^{٢}} \left(\frac{ص + ٢}{ص}\right)^{٥} دص$$

$$٢ \int \frac{1}{ص^{٢}} \left(1 + \frac{٢}{ص}\right)^{٥} دص$$

$ع = 1 + \frac{٢}{ص}$

$$دص = \frac{دع}{-\frac{٢}{ص^{٢}}} = -\frac{ص^{٢}}{٢} \, دع$$

$$٢ \int \frac{1}{ص^{٢}} \, ع^{٥} \times -\frac{ص^{٢}}{٢} \, دع$$

$$- \int ع^{٥} \, دع$$

$$= -\frac{ع^{٦}}{٦} + ج$$

$$= -\frac{\left(1 + \frac{٢}{ص}\right)^{٦}}{٦} + ج$$

$$= -\frac{\left(1 + \frac{٢}{\sqrt{3س}}\right)^{٦}}{٦} + ج$$

مثال

إذا كان $\int_{1}^{8} \text{ق(س)}\ \text{دس} = 18$ ، فجد قيمة

$$\int_{1}^{2} \text{س}^2\ \text{ق}(\text{س}^3)\ \text{دس}$$

الحل:

$\text{ص} = \text{س}^3$ ، $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

$\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 1$ ، $\text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = 8$

$$\int_{1}^{8} \cancel{\text{س}^2}\ \text{ق(ص)}\ \frac{\text{دص}}{3\cancel{\text{س}^2}}$$

$$\frac{1}{3}\int_{1}^{8} \text{ق(ص)}\ \text{دص}$$

$$= \frac{1}{3} \times 18 = \frac{18}{3} = 6$$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

مثال

إذا كان $\int_{0}^{1} \text{ق(س)}\ \text{دس} = 8$

فجد قيمة

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 3\ \text{جتا}2\text{س}\ \text{ق}(\text{جا}2\text{س})\ \text{دس}$$

الحل:

$\text{ص} = \text{جا}2\text{س}$ ، $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتا}2\text{س} \times 2}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 0$ ، $\text{س} = \frac{\pi}{4} \leftarrow \text{ص} = 1$

$$\Leftarrow \int_{0}^{1} 3\ \cancel{\text{جتا}2\text{س}}\ \text{ق(ص)}\ \frac{\text{دص}}{2\cancel{\text{جتا}2\text{س}}}$$

$$= \frac{3}{2}\int_{0}^{1} \text{ق(ص)}\ \text{دص}$$

$$= \frac{3}{2} \times 8 = 3 \times 4 = 12$$

٢٠١٢ شتوي

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل على الفترة [١، ٢] وكان ق(١) = ١ ، ق(٢) = ٤ فإن قيمة

$$\int_{1}^{2} 3\ \text{قَ(س)}\ \sqrt{\text{ق(س)}}\ \text{دس} =$$

أ) $\boxed{14}$ ب) $\frac{63}{2}$ ج) ٧ د) $\frac{14}{3}$

الحل:

$\text{ص} = \sqrt{\text{ق(س)}}$

$\text{ص}^2 = \text{ق(س)}$ ، $\text{س} = 1 \leftarrow$

$2\text{ص}\ \text{دص} = \text{قَ(س)}\ \text{دس}$

$\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = \text{ق}(1) = \sqrt{1} = 1$

$\text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = \text{ق}(2) = \sqrt{4} = 2$

$$\Leftarrow \int_{1}^{2} 3\ \cancel{\text{قَ(س)}}\ \text{ص}\ \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قَ(س)}}} \times 2\text{ص}$$

$$\int_{1}^{2} 6\ \text{ص}^2\ \text{دص}$$

$$2\text{ص}^3 \Big|_{1}^{2} = 2 \times 8 - 2 \times 1$$

$$= 16 - 2 = 14$$

٢٠١٢ صيفي

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً ، م(س) اقتراناً بدائياً للاقتران ق(س) وكان أ ، جـ ثابتين أ ≠ صفر فإن

$\int \text{ق(أس)}\ \text{دس} =$

أ) م(أس) + جـ ب) $\boxed{\frac{1}{\text{أ}}\ \text{م(أس)} + \text{جـ}}$

ج) م(س) + جـ د) $\frac{1}{\text{أ}}$ م(س) + جـ

الحل:

$$\int \text{ق}(\text{أس})\,\text{دس} = \frac{\text{م}(\text{أس})}{\text{أ}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{\text{أ}}\,\text{م}(\text{أس}) + \text{جـ}$$

٢٠١٦ شتوي

إذا كان

$$\int_{-1}^{2} (3\,\text{ق}(\text{س}) + 2\text{س} - 4)\,\text{دس} = 3$$

$$\int_{3}^{1} (\text{ق}(\text{س}+1) - 3\text{س}^2)\,\text{دس} = 27$$

فجد $\int_{-1}^{4} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

الحل:

نجهز المعطيات

$$3\int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \text{س}^2\Big|_{-1}^{2} - 4(2 - -1) = 3$$

$$3\int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + (4-1) - 4 \times 3 = 3$$

$$3\int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 3 - 3 + 12$$

$$3\int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 12$$

$$\int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 4$$

كذلك $\int_{3}^{1} (\text{ق}(\text{س}+1) - 3\text{س}^2)\,\text{دس} = 27$

$\text{ص} = \text{س}+1$ $\quad$ $\text{س} = 3 \leftarrow \text{ص} = 4$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{1}$ $\quad$ $\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 2$

$$\int_{4}^{2} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} - \text{س}^3\Big|_{3}^{1} = 27$$

$$\int_{4}^{2} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} - (1 - 27) = 27$$

$$\int_{4}^{2} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} + 26 = 27$$

$$\Leftarrow \int_{4}^{2} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = 1$$

الآن المطلوب:

$$\int_{-1}^{4} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$= \int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{2}^{4} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$= 4 + -1$$

$$= 3$$

٢٠١٦ صيفي

إذا كان

$$\int_{0}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 4$$

$$\int_{0}^{3} (\text{أ}\,\text{ق}(3-\text{س}) + 6\text{س} + 1)\,\text{دس} = 42$$

فجد قيمة الثابت أ .

الحل:

$$\text{أ}\int_{0}^{3} \text{ق}(3-\text{س})\,\text{دس} + \int_{0}^{3} 6\text{س}\,\text{دس} + \int_{0}^{3} 1\,\text{دس} = 42$$

ص = ٣ - س

س = ٠ ← ص = ٣

س = ٣ ← ص = ٠

د س = $\frac{\text{د ص}}{-١}$

$$\int_{٣}^{٠} \text{م}(\text{ص}) \times -\text{د ص} + ٣س^{٢} \Big|_{٠}^{٣} + ١(٣-٠) = ٤٢$$

$$-\int_{٣}^{٠} \text{م}(\text{ص})\,\text{د ص} + (٢٧-٠) + ٣ = ٤٢$$

$$-\text{م} \times -٤ + ٣٠ = ٤٢$$

٤ م = ١٢

م = ٣ ⇐

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

• فردي / زوجي / مخلوطه جاء حتا

مثال

جد $\int$ جا^{٣} ٢س جتا^{٥} ٢س دس

الحل:

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

ص = جتا ٢س

دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{جا ٢س} \times ٢}$

$\int$ جا^{٣} ٢س ص^{٥} $\frac{\text{دص}}{-٢\text{ جا ٢س}}$

= $\int -\frac{١}{٢}$ جا^{٢} ٢س ص^{٥} دص

= $\int -\frac{١}{٢}$ (١ − جتا^{٢} ٢س) ص^{٥} دص

= $\int -\frac{١}{٢}$ (١ − ص^{٢}) ص^{٥} دص

= $\int -\frac{١}{٢}$ ص^{٥} + $\frac{١}{٢}$ ص^{٧} دص

= $-\frac{١}{٢}$ $\frac{\text{ص}^{٦}}{٦}$ + $\frac{١}{٢}$ $\frac{\text{ص}^{٨}}{٨}$ + جـ

= $-\frac{١}{١٢}$ (جتا ٢س)^{٦} + $\frac{١}{١٦}$ (جتا ٢س)^{٨} + جـ

مثال

جد $\int$ جتا^{٢} س جا^{٤} س دس

الحل:

$\int$ جتا^{٢} س جا^{٢} س جا^{٢} س دس

= $\int$ (جتا س جا س)^{٢} جا^{٢} س دس

= $\int$ ($\frac{١}{٢}$ جا ٢س)^{٢} ($\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س) دس

= $\int$ $\frac{١}{٤}$ جا^{٢} ٢س ($\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا س) دس

$= \int (\frac{1}{8} جا^2 س - \frac{1}{8} جا^2 س جتا^2 س) دس$

$= \frac{1}{8} \int جا^2 س \, دس - \frac{1}{8} \int جتا^2 س جا^2 س \, دس$

$= \frac{1}{8} \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} جتا 4س) دس - \frac{1}{8} \int جتا^2 س جا^2 س \, دس$

ص = جا 2س

$دس = \frac{دص}{جتا 2س \times 2}$

$= \frac{1}{16} \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} جتا 4س) دس - \frac{1}{8} \int جتا^2 س \, ص^2 \frac{دص}{2 جتا 2س}$

$= \frac{1}{16} س - \frac{1}{16} \frac{جا 4س}{4} - \frac{1}{16} \int ص^2 \, دص$

$= \frac{س}{16} - \frac{جا 4س}{64} - \frac{1}{16} \frac{ص^3}{3} + ج$

$= \frac{س}{16} - \frac{جا 4س}{64} - \frac{(جا 2س)^3}{48} + ج$

مثال

جد $\int جا^4 س \, جتا^3 س \, دس$

الحل:

ص = جا س

$دس = \frac{دص}{جتا س}$

$\Leftarrow \int ص^4 \, جتا^2 س \frac{دص}{جتا س}$

$= \int جتا^2 س \, ص^4 \, دص$

$= \int (1 - جا^2 س) ص^4 \, دص$

$= \int (1 - ص^2) ص^4 \, دص$

$= \int ص^4 - ص^6 \, دص$

$= \frac{ص^5}{5} - \frac{ص^7}{7} + ج$

$= \frac{جا^5 س}{5} - \frac{جا^7 س}{7} + ج$

مثال

جد $\int جا^4 س \, جتا^3 س \, دس$

الحل:

ص = جا س

$دس = \frac{دص}{جتا^3 س}$

$\Leftarrow \int ص^4 \, جتا^3 س \frac{دص}{جتا^3 س}$

$= \int جتا^2 س \, ص^4 \, دص$

$= \int (1 - جا^2 س) ص^4 \, دص$

$= \int (1 - ص^2) ص^4 \, دص$

$= \int ص^4 - ص^6 \, دص$

$= \frac{ص^5}{5} - \frac{ص^7}{7} + ج$

$= \frac{جا^5 س}{5} - \frac{جا^7 س}{7} + ج$

مثال

جد $\int جا^4 س \, جتا^3 س \, دس$

الحل:

ص = جا س

$دس = \frac{دص}{جتا 5س}$

$\Leftarrow \int ص^4 \, جتا^3 5س \frac{دص}{جتا 5س}$

$= \int جتا^2 5س \, ص^4 \, دص$

$= \int (1 - جا^2 5س) ص^4 \, دص$

$= \int (1 - ص^2) ص^4 \, دص$

$= \int ص^4 - ص^6 \, دص$

$= \frac{ص^5}{5} - \frac{ص^7}{7} + ج$

$= \frac{جا^5 5س}{5} - \frac{جا^7 5س}{7} + ج$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

مثال

جد $\int$ ظا^{5} ٣س قا^{4} ٣س دس

الحل:

ص = ظا ٣س

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

دس = $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{4}\text{٣س} \times 3}$

$\Leftarrow$ $\int$ ص^{5} قا^{4} ٣س $\times \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{4}\text{٣س} \times 3}$

$= \int \frac{1}{3}$ ص^{5} دص

$= \frac{1}{3} \frac{\text{ص}^{6}}{6} +$ ج

$= \frac{1}{18}$ ظا^{6} ٣س + ج

مثال

جد $\int$ قتا^{4} ٦س ظتا^{3} ٦س دس

الحل:

ص = ظتا ٦س

دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{قتا}^{2}\text{٦س} \times 6}$

$\Leftarrow$ $\int$ قتا^{4} ٦س ص^{3} $\frac{\text{دص}}{-6\ \text{قتا}^{2}\text{٦س}}$

$= -\frac{1}{6} \int$ قتا^{2} ٦س ص^{3} دص

$= -\frac{1}{6} \int$ (١ + ظتا^{2} ٦س) ص^{3} دص

$= -\frac{1}{6} \int$ (١ + ص^{2}) ص^{3} دص

$= -\frac{1}{6} \int$ ص^{3} - ص^{5} دص

$= -\frac{1}{6} ص^4 - \frac{1}{7} ص^7 + ج$

$= -\frac{1}{24} ظتا^4 ٣س - \frac{1}{36} ظتا^6 ٣س + ج$

٢٠١٣ صيفي

جد التكامل الآتي

$\int قا^4 ٣س \, ظا^3 ٣س \, دس$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

الحل:

$ص = ظا ٣س$

$دس = \frac{دص}{قا^2 ٣س \times ٣}$

$\int قا^4 ٣س \, ص^3 \frac{دص}{قا^2 ٣س \times ٣}$

$= \frac{1}{3} \int قا^2 ٣س \, ص^3 \, دص$

$= \frac{1}{3} \int (١ + ظا^2 ٣س) ص^3 \, دص$

$= \frac{1}{3} \int (١ + ص^2) ص^3 \, دص$

$= \frac{1}{3} \int (ص^3 + ص^5) \, دص$

$= \frac{1}{3} (\frac{ص^4}{4} + \frac{ص^6}{6}) + ج$

$= \frac{1}{12} (ظا ٣س)^4 + \frac{1}{18} (ظا ٣س)^6 + ج$

- $\int$ جاس دس = − جتاس + جـ

- $\int$ جا^{٢}س دس

= $\int$ ($\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا٢س) دس

= $\frac{١}{٢}$س − $\frac{١}{٢}$ $\frac{\text{جا٢س}}{٢}$ + جـ

= $\frac{١}{٢}$س − $\frac{١}{٤}$ جا٢س + جـ

- $\int$ جا^{٣}س دس

= $\int$ جاس جا^{٢}س دس

= $\int$ جاس (١ − جتا^{٢}س) دس

= $\int$ جاس − جاس جتا^{٢}س دس

ص = جتاس

دس = $\frac{\text{دص}}{\text{−جاس}}$

= $\int$ جاس دس − $\int$ جاس ص^{٢} $\frac{\text{دص}}{\text{−جاس}}$

= − جتاس + $\int$ ص^{٢} دص

= − جتاس + $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ + جـ

= − جتاس + $\frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣}$ + جـ

- $\int$ جا^{٤}س دس

= $\int$ (جا^{٢}س)^{٢} دس

= $\int$ ($\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا٢س)^{٢} دس

= $\int$ ($\frac{١}{٤}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا٢س + $\frac{١}{٤}$ جتا^{٢}٢س) دس

= $\frac{١}{٤}$س − $\frac{١}{٤}$ جا٢س + $\frac{١}{٤}$ $\int$ $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جتا٤س دس

= $\frac{١}{٤}$س − $\frac{١}{٤}$ جا٢س + $\frac{١}{٨}$س + $\frac{١}{٨}$ $\frac{\text{جا٤س}}{٤}$ + جـ

= $\frac{\text{س}}{٤}$ − $\frac{\text{جا٢س}}{٤}$ + $\frac{\text{س}}{٨}$ + $\frac{\text{جا٤س}}{٣٢}$ + جـ

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625

- $\int جتا^n س \, دس = جا س + ج$

- $\int جتا^2 س \, دس$

$= \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} جتا 2س) \, دس$

$= \frac{1}{2} س + \frac{1}{4} جا 2س + ج$

- $\int جتا^3 س \, دس$

$= \int جتا س \, جتا^2 س \, دس$

$= \int جتا س (1 - جا^2 س) \, دس$

$= \int جتا س - جتا س جا^2 س \, دس$

$ص = جا س$

$دس = \frac{دص}{جتا س}$

$= \int جتا س \, دس - \int جتا س \, ص^2 \frac{دص}{جتا س}$

$= جا س - \int ص^2 \, دص$

$= جا س - \frac{ص^3}{3} + ج$

$= جا س - \frac{جا^3 س}{3} + ج$

- $\int جتا^4 س \, دس$

$= \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} جتا 2س)^2 \, دس$

$= \int (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} جتا 2س + \frac{1}{4} جتا^2 2س) \, دس$

$= \frac{3}{8} س + \frac{جا 2س}{4} + \frac{1}{4} \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} جتا 4س) \, دس$

$= \frac{3}{8} س + \frac{جا 2س}{4} + \frac{1}{8} س + \frac{جا 4س}{32} + ج$

$= \frac{3}{8} س + \frac{جا 2س}{4} + \frac{جا 4س}{32} + ج$

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات
0796300625