تطبيقات القيم القصوى

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

رياضيات (العلمي) الوحدة (تطبيقات التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (تطبيقات القيم القصوى) ماجستير رياضيات

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

مثال

مصنع للاجهزة الكهربائية ينتج س جهازاً سنوياً ويبيع كل جهاز بسعر (٢٠٠ - ٠٫٠١ س) دينار فإذا كان تكلفة انتاج هذه الأجهزة (٥٠ س + ٢٠) دينار فكم جهازاً ينتج المصنع لتحقيق أكبر ربح ممكن سنوياً

الحل :

الربح = الايراد - الكلفة

الايراد = سعر القطعة × عدد القطع المباعة

ر(س) = د(س) - ك(س)

= (٢٠٠ - ٠٫٠١ س) س - (٥٠ س + ٢٠)

ر(س) = ٢٠٠ س - ٠٫٠١ س^2 - ٥٠ س - ٢٠

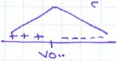
ر(س) = - ٠٫٠١ س^2 + ١٥٠ س - ٢٠

ر'(س) = - ٠٫٠٢ س + ١٥٠

٠ = - ٠٫٠٢ س + ١٥٠

- ١٥٠ = $\frac{-٢}{١٠٠}$ س

س = $\frac{١٥٠ \times ١٠٠}{٢}$ = ١٥٠ × ٥٠ = ٧٥٠٠



عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

مثال

مجموع عدد مع مثلي عدد آخر يساوي ٤٠ ، جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحل:

$ل = س \times ص$ ‏ ‏ ‏ ‏ $٢س + ص = ٤٠$

$ص = ٤٠ - ٢س$

$ل = س\,(٤٠ - ٢س)$

$ل = ٤٠س - ٢س^{٢}$

$ل' = ٤٠ - ٤س$

$٠ = ٤٠ - ٤س$

$٤س = ٤٠$

$س = ١٠$

$ص = ٤٠ - ٢٠ = ٢٠$

مثال

جد العدد الذي ينتمي للفترة $[\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢}]$ الذي يجعل ناتج جمع العدد ومقلوبه أقل ما يمكن .

الحل:

$ل = س + \frac{١}{س}$

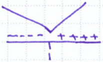
$ل' = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$

$٠ = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$

$\frac{١}{س^{٢}} = ١$

$س^{٢} = ١$

$س = ١$



مثال

جد النقطة الواقعة في الربع الأول على منحنى $ق(س) = \sqrt{س^2 - 4}$ التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة $(6 ، 0)$

الحل:

$(س ، ص)$ —— $(6 ، 0)$

$ف = \sqrt{(س-6)^2 + ص^2}$

$ف = \sqrt{(س-6)^2 + س^2 - 4}$

$ف = \sqrt{س^2 - 12س + 36 + س^2 - 4}$

$ف = \sqrt{2س^2 - 12س + 32}$

$ف' = \dfrac{4س - 12}{2\sqrt{2س^2 - 12س + 32}}$

$0 = 4س - 12$

$\Leftarrow 12 = 4س$

$س = 3$

--- +++
3

$ص = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$

$\Leftarrow$ النقطة هي $(3 ، \sqrt{5})$

مثال

جد احداثيي النقطة م $(س ، ص)$ الواقعة على منحنى العلاقة $ص = س^2$ التي بعدها عن النقطة $(18 ، 0)$ أقل ما يمكن.

الحل:

$(س ، ص)$ —— $(18 ، 0)$

$ف = \sqrt{(س-18)^2 + ص^2}$

$ف = \sqrt{(س-18)^2 + س^4}$

$ف' = \dfrac{2(س-18) + 4س^3}{2\sqrt{(س-18)^2 + س^4}}$

$0 = 2س - 36 + 4س^3$

$0 = 2س^3 + س - 18$

$\Leftarrow س = 2$ صفر للاقتران

$\Leftarrow$ التحليل بعد القسمة.

$0 = (س-2)(2س^2 + 4س + 9)$

$\Leftarrow س = 2$

--- +++
2

$ص = (2)^2 = 4$

$\Leftarrow$ النقطة $(2 ، 4)$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

٢٠١٨ صيفي قديم

طريق منحنى يمثل في المستوى الاحداثي بالاقتران $ق(س) = \sqrt{س^2 - 1}$ ، والنقطة $(4 ، 0)$ تمثل موقع مستشفى. جد احداثيي النقطة م $(س ، ص)$ الواقعة على الطريق التي يمكن أن يبنى فيها صيدلية لتكون أقرب ما يمكن إلى المستشفى

الحل:

$ص = \sqrt{س^2 - 1}$

$ص^2 = س^2 - 1$

$ف = \sqrt{(س-4)^2 + ص^2}$

$ف = \sqrt{(س-4)^2 + س^2 - 1}$

$ف' = \dfrac{2(س-4) + 2س}{2\sqrt{(س-4)^2 + س^2 - 1}} = صفر$

$0 = 2س - 8 + 2س$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

$0 = 4\text{س} - 8$

$8 = 4\text{س}$

$\text{س} = 2$

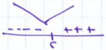
$\text{ف}'$ غير موجودة $\Leftarrow (\text{س}-4)^2 + \text{س}^2 - 1 = 0$

$\text{س}^2 - 8\text{س} + 16 + \text{س}^2 - 1 = 0$

$2\text{س}^2 - 8\text{س} + 15 = 0$

لا تحلل

$\Leftarrow \text{س} = 2$



اقرب مسافة ممكنة عند $\text{س} = 2$

$\Leftarrow$ النقطة $(2 ، \sqrt{3})$

٢٠١٨ صيفي جديد

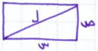
طريق منحني يمثل في المستوى الاحداثي بالاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{2\text{س} - 1}$ والنقطة $(3 ، 0)$ تمثل موقع مستشفى. اجد احداثيي النقطة م (س، ص) الواقعة على الطريق التي يمكن أن يبنى فيها صيدلية وتكون أقرب ما يمكن إلى المستشفى.

الحل:

٢٠٠٩ صيفي

مستطيل مساحته ١٦ سم^2 ، جد بعديه عندما يكون طول قطره أصغر ما يمكن

الحل :



$\text{ل}^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2$

$\text{م} = \text{س} \times \text{ص}$

$١٦ = \text{س} \times \text{ص}$

$\text{ص} = \frac{١٦}{\text{س}}$

$\Leftarrow \text{ل}^2 = \text{س}^2 + \frac{(١٦)^2}{\text{س}^2}$

$\text{ل}^2 = \text{س}^2 + \frac{٢٥٦}{\text{س}^2}$

$\text{ل} = \sqrt{\text{س}^2 + \frac{٢٥٦}{\text{س}^2}}$

$\frac{\text{دل}}{\text{دس}} = \frac{٢\text{س} - \frac{٢٥٦ \times ٢\text{س}}{\text{س}^4}}{٢\sqrt{\text{س}^2 + \frac{٢٥٦}{\text{س}^2}}}$

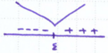
$٠ = \frac{\text{س} - \frac{٢٥٦}{\text{س}^3}}{\sqrt{\text{س}^2 + \frac{٢٥٦}{\text{س}^2}}}$

$٠ = \text{س} - \frac{٢٥٦}{\text{س}^3}$

$\frac{٢٥٦}{\text{س}^3} = \text{س}$

$\text{س}^4 = ٢٥٦$

$\Leftarrow \text{س} = ٤$

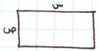


$\Leftarrow \text{ص} = \frac{١٦}{٤} = ٤$

مثال

قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٨٠٠ م جد بعدي قطعة الأرض لتكون مساحتها أكبر ما يمكن.

الحل:



م = س × ص

٢س + ٢ص = ٨٠٠

س + ص = ٤٠٠

ص = ٤٠٠ − س

م = س (٤٠٠ − س)

م = ٤٠٠س − س^٢

م' = ٤٠٠ − ٢س

٠ = ٤٠٠ − ٢س

٢س = ٤٠٠

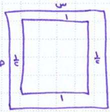
س = ٢٠٠

⇐ ص = ٤٠٠ − ٢٠٠ = ٢٠٠

مثال

صفيحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ١٢٨ سم^٢ يراد طباعة اعلان عليها، إذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١ سم وفي كل من الجانبين ½ سم فجد بعدي الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة أكبر مايمكن.

الحل:



س × ص = ١٢٨

ص = $\frac{١٢٨}{س}$

المساحة المطبوعة = (س − ١) (ص − ٢)

م = (س − ١) ($\frac{١٢٨}{س}$ − ٢)

م = ١٢٨ − ٢س − $\frac{١٢٨}{س}$ + ٢

م' = −٢ + $\frac{١٢٨}{س^٢}$

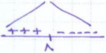
٠ = −٢ + $\frac{١٢٨}{س^٢}$

٢ = $\frac{١٢٨}{س^٢}$

٢س^٢ = ١٢٨

س^٢ = ٦٤

س = ٨

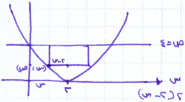


ص = $\frac{١٢٨}{٨}$ = ١٦

مثال

يقع المستطيل أ ب جـ د في المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س^٢ − ٤س + ٤ والمستقيم ص = ٤ بحيث يقع رأساه أ، ب على منحنى ق ورأساه الآخران جـ، د على المستقيم ص = ٤ جد بعدي المستطيل أ ب جـ د لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

الحل:



الطول = ٢(٢ − س)

العرض = ٤ − ص

المساحة = الطول × العرض

$= ٢(٢ - س) \times (٤ - ص)$

$= (٤ - ٢س)(\cancel{٤} - س^٢ + ٤س - \cancel{٤})$

$= (٤ - ٢س)(- س^٢ + ٤س)$

$= - ٤س^٢ + ١٦س + ٢س^٣ - ٨س^٢$

$م = ٢س^٣ - ١٢س^٢ + ١٦س$

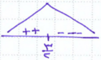
$م' = ٦س^٢ - ٢٤س + ١٦$

$٠ = ٦س^٢ - ٢٤س + ١٦$

$٠ = ٣س^٢ - ١٢س + ٨$

$٠ = (٣س - ٢)(س - ٤)$

$س = \frac{٢}{٣}$ ، $س = ٤$ مرفوضه



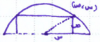
$\Leftarrow س = \frac{٢}{٣}$

$ص = (\frac{٢}{٣})^٢ - ٤ \times \frac{٢}{٣} + ٤$

مثال

جد أكبر مساحة ممكنة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ٤ سم بحيث تنطبق قاعدته على قطر الدائرة ورأساه الآخران على الدائرة

الحل :



م = الطول × العرض

$= ٢س \times ص$

$م = ٢\sqrt{١٦ - ص^٢} \times ص$

$٤^٢ = س^٢ + ص^٢$

$س^٢ = ١٦ - ص^٢$

$س = \sqrt{١٦ - ص^٢}$

$م' = ٢\sqrt{١٦ - ص^٢} \times ١ + ص \times \frac{\cancel{٢} \times -٢ص}{\cancel{٢}\sqrt{١٦ - ص^٢}}$

$٠ = ٢\sqrt{١٦ - ص^٢} - \frac{٢ص^٢}{\sqrt{١٦ - ص^٢}}$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

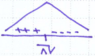
$\frac{\cancel{٢}ص^٢}{\sqrt{١٦ - ص^٢}} = \cancel{٢}\sqrt{١٦ - ص^٢}$

$ص^٢ = ١٦ - ص^٢$

$٢ص^٢ = ١٦$

$ص^٢ = ٨$

$ص = \sqrt{٨}$



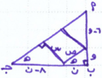
$م = ٢\sqrt{٨}\sqrt{٨} = ٢ \times ٨ = ١٦$

مثال

يمثل الشكل المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم وبداخله مستطيل يقع رأسان من رؤوسه على وتر المثلث والرأسان الآخران يقع كل منهما على ضلعي القائمة جد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن .

الحل :

$م = س \times ص$



م = ٦/٨ ن (٨ - ن)

م = ٦ن - ٦/٨ ن²

م' = ٦ - (٢×٦)/٨ ن

٠ = ٦ - ٦/٤ ن

٦/٤ ن = ٦

ن/٤ = ١

ن = ٤

⇐ و = ٣

⇐ ص = ٥

⇐ س = (٣×٤)/٥ = ١٢/٥

من فيثاغورس

(م جـ)² = ٣٦ + ٦٤

(م جـ)² = ١٠٠

م جـ = ١٠

ن/و = ٨/٦

ن = ٨/٦ و

س/(٨-ن) = و/ص

س ص = و(٨-ن)

لكن و = ٦/٨ ن

⇐ س ص = ٦/٨ ن(٨-ن)

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

ص - ٤ = ١٥٠/(س-٦)

ص = ١٥٠/(س-٦) + ٤

الآن

م(س) = س × ص

م = س (١٥٠/(س-٦) + ٤)

م = ١٥٠س/(س-٦) + ٤س

م' = ((س-٦)(١٥٠) - ١٥٠س)/(س-٦)² + ٤

م' = (~~١٥٠س~~ - ٩٠٠ - ~~١٥٠س~~)/(س-٦)² + ٤

٠ = -٩٠٠/(س-٦)² + ٤

٩٠٠/(س-٦)² = ٤

(س-٦)² = ٩٠٠/٤ = ٢٢٥

(س-٦)² = ٢٢٥

س-٦ = ١٥ أو س-٦ = -١٥

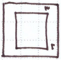
س = ٢١ س = -٩
مرفوض

ص = ١٥٠/(٢١-٦) + ٤ = ١٠ + ٤ = ١٤

٢٠٠٨ شتوي

يراد طباعة اعلان على ورقة مستطيلة الشكل بحيث يكون عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ٣ سم وفي كل من الجانبين ٢ سم ، إذا كانت مساحة المنطقة المطبوعة تساوي ١٥٠ سم² فجد أبعاد الورقة التي مساحتها أصغر ما يمكن ويمكن استعمالها لطباعة الاعلان.

الحل :



طول الورقة = س

عرض الورقة = ص

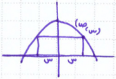
م = (س - ٦)(ص - ٤)

١٥٠ = (س - ٦)(ص - ٤)

٢٠١١ شتوي

جد بعدي أكبر مستطيل من حيث المساحة يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث تكون احدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران ق(س) = ٣٦ - س²

الحل :



م = ٢س × ص

م = ٢س × (٣٦ - س²)

م = ٧٢س - ٢س³

م' = ٧٢ - ٦س²

٠ = ٧٢ - ٦س²

٦س² = ٧٢

س² = ١٢

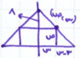
س = ± √١٢

⇐ ص = ٣٦ - ١٢ = ٢٤

٢٠١١ صيفي

مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم يراد قطع مستطيل منه بحيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث ويقع كل من الرأسين الآخرين على ساقين المثلث ، جد بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن .

الحل :



م = ٢س × ص

تشابه مثلثات

ص/٨ = (٣-س)/٣

⇐ ص = ٨(٣-س)/٣

⇐

م = ٢س × ٨(٣-س)/٣

م = ٢س × (٢٤ - ٨س)/٣

م = (٤٨س - ١٦س²)/٣

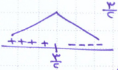
م' = ٤٨/٣ - ٣٢س/٣

٠ = ٤٨/٣ - ٣٢س/٣

٣٢س/٣ = ٤٨/٣

٣٢س = ٤٨

س = ٤٨/٣٢ = ٣/٢



⇐ ص = ٨(٣ - ٣/٢)/٣

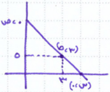
= ٨ × ٣/٢ /٣ = ١٢/٣ = ٤

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

٢٠١٠ صيفي

جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣، ٥) ويقطع من الربع الأول في المستوى الديكارتي مثلثاً مساحته أقل ما يمكن.

الحل:



مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ س × ص

ظا هـ = $\frac{ص}{س}$

$\frac{ص}{س} = \frac{٥}{س-٣}$

ص = $\frac{٥س}{س-٣}$

م = $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{٥س}{س-٣}$

م = $\frac{٥س^٢}{٢(س-٣)}$

م' = $\frac{٢(س-٣)(١٠س) - ٥س^٢(٢)}{(٢(س-٣))^٢}$ = ٠

٠ = (٢س − ٦)(١٠س) − ١٠س²

٠ = ٢٠س² − ٦٠س − ١٠س²

٠ = ١٠س² − ٦٠س

٠ = ١٠س (س − ٦)

س = صفر أو س = ٦
مرفوض

س = ٦ ← النقطة (٦، ٠)

والمستقيم يمر بـ (٣، ٥)

الميل = $\frac{٥-٠}{٣-٦} = \frac{-٥}{٣}$

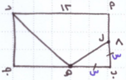
معادلة المستقيم

ص − ٠ = $\frac{-٥}{٣}$ (س − ٦)

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

٢٠١٢ صيفي

في الشكل المجاور أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٨ سم، ب جـ = ١٢ سم. عينت النقطتان ل، هـ على الضلعين $\overline{أب}$، $\overline{بجـ}$ على الترتيب بحيث كان ب ل = ب هـ. جد طول ب ل الذي يجعل مساحة الشكل الرباعي أ ل هـ د أكبر ما يمكن.



الحل:

م = مساحة المستطيل − مساحة المثلثين

= ٨×١٢ − ($\frac{١}{٢}$ س × س + $\frac{١}{٢}$ (١٢ − س) × ٨)

= ٩٦ − $\frac{١}{٢}$ س² − ٤(١٢ − س)

= ٩٦ − $\frac{١}{٢}$ س² − ٤٨ + ٤س

م = − $\frac{١}{٢}$ س² + ٤س + ٤٨

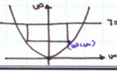
م' = − س + ٤

٠ = − س + ٤

س = ٤

٢٠١٣ شتوي

جد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل في الشكل الذي يقع



من رؤوسه على منحنى العلاقة $٤ص = س^2$ ويقع رأساه الآخران على المستقيم $ص = ٦$

الحل:

م = الطول × العرض

$= (س+س) \times ص$

$ص = \frac{س^2}{٤}$

$ص = ٦$

⇐ العرض $= ٦ - \frac{س^2}{٤}$

$م = (٢س)(٦ - \frac{س^2}{٤})$

$م = ١٢س - \frac{س^3}{٢}$

$م' = ١٢ - \frac{٣س^2}{٢}$

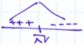
$٠ = ١٢ - \frac{٣س^2}{٢}$

$\frac{٣س^2}{٢} = ١٢$

$٣س^2 = ٢٤$

$س^2 = ٨$

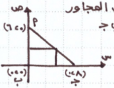
$س = \sqrt{٨}$



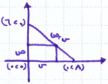
⇐ $م = ١٢\sqrt{٨} - \frac{(\sqrt{٨})^3}{٢}$

٢٠١٣ صيفي

اعتماداً على الشكل المجاور والذي يمثل المثلث م ب جـ القائم الزاوية في ب جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث.



الحل:



$م = س \times ص$

$م = س\left(\frac{٣}{٤}(٨-س)\right)$

$م = س\left(٦ - \frac{٣س}{٤}\right)$

$م = ٦س - \frac{٣س^2}{٤}$

تشابه مثلثات

$\frac{ص}{٨-س} = \frac{٦}{٨}$

$ص = \frac{٦}{٨}(٨-س)$

$= \frac{٣}{٤}(٨-س)$

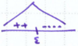
$م' = ٦ - \frac{٦}{٤}س$

$٠ = ٦ - \frac{٦}{٤}س$

$\frac{٦}{٤}س = ٦$

$\frac{س}{٤} = ١$

$س = ٤$



$م(٤) = ٦ \times ٤ - \frac{٣ \times ١٦}{٤}$

$= ٢٤ - ١٢$

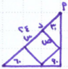
$= ١٢$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

٢٠١٥ صيفي

جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث قائم الزاوية طول وتره ٢٤ سم وقياس احدى زواياه ٣٠° بحيث تقع احدى قاعدتي المستطيل على الوتر ورأساه الآخران على ضلعي القائمة.

الحل:



$م = س \times ص$

$م = (٢٤ - \frac{٤}{\sqrt{٣}}ص)(ص)$

$م = ٢٤ص - \frac{٤}{\sqrt{٣}}ص^2$

$م' = ٢٤ - \frac{٨}{\sqrt{٣}}ص$

$٠ = ٢٤ - \frac{٨}{\sqrt{٣}}ص$

$\frac{٨}{\sqrt{٣}}ص = ٢٤$

$\frac{ص}{\sqrt{٣}} = ٣$

$ظا ٣٠ = \frac{ص}{م د}$

$\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{ص}{م د}$

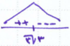
$\boxed{م د = \sqrt{٣}\, ص}$

$ظا ٦٠ = \frac{ص}{جـ هـ}$

$\sqrt{٣} = \frac{ص}{جـ هـ}$

$\boxed{جـ هـ = \frac{ص}{\sqrt{٣}}}$

⇐ ص = ٣√٣



عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

أد + س + جـهـ = ٢٤

√٣ ص + س + ص/√٣ = ٢٤

س + (√٣ + ١/√٣) ص = ٢٤

س = ٢٤ − (√٣/√٣ + ١/√٣) ص

س = ٢٤ − ((٣ + ١)/√٣) ص

س = ٢٤ − (٤/√٣) ص

(٣س − ٤)(س − ٤) = ٠

س = ٤/٣ ، س = ٤

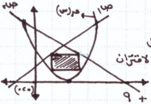
تكون المساحة أكبر ما يمكن عند س = ٤

القاعدة = الطول = ٢

العرض (الارتفاع) = ٣

٢٠١٦ صيفي

يقع رأسان من رؤوس المستطيل المظلل في الشكل الآتي على منحنى الاقتران

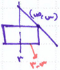


ق(س) = س^٢ − ٦س + ٩ ورأساه الآخران على المستقيمين ص = ٢س + ٣ ، ص = ٨ − س ، جد بعدي المستطيل اللذين يجعلان مساحته أكبر ما يمكن.

الحل:

م = القاعدة × الارتفاع

= ٢(س − ٣) (ص)



م = (٢س − ٦) ((٨ − س) − (س^٢ − ٦س + ٩))

م = (٢س − ٦)(−١ + ٥س − س^٢)

م = −٢س + ١٠س^٢ − ٢س^٣ + ٦ − ٣٠س + ٦س^٢

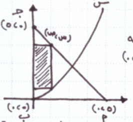
م = −٢س^٣ + ١٦س^٢ − ٣٢س + ٦

م′ = −٦س^٢ + ٣٢س − ٣٢ = ٠

٠ = ٣س^٢ − ١٦س + ١٦

٢٠١٧ شتوي

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية احداثيات رؤوسه أ(٥،٠) ، ب(٠،٠) ، جـ(٠،٥) رسم داخله مستطيل ينطبق رأسان



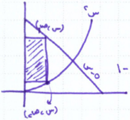
من رؤوسه على الضلع ب جـ وأحد رأسيه الآخرين على الضلع أجـ والرأس الآخر على منحنى الاقتران ق(س) = س^٢ كما في الشكل جد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل المظلل

الحل:

نجد معادلة المستقيم

(٥،٠) ، (٠،٥)

م = (٥ − ٠)/(٠ − ٥) = −١



ص = −١(س − ٥)

ص = ٥ − س

م = س × (ص١ − ص٢)

م = س (٥ − س − س^٢)

رياضيات (العلمي) الوحدة (تطبيقات التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (تطبيقات القيم القصوى) ماجستير رياضيات

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

م = ٥س - س² - س³

م َ = ٥ - ٢س - ٣س² = ٠

٣س² + ٢س - ٥ = صفر

(٣س + ٥) (س - ١) = صفر

س = -٥/٣ ، س = ١

- - - - | + + + + | - - - -
-٥/٣ ، ١

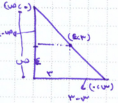
أكبر مساحة ممكنة عند س = ١

م = ٥ - ١ - ١ = ٣ وحدة مساحة

مثال

جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣،٤) ويصنع مع المحورين الاحداثيين الموجبين مثلثاً مساحته أقل ما يمكن

الحل:



عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

$\text{م} = \frac{1}{2} \times \text{س} \times \text{ص}$

$\frac{\text{س}-3}{4} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

$\text{ص} = \frac{4\text{س}}{\text{س}-3}$

$\text{م} = \frac{1}{2}\,\text{س}\left(\frac{4\text{س}}{\text{س}-3}\right)$

$\text{م} = \frac{2\text{س}^2}{\text{س}-3}$

$\text{م}' = \frac{(\text{س}-3)(4\text{س}) - (2\text{س}^2)(1)}{(\text{س}-3)^2}$

$0 = 4\text{س}^2 - 12\text{س} - 2\text{س}^2$

$0 = 2\text{س}^2 - 12\text{س}$

$0 = 2\text{س}(\text{س}-6)$

$\text{س} = 0 \text{ ، } \text{س} = 6$

نقطتان يمر منهما المستقيم (٦،٠) ، (٣،٤)

$\text{م} = \frac{4-0}{3-6} = \frac{4}{-3}$

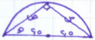
$\text{ص} = \frac{-4}{3}(\text{س} - 6)$

مثال

يمثل الشكل نصف الدائرة طول قطرها أب ٥سم بدأت النقطه جـ الحركة على الدائرة من النقطة ب باتجاه عقارب الساعة لترسم مع القطر مثلثاً جد قياس الزاوية أبجـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن

الحل:

س قاعدة ص ارتفاع



$\text{م} = \frac{1}{2} \times \text{س} \times \text{ص}$

$\text{م} = \frac{1}{2}(5\,\text{جاهـ})(5\,\text{جتاهـ})$

$\text{جاهـ} = \frac{\text{س}}{5}$

$\text{جتاهـ} = \frac{\text{ص}}{5}$

$\text{م} = 12{,}5\ \text{جاهـ جتاهـ}$

$\text{م} = 6{,}25\,(2\,\text{جاهـ جتاهـ})$

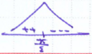
$\text{م} = 6{,}25\ \text{جا}2\text{هـ}$

$\text{م}' = 6{,}25\ \text{جتا}2\text{هـ} \times 2$

$0 = 12{,}5\ \text{جتا}2\text{هـ}$

$\text{جتا}2\text{هـ} = \text{صفر} \Leftarrow 2\text{هـ} = \frac{\pi}{2}$

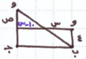
$\text{هـ} = \frac{\pi}{4}$



٢٠١٨ صيفي

أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ١٠ سم مُدّ الضلع جـ د على استقامة إلى و ثم وصل ب و فقطع الضلع أ د في هـ فإذا كان أ هـ = س سم ، د و = ص سم فجد قيمتي س ، ص اللتين تجعلان مجموع مساحتي المثلثين د هـ و ، أ هـ ب أصغر ما يمكن

الحل:



مجموع مساحتي المثلثين

$= \frac{1}{2}(١٠-س)\times ص + \frac{1}{2}\times ٤ \times س$

تشابه مثلثات

$\frac{س}{١٠-س} = \frac{٤}{ص}$

$ص = \frac{٤(١٠-س)}{س}$

$م = \frac{(١٠-س)(١٠-س)\times ٤}{٢س} + ٢س$

$م = \frac{٢(١٠-س)^2}{س} + ٢س$

$م = \frac{٢(١٠٠-٢٠س+س^2)}{س} + \frac{٢س^2}{س}$

$م = \frac{٢٠٠-٤٠س+٢س^2+٢س^2}{س}$

$م = \frac{٤س^2-٤٠س+٢٠٠}{س}$

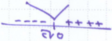
$م' = \frac{(س)(٨س-٤٠)-(٤س^2-٤٠س+٢٠٠)}{س^2} = ٠$

$٨س^2 - ٤٠س - ٤س^2 + ٤٠س - ٢٠٠ = ٠$

$٤س^2 - ٢٠٠ = ٠$

$س^2 = \frac{٢٠٠}{٤} = ٥٠$

$س = \sqrt{٥٠} \leftarrow س = ٥\sqrt{٢}$

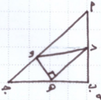


عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

$ص = \frac{٤(١٠-٥\sqrt{٢})}{٥\sqrt{٢}}$

٢٠١٨ شتوي جديد

يمثل الشكل المجاور المثلث أ ب جـ قائم في ب فيه أ ب = ٦ سم ب جـ = ٨ سم وبداخله المثلث د هـ و قائم الزاوية في هـ وتقع رؤوسه على أضلاع المثلث أ ب جـ علماً بأن د و // أ جـ جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث د هـ و.



الحل:

$م = \frac{1}{2}(هـ و)(د هـ)$

أ جـ = ١٠ من فيثاغورس

$د و = \sqrt{س^2 + ص^2}$

تشابه مثلثات

$\frac{ص}{س} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

$ص = \frac{٣س}{٤}$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

$$\text{ده} = \sqrt{\text{س}^٢ + \frac{٩\text{س}^٢}{١٦}}$$

$$\text{ده} = \sqrt{\frac{٢٥\text{س}^٢}{١٦}}$$

$$\text{ده} = \frac{٥\text{س}}{٤}$$

$$\text{جاج} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$= \frac{٦}{١٠} = \frac{\text{هو}}{٨-\text{س}}$$

$$\text{هو} = \frac{٦(٨-\text{س})}{١٠}$$

$$= \frac{٣(٨-\text{س})}{٥}$$

$$\Leftarrow \quad \text{م} = \frac{١}{٢}\left(\frac{٣(٨-\text{س})}{٥}\right)\left(\frac{٥\text{س}}{٤}\right)$$

$$\text{م} = \frac{٣}{٨}(٨-\text{س})(\text{س})$$

$$\text{م} = \frac{٣}{٨}(٨\text{س}-\text{س}^٢)$$

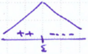
$$\text{م}' = \frac{٣}{٨}(٨-٢\text{س}) = ٠$$

$$٣ - \frac{٦}{٨}\text{س} = ٠$$

$$٣ = \frac{٦}{٨}\text{س}$$

$$٢٤ = ٦\text{س}$$

$$\text{س} = ٤$$

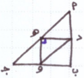


$$\text{م}(٤) = \frac{٣}{٨}(٨-٤)(٤)$$

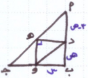
$$= \frac{٣}{٨} \times ١٦ = ٣ \times ٢ = ٦$$

٢٠١٨ شتوي قديم

يمثل الشكل المجاور المثلث أب جـ قائم الزاوية في ب فيه أب = ٣سم ، ب جـ = ٤سم وبداخله المثلث د هـ و قائم الزاوية في هـ وتقع رؤوسه على أضلاع المثلث أب جـ علماً بأن د هـ // ب جـ جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث د هـ و



الحل:



$$\text{م} = \frac{١}{٢}(\text{هو}) \times (\text{ده})$$

تشابه

$$\frac{٣-\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٣}{٤}$$

$$٣\text{س} = ١٢ - ٤\text{ص}$$

$$٤\text{ص} = ١٢ - ٣\text{س}$$

$$\text{ص} = \frac{١٢-٣\text{س}}{٤}$$

$$\text{م} = \frac{١}{٢}\,\text{ص} \times \text{س}$$

$$= \frac{١}{٢}\left(\frac{١٢-٣\text{س}}{٤}\right)(\text{س})$$

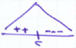
$$\text{م} = \frac{٣}{٢}\text{س} - \frac{٣}{٨}\text{س}^٢$$

$$\text{م}' = \frac{٣}{٢} - \frac{٦}{٨}\text{س} = ٠$$

$$\frac{٦\text{س}}{٨} = \frac{٣}{٢}$$

$$١٢\text{س} = ٢٤$$

$$\text{س} = ٢$$



$$\text{م}(٢) = \frac{٣}{٢} \times ٢ - \frac{٣}{٨} \times ٤$$

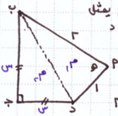
$$= ٣ - \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$$

رياضيات (العلمي) الوحدة (تطبيقات التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (تطبيقات القيم القصوى) ماجستير رياضيات

مثال

معتمداً الشكل الذي يمثل الشكل الرباعي أ ب جـ د الذي فيه الضلع أب ثابت وطوله ٢سم وفيه الضلع أ د ثابت وطوله ١سم إلا أن وضعه متحول يمكنه أن يدور في مستوى حول النقطة أ أما الزاوية د جـ ب فهي قائمة والضلعان $\overline{\text{جـ د}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}}$ متطابقان دوماً. جد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة الشكل الرباعي عندها أكبر مايمكن.



الحل:

$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2$

$\text{م} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \text{جاهـ} + \frac{1}{2}\,\text{س} \times \text{س}$

$(\text{دب})^2 = \text{س}^2 + \text{س}^2$

$(\text{دب})^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2\,\text{جتاهـ}$

$= 5 - 4\,\text{جتاهـ}$

$2\text{س}^2 = 5 - 4\,\text{جتاهـ}$

$\text{س}^2 = \frac{5}{2} - 2\,\text{جتاهـ}$

$\Leftarrow$

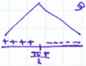
$\text{م} = \text{جاهـ} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - 2\,\text{جتاهـ}\right)$

$\text{م} = \text{جاهـ} + \frac{5}{4} - \text{جتاهـ}$

$\text{م}' = \text{جتاهـ} + \text{جاهـ}$

$0 = \text{جتاهـ} + \text{جاهـ}$

$\text{جاهـ} = -\,\text{جتاهـ} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{3\pi}{4}$



عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

مثال

نحتاج إلى قص لوح خشبي على شكل مثلث متطابق الضلعين طول كل منهما ٨سم إذا كانت زاوية رأس المثلث هـ متغيرة فجد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر مايمكن

الحل:

$\text{م} = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \text{جاهـ}$

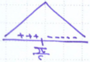
$\text{م} = 32\,\text{جاهـ}$

$\text{م}' = 32\,\text{جتاهـ}$

$0 = 32\,\text{جتاهـ}$

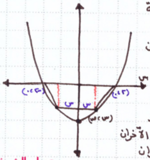
جتاهـ = صفر

$\Leftarrow \text{هـ} = \frac{\pi}{2}$



مثال

جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف الذي يمكن رسمه تحت محور السينات بحيث تكون احدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران
$ق(س) = س^2 - ٤$



عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

الحل :

القاعدة الأولى = ٤

القاعدة الثانيه = ٢س

الارتفاع = $-ص = ٤ - س^2$

$م = \frac{1}{2}(٤ + ٢س)(٤ - س^2)$

$= (٢ + س)(٤ - س^2)$

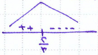
$م = ٨ - ٢س^2 + ٤س - س^3$

$م' = -٤س + ٤ - ٣س^2$

$٠ = ٣س^2 + ٤س - ٤$

$٠ = (٣س - ٢)(س + ٢)$

$س = \frac{2}{3}$ ، $س = -٢$ مرفوضه



$س = \frac{2}{3}$

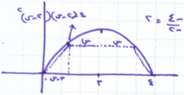
$م = ٨ - ٢ \times \frac{4}{9} + ٤ \times \frac{2}{3} - \frac{8}{27}$

٢٠١٤ صيفي

جد أبعاد شبه المنحرف الذي يمكن رسمه في الربع الأول بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران $ق(س) = ٤س - س^2$ لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

الحل :

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{-٢} = ٢$



$م = \frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين) (الارتفاع)

$= \frac{1}{2}(٢س + ٤)(٤(٢-س) - (٢-س)^2)$

$= (س+٢)((٨ - ٤س) - (٤ - ٤س + س^2))$

$= (س+٢)(٨ - ٤س - ٤ + ٤س - س^2)$

$= (س+٢)(٤ - س^2)$

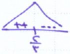
$= ٤س - س^3 + ٨ - ٢س^2$

$م' = ٤ - ٣س^2 - س = ٠$

$٠ = ٣س^2 + ٤س - ٤$

$٠ = (٣س - ٢)(س + ٢)$

$س = \frac{2}{3}$ ، $س = -٢$ مرفوضه



← القاعدة ① = $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

القاعدة ② = ٤

الارتفاع = $٤(٢ - \frac{2}{3}) - (٢ - \frac{2}{3})^2$

رياضيات (العلمي) الوحدة (تطبيقات التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (تطبيقات القيم القصوى) ماجستير رياضيات

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

٢٠١٧ صيفي

رسم المثلث أ ب جـ داخل نصف دائرة طول قطرها ٨ سم بحيث يقع الرأسان ب، جـ على نهايتي القطر والرأس الآخر أ يتحرك على منحنى نصف الدائرة كما في الشكل فجد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة المنطقة المظللة أصغر ما يمكن

الحل:

م = ½ π نق² − ½ أجـ × أب × جاهـ

م = ½ π × ١٦ − ½ × ٨ × أجـ × جاهـ

م = ٨π − ٤ أجـ × جاهـ

لكن

جتاهـ = أجـ / ٨

أجـ = ٨ جتاهـ

م = ٨π − ٤ × ٨ جتاهـ جاهـ

م = ٨π − ٤ × ٤ × ٢ جاهـ جتاهـ

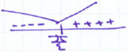
م = ٨π − ١٦ جا٢هـ

م′ = ٠ − ١٦ × جتا٢هـ × ٢

٠ = − ٣٢ جتا٢هـ

⇐ جتا٢هـ = ٠

⇐ ٢هـ = π/٢ ⇐ هـ = π/٤



أصغر مساحة عندما هـ = π/٤

مثال

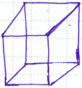
متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ومجموع أطوال أحرفه يساوي ٦٠٠ سم جد أبعاد متوازي المستطيلات التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن .

الحل :

الطول س

العرض س

الارتفاع ص



ح = س × س × ص

٤س + ٤س + ٤ص = ٦٠٠

٤ص = ٦٠٠ − ٨س

ص = ١٥٠ − ٢س

ح = س² (١٥٠ − ٢س)

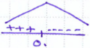
ح = ١٥٠س² − ٢س³

ح′ = ٣٠٠س − ٦س²

٠ = ٣٠٠س − ٦س²

٠ = ٦س (٥٠ − س)

س = ٠ ، س = ٥٠



س = ٥٠ الطول   س = ٥٠ العرض

ص = ١٥٠ − ١٠٠ = ٥٠ الارتفاع

٢٠١٢ شتوي

صندوق على شكل متوازي مستطيلات قاعدته على شكل مستطيل طوله مثلي عرضه إذا كان مجموع ارتفاعه للصندوق ومحيط قاعدته يساوي ٧٢ سم فجد أبعاده التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن .

الحل :

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

الارتفاع = ع

العرض = س

الطول = ص = ٢س

⟸

٢س + ٤س + ع = ٧٢

ع = ٧٢ − ٦س

ح = س × ٢س × ع

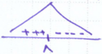
= ٢س² (٧٢ − ٦س)

= ١٤٤س² − ١٢س³

ح′ = ٢٨٨س − ٣٦س²

٠ = ٣٦س (٨ − س)

س = ٠ مرفوض ، س = ٨



العرض = ٨

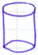
الطول = ١٦

الارتفاع = ٧٢ − ٦ × ٨ = ٧٢ − ٤٨ = ٢٤

مثال

وعاء اسطواني الشكل مفتوح من الأعلى حجمه ١٠٠٠ π سم³ جد أقل مساحة ممكنة من الصفيح لتصنيعه .

الحل :



المساحة = المساحة الجانبية + مساحة قاعدة

= (محيط القاعدة × الارتفاع) + مساحة قاعدة

$\text{م} = (2\pi\,\text{نق} \times \text{ع}) + \pi\,\text{نق}^2$

$\text{ح} = \pi\,\text{نق}^2\,\text{ع}$

$1000\pi = \pi\,\text{نق}^2\,\text{ع}$

$1000 = \text{نق}^2\,\text{ع}$

$\text{ع} = \dfrac{1000}{\text{نق}^2}$

$\text{م} = \left(2\pi\,\text{نق} \times \dfrac{1000}{\text{نق}^2}\right) + \pi\,\text{نق}^2$

$\text{م} = \dfrac{2000\pi}{\text{نق}} + \pi\,\text{نق}^2$

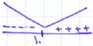
$\text{م}' = -\dfrac{2000\pi}{\text{نق}^2} + 2\pi\,\text{نق}$

$0 = -\dfrac{2000\pi}{\text{نق}^2} + 2\pi\,\text{نق}$

$\dfrac{2000\pi}{\text{نق}^2} = 2\pi\,\text{نق}$

$\text{نق}^3 = 1000$

$\Leftarrow \text{نق} = 10$



$\text{م} = \dfrac{2000\pi}{10} + \pi \times 10^2$

$= 200\pi + 100\pi$

$= 300\pi$

٢٠١٥ شتوي

اسطوانة دائرية قائمة مغلقة نصف قطر قاعدتها (نق) سم وارتفاعها (ع) سم وحجمها (٥٤ π) سم³، جد نصف قطر قاعدة الاسطوانة وارتفاعها اللذان يجعلان مساحة سطحها الكلية أقل ما يمكن .

الحل :

$\text{ح} = \pi\,\text{نق}^2\,\text{ع}$

$\text{م} = 2\pi\,\text{نق}\,\text{ع} + 2\pi\,\text{نق}^2$

$54\cancel{\pi} = \cancel{\pi}\,\text{نق}^2\,\text{ع}$

$54 = \text{نق}^2\,\text{ع}$

$\text{ع} = \dfrac{54}{\text{نق}^2}$

$\Leftarrow \text{م} = 2\pi\,\text{نق} \times \dfrac{54}{\text{نق}^2} + 2\pi\,\text{نق}^2$

$\text{م} = \dfrac{108\pi}{\text{نق}} + 2\pi\,\text{نق}^2$

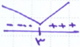
$\text{م}' = \dfrac{-108\pi}{\text{نق}^2} + 4\pi\,\text{نق} = \text{صفر}$

$\dfrac{108\pi}{\text{نق}^2} = 4\pi\,\text{نق}$

$108 = 4\,\text{نق}^3$

$\text{نق}^3 = 27$

$\Leftarrow \text{نق} = 3$



$\text{ع} = \dfrac{54}{9} = 6$

٢٠٠٩ شتوي

اسطوانة دائرية قائمة مجموع محيط قاعدتها وارتفاعها يساوي ٦٦ سم احسب ارتفاع الاسطوانة الذي يجعل حجمها أكبر ما يمكن ؟

الحل:

نصف القطر = نق ، الارتفاع = ع

الحجم = ح ، المحيط للقاعدة = م

$\text{ح} = \pi\, \text{نق}^2\, \text{ع}$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

$\text{ع} + \text{م} = ٦٦$

$\text{ع} + ٢\pi\, \text{نق} = ٦٦$

$\text{ع} = ٦٦ - ٢\pi\, \text{نق}$

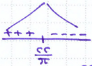
$\Leftarrow \text{ح} = \pi\, \text{نق}^2 \,(٦٦ - ٢\pi\, \text{نق})$

$\text{ح} = ٦٦\pi\, \text{نق}^2 - ٢\pi^2\, \text{نق}^3$

$\frac{\text{دح}}{\text{دنق}} = ١٣٢\pi\, \text{نق} - ٦\pi^2\, \text{نق}^2$

$٠ = ٦\pi\, \text{نق}\,(٢٢ - \pi\, \text{نق})$

نق = صفر مرفوض أو $\text{نق} = \frac{٢٢}{\pi}$



$\Leftarrow \text{ع} = ٦٦ - ٢\pi \times \frac{٢٢}{\pi}$

$= ٦٦ - ٤٤ = ٢٢$

٢٠١٤ شتوي

حافظة للماء الساخن تتكون من جزأين الجزء الأول وعاء اسطواني الشكل نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع) والجزء الثاني غطاء على شكل نصف كرة نصف قطرها يساوي نصف قطر الاسطوانه (كما في الشكل) إذا كان حجم الحافظة ٣٦٠π دسم^3 جد كلاً من نصف القطر والارتفاع اللذان يجعلان المساحة الكلية لسطح الحافظة أقل ما يمكن

الحل:

م = م القاعدة + م الاسطوانه الجانبية + م نصف الكرة

$= \pi\, \text{نق}^2 + ٢\pi\, \text{نق}\,\text{ع} + ٢\pi\, \text{نق}^2$

لكن ح = ح الاسطوانه + ح نصف الكرة

$٣٦٠\cancel{\pi} = \cancel{\pi}\, \text{نق}^2\, \text{ع} + \frac{٢}{٣}\cancel{\pi}\, \text{نق}^3$

$\text{ع} = \frac{٣٦٠}{\text{نق}^2} - \frac{٢}{٣}\text{نق}$

$\Leftarrow \text{م} = \pi\, \text{نق}^2 + ٢\pi\, \text{نق}\left(\frac{٣٦٠}{\text{نق}^2} - \frac{٢}{٣}\text{نق}\right) + ٢\pi\, \text{نق}^2$

$= ٣\pi\, \text{نق}^2 + \frac{٧٢٠\pi}{\text{نق}} - \frac{٤}{٣}\pi\, \text{نق}^2$

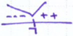
$\text{م} = \frac{٥\pi}{٣}\text{نق}^2 + \frac{٧٢٠\pi}{\text{نق}}$

$\text{م}' = \frac{١٠\pi\, \text{نق}}{٣} - \frac{٧٢٠\pi}{\text{نق}^2} = \text{صفر}$

$\frac{٧٢٠\pi}{\text{نق}^2} = \frac{١٠\pi\, \text{نق}}{٣}$

$\frac{٧٢}{\text{نق}^2} = \frac{\text{نق}}{٣} \Leftarrow \text{نق}^3 = ٢١٦$

$\Leftarrow \text{نق} = ٦$



$\Leftarrow \text{ع} = ١٠$

مثال

جد أكبر حجم لموشور رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدة المخروط ٦ سم وارتفاعه ٩ سم

الحل :

نق = ٦

$ع_{\text{المخروط}} = ٩$

طول ضلع قاعدة الموشور = س

العرض = س

الارتفاع = ع

$ح_{\text{الموشور}} = س \times س \times ع$

$(٢\text{نق})^2 = س^2 + س^2$

$٤\text{نق}^2 = ٢س^2$

$٢\text{نق}^2 = س^2$

$\frac{\text{نق}}{٩-ع} = \frac{٦}{٩}$

$٩\text{نق} = ٥٤ - ٦ع$

$٣\text{نق} = ١٨ - ٢ع$

$٣\text{نق} - ١٨ = -٢ع$

$ع = \frac{1}{2}(١٨ - ٣\text{نق})$

$ع = ٩ - \frac{3}{2}\text{نق}$

$ح = س^2 \times ع$

$ح = ٢\text{نق}^2 (٩ - \frac{3}{2}\text{نق})$

$ح = ١٨\text{نق}^2 - ٣\text{نق}^3$

$ح' = ٣٦\text{نق} - ٩\text{نق}^2$

$٠ = ٩\text{نق}(٤ - \text{نق})$

نق = ٤

$ح = ١٨ \times ١٦ - ٣ \times ٦٤ = ٩٦$

مثال

جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ١٢ سم بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي .

الحل :

$ح = \frac{1}{3}\pi \text{نق}^2 ع$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

$\frac{\text{نق}}{٦} = \frac{١٢-ع}{١٢}$

$١٢\text{نق} = ٧٢ - ٦ع$

$٦ع = ٧٢ - ١٢\text{نق}$

$ع = ١٢ - ٢\text{نق}$

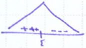
$ح = \frac{\pi}{3}\text{نق}^2 (١٢ - ٢\text{نق})$

$ح = ٤\pi \text{نق}^2 - \frac{2\pi}{3}\text{نق}^3$

$ح' = ٨\pi \text{نق} - ٢\pi \text{نق}^2$

$٠ = ٢\pi \text{نق}(٤ - \text{نق})$

نق = ٤



$ح = ٤\pi \times ١٦ - \frac{2\pi}{3} \times ٦٤$

٢٠١٦ شتوي

جد حجم أكبر موشور (منشور) رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٦سم وارتفاعه ٨سم

الحل :

مثال

قطاع دائري قياس زاويته المركزية ه بالتقدير الدائري وطول نصف قطر دائرته ٤ وحدات ، حوّل إلى مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته نق$_2$ وارتفاعه ع جد قيمة ه التي تجعل للمخروط الناتج أكبر حجم ممكن

الحل:

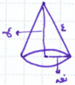
ح = $\frac{\pi}{٣}$ نق$_2^2$ ع

طول القوس = محيط قاعدة المخروط

ه نق$_1$ = ٢π نق$_2$

للقطاع

للمخروط



٤^2 = نق$_2^2$ + $ع^2$

١٦ = نق$_2^2$ + $ع^2$

نق$_2^2$ = $١٦ - ع^2$

الآن

ح = $\frac{\pi}{٣}(١٦ - ع^2)$ ع

ح = $\frac{١٦\pi}{٣}$ ع − $\frac{\pi}{٣}$ $ع^3$

ح$'$ = $\frac{١٦\pi}{٣} - \pi ع^2$

$٠ = \frac{١٦\pi}{٣} - \pi ع^2$

$\pi ع^2 = \frac{١٦\pi}{٣}$

$ع^2 = \frac{١٦}{٣}$

$ع = \frac{٤}{\sqrt{٣}}$

$\Leftarrow$ نق$_2^2$ = $١٦ - \frac{١٦}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$ $\leftarrow$ نق$_2$ = $\frac{\sqrt{٣٢}}{\sqrt{٣}}$

$\Leftarrow$

ه × نق$_1$ = ٢π نق$_2$

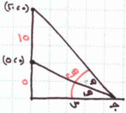
ه × ٤ = $٢\pi \times \frac{\sqrt{٣٢}}{\sqrt{٣}}$

ه = $\frac{١}{٢}\pi \frac{\sqrt{٣٢}}{\sqrt{٣}}$

مثال

أ(٠،٢٠) ، ب(٠،٥) نقطتان ثابتتان
جـ نقطة تتحرك على محور السينات الموجب
جد أكبر قياس ممكن للزاوية أجـب

الحل:



$$\text{ظا}\,\text{هـ} = \text{ظا}(\text{هـ}_2 - \text{هـ}_1)$$

$$= \frac{\text{ظا}\,\text{هـ}_2 - \text{ظا}\,\text{هـ}_1}{1 + \text{ظا}\,\text{هـ}_2\,\text{ظا}\,\text{هـ}_1}$$

$$= \frac{\frac{20}{\text{س}} - \frac{5}{\text{س}}}{1 + \frac{20}{\text{س}}\cdot\frac{5}{\text{س}}}$$

$$= \frac{20\text{س} - 5\text{س}}{\text{س}^2} \times \frac{1}{1 + \frac{100}{\text{س}^2}}$$

$$= \frac{15\,\text{س}}{\text{س}^2 + 100}$$

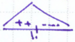
$$\text{قا}^2\text{هـ}\;\text{هـ}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^2+100)(15) - (15\text{س})(2\text{س})}{(\text{س}^2+100)^2}$$

$$0 = 15\text{س}^2 + 1500 - 30\text{س}^2$$

$$0 = 1500 - 15\text{س}^2$$

$$15\text{س}^2 = 1500$$

$$\text{س}^2 = 100$$



$$\text{س} = 10 \Leftarrow \text{ظا}\,\text{هـ} = \frac{150}{200} = \frac{3}{4} \Leftarrow \text{هـ} \approx 37^\circ$$

٢٠١٠ شتوي

إذا كان الانتاج اليومي لمصنع حديد هو ص طن من نوع الحديد الجيد ، س طن من نوع الحديد الأقل جودة فإذا كانت

$$\text{ص} = \frac{٤٠ - ٥\text{س}}{١٠ - \text{س}} \quad \text{س} \neq ١٠$$

وكان سعر الطن من الحديد الجيد يساوي مثلي سعر الطن من الحديد الأقل جودة فجد الكمية التي ينتجها المصنع يوميا من كل نوع حتى يحقق أكبر ايراد

الحل:

سعر الحديد الأقل جودة = ل

سعر الحديد الجيد = ٢ل

⇐

$$\text{الإيراد} = ٢\text{ل ص} + \text{ل س}$$

$$\text{د} = ٢\text{ل}\,\frac{٤٠ - ٥\text{س}}{١٠ - \text{س}} + \text{ل س}$$

$$\text{د} = \frac{٨٠\text{ل} - ١٠\text{ل س}}{١٠ - \text{س}} + \text{ل س}$$

$$\text{د} = \frac{٨٠\text{ل} - ١٠\text{ل س}}{١٠ - \text{س}} + \frac{\text{ل س}\,(١٠ - \text{س})}{١٠ - \text{س}}$$

$$\text{د} = \frac{٨٠\text{ل} - \cancel{١٠\text{ل س}} + \cancel{١٠\text{ل س}} - \text{ل س}^٢}{(١٠ - \text{س})}$$

$$\text{د} = \frac{٨٠\text{ل} - \text{ل س}^٢}{(١٠ - \text{س})}$$

$$\text{د}' = \frac{(١٠ - \text{س})(-٢\text{ل س}) - (٨٠\text{ل} - \text{ل س}^٢)(-١)}{(١٠ - \text{س})^٢} = ٠$$

$$٠ = -٢٠\text{ل س} + ٢\text{ل س}^٢ + ٨٠\text{ل} - \text{ل س}^٢$$

$$٠ = \text{ل س}^٢ - ٢٠\text{ل س} + ٨٠\text{ل}$$

$$٠ = \text{ل}\,(\text{س}^٢ - ٢٠\text{س} + ٨٠)$$

$$٠ = \text{ل}\,(\text{س} - \quad)(\text{س} - \quad)$$

بالقانون العام $\text{س} = ١٠ + ٢\sqrt{٥}$ مرفوضة.

أو $\text{س} = ١٠ - ٢\sqrt{٥}$

$$\Leftarrow \text{س} = ١٠ - ٢\sqrt{٥}$$

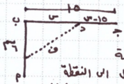
+++ | ----

$١٠ - ٢\sqrt{٥}$

$$\Leftarrow \text{ص} = \frac{٤٠ - ٥(١٠ - ٢\sqrt{٥})}{١٠ - (١٠ - ٢\sqrt{٥})}.$$

مثال

يقف رجل عند النقطة أ التي تبعد ٦كم عن النقطة ب ، يريد أن يصل الى النقطة جـ مروراً بالنقطة د ، إذا كان يسير بسرعة ٣كم/س عند الانتقال من النقطة أ إلى النقطة د ، ويسير بسرعة ٦كم/س عند الانتقال من النقطة د إلى النقطة جـ فحدد موقع النقطة د بحيث يصل في أقصر وقت ممكن علماً بأن البعد بين النقطة ب والنقطة جـ ١٥كم .



الحل:

الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

ن = $\frac{\text{ف}}{٣} + \frac{١٥-\text{س}}{٦}$ ، ف² = س² + ٣٦

ف = $\sqrt{\text{س}^2+٣٦}$

ن = $\frac{\sqrt{\text{س}^2+٣٦}}{٣} + \frac{١٥-\text{س}}{٦}$

ن' = $\frac{١}{٣} \times \frac{\cancel{٢}\text{س}}{\cancel{٢}\sqrt{\text{س}^2+٣٦}} + \frac{١}{٦} \times -١$

٠ = $\frac{٦\text{س} - ٣\sqrt{\text{س}^2+٣٦}}{١٨(\sqrt{\text{س}^2+٣٦})}$

٠ = ٦س − ٣$\sqrt{\text{س}^2+٣٦}$

٣$\sqrt{\text{س}^2+٣٦}$ = ٦س

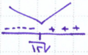
$\sqrt{\text{س}^2+٣٦}$ = ٢س

س² + ٣٦ = ٤س²

٣٦ = ٣س²

س² = ١٢

س = $\sqrt{١٢}$



مثال

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

يقع حقل نفط في البحر عند النقطة أ التي تبعد ٣كم عن أقرب نقطة ب على الساحل وأردنا أن نضخ البترول من الحقل إلى المصفاة التي تقع عند النقطة جـ على الساحل وتبعد ٦كم من ب وذلك بواسطة أنابيب في البحر على خط مستقيم حتى النقطة د على الساحل ثم بواسطة أنابيب على اليابسة على خط مستقيم من د إلى جـ على فرض أن الأنابيب في البحر وفي اليابسة في مستوى واحد إذا كانت تكلفة الأنابيب تحت سطح البحر ٥٠٠٠ دينار لكل كيلو متر وعلى اليابسة ٣٠٠٠ دينار لكل كيلو متر

① أين يجب أن تكون د لتحقق أقل تكلفة ممكنة ؟

② أين يجب أن تكون د لتحقق أكبر تكلفة ممكنة ؟

الحل:

ت = تكلفة أد + تكلفة دجـ

= ٥٠٠٠ ف + ٣٠٠٠ (٦−س)

ت = ٥٠٠٠$\sqrt{\text{س}^2+٤}$ + ٣٠٠٠(٦−س) ، ف² = س² + ٢²

ف = $\sqrt{\text{س}^2+٤}$

ت' = ٥٠٠٠ × $\frac{\cancel{٢}\text{س}}{\cancel{٢}\sqrt{\text{س}^2+٤}}$ − ٣٠٠٠

٠ = $\frac{٥٠٠٠}{\sqrt{\text{س}^2+٤}}$ − ٣٠٠٠

٣٠٠٠ = $\frac{٥٠٠٠}{\sqrt{\text{س}^2+٤}}$

٣$\sqrt{\text{س}^2+٤}$ = ٥

٩(س² + ٤) = ٢٥

$9س^2 + 36 = 25$

$9س^2 = -11$

$س^2 = \frac{-11}{9}$ ؟؟

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625