قواعد الاشتقاق (٢)

Esam Shikh
0796300625

[1] مشتقة المضروب.

إذا كان ق(س) = م(س) × هـ(س) ⇐

ق'(س) = م(س) × هـ'(س) + هـ(س) × م'(س)

= (الأول) (الثاني)' + (الثاني) (الأول)'

مثال

إذا كان ص = $س^{٢}$ $(١+س^{٣})$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل:

$\frac{دص}{دس}$ = $(س^{٢})(٣س^{٢}) + (١+س^{٣})(٢س)$

= $٣س^{٤} + ٢س + ٢س^{٤}$

= $٥س^{٤} + ٢س$

مثال

إذا كان ق(س) = $(س^{٣}+٦س)(٤س^{٢}-٣)$

جد ق'(س)

الحل:

ق'(س) = $(س^{٣}+٦س)(٨س) + (٤س^{٢}-٣)(٣س^{٢}+٦)$

مثال

إذا كان ق(س) = $(٤-٢س^{٣})(\frac{١}{٢}س+٣)$

فجد ق'(س)

الحل:

ق'(س) = $(٤-٢س^{٣})(\frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٢}س+٣)(-٦س^{٢})$

مثال

إذا كان ص = $(س^{٣}-٢س+١)(٤س-٣)$

فجد $\frac{دص}{دس}$

الحل:

$\frac{دص}{دس}$ = $(س^{٣}-٢س+١)(٤) - (٤س-٣)(٣س^{٢}-٢)$

مثال

إذا كان ق(س) = س(س+٢)$(س^{٢}-٣س-٦)$

فجد ق'(س)

الحل:

ق(س) = $(س^{٢}+٢س)(س^{٣}-٣س-٦)$

ق'(س) = $(س^{٢}+٢س)(٢س-٣) + (س^{٢}-٣س-٦)(٢س+٢)$

مثال

إذا علمت أن هـ(س) قابل للاشتقاق وأن هـ(٢) = ٣ ، هـ'(٢) = -١ فجد ق'(٢) حيث ق(س) = س هـ(س)

الحل:

ق'(س) = س هـ'(س) + هـ(س) × ١

ق'(٢) = ٢ هـ'(٢) + هـ(٢)

= ٢ × -١ + ٣

= -٢ + ٣ = ١

مثال

إذا علمت أن هـ(س) قابل للاشتقاق وأن هـ(٢) = ٣ ، هـ'(٢) = -١ فجد ق'(٢) حيث ق(س) = $٣س^{٢}$ هـ(س) - ٥س

الحل:

ق'(س) = $(٣س^{٢})$ هـ'(س) + هـ(س)(٦س) - ٥

ق'(٢) = (٣×٤) هـ'(٢) + هـ(٢)(٦×٢) - ٥

= ١٢ × -١ + ٣ × ١٢ - ٥

= -١٢ + ٣٦ - ٥

= ٢٤ - ٥

= ١٩

مثال

إذا كان ل ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان
ل(-٢) = ٣ ، ل'(-٢) = -١ ، هـ(-٢) = ٤
هـ'(-٢) = -٦ فجد ق'(-٢) حيث
ق(س) = ل(س) × هـ(س)

الحل:

ق'(س) = ل(س) هـ'(س) + هـ(س) ل'(س)
ق'(-٢) = ل(-٢) هـ'(-٢) + هـ(-٢) ل'(-٢)
= ٣ × -٦ + ٤ × -١
= -١٨ + -٤ = -٢٢

مشتقة حاصل ضرب ٣ اقترانات .

مثال

إذا كانت ل ، م ، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق عند س أثبت أن
د/دس (ل(س) × م(س) × هـ(س)) =
ل(س) م(س) هـ'(س) + ل(س) هـ(س) م'(س) + م(س) هـ(س) ل'(س)

الحل:

((ل(س) م(س)) هـ(س))' =
ل(س) م(س) × هـ'(س) + هـ(س) (ل(س) م(س))'
= ل(س) م(س) هـ'(س) + هـ(س) (ل(س) م'(س) + م(س) ل'(س))
= ل(س) م(س) هـ'(س) + هـ(س) ل(س) م'(س) + هـ(س) م(س) ل'(س)

مثال

أثبت أن د/دس (ل^{٣}(س)) = ٣ ل^{٢}(س) × ل'(س)

الحل:

(ل^{٣}(س))' = (ل(س) × ل(س) × ل(س))'
= ل(س) ل(س) ل'(س) + ل(س) ل(س) ل'(س) + ل(س) ل(س) ل'(س)
= ل^{٢}(س) ل'(س) + ل^{٢}(س) ل'(س) + ل^{٢}(س) ل'(س)
= ل'(س) (ل^{٢}(س) + ل^{٢}(س) + ل^{٢}(س))
= ل'(س) × ٣ × ل^{٢}(س)
= ٣ ل^{٢}(س) × ل'(س)

٢٠١٣ صيفي

إذا كان ق(س) = س ق(س) + ١ فإن ق'(٢) تساوي
أ) -١ ب) ١ ج) صفر د) ٢

الحل:

ق'(س) = س ق'(س) + ق(س) × ١
ق'(٢) = ٢ ق'(٢) + ق(٢)

ق'(٢) - ٢ق'(٢) = -١
-ق'(٢) = -١
ق'(٢) = ١

نجد ق(٢)
ق(٢) = ٢ق(٢) + ١
ق(٢) - ٢ق(٢) = ١
-ق(٢) = ١
ق(٢) = -١

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (قواعد الاشتقاق (٢)) ماجستير رياضيات

٣ مشتقة قسمة اقترانين

إذا كان $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{هـ(س)}}{\text{م(س)}} \Leftarrow$

$$\text{ق}'\text{(س)} = \frac{\text{م(س)} \times \text{هـ}'\text{(س)} - \text{هـ(س)} \times \text{م}'\text{(س)}}{(\text{م(س)})^2}$$

$$= \frac{(\text{المقام})(\text{البسط})' - (\text{البسط})(\text{المقام})'}{(\text{المقام})^2}$$

مثال

إذا كان $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{س}^3 + \text{س}}{\text{س}^2 + ٥}$ جد $\text{ق}'\text{(س)}$

الحل:

$$\text{ق}'\text{(س)} = \frac{(\text{س}^2+٥)(٣\text{س}^2+١) - (\text{س}^3+\text{س})(٢\text{س})}{(\text{س}^2+٥)^2}$$

مثال

إذا كان $\text{ص} = \dfrac{\text{س}^3}{١-\text{س}}$ فجد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(١-\text{س})(٣\text{س}^2) - (\text{س}^3)(-١)}{(١-\text{س})^2}$$

مثال

إذا كان $\text{ص} = \dfrac{\text{س}^2 - ١}{٢\text{س}+٣}$ جد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(٢\text{س}+٣)(٢\text{س}) - (\text{س}^2-١)(٢)}{(٢\text{س}+٣)^2}$$

مثال

إذا كان $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{س}^2 - ٢\text{س} + ٤}{\text{س}^2 + ٤}$ فجد $\text{ق}'\text{(س)}$

الحل:

$$\text{ق}'\text{(س)} = \frac{(\text{س}^2+٤)(٢\text{س}-٢) - (\text{س}^2-٢\text{س}+٤)(٢\text{س})}{(\text{س}^2+٤)^2}$$

مثال

إذا كان $\text{ص} = \dfrac{٦\text{س}+١}{\text{س}^2-٤}$ فجد $\left.\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١}$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س}^2-٤)(٦) - (٦\text{س}+١)(٢\text{س})}{(\text{س}^2-٤)^2}$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١} = \frac{(١-٤)(٦) - (٦+١)(٢)}{(١-٤)^2}$$

$$= \frac{-١٨ - ١٤}{٩} = \frac{-٣٢}{٩}$$

مثال

إذا كان $\text{ع(س)} = \dfrac{\text{س}^4 - ٣}{\text{س}^3}$ فجد $\text{ع}'\text{(س)}$

الحل:

$$\text{ع}'\text{(س)} = \frac{(\text{س}^3)(٤\text{س}^3) - (\text{س}^4-٣)(٣\text{س}^2)}{(\text{س}^3)^2}$$

مثال

إذا كان $\text{ق(س)} = \dfrac{٢\text{س}+١}{\text{س}^4-٤}$ جد $\text{ق}'(-١)$

الحل:

$$\text{ق}'\text{(س)} = \frac{(\text{س}^4-٤)(٢) - (٢\text{س}+١)(٤\text{س}^3)}{(\text{س}^4-٤)^2}$$

$$\text{ق}'(-١) = \frac{(١-٤)(٢) - (-٢+١)(-٤)}{(-٣)^2}$$

$$= \frac{-٦ - ٤}{٩}$$

$$= \frac{-١٠}{٩}$$

Esam Shikh
0796300625

مثال

إذا كان هـ قابل للاشتقاق وكان هـ(٢) = ٣
هـَ(٢) = −١ فجد قَ(٢) حيث

$$ق(س) = \frac{٢س+١}{٣هـ(س)}$$

الحل:

$$قَ(س) = \frac{(٣هـ(س))(٢) - (٢س+١)(٣هـَ(س))}{(٣هـ(س))^٢}$$

$$قَ(٢) = \frac{(٣هـ(٢))(٢) - (٥)(٣هـَ(٢))}{(٣هـ(٢))^٢}$$

$$= \frac{٣\times٣\times٢ - ٥\times٣\times-١}{(٣\times٣)^٢}$$

$$= \frac{١٨ + ١٥}{٩^٢} = \frac{٣٣}{٨١}$$

مثال

إذا كان ل ، هـ قابلين للاشتقاق وكان
ل(−٢) = ٣ ، لَ(−٢) = −١ ، هـ(−٢) = ٤
هـَ(−٢) = −٦ فجد قَ(−٢) حيث

$$ق(س) = \frac{هـ(س)}{ل(س)+١}$$

الحل:

$$قَ(س) = \frac{(ل(س)+١)\,هـَ(س) - هـ(س)\,لَ(س)}{(ل(س)+١)^٢}$$

$$قَ(-٢) = \frac{(ل(-٢)+١)\,هـَ(-٢) - هـ(-٢)\,لَ(-٢)}{(ل(-٢)+١)^٢}$$

$$= \frac{(٣+١)\times-٦ - ٤\times-١}{(٣+١)^٢}$$

$$= \frac{-٢٤ + ٤}{١٦} = \frac{-٢٠}{١٦} = \frac{-٥}{٤}$$

٢٠٠٨ صيفي

إذا كان $ق(س) = \frac{ل(س)}{س^٢+١}$
وكان ق(٢) = −١ ، قَ(٢) = ٣ فإن لَ(٢) =

أ) ١٣ ب) $\boxed{١١}$ ج) ٤ د) −٥

الحل:

$$قَ(س) = \frac{(س^٢+١)\,لَ(س) - ل(س)\,(٢س)}{(س^٢+١)^٢}$$

$$قَ(٢) = \frac{٥\,لَ(٢) - ل(٢)\times٤}{٢٥}$$

$$٣ = \frac{٥\,لَ(٢) - -٥\times٤}{٢٥}$$

$$٧٥ = ٥\,لَ(٢) + ٢٠$$

$$٥٥ = ٥\,لَ(٢)$$

$$\Leftarrow لَ(٢) = ١١$$

نجد ل(٢)

$$ق(٢) = \frac{ل(٢)}{٥}$$

$$-١ = \frac{ل(٢)}{٥} \Leftarrow ل(٢) = -٥$$

٢٠١٣ صيفي

إذا كان $ق(س) = \frac{س^٢}{ل(س)}$ وكان
ل(١) = −٣ ، لَ(١) = −٩ فجد قَ(١)

أ) $\frac{٥}{٣}$ ب) $\frac{-٥}{٣}$ ج) $\frac{١}{٣}$ د) $\boxed{\frac{-١}{٣}}$

الحل:

$$قَ(س) = \frac{ل(س)(٢س) - (س^٢)(لَ(س))}{(ل(س))^٢}$$

$$قَ(١) = \frac{ل(١)\times٢ - ١\times لَ(١)}{(ل(١))^٢}$$

$$= \frac{-٣ \times ٢ - ١ \times ٩}{(-٣)^{٢}}$$

$$= \frac{-٦ + ٩}{٩} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$$

٢٠١٤ شتوي

إذا كان $هـ(س) = \frac{م(س)}{ل(س)\,(س^{٢}+١)}$ وكان

$م(١) = -٢$ ، $م'(١) = ل(١) = -١$ ، $هـ'(١) = ٣$

فجد $ل'(١)$

الحل:

$$هـ'(س) = \frac{ل(س)\,(س^{٢}+١)\,م'(س) - م(س)\big(ل(س)\,(٢س) + (س^{٢}+١)\,ل'(س)\big)}{\big(ل(س)\,(س^{٢}+١)\big)^{٢}}$$

$$هـ'(١) = \frac{ل(١)\,(٢)\,م'(١) - م(١)\big(ل(١)\,(٢) + (٢)\,ل'(١)\big)}{\big(ل(١) \times ٢\big)^{٢}}$$

$$٣ = \frac{-١ \times ٢ \times -١ - (-٢)\big(-١ \times ٢ + ٢ل'(١)\big)}{(٢ \times -١)^{٢}}$$

$$١٢ = ٢ + ٢\big(-٢ + ٢ل'(١)\big)$$

$$١٠ = -٤ + ٤ل'(١)$$

$$١٤ = ٤ل'(١)$$

$$\frac{١٤}{٤} = ل'(١)$$

$$\Leftarrow ل'(١) = \frac{٧}{٢}$$

Esam Shikh
0796300625

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (قواعد الاشتقاق (٢)) ماجستير رياضيات

٢٠١٤ صيفي

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{ل}(\text{س})}{\text{س}\,\text{هـ}(\text{س})}$ وكان

$\text{ق}'(٢) = \text{ل}(٢) = -٣$ ، $\text{ل}'(٢) = \text{هـ}(٢) = ١$

فجد $\text{هـ}'(٢)$

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{س}\,\text{هـ}(\text{س}) \times \text{ل}'(\text{س}) - \text{ل}(\text{س})\big(\text{س}\,\text{هـ}'(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\big)}{\big(\text{س}\,\text{هـ}(\text{س})\big)^{٢}}$$

$$\text{ق}'(٢) = \frac{٢\,\text{هـ}(٢)\,\text{ل}'(٢) - \text{ل}(٢)\big(٢\,\text{هـ}'(٢) + \text{هـ}(٢)\big)}{\big(٢\,\text{هـ}(٢)\big)^{٢}}$$

$$-٣ = \frac{٢ \times ١ \times ١ - (-٣)\big(٢\,\text{هـ}'(٢) + ١\big)}{(٢ \times ١)^{٢}}$$

$$-١٢ = ٢ + ٦\,\text{هـ}'(٢) + ٣$$

$$-١٧ = ٦\,\text{هـ}'(٢)$$

$$\Leftarrow \text{هـ}'(٢) = \frac{-١٧}{٦}$$

Esam Shikh

0796300625

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (قواعد الاشتقاق (٢)) ماجستير رياضيات

حالة خاصة من القسمة مشتقة عدد على اقتران.

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{أ}}{\text{هـ}(\text{س})}$ فإن

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{أ} \times \text{هـ}'(\text{س})}{(\text{هـ}(\text{س}))^2}$$

$$= \frac{-\text{العدد} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال

إذا كان $\text{ص} = \dfrac{\sqrt{3}}{\text{س}^2}$ فجد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\sqrt{3} \times 2\text{س}}{(\text{س}^2)^2}$$

$$= \frac{-2\sqrt{3}}{\text{س}^3}$$

مثال

إذا كان $\text{ل}(\text{س}) = \dfrac{\pi}{\text{س}^2}$ فجد $\text{ل}'(\text{س})$

الحل:

$$\text{ل}'(\text{س}) = \frac{-\pi \times 2\text{س}}{(\text{س}^2)^2} = \frac{-2\pi}{\text{س}^3}$$

مثال

إذا كان هـ قابل للاشتقاق وكان $\text{هـ}(2) = 3$ ، $\text{هـ}'(2) = -1$ فجد $\text{ق}'(2)$ حيث $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س}) - \dfrac{1}{\text{هـ}(\text{س})}$

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}'(\text{س}) - \frac{-1 \times \text{هـ}'(\text{س})}{(\text{هـ}(\text{س}))^2}$$

$$\text{ق}'(2) = \text{هـ}'(2) + \frac{\text{هـ}'(2)}{(\text{هـ}(2))^2}$$

$$= -1 + \frac{-1}{(3)^2}$$

$$= -1 - \frac{1}{9}$$

$$= \frac{-9}{9} - \frac{1}{9} = \frac{-10}{9}$$

نظرية

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ حيث ن عدد صحيح سالب فإن

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$$

البرهان:

ليكن $\text{ن} = -\text{م}$ حيث م عدد صحيح موجب

$$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{-\text{م}}$$

$$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}^{\text{م}}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-1 \times \text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1}}{(\text{س}^{\text{م}})^2}$$

$$= \frac{-\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1}}{\text{س}^{2\text{م}}}$$

$$= -\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1-2\text{م}}$$

$$= -\text{م}\,\text{س}^{-\text{م}-1} \qquad (-\text{م} = \text{ن})$$

$$= \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$$

وهو المطلوب .

Esam Shikh

0796300625

مثال

إذا كان $ق(س) = س^{-٤}$ فجد $قَ(س)$

الحل :

$$قَ(س) = -٤\,س^{-٥}$$

مثال

إذا كان $ق(س) = \dfrac{[\frac{١}{٤}س + ٣]}{|٢س - ١|}$ فجد $قَ(٢)$

الحل :

$$ق(س) = \frac{٣}{٢س - ١}$$

$$قَ(س) = \frac{-٣\,(٢)}{(٢س - ١)^{٢}}$$

$$قَ(٢) = \frac{-٦}{(٤ - ١)^{٢}} = \frac{-٦}{٣^{٢}} = \frac{-٦}{٩} = \frac{-٢}{٣}$$

٢٠٠٨ شتوي

إذا كان $هـ(س) = \dfrac{[٢س + ١]}{ل(س)}$

$هـ(\frac{١}{٢}) = ٢$ ، $هـَ(\frac{١}{٢}) = -١$ فجد $لَ(\frac{١}{٢})$

$\boxed{أ)\ \frac{١}{٤}}$ ب) $-\frac{١}{٤}$ ج) $-\frac{١}{٩}$ د) $\frac{١}{٩}$

الحل :

$$هـ(س) = \frac{١}{ل(س)}$$

$$هـَ(س) = \frac{-١ \times لَ(س)}{(ل(س))^{٢}}$$

$$هـَ(\tfrac{١}{٢}) = \frac{-١ \times لَ(\frac{١}{٢})}{(ل(\frac{١}{٢}))^{٢}}$$

$$-١ = \frac{-لَ(\frac{١}{٢})}{(\frac{١}{٢})^{٢}}$$

$$-\frac{١}{٤} = -لَ(\tfrac{١}{٢})$$

$$\frac{١}{٤} = لَ(\tfrac{١}{٢})$$

$$هـ(\tfrac{١}{٢}) = \frac{١}{ل(\frac{١}{٢})}$$

$$٢ = \frac{١}{ل(\frac{١}{٢})}$$

$$\Leftarrow ل(\tfrac{١}{٢}) = \frac{١}{٢}$$

مشتقة الاقترانات المتشعبة باستخدام قواعد الاشتقاق .

الطريقة والملاحظات

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{ل(س)} & \text{أ} \leq \text{س} \leq \text{ب} \\ \text{هـ(س)} & \text{ب} \leq \text{س} \leq \text{جـ} \end{cases}$$

عند الاشتقاق نحذف اشارة =

$$\text{ق}'\text{(س)} = \begin{cases} \text{ل}'\text{(س)} & \text{أ} < \text{س} < \text{ب} \\ \text{هـ}'\text{(س)} & \text{ب} < \text{س} < \text{جـ} \end{cases}$$

مع مراعاة أن تكون ل ، هـ متصلة على الفترة والتذكير المشتقة عند الاطراف غير موجودة أما بالنسبة للأعداد المتشعبة ندرس اتصالها وقابلية الاشتقاق ثم نكتب ق'(س) بالصيغة النهائية والأمثلة التالية توضح ذلك

مثال

إذا كان
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٨\text{س}^٣ + ٤\text{س} & \text{س} \geq ١ \\ ٨\text{س}^٢ + ١٢\text{س} - ٨ & \text{س} < ١ \end{cases}$$

جد ق'(س) .

الحل:

$$\text{ق}'\text{(س)} = \begin{cases} ٢٤\text{س}^٢ + ٤ & \text{س} > ١ \\ ١٦\text{س} + ١٢ & \text{س} < ١ \end{cases}$$

ندرس اتصال س = ١

ق(١) = ٨ + ٤ = ١٢

$\lim_{\text{س} \to ١^+} \text{ق(س)} = ١٢$

$\lim_{\text{س} \to ١^-} \text{ق(س)} = ٨ + ١٢ - ٨ = ١٢$

⇐ $\lim_{\text{س} \to ١} \text{ق(س)} = ١٢ = \text{ق(١)}$

⇐ ق متصل عند س = ١

نبحث اشتقاق س = ١

$\text{ق}'_+(١) = ٢٤ + ٤ = ٢٨$

$\text{ق}'_-(١) = ١٦ + ١٢ = ٢٨$

⇐ ق'(١) = ٢٨ موجودة

⇐
$$\text{ق}'\text{(س)} = \begin{cases} ٢٤\text{س}^٢ + ٤ & \text{س} \geq ١ \\ ١٦\text{س} + ١٢ & \text{س} < ١ \end{cases}$$

مثال

إذا كان
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٤\text{س}^٣ & \text{س} \leq ١ \\ ٣\text{س}^٤ + ١ & \text{س} > ١ \end{cases}$$

جد ق'(س) .

الحل:

$$\text{ق}'\text{(س)} = \begin{cases} ١٢\text{س}^٢ & \text{س} < ١ \\ ١٢\text{س}^٣ & \text{س} > ١ \end{cases}$$

نبحث اتصال س = ١

ق(١) = ٤

$\lim_{\text{س} \to ١^-} \text{ق(س)} = ٤$

$\lim_{\text{س} \to ١^+} \text{ق(س)} = ٣ + ١ = ٤$

⇐ $\lim_{\text{س} \to ١} \text{ق(س)} = ٤ = \text{ق(١)}$

⇐ ق متصل عند س = ١

نبحث اشتقاق س = ١

$\text{ق}'_-(١) = ١٢$ ، $\text{ق}'_+(١) = ١٢$

⇐ ق'(١) = ١٢ موجودة

⇐

قَ(س) = { ١٢ س² ، س ≤ ١ ؛ ١٢ س³ ، س > ١ }

مثال

إذا كان ق(س) = { ٤ / (س+١) ، س ≤ ١ ؛ س + ١ ، س > ١ }

ابحث قابلية ق للاشتقاق على ح .

الحل:

قَ(س) = { −٤ / (س+١)² ، س < ١ ، س ≠ −١ ؛ ١ ، س > ١ }

ق(−١) غير معرف ⟸ قَ(−١) غير موجودة

بحث اتصال س = ١

ق(١) = ٤/٢ = ٢

نهـا (س ← ١⁻) ق(س) = ٢

نهـا (س ← ١⁺) ق(س) = ٢

⟸ نهـا (س ← ١) ق(س) = ٢ = ق(١)

⟸ ق متصل عند س = ١

بحث اشتقاق س = ١

قَ₋(١) = −٤/٤ = −١

قَ₊(١) = ١

⟸ قَ(١) غير موجودة

⟸ قَ(س) = { −٤ / (س+١)² ، س < ١ ، س ≠ −١ ؛ ١ ، س > ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ، −١ }

٢٠٠٩ شتوي

إذا كان ق(س) = { ٣س² + ٢ ، س > ١ ؛ ٥ ، س = ١ ؛ ٦س + ١ ، س < ١ }

فجد قَ(١)

أ) ٦ ب) ٥ ج) غير موجودة د) صفر

الحل:

بحث الاتصال عند ١

ق(١) = ٥

نهـا (س ← ١⁺) ق(س) = ٣ + ٢ = ٥

نهـا (س ← ١⁻) ق(س) = ٦ + ١ = ٧

⟸ نهـا (س ← ١) ق(س) غير موجودة

⟸ ق غير متصل عند س = ١

⟸ قَ(١) غير موجودة .

٢٠١٠ شتوي

إذا كان ق(س) = [س + ٧] − [س] + |٢س|

حيث س ∈ (−٥ ، −١) فجد قَ(−٣)

أ) ٢ ب) غير موجودة ج) ١٣ د) −٢

الحل:

ق(س) = { ٣ − −٤ + −٢س ، −٤ ≤ س < −٣ ؛ ٤ − −٣ + −٢س ، −٣ ≤ س < −٢ }

ق(س) = { ٧ − ٢س ، −٤ ≤ س < −٣ ؛ ٧ − ٢س ، −٣ ≤ س < −٢ }

⟸ ق متصل عند س = −٣

قَ₋(−٣) = −٢ ، قَ₊(−٣) = −٢

⟸ قَ(−٣) = −٢

٢٠١١ شتوي

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} & س \neq ١ \\ ٣ & س = ١ \end{cases}$

فإن $قَ(١)$ هي

أ) صفر ب) ١ جـ) ٣ $\boxed{\text{د) غير موجودة}}$

الحل:

نبحث اتصال $س = ١$

$ق(١) = ٣$

$\lim_{س \to ١} ق(س) = \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س+١)}{(س-١)} = ١ + ١ = ٢$

⇐ ق غير متصل عند $س = ١$ $\left(\lim_{س \to ١} ق(س) \neq ق(١)\right)$

⇐ $قَ(١)$ غير موجودة.

٢٠١٣ شتوي

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ١ - س^٢ & س \geq ٣ \\ ٣ - ٦س & س < ٣ \end{cases}$

فإن $قَ(٣) =$

أ) ٦ ب) −٦ جـ) −١٥ $\boxed{\text{د) غير موجودة}}$

الحل:

نبحث اتصال $س = ٣$

$ق(٣) = ١ - ٩ = -٨$

$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = -٨$

$\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = ٣ - ١٨ = -١٥$

⇐ $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ غير موجودة

⇐ ق غير متصل عند $س = ٣$

⇐ $قَ(٣)$ غير موجودة.

مثال

إذا كان ق(س) = $س^{٣}$ |س − ٢| فابحث في قابلية الاقتران للاشتقاق على ح .

الحل:

ق(س) = { $س^{٤} - ٢س^{٣}$ ، س ≥ ٢
       { $٢س^{٣} - س^{٤}$ ، س < ٢

قَ(س) = { $٤س^{٣} - ٦س^{٢}$ ، س > ٢
        { $٦س^{٢} - ٤س^{٣}$ ، س < ٢

نبحث اتصال س = ٢

ق(٢) = ١٦ − ٢ × ٨ = ١٦ − ١٦ = صفر

نها ق(س) = صفر
س←٢+

نها ق(س) = ٢ × ٨ − ١٦ = ١٦ − ١٦ = صفر
س←٢−

⇐ نها ق(س) = ١٦ = ق(٢)
س←٢

⇐ ق متصل عند س = ٢

نبحث اشتقاق ق عند س = ٢

قَ+(٢) = ٤ × ٨ − ٦ × ٤
= ٣٢ − ٢٤ = ٨

قَ−(٢) = ٦ × ٤ − ٤ × ٨
= ٢٤ − ٣٢ = −٨

⇐ قَ(٢) غير موجودة

⇐ قَ(س) = { $٤س^{٣} - ٦س^{٢}$ ، س > ٢
          { $٦س^{٢} - ٤س^{٣}$ ، س < ٢
          { غير موجودة ، س = ٢

مثال

إذا كان ق(س) = |س − ٣| ($س^{٢}$ + س)

فجد قَ(س) .

الحل:

ق(س) = { $س^{٣} - ٢س^{٢} - ٣س$ ، س ≥ ٣
       { $-س^{٣} + ٢س^{٢} + ٣س$ ، س < ٣

قَ(س) = { $٣س^{٢} - ٤س - ٣$ ، س > ٣
        { $-٣س^{٢} + ٤س + ٣$ ، س < ٣

نبحث اتصال س = ٣

ق(٣) = ٢٧ − ١٨ − ٩ = صفر

نها ق(س) = صفر
س←٣+

نها ق(س) = −٢٧ + ١٨ + ٩ = صفر
س←٣−

⇐ نها ق(س) = صفر = ق(٣)
س←٣

⇐ ق متصل عند س = ٣

نبحث اشتقاق س = ٣

قَ+(٣) = ٢٧ − ١٢ − ٣ = ٨

قَ−(٣) = −٢٧ + ١٢ + ٣ = −٨

⇐ قَ(٣) غير موجودة

⇐ قَ(س) = { $٣س^{٢} - ٤س - ٣$ ، س > ٣
          { $-٣س^{٢} + ٤س + ٣$ ، س < ٣
          { غير موجودة ، س = ٣

مثال + ٢٠١٥ صيفي (٧ علامات)

إذا كان ق(س) = $\frac{|س^{٢} - ٥س + ٤|}{س(س - ١)}$ حيث

س ∈ (١ ، ٥] فجد قَ(س)

Esam Shikh

0796300625

الحل :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{(٤-\text{س})(\text{س}-١)}{\text{س}(\text{س}-١)} & ١ < \text{س} < ٤ \\[2ex] \dfrac{(\text{س}-٤)(\text{س}-١)}{\text{س}(\text{س}-١)} & ٤ \leq \text{س} \leq ٥ \end{cases}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{-\text{س}^٢+٥\text{س}-٤}{\text{س}^٢-\text{س}} & ١ < \text{س} < ٤ \\[2ex] \dfrac{\text{س}^٢-٥\text{س}+٤}{\text{س}^٢-\text{س}} & ٤ \leq \text{س} \leq ٥ \end{cases}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{(\text{س}^٢-\text{س})(-٢\text{س}+٥)-(-\text{س}^٢+٥\text{س}+٤)(٢\text{س}-١)}{(\text{س}^٢-\text{س})^٢} & ١ < \text{س} < ٤ \\[2ex] \dfrac{(\text{س}^٢-\text{س})(٢\text{س}-٥)-(\text{س}^٢-٥\text{س}+٤)(٢\text{س}-١)}{(\text{س}^٢-\text{س})^٢} & ٤ < \text{س} < ٥ \end{cases}$$

ق'(٥) غير موجودة لأن ٥ طرف

نبحث اتصال س = ٤

$$\text{ق}(٤) = \frac{١٦-٢٠+٤}{١٦-٤} = \text{صفر}$$

$$\lim_{\text{س}\to٤^+} \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر}$$

$$\lim_{\text{س}\to٤^-} \text{ق}(\text{س}) = \frac{-١٦+٢٠-٤}{١٦-٤} = \text{صفر}$$

$\Leftarrow$ $\lim_{\text{س}\to٤} \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر} = \text{ق}(٤)$

$\Leftarrow$ ق متصل عند س = ٤

نبحث اشتقاق س = ٤

$$\text{ق}'_-(٤) = \frac{(١٦-٤)(-٨+٥)-(-١٦+٢٠-٤)(٨-١)}{(١٦-٤)^٢}$$

$$= \frac{-١٢ \times -٣ - \text{صفر}}{(١٢)^٢}$$

$$= \frac{٣٦}{١٤٤}$$

$$\text{ق}'_+(٤) = \frac{(١٦-٤)(٨-٥)-(١٦-٢٠+٤)(٨-١)}{(١٦-٤)^٢}$$

$$= \frac{١٢ \times ٣ - \text{صفر}}{(١٢)^٢}$$

$$= \frac{٣٦}{١٤٤}$$

$\Leftarrow$ ق'(٤) غير موجودة

$\Leftarrow$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{(\text{س}^٢-\text{س})(-٢\text{س}+٥)-(-\text{س}^٢+٥\text{س}-٤)(٢\text{س}-١)}{(\text{س}^٢-\text{س})^٢} & ١ < \text{س} < ٤ \\[2ex] \dfrac{(\text{س}^٢-\text{س})(٢\text{س}-٥)-(\text{س}^٢-٥\text{س}+٤)(٢\text{س}-١)}{(\text{س}^٢-\text{س})^٢} & ٤ < \text{س} < ٥ \\[2ex] \text{غير موجودة} & \text{س} = ٤ ، ٥ \end{cases}$$

مثال

إذا كان ق(س) = |س| (س² + ٦س) فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق لجميع قيم س ∈ ح .

الحل :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٣ + ٦\text{س}^٢ & \text{س} \geq \text{صفر} \\ -\text{س}^٣ - ٦\text{س}^٢ & \text{س} < \text{صفر} \end{cases}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^٢ + ١٢\text{س} & \text{س} > \text{صفر} \\ -٣\text{س}^٢ - ١٢\text{س} & \text{س} < \text{صفر} \end{cases}$$

نبحث اتصال س = صفر

ق(٠) = صفر

$\lim\limits_{س \to ٠^+}$ ق(س) = صفر

$\lim\limits_{س \to ٠^-}$ ق(س) = صفر

⇐ $\lim\limits_{س \to ٠}$ ق(س) = صفر = ق(٠)

⇐ ق متصل عند س = صفر

نبحث اشتقاق ق عند س = صفر

ق′(٠⁻) = صفر ‏ ‏ ‏ ق′(٠⁺) = صفر

⇐ ق′(٠) = صفر موجودة

⇐ ق′(س) = $\begin{cases} ٣س^٢ + ١٢س & س \geq صفر \\ -٣س^٢ - ١٢س & س < صفر \end{cases}$

٣.١٠ صيفي

أيٌ من الاقترانات الآتية يعتبر مثالاً لاقتران متصل وغير قابل للاشتقاق عند س = صفر

أ) ⟦س⟧ ‏ ‏ ‏ $\boxed{\text{ب) } |س|}$

ج) س |س| ‏ ‏ ‏ د) $\frac{س}{٢}$

توضيح

ق(س) = $\begin{cases} س & س > ٠ \\ -س & س \leq ٠ \end{cases}$

ق′(س) = $\begin{cases} ١ & س > ٠ \\ -١ & س < ٠ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠ \end{cases}$

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (قواعد الاشتقاق ٢) ماجستير رياضيات

* ايجاد الثوابت والمشتقة موجودة في الاقتران المتشعب :

مثال + ٢٠١٤ صيفي (٥علامات)

إذا كان ق(س) = { أ س² - ب س ، س ≤ ٢
{ ٤ - ب س³ + أ س ، س > ٢

وكان ق قابل للاشتقاق عند س = ٢ فجد قيمة أ ، ب .

الحل: ق قابل للاشتقاق عند ٢ ⇐ ق متصل عند ٢

⇐

نهـا ق(س) (س ← ٢⁻) = نهـا ق(س) (س ← ٢⁺)

٤أ - ٢ب = ٤ - ٨ب + ٢أ

٢أ + ٦ب = ٤ ← (١)

ق قابل للاشتقاق عند ٢ ⇐ ق'(٢) موجودة

⇐ ق'₊(٢) = ق'₋(٢)

ق'(س) = { ٢أ س - ب ، س < ٢
{ -٣ب س² + أ ، س > ٢

٤أ - ب = -١٢ب + أ

٣أ + ١١ب = صفر ← (٢)

×٣ ٢أ + ٦ب = ٤

×٢ ٣أ + ١١ب = صفر

~~٦أ~~ + ١٨ب = ١٢

− ~~٦أ~~ + ٢٢ب = صفر

-٤ب = ١٢

⇐ ب = -٣

٢أ + ٦×-٣ = ٤

٢أ - ١٨ = ٤

٢أ = ٢٢

⇐ أ = ١١

مثال

إذا كان ق(س) = { س³ - ٤س ، س < -٢
{ ٢س + أ ، س ≥ -٢

وكان ق قابل للاشتقاق عند س = -٢ فجد قيمة أ .

الحل:

ق قابل للاشتقاق عند س = -٢ ⇐

ق متصل عند س = -٢ ⇐

نهـا ق(س) (س ← -٢⁺) = نهـا ق(س) (س ← -٢⁻)

-٨ + ٨ = -٤ + أ

صفر = -٤ + أ

٤ = أ

مثال

إذا كان ق(س) = { س² ، س ≤ ١
{ ٢س + أ ، س > ١

وكان ق قابل للاشتقاق عند س = ١ فجد قيمة أ .

الحل:

ق قابل للاشتقاق عند س = ١ ⇐

ق متصل عند س = ١ ⇐

نهـا ق(س) (س ← ١⁻) = نهـا ق(س) (س ← ١⁺)

١ = ٢ + أ

-١ = أ

Esam Shikh

0796300625

مثال

إذا كان ق(س) = { ل(س) ، س ≤ جـ
 ل′(جـ) (س − جـ) ، س > جـ

ق متصل عند جـ ، ل قابل للاشتقاق عند جـ ، أثبت أن ق قابل للاشتقاق عند جـ ، وجد ق′(جـ)

الحل:

ق متصل عند جـ من المعطيات

ق′₋(س) = ل′(س)

⇐ ق′₋(جـ) = ل′(جـ)

ق′₊(س) = ل′(جـ)

⇐ ق′₊(جـ) = ل′(جـ)

بما أن ق′₋(جـ) = ل′(جـ) = ق′₊(جـ)

⇐ ق قابل للاشتقاق عند جـ

⇐ ق′(جـ) = ل′(جـ)

مثال

إذا كان ق(س) = { أس² + ب س ، س ≤ ١
 ٤ − ب س² + أ س ، س > ١

وكانت ق′(١) موجودة جد قيمة كل من أ ، ب .

الحل:

ق′(١) موجودة ⇐ ق متصل عند س = ١

⇐ نها (س ← ١⁻) ق(س) = نها (س ← ١⁺) ق(س)

~~أ~~ + ب = ٤ − ب + ~~أ~~

٢ب = ٤

⇐ ب = ٢

ق′(س) = { ٢أس + ٢ ، س ≤ ١
 −٤س + أ ، س > ١

ق′(١) موجودة ⇐

ق′₋(١) = ق′₊(١)

٢أ + ٢ = −٤ + أ

٢أ − أ = −٤ − ٢

أ = −٦

٢٠١٢ صيفي

إذا كان ق(س) = { أس² + ب س − ٦ ، س < ٢
 ٥س + ٢ب ، س ≥ ٢

قابلاً للاشتقاق عند س = ٢ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .

الحل:

ق قابل للاشتقاق عند س = ٢ ⇐

ق متصل عند س = ٢ ⇐

نها (س ← ٢⁻) ق(س) = نها (س ← ٢⁺) ق(س)

٤أ + ~~٢ب~~ − ٦ = ١٠ + ~~٢ب~~

٤أ − ٦ = ١٠

٤أ = ١٦

⇐ أ = ٤

ق′(س) = { ٨س + ب ، س < ٢
 ٥ + ٢ب ، س ≥ ٢

ق قابل للاشتقاق عند ٢ ⇐

$\text{ق}'_{-}(2) = \text{ق}'_{+}(2)$

$16 + \text{ب} = 5 + 2\text{ب}$

$16 - 5 = 2\text{ب} - \text{ب}$

$11 = \text{ب}$

٢.١٣ شتوي

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ}\,\text{س}^3 - 2\text{ب}\,\text{س} & \text{س} \le 1 \\ \text{أ}\,\text{س}^2 - 6\text{ب}\,\text{س} - 8 & \text{س} > 1 \end{cases}$

اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س = ١ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .

الحل:

ق قابل للاشتقاق عند س = ١ ⇐

ق متصل عند س = ١ ⇐

$\lim_{\text{س} \to 1^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to 1^+} \text{ق}(\text{س})$

$\cancel{\text{أ}} - 2\text{ب} = \cancel{\text{أ}} - 6\text{ب} - 8$

$4\text{ب} = -8$

⇐ $\text{ب} = -2$

$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 3\text{أ}\,\text{س}^2 + 4 & \text{س} < 1 \\ 2\text{أ}\,\text{س} + 12 & \text{س} > 1 \end{cases}$

ق قابل للاشتقاق عند س = ١ ⇐

$\text{ق}'_{-}(1) = \text{ق}'_{+}(1)$

$3\text{أ} + 4 = 2\text{أ} + 12$

$3\text{أ} - 2\text{أ} = 12 - 4$

$\text{أ} = 8$

٢.١٤ شتوي

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ}\,\text{س}^3 + \text{ب}\,\text{س} & \text{س} < 2 \\ \text{أ}\,\text{س}^2 + 9\text{ب}\,\text{س} - 12 & \text{س} \ge 2 \end{cases}$

وكانت ق'(٢) موجودة فجد قيمة كلا من أ ، ب .

الحل:

ق'(٢) موجودة ⇐ ق متصل عند ٢ ⇐

$\lim_{\text{س} \to 2^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to 2^+} \text{ق}(\text{س})$

$8\text{أ} + 2\text{ب} = 4\text{أ} + 18\text{ب} - 12$

$4\text{أ} - 16\text{ب} = -12 \quad \leftarrow (1)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 3\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب} & \text{س} < 2 \\ 2\text{أ}\,\text{س} + 9\text{ب} & \text{س} > 2 \end{cases}$

ق'(٢) موجودة ⇐

$\text{ق}'_{-}(2) = \text{ق}'_{+}(2)$

$12\text{أ} + \text{ب} = 4\text{أ} + 9\text{ب}$

$8\text{أ} - 8\text{ب} = \text{صفر} \quad \leftarrow (2)$

$4\text{أ} - 16\text{ب} = -12$

$8\text{أ} - 8\text{ب} = \text{صفر} \quad \times 2$

$4\text{أ} - 16\text{ب} = -12$

$16\text{أ} - 16\text{ب} = \text{صفر} \quad -$

$-12\text{أ} = -12 \quad \Leftarrow \quad \text{أ} = 1$

$8 \times 1 - 8\text{ب} = \text{صفر}$

$8 = 8\text{ب}$

⇐ $\text{ب} = 1$

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (قواعد الاشتقاق (٢)) ماجستير رياضيات

٢٠١٠ شتوي

إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س = ٢ وكان ٣ ق(٢) = ٩ وكانت $\lim\limits_{س \to ٢}$ ل ق(س) = ٤ فإن قيمة ل =

أ) ١ ب) $\boxed{\frac{٤}{٣}}$ ج) $\frac{٤}{٩}$ د) $\frac{٢}{٣}$

الحل:

ق قابل للاشتقاق عند ٢ ⇐ ق متصل عند ٢ ⇐

ق(٢) = $\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س)

من المعطيات ق(٢) = $\frac{٩}{٣}$ = ٣

الآن

$\lim\limits_{س \to ٢}$ ل ق(س) = ٤

ل × $\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س) = ٤

ل × ٣ = ٤ ⇐ ل = $\frac{٤}{٣}$

٢٠١٦ صيفي

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس^{٢} + ٤ب س - ٨ & ، س < ١ \\ أس^{٣} - ب س + ٢ & ، س \geq ١ \end{cases}$

وكانت قَ(١) موجودة فجد قيمة كل من الثابتين أ، ب .

الحل:

بما أن قَ(١) موجودة ⇐ ق متصل عند س = ١ ⇐

$\lim\limits_{س \to ١^{+}}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ١^{-}}$ ق(س)

$\cancel{أ}$ + ٤ب − ٨ = $\cancel{أ}$ − ب + ٢

٥ب = ١٠

ب = ٢

قَ(س) = $\begin{cases} ٢أس + ٨ & ، س < ١ \\ ٣أس^{٢} - ٢ & ، س \geq ١ \end{cases}$

قَ(١) موجودة ⇐

قَ(١^{+}) = قَ(١^{-})

٢أ + ٨ = ٣أ − ٢

٨ + ٢ = ٣أ − ٢أ

١٠ = أ

٢٠١٨ شتوي قديم

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس^{٢} + ب س & ، س \geq ٢ \\ ب س^{٣} + أس + ٨ & ، س < ٢ \end{cases}$

وكانت قَ(٢) موجودة فجد قيمة أ، ب

الحل:

ق(٢) موجودة ⇐ ق متصل عند ٢

⇐ $\lim\limits_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ٢^{-}}$ ق(س)

٤أ + ٢ب = ٨ب + ٢أ + ٨

٢أ − ٦ب = ٨ ← (١)

قَ(س) = $\begin{cases} ٢أس + ب & ، س > ٢ \\ ٣ب س^{٢} + أ & ، س < ٢ \end{cases}$

قَ(٢) موجودة ⇐

قَ(٢^{+}) = قَ(٢^{-})

٤أ + ب = ١٢ب + أ

٣أ − ١١ب = صفر ← (٢)

٢أ − ٦ب = ٨ ×٣

٣أ − ١١ب = صفر ×٢

$\cancel{٦أ}$ − ١٨ب = ٢٤

$\cancel{٦أ}$ − ٢٢ب = صفر −

٤ب - ٢٢

⇐ ب

٣م - ١١ × ٦ = صفر

٣م - ٦٦ = صفر

٣م = ٦٦

م = ٦٦ / ٣ ⇐ م = ٢٢

Esam Shikh

0796300625