

رياضيات (العلمي) الوحدة (النهايات والاتصال) عصام محمد الشيخ

ماجستير رياضيات

(الفصل الأول)

الاتصال على فترة

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

Esam Shikh

0796300625

مثال

إذا كان

$$\left. \begin{aligned} \text{فر } (س) = 2 + 3س^2 \\ \text{فر } (س) = 4 + 3س \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} 1 > 3 \geq 2 \\ 0 > 3 \geq 1 \end{aligned}$$

فابحث في اتصال الاقتران فر على الفترة $[2, 3]$

الحل:



$[2, 3]$ فر متصل لأنه على صورة كثير حدود
 $(0 < 1)$ فر متصل لأنه على صورة كثير حدود

نبحث اتصال $س = 1$

$$\text{فر } (1) = 4 + 1 = 5$$

$$\begin{aligned} \text{نظا فر } (س) = 0 \\ 4 + 3س \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{نظا فر } (س) = 2 + 2 = 4 \\ -1 + 3س \end{aligned}$$

← نظا فر (س) يتر موجودة

⇔ فر يتر متصل عند $س = 1$

⇔ فر متصل على $[2, 3] - \{1\}$

عماد الشيخ
 عمان طبربور
 جامعة آل البيت
 0796300625

تعريف

إذا كان فر اقترانا "معرفا" على الفترة $[a, b]$ فإن

(١) فر يكون متصلا على الفترة (a, b)
 إذا كان متصل بكل $س$ من (a, b)

(٢) فر يكون متصل عند $س = P$ من اليمين إذا كان

$$\text{فر } (P) = \text{نظا فر } (س) \\ + P < 3$$

(٣) فر يكون متصل عند $س = P$ من اليسار إذا كان

$$\text{فر } (P) = \text{نظا فر } (س) \\ - P < 3$$

(٤) فر يكون متصل على الفترة $[a, b]$ إذا كان

فر متصل على (a, b)
 فر متصل من يمين P
 فر متصل من يسار b

مثال

إذا كان

$$\text{فر } (س) = 5س^2$$

$$0 > 3 \geq 3$$

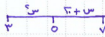
$$7 > 3 \geq 0$$

$$7 = 3$$

$$\left. \begin{aligned} \text{فر } (س) = 5س^2 \\ \text{فر } (س) = 9 \end{aligned} \right\}$$

ابحث في اتصال فر على الفترة $[3, 7]$

الحل:



$[3, 7]$ فر متصل لأنه على صورة كثير حدود
 $(7 < 0)$ فر متصل لأنه على صورة كثير حدود

نُها فر (س) = فر (١)
١٤٣

⇐ فر متصل عند س = ١

⇐ فر متصل على [-٢, ٢]

نُبْحَث اتّصال ٧ من اليسار

فر (٧) = ٩

نُها فر (س) = ٧ + ٢ = ٩
-٧٤٣

⇐ فر غير متصل من يسار ٧

عمام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

نُبْحَث اتّصال س = ٥

فر (٥) = ٥ + ٥ = ١٠

نُها فر (س) = ٥ + ٥ = ١٠

⇐ نُها فر (س) = ٥ + ٥ = ١٠

نُها فر (س) = ٥ = ٥
-٥٤٣

نُها فر (س) = فر (٥)
٥٤٣

⇐ فر متصل عند س = ٥

⇐ فر متصل على [٣, ٧]

٣٠٠٨ صيفي

إذا كان

ق (س) = [س] + س

٠ > س > ١

٢ ≥ س ≥ ٠

فابحث في اتصال فر على [-١, ٢]

الحل:

فر (س) = [س] + ١ - س

٠ > س > ١

٢ ≥ س ≥ ٠



[٠, ١) فر متصل لأنه على صورة كثير حدود

[٢, ٢] فر متصل لأنه مجموعة أختراعات

متصلة على الفترة .

نُبْحَث اتّصال س = ٠

فر (٠) = [٠] + ١ - ٠ = ١

نُها فر (س) = ١
+٠٤٣

نُها فر (س) = ١ - ٠ = ١
-٠٤٣

نُها فر (س) غير موجودة
٠٤٣

⇐ فر غير متصل عند س = ٠

⇐ فر متصل على [-٢, ١) - {صفر}

مثال

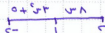
إذا كان فر (س) = [س] + ٣س + ٥

١ > س > ٢

٢ ≥ س ≥ ١

فابحث في اتصال فر على [-٢, ٢]

الحل:



[-٢, ١) فر متصل لأنه على صورة كثير حدود

[٢, ٢] فر متصل لأنه على صورة كثير حدود

نُبْحَث اتّصال س = ١

فر (١) = ١ × ١ = ١

نُها فر (س) = ١ + ١ = ٢

نُها فر (س) = ١ + ١ × ٢ = ٣
-١٤٣

نُها فر (س) = ١
١٤٣

٣.٩ شتوي

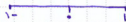
إذا كان

$$\left. \begin{aligned} \text{فـر(س)} &= \sqrt{s} + \sqrt{s} \\ \text{فـر(س)} &\geq 1 - \sqrt{s} \\ \text{فـر(س)} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{ق (س)} &= \sqrt{s} + \sqrt{s} \\ \text{ق (س)} &\geq 1 - \sqrt{s} \\ \text{ق (س)} &\geq 0 \end{aligned}$$

فابحث في اتصال هـ على الفترة $[-1; 1]$

الحل:

$$\left. \begin{aligned} \text{ق (س)} &= \sqrt{s} + \sqrt{s} \\ \text{ق (س)} &\geq 1 - \sqrt{s} \\ \text{ق (س)} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{ق (س)} &= \sqrt{s} + \sqrt{s} \\ \text{ق (س)} &\geq 1 - \sqrt{s} \\ \text{ق (س)} &= 0 \end{aligned}$$



$[-1; 1]$ هـ متصل لأنه مجموعة اقترانات متصلة على الفترة .

$(0; 1)$ هـ متصل لأنه على صورة كثير حدود

$$س = 1 \text{ من اليسار}$$

$$\text{فـر(١)} = ٤$$

$$\text{نـها(فـر(س))} = ٢ - ٠ = ٢ - ١٤٣$$

⇐ هـ غير متصل من اليسار

$$س = ٠$$

$$\text{فـر(٠)} = ٢ - ٠ = ٢ - ٠ \times ٥ = ٢ - ٠$$

$$\text{نـها(فـر(س))} = ٢ - ٠ + ٠٤٣$$

$$\text{نـها(فـر(س))} = \sqrt{٠} + \sqrt{٠} = ٠ + ٠ = ٠ - ٠٤٣$$

⇐ نـها(فـر(س)) غير موجودة

⇐ هـ غير متصل عند س = ٠

⇐ هـ متصل على $[-1; 1]$ - {٠}

٣.٩ صيفي

إذا كان

$$\left. \begin{aligned} \text{ق (س)} &= \sqrt{s} + \sqrt{s} \\ \text{ق (س)} &\geq 1 - \sqrt{s} \\ \text{ق (س)} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{ق (س)} &= \sqrt{s} + \sqrt{s} \\ \text{ق (س)} &\geq 1 - \sqrt{s} \\ \text{ق (س)} &\geq 0 \end{aligned}$$

فابحث في اتصال هـ على $[-1; 1]$

الحل:

$$\left. \begin{aligned} \text{ق (س)} &= \sqrt{s} + \sqrt{s} \\ \text{ق (س)} &\geq 1 - \sqrt{s} \\ \text{ق (س)} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{ق (س)} &= \sqrt{s} + \sqrt{s} \\ \text{ق (س)} &\geq 1 - \sqrt{s} \\ \text{ق (س)} &\geq 0 \end{aligned}$$



$[-1; 1]$ هـ متصل لأنه مجموعة اقترانات متصلة على الفترة .

$(0; 1)$ هـ متصل لأنه نسبي معرف على الفترة

نبحث اتصال ٣ من اليسار

$$\text{فـر(٣)} = ٦$$

$$\text{نـها(فـر(س))} = \frac{٤}{١+٣} = \frac{٤}{٤} = ١$$

⇐ هـ غير متصل عند ٣ من اليسار

نبحث اتصال س = ٠

$$\text{ق (٠)} = \frac{٤}{١+٠} = \frac{٤}{١} = ٤$$

$$\text{نـها(فـر(س))} = ٤ + ٠٤٣$$

$$\text{نـها(فـر(س))} = \sqrt{٠} + \sqrt{٠} = ٠ + ٠ = ٠ - ٠٤٣$$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

$$\begin{aligned} \text{فد } (3) &= \sqrt{\quad} \\ \text{نها } \text{فد } (3) &= 0 \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

فد غير متصل من اليسار 3

فد متصل عند $s=3$ من المحيطات

فد متصل على $(3, 0)$

نها $\text{فد } (3)$ غير موجودة

ق غير متصل عند $s=3$
فد متصل على $(3, 0) - \{0\}$

2.1. شتوي

$$\left. \begin{aligned} 3 > s > 0 & \quad s + \frac{p}{s} \\ 3 > s > 2 & \quad 3 + [s] \\ 3 = s & \quad \sqrt{\quad} \end{aligned} \right\} \text{إذا كان ق } (s) =$$

وكان فد متصلًا عند $s=3$ فأجب عما يأتي
① جد قيمة الثابت p
② ابحث في اتصال فد على الفترة $(3, 0)$

الحل:

$$\left. \begin{aligned} 3 \geq s > 0 & \quad s + \frac{p}{s} \\ 3 > s > 2 & \quad 0 \\ 3 = s & \quad \sqrt{\quad} \end{aligned} \right\} \text{ق } (s) =$$

① فد متصل عند $s=3$
فد $(3) =$ نها $\text{فد } (3)$
 $+ 3\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon + \frac{p}{\varepsilon} \\ 3 = p &\leftarrow 1 = \frac{p}{\varepsilon} \end{aligned}$$

③



(3, 0) ق متصل لأنه مجموعة افتراضات متصلة على الفترة

(3, 2) ق متصل لأنه على صورة كثير حدود

نبحث اتصال 3 من اليسار

2.1. صيفي

$$\left. \begin{aligned} 1 - s \geq 3 & \quad \frac{1-s}{1+s} \\ 1 > s \geq 1 - s & \quad 1 + [s] \end{aligned} \right\} \text{ق } (s) =$$

ابحث اتصال فد على $(1, 3)$

$$\left. \begin{aligned} 1 - s \geq 3 & \quad \frac{1-s}{1+s} \\ 1 > s \geq 1 - s & \quad 1 + s \\ 1 > s \geq 0 & \quad 1 \end{aligned} \right\} \text{الحل: ق } (s) =$$



(1, 3) فد متصل لأنه معرف على الفترة

(0, 1) ق متصل لأنه على صورة كثير حدود

(1, 0) ق متصل لأنه على صورة كثير حدود

نبحث اتصال $s=1$

$$\text{فد } (1) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{نها } \text{فد } (1) = 2 + 1\sqrt{3}$$

$$\text{نها } \text{فد } (1) = \frac{(1+s)(1-s)}{(1+s) - 1\sqrt{3}} = \frac{1-s^2}{1-\sqrt{3}}$$

$$2 = 1 - 1 =$$

← زها فر (س) غير موجودة
١-٤٣

← فر غير متصل عند س = ١

نبحث اتصال س = ٠

فر (٠) = ١

زها فر (س) = ١
+ ٠.٤٣

زها فر (س) = ١ + ٠ = ١
- ٠.٤٣

زها فر (س) = ١
٠.٤٣

زها فر (س) = فر (٠)

← فر متصل عند س = ٠

← فر متصل على $(-١, ٢]$ - $\{١\}$

٣.١٩ شتوي جديد

إذا كان

فر (س) = $\sqrt{[١+٣]س^٢ + ٣س}$ \exists س $\in [٣, ٤]$
فابحث في اتصال الاقتران فر على مجاله
الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{٣س^٢ + ٣} \\ \sqrt{٣س^٢ + ٣س} \\ \sqrt{٣س^٢ + ٤س} \end{array} \right\} = \text{فر (س)}$$



$[٢, ٤]$ فر متصل لأنه معرف على مجاله

$(٣, ٢)$ فر متصل لأنه معرف على مجاله

س = ٣

$$\text{فر (٣)} = \sqrt{٤ \times ٣ + ٣} = \sqrt{١٥}$$

$$\text{زها فر (س)} = \sqrt{١٥} + ٢.٤٣$$

$$\text{زها فر (س)} = \sqrt{١٢ + ٢} = \sqrt{١٤} - ٢.٤٣$$

← زها فر (س) غير موجودة

← فر غير متصل عند س = ٣

س = ٣ (من اليسار)

$$\text{فر (٣)} = \sqrt{١٣ + ٤} = \sqrt{١٧} = ٤$$

$$\text{زها فر (س)} = \sqrt{١٣ + ٣} = \sqrt{١٥} - ٣.٤٣$$

← فر (٣) \neq زها فر (س)
٣.٤٣

← فر غير متصل من يسار ٣

← فر متصل على $(١, ٣) - \{٢\}$

٣.١٩ صيفي جديد (٣.١٩)

إذا كان فر (س) = $\sqrt{٣-س}$ فإن الاقتران فر متصل على الفترة

(٤) $(-\infty, ٠]$ (ب) $(٠, \infty)$

(ج) $(\infty, ٠]$ (د) $(٠, \infty)$

(-∞ < a) ل متصل لأنه نسبي معروف على الفترة
(a < ∞) ل متصل لأنه نسبي معروف على الفترة

نبحث اتصال ل عند s = 0
ل(0) = 0 + 0 = 0

نها ل(s) = $\frac{5s - 3}{5 - s}$ نها ل(s) = $\frac{0 - 3}{5 - 0} = \frac{-3}{5}$

نها ل(s) = $\frac{(5+s)(0-s)}{(0-s)}$ نها ل(s) = $\frac{0 - 5}{0} = \frac{-5}{0}$

ل(0) = 0 + 0 = 0

عصام الشيخ
عماد طبرور
جامعة آل البيت
0796300625

نها ل(s) = ل(0) = 0

← ل متصل عند s = 0
← ل متصل على ح .

مثال
إذا كان
ع(س) = $\frac{7s - 3}{s - 3}$ }
ع(س) = $\frac{7s - 3}{s - 3}$ }
ع(س) = $\frac{7s - 3}{s - 3}$ }
ع(س) = $\frac{7s - 3}{s - 3}$ }
ع(س) = $\frac{7s - 3}{s - 3}$ }

ابحث اتصال ع على مجاله

الحل:



(-∞ < 3) ع متصل لأنه نسبي معروف على الفترة
والفترة (3 < ∞) ليست من الفترة

(3 < ∞) ع متصل لأنه على صورة كسر حدود
نبحث اتصال ع عند s = 3
ع(3) = $\frac{7 \cdot 3 - 3}{3 - 3} = \frac{18}{0}$

ع(3) = $\frac{7 \cdot 3 - 3}{3 - 3} = \frac{18}{0} = \frac{18}{0}$

نها ع(س) = $\frac{7 \cdot 3 - 3}{3 - 3} = \frac{18}{0}$

نها ع(س) = $\frac{7 \cdot 3 - 3}{3 - 3} = \frac{18}{0}$

← نها ع(س) غير موجودة
ع(3) = $\frac{7 \cdot 3 - 3}{3 - 3} = \frac{18}{0}$

← ع غير متصل عند s = 3
← ع متصل على ح - {3}

مثال

إذا كان ع(س) = $\frac{5s - 3}{s - 3}$ }
ع(س) = $\frac{5s - 3}{s - 3}$ }
ع(س) = $\frac{5s - 3}{s - 3}$ }

ع(س) = $\frac{5s - 3}{s - 3}$ }
ع(س) = $\frac{5s - 3}{s - 3}$ }
ع(س) = $\frac{5s - 3}{s - 3}$ }
ع(س) = $\frac{5s - 3}{s - 3}$ }
ع(س) = $\frac{5s - 3}{s - 3}$ }

فابحث في اتصال الاقتران ع على ح .

الحل:



(-∞ < 3) ع متصل لأنه نسبي معروف على الفترة
(3 < ∞) ع متصل لأنه على صورة كسر حدود

نبحث اتصال ع عند s = 3
ع(3) = $\frac{5 \cdot 3 - 3}{3 - 3} = \frac{12}{0}$

ع(3) = $\frac{5 \cdot 3 - 3}{3 - 3} = \frac{12}{0}$

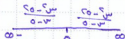
نها ع(س) = $\frac{5 \cdot 3 - 3}{3 - 3} = \frac{12}{0}$

نها ع(س) = $\frac{5 \cdot 3 - 3}{3 - 3} = \frac{12}{0}$

مثال
إذا كان ل(s) = $\frac{5s - 3}{5 - s}$ }
ل(s) = $\frac{5s - 3}{5 - s}$ }
ل(s) = $\frac{5s - 3}{5 - s}$ }
ل(s) = $\frac{5s - 3}{5 - s}$ }
ل(s) = $\frac{5s - 3}{5 - s}$ }

ابحث في اتصال الاقتران ل على مجاله

الحل:



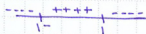
٣.١٨ صيفي جديد
 إذا كان $Q(s) = \frac{1-s}{s^2-1}$ فإن
 $Q(s)$ متصل في الفترة

(أ) $[-1, 1]$ (ب) $(-1, 1)$
 (ج) $(-1, \infty)$ (د) $(\infty, 1)$

الحل:

هو متصل على مجاله
 وأذن نجد المجال

$$\begin{aligned} 0 &= s^2 - 1 \\ s &= 1 \\ s &= \pm 1 \end{aligned}$$



ما داخل الجذر يجب ان يكون موجباً

$s = 1$ تجعل المقام = صفر
 $s = -1$ تجعل المقام = صفر

← المجال $(-1, 1)$

وهي فترة الاتصال

$$\begin{aligned} = & \frac{(s^2+3s+9)(s^2-3s)}{(s^2-3s)} - 3e^s \\ = & (9+9+9) - = 27 \end{aligned}$$

عصام الشيخ
 عمان طبربور
 جامعة آل البيت
 0796300625

← نها $Q(s)$ غير موجودة $3e^s$

← e غير متصل عند $s = 3$

← e متصل على $]-\infty, 3[$

٣.١٨ شتوي

ليكن $f(s) = \begin{cases} s^3 & s > 1 \\ s^3 - 1 & s \leq 1 \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران f لجميع قيم
 s الحقيقية

الحل:



$(-\infty, 1)$ هو متصل لأنه على صورة كثير حدود
 $(1, \infty)$ هو متصل لأنه مجموعة اقتران
 متصله على الفترة .

نبحث اتصال $s = 1$

$$f(1^-) = 1 - 1 = 0 = f(1) = 1 = f(1^+)$$

$$\begin{aligned} \text{نها } f(s) &= 1 \\ &+ 1e^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{نها } f(s) &= 1 \\ &- 1e^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{نها } f(s) &= 1 \\ &+ 1e^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{نها } f(s) &= f(1) \\ &+ 1e^s \end{aligned}$$

هو متصل عند $s = 1$
 هو متصل على \mathbb{R}

(١.٠, ٠.٩] فـ متصل لأنه على صورة كثير حدود

نبحث اتصال فـ عند $s = ٠.١$.

$$f(٠.١) = ٠.١ - ٠.١ = ٠ \text{ صفر}$$

$$f(٠.١) = ٠.١ - ٠.١ = ٠ \text{ صفر}$$

$$f(٠.١) = ٠.١ - ٠.١ = ٠ \text{ صفر}$$

$$f(٠.١) = ٠.١ - ٠.١ = ٠ \text{ صفر}$$

عصام الشيخ
عمان طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

$$f(٠.١) = ٠.١ - ٠.١ = ٠ \text{ صفر}$$

$$\Leftarrow \text{فـ متصل عند } s = ٠.١$$

$$\Leftarrow \text{فـ متصل على } [٠.٩, ٠.١]$$

مثال

إذا كان $f(x) = |9 - 3x|$ فابحث في اتصال الاقتران على الفترة $[٠, ١]$

الحل:

$$f(x) = |9 - 3x| \begin{cases} 3 > 3 \geq 1 \\ 0 \geq 3 \geq 3 \end{cases}$$



$f(x) = |9 - 3x|$ فـ متصل لأنه على صورة كثير حدود
 $f(x) = |9 - 3x|$ فـ متصل لأنه على صورة كثير حدود

نبحث اتصال فـ عند $s = ٣$

$$f(3) = |9 - 3 \times 3| = 9 - 9 = 0 \text{ صفر}$$

فـ متصل عند $s = ٣$

$$f(3) = |9 - 3 \times 3| = 9 - 9 = 0 \text{ صفر}$$

$$f(3) = |9 - 3 \times 3| = 9 - 9 = 0 \text{ صفر}$$

$$f(3) = |9 - 3 \times 3| = 9 - 9 = 0 \text{ صفر}$$

$$\Leftarrow \text{فـ متصل عند } s = ٣$$

$$\Leftarrow \text{فـ متصل على } [٠, ١]$$

مثال

إذا كان $f(x) = |10 - 3x|$ فابحث في اتصال الاقتران ل على الفترة $[-١, ١]$

الحل:

$$f(x) = |10 - 3x| \begin{cases} 10 > 3 \geq 1 \\ ٨ > 3 \geq ٥ \end{cases}$$

$f(x) = |10 - 3x|$ فـ متصل لأنه على صورة كثير حدود
 $f(x) = |10 - 3x|$ فـ متصل لأنه على صورة كثير حدود



نبحث اتصال ل عند $s = ١٠$

$$f(10) = |10 - 3 \times 10| = 10 - 30 = -20 \text{ صفر}$$

$$f(10) = |10 - 3 \times 10| = 10 - 30 = -20 \text{ صفر}$$

$$f(10) = |10 - 3 \times 10| = 10 - 30 = -20 \text{ صفر}$$

$$f(10) = |10 - 3 \times 10| = 10 - 30 = -20 \text{ صفر}$$

مثال

إذا كان $f(x) = |٣ - ١.٠|$ فابحث في اتصال الاقتران على الفترة $[٠.٩, ٠.١]$

الحل:

$$f(x) = |٣ - ١.٠| \begin{cases} ١.٠ > ٣ \geq ١ \\ ١.٠ > ٣ \geq ١ \end{cases}$$



$f(x) = |٣ - ١.٠|$ فـ متصل لأنه على صورة كثير حدود

عصام الشيخ
عصام طبربور
جامعة آل البيت
0796300625

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L \iff$$

$$\iff L \text{ متصل عند } x = 0$$

$$\iff \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$$

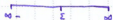
مثال

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{عند } x > 0 \\ \text{عند } x < 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{عند } x > 0 \\ \text{عند } x < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{فابحث في} \\ \text{الاتصال لـ } f(x) \text{ عند مجاله} \end{array}$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \text{عند } x > 0 \\ \text{عند } x < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L \end{array}$$



(-∞, ∞) لمتصل لأنه معرف على الفترة
(∞, ∞) لمتصل لأنه على صورة كثير حدود

$$\begin{aligned} \text{ببحث اتصال ل عند } x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 16 - 16 = 0 \\ \text{نها لـ } f(x) = 0 \\ \text{نها لـ } f(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \\ \hline \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \end{array}$$

$$\iff \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\iff \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\iff \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

مثال

$$\left. \begin{array}{l} 3 = s \\ 4 > s > 2 \\ 4 = s \end{array} \right\} = (s) \text{ كان } \left. \begin{array}{l} 0 \\ 0 + [s] \\ 4 \end{array} \right\}$$

فابحث في اتصال ξ على الفترة $[4 < 3]$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} 3 = s \\ 4 > s > 2 \\ 4 = s \end{array} \right\} = (s) \xi \left. \begin{array}{l} 0 \\ 8 \\ 4 \end{array} \right\}$$



ξ متصل لأنه على صورة كثير حدود

نبحث اتصال 3 من اليمين

$$\left. \begin{array}{l} 0 = (3) \xi \\ 8 = (3) \xi \\ + 3 \times 3 \end{array} \right\}$$

ξ غير متصل من يميناً 3

نبحث اتصال 4 من اليسار

$$\left. \begin{array}{l} 4 = (4) \xi \\ 8 = (4) \xi \\ - 4 \times 3 \end{array} \right\}$$

ξ غير متصل من يسار 4

ξ متصل على $(4 < 3)$

مثال

$$\left. \begin{array}{l} 2 > s \\ 4 > s \geq 2 \\ 4 < s \end{array} \right\} = (s) \xi \left. \begin{array}{l} s^2 \\ [2 + s \cdot 0] \\ \frac{30}{37 - s} \end{array} \right\}$$

فابحث في اتصال ξ لجميع قيم s الحقيقية

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} 2 > s \\ 4 > s \geq 2 \\ 4 < s \end{array} \right\} = (s) \xi \left. \begin{array}{l} s^2 \\ 3 \\ \frac{30}{37 - s} \end{array} \right\}$$

عصام الشيخ
عصام طبربور
جامعة آل البيت
0796300625



$(-\infty, \infty)$ ξ متصل لأنه على صورة كثير حدود

$(4 < 3)$ ξ متصل لأنه على صورة كثير حدود

$(4 < 3)$ ξ متصل على الفترة ما عدا $s=3$

نبحث اتصال ξ عند $s=3$

$$\xi = (3)$$

$$\xi = (3) \xi$$

$$+ 3 \times 3$$

$$\xi = 2 \times 2 = (3) \xi$$

$$- 3 \times 3$$

ξ متصل من يسار $s=3$

ξ غير متصل عند $s=3$

نبحث الاتصال ξ عند $s=3$

$$1 - = \frac{30}{37 - s} = \frac{30 \times 0}{37 - 3} = (3) \xi$$

$$\xi = (3) \xi$$

$$+ 4 \times 3$$

$$3 = (3) \xi$$

$$- 4 \times 3$$

ξ متصل من يسار $s=3$

ξ غير متصل عند $s=3$

ξ متصل على $(3 < 2 < 3)$

مثال

إذا كان (s) عدد صحيح $\Rightarrow \begin{cases} s + [s] \\ -s \geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow s \geq 0 \Rightarrow \frac{s+1}{2} + \sqrt{s}$

فابحث في اتصال الاضتان ق على $[2, 1]$

الحل:

ق $(s) = \begin{cases} 1-s \\ -s \geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow s \geq 0 \Rightarrow \frac{s+1}{2} + \sqrt{s}$



$[-1, 0)$ عدد متصل لأنه على صورة كثير حدود
 $(0, 1]$ عدد متصل لأنه مجموع اقتريبات متطابقة

بحث اتصال ه عند $s = 0$
 عدد $(0) = 0 + 0 = 0$ صفر

نهما عدد $(s) = 0 + 0 = 0$ صفر

نهما عدد $(s) = 1 - 0 = 1$
 $-0.4s$

← نهما عدد (s) غير موجوده
 $.4s$

← ه غير متصل عند $s = 0$ صفر

← ه متصل على $[2, 1] - \{صفر\}$

٣.٨ شتوي

إذا كان (s) عدد صحيح $\Rightarrow \begin{cases} s + [s] \\ 1 = s \end{cases}$

$\Leftrightarrow s \geq 0 \Rightarrow \frac{s+1}{2} + \sqrt{s}$

فان ه متصل على الفترة

(ب) $(2, 1)$

(P) $[2, 1]$

(G) $[2, 1]$

(ج) $[2, 1]$

$\begin{cases} s = 1 \\ 1 > s > 1 \\ s = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \\ 0 + 1 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow (s)$

الحل:

$(2, 1)$ ه متصل لأنه على صورة كثير حدود

$s = 1$ من اليمين

عدد $(1) = 3$ ، نهما عدد $(s) = 1 + 1 = 2$

ه غير متصل من اليمين

$s = 3$ من اليسار

عدد $(3) = 4$ ، نهما عدد $(s) = 3 - 0.4s = 2$

ه غير متصل من اليسار

← ه متصل على $(2, 1)$

مثال

إذا كان
ق(س) =

$$3 > s \geq 0$$

$$\sqrt{1+s}$$

$$6 > s \geq 3$$

$$[2 + s \cdot 250]$$

$$7 = s$$

$$|s - 9|$$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [٦,٠]

الحل:

$$3 > s \geq 0$$

$$\sqrt{1+s}$$

$$6 > s \geq 3$$

$$2$$

$$7 > s \geq 4$$

$$3$$

$$7 = s$$

$$s - 9$$



ق(٣,٠) فمتصل لأنه معرف على الفترة .
ق(٤,٣) فمتصل لأنه على صورة كثير حدود
ق(٦,٤) فمتصل لأنه على صورة كثير حدود

نبحث اتصال ٦ من اليسار

$$3 = 7 - 4 = (٦)$$

$$3 = (٣)$$

$$-7 \leftarrow 3$$

فمتصل من يسار ٦

$$3 = 3$$

$$3 = (٣)$$

$$3 = (٣)$$

$$3 = (٣)$$

$$3 = (٣)$$

$$3 = \sqrt{1+3} = (٣)$$

$$-3 \leftarrow 3$$

$$3 = (٣)$$

$$3 = (٣)$$

$$\text{زها فر(س) = فر(٣)}$$

$$\leftarrow \text{فمتصل عند } s = 3$$

$$\text{نبحث اتصال } s = 4$$

$$\text{فر(٤) = } 3$$

$$\text{نما فر(س) = } 3$$

$$\text{زها فر(س) = } 3$$

$$\leftarrow \text{فمتصل عند } s = 4$$

$$\leftarrow \text{فمتصل عند } s = 4$$

$$\leftarrow \text{فمتصل على } [٦,٠] - \{٤\}$$

٣.١١ شتوي

$$\text{ق(س) = } \sqrt{s+3}$$

ابحث في اتصال فر على الفترة [٣,١]

الحل:

$$3 > s > 1$$

$$\sqrt{s+1}$$

$$3 > s \geq 2$$

$$\sqrt{s+2}$$

ق(٣,١) فمتصل لأنه معرف على الفترة

نبحث اتصال ٣ من اليسار

$$3 = \sqrt{1+2} = \sqrt{3+2} = (3)$$

$$\text{نما فر(س) = } \sqrt{3+1} = 2$$

$$\leftarrow \text{فمتصل من يسار } 3$$

$$\leftarrow \text{فمتصل على } [٣,١]$$

رياضيات (العلمي) الوحدة (النهايات والاتصال) عصام محمد الشيخ

الفصل (1) العنوان (الاتصال على فترة) ماجستير رياضيات

← فـ غير متصل عند $s = 2$
 ← فـ متصل على $x \in \{2\}$

عصام الشيخ
 عمان طبربور
 جامعة اليمث
 0796300625

3.13 شتوي

ليكن $f(x) = 9 - x^2$ $x \geq 2$

$[2, 3]$ $x \geq 2$

$|x - 2| < \epsilon$ $x < 2 + \epsilon$

ابحث اتصال فـ على مجموعة الأعداد الحقيقية

الحل:

ق(س) = $9 - s^2$ $s \geq 2$

صفر $s > 2$ $s \geq 2$

$s - 2 < \epsilon$ $s < 2 + \epsilon$



$(-\infty, 2)$ ق متصل لأنه على صورة كثير حدود

$(2, 3)$ ق متصل لأنه على صورة كثير حدود

$(3, \infty)$ ق متصل لأنه على صورة كثير حدود

نبحث اتصال $s = 2$

فـ(2) = $9 - 2^2 = 5$

نها فـ(س) = 1 $s < 2$

نها فـ(س) = صفر $s < 2$

نها فـ(س) غير موجودة $s < 2$

← فـ غير متصل عند $s = 2$

نبحث اتصال $s = 3$

ق(3) = صفر

نها فـ(س) = صفر $s > 3$

3.13 صيفي

ليكن $f(x) = x^2 + 3x - 2$ $s > 3$

$[3, 4]$ $s > 3$

$3 - \epsilon < s < 3 + \epsilon$ $s \leq 3$

ابحث اتصال فـ على مجموعة الأعداد الحقيقية

الحل:

فـ(س) = $x^2 + 3x - 2$ $s > 3$

$s > 3$ $s > 3$

$3 - \epsilon < s < 3 + \epsilon$ $s \leq 3$



$(-\infty, 3)$ فـ متصل لأنه على صورة كثير حدود

$(3, 4)$ فـ متصل لأنه على صورة كثير حدود

$(4, \infty)$ فـ متصل لأنه على صورة كثير حدود

نبحث اتصال $s = 3$

فـ(3) = 2

نها فـ(س) = 2 $s > 3$

$2 + 3 \times 3 = 11$

نها فـ(س) = $9 - 1 + 3 = 11$ $s < 3$

← نها فـ(س) = 2 $s > 3$

نها فـ(س) = 2 (3)

← فـ متصل عند $s = 3$

نبحث اتصال $s = 4$

فـ(4) = $16 - 9 = 7$

نها فـ(س) = 1 $s > 4$

نها فـ(س) = 2 $s > 4$

← نها فـ(س) غير موجودة $s > 4$

رياضيات (العلمي) الوحدة (النهايات والاتصال)

الفصل (1) العنوان (الاتصال على فترة)

(عصام محمد الشيخ

(ماجستير رياضيات

$$\text{ذها در (س)} = \varepsilon - \varepsilon = \varepsilon + \varepsilon$$

$$\text{ذها در (س)} = \varepsilon$$

$$\text{ذها در (س)} = \varepsilon$$

$$\leftarrow \text{در متصل عند } \varepsilon = \varepsilon$$

$$\leftarrow \text{در متصل على ح} - \{ \varepsilon \}$$

عصام الشيخ
عمان طريرور
جامعة آل البيت
0796300625

* ايجاد الثوابت

عماد الشيخ
 عمان طبربور
 جامعة آل البيت
 0796300625

مثال

إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = 5$ $\left. \begin{array}{l} \text{ب) } x > 0 \\ \text{ج) } x > 2 \end{array} \right\}$

متصل على $[-\infty, \infty]$ نجد $a < b$.

الحل:

∞ متصل على $[-\infty, \infty]$ $\Leftrightarrow \infty$ متصل عند a
 ∞ متصل عند a
 $\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = 5$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - 5(x - 2)}{x - 2} = 0$$

العدد	س	س	س
٥٤ -	٢ - ٥	٢	١
٥٤	٢	٠	٢
٠	٥٢	١	

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - 5(x - 2)}{x - 2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - 5x + 10}{x - 2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 11}{x - 2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 11 - (x - 2)}{x - 2} = 0$$

مثال

إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 6}{x^2 - 7x} = 2$ $\left. \begin{array}{l} \text{ب) } x > 0 \\ \text{ج) } x > 7 \end{array} \right\}$

متصل على \mathbb{R} نجد قيمة $a < b$.

الحل:

∞ متصل على $\mathbb{R} \Leftrightarrow \infty$ متصل عند a
 ∞ متصل عند a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 6}{x^2 - 7x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 6 - 2(x^2 - 7x)}{x^2 - 7x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 6 - 2x^2 + 14x}{x^2 - 7x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 11x - 6}{x^2 - 7x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 11x - 6 - (-x^2 + 7x)}{x^2 - 7x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 6}{x^2 - 7x} = 0$$

مثال

إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 6}{x^2 - 7x} = 2$ $\left. \begin{array}{l} \text{ب) } x > 0 \\ \text{ج) } x > 7 \end{array} \right\}$

متصل على \mathbb{R} نجد قيمة a .

الحل:

∞ متصل على $\mathbb{R} \Leftrightarrow \infty$ متصل على a

∞ متصل عند $a = 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 6}{x^2 - 7x} = 2$$

مثال

$$\frac{س^٢ + ٣٥س + ٢}{س^٢ + ٣س + ٢} = (س)$$

إذا كان ل (س) فما قيمة P التي تجعل ل متصل على ح

الحل:

ليكون الاقتران النسبي متصل على ح يجب أن لا يكون له أصفار للمقام أي أن المقام لا يحللا

وبما أن المقام عبارة تربيعية يجب أن يكون المعين سالب

↔

$$ب^٢ - ٤س > صفر$$

$$(١) ٤ - ٣س > صفر$$

$$١ - ١٢س > صفر$$

$$١٥ > ١٢س$$

$$١٥ > ١٢س$$

$$\left(\frac{١٥}{١٢}, \infty \right) \ni P \leftarrow$$

$$P > \frac{١}{٤} \leftarrow \exists P \left(\frac{١}{٤}, \infty \right)$$

٣.١٩ صيفي جديد (طلاب ٢٠٠١)

إذا كان

$$\frac{س^٢ + ٣٥س + ١}{س^٢ + ٣س + ٢} = (س) \text{ ما قيم}$$

الثابت ك التي تجعل الاقتران ه متصلًا على مجموعة الأعداد الحقيقية ح ؟

(أ) (-∞, -٢) (ب) (٣, ∞)

(ج) (-٣, ٢) (د) (-∞, ٣)

الحل:

$$ب^٢ - ٤س > صفر$$

$$٣٦ - ٣س > صفر$$

$$٣٦ - ١٢س > صفر$$

$$٣٦ > ١٢س$$

$$٣ > ك$$

$$\left(\frac{٣}{١٢}, \infty \right) \ni K \leftarrow$$

٣.١٨ صيفي

$$\frac{س^٢ - ٣٣س - ٥}{س^٢ + ٣س - ٢} = (س)$$

متصلًا على ح ، فجد مجموعة قيم P

الحل:

بما أن ه متصل على ح يجب أن لا يكون للمقام أصفار أي أنه لا يحللا ↔ المعين سالب

$$ب^٢ - ٤س > صفر$$

$$٤ - ٢س > صفر$$

$$٤ - ٢س > صفر$$

$$٤ > ٢س$$

نها (s) = صفر
-٠٠٤٣

نها (s) = صفر
٠٠٤٣

نها (s) = (s)
٠٠٤٣

← s متصل عند $s = 1$

← s متصل على $[2, 0)$

* اتصال اقرئين على فترة

عصام الشيخ
عصام طبريزي
جامعة ال البيت
0796300625

٣.١١ صيفي

إذا كان (s) = $\frac{1-s}{2+s}$

(s) = (s)

فابحث اتصال (s) = (s) × (s)

على الفترة $[2, 0)$

الحل:

هـ (s) = $\left. \begin{array}{l} 1 > s \geq 0 \\ 2 > s \geq 1 \\ 2 = s \end{array} \right\}$

ق (s) = $\left. \begin{array}{l} 1 > s \geq 0 \\ 2 > s \geq 1 \\ 2 = s \end{array} \right\} \frac{1-s}{2+s}$



(١٠٠) ق متصل لأنه على صورة كثير حدود

(٢٠١) ق متصل لأنه معرف على الفترة

نبحث اتصال s من اليسار

(s) = $\frac{3 \times 2}{4} = \frac{(1-2)}{2+2} = \frac{1}{2}$

نها (s) = $\frac{1-2}{2+2} = \frac{1}{4}$
-٠٠٤٣

← s غير متصل من يسار ٢

نبحث اتصال s = 1

(s) = $\frac{1-1}{2+1} = \frac{0}{3}$ = صفر

نها (s) = صفر
+١٤٣

٣.١٥ صيفي

إذا كان (s) = $2+s$

(s) = $[s-0]$

فابحث في اتصال

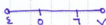
ع (s) = (s) على الفترة (٧٠٤)

الحل:

ع (s) = (s) = $\frac{2+s}{2+s}$ $\left. \begin{array}{l} 0 \geq s > 4 \\ 7 \geq s > 0 \end{array} \right\}$

$\frac{2+s}{1-}$

$\frac{2+s}{2-}$



(٥٠٤) s غير متصل لأنه غير معرف

(٦٠٥) s متصل لأنه على صورة كثير حدود

(٧٠٦) s متصل لأنه على صورة كثير حدود

نبحث اتصال $s = 0$

ع (s) = غير معرف

← s غير متصل عند $s = 0$

$s = 0$
 فر (0) = $\frac{1 \times 2}{3} = \frac{2}{3}$
 $\frac{2}{3}$
 زها فر (س) = $\frac{2}{3} + 0.4s$
 $\frac{1}{3}$ = $\frac{1 \times 1}{3} = \frac{1}{3}$ زها فر (س) = $\frac{1}{3} - 0.4s$
 \Leftarrow زها فر (س) غير موجودة
 \Leftarrow فر غير متصل عند $s = 0$

$s = 1$ من اليسار
 فر (1) = $\frac{0 \times 3}{4} = 0$ صفر
 بنا فر (س) = $\frac{0 \times 2}{4} = 0$ صفر
 \Leftarrow فر (1) = زها فر (س) = $0 - 0.4s$
 \Leftarrow فر متصل من اليسار 1
 \Leftarrow فر متصل على $[-1, 1] - \{0\}$

نبحت اتصال $s = 7$
 $8 - = \frac{1}{1-} = \frac{2+7}{1-} = \frac{9}{1-}$
 زها ع (س) = $8 - = 7.4s$
 $4 - = \frac{1}{2-} = \frac{2+7}{2-} = \frac{9}{2-}$ زها ع (س) = $4 - = 7.4s$
 \Leftarrow زها ع (س) غير موجودة
 \Leftarrow ع غير متصل عند $s = 7$
 \Leftarrow $\frac{9}{5} = 8$ متصل على $(7, 8) - \{7\}$

2.19 صيني (طلاب 300)
 إذا كان فر (س) = $[2+s]$
 هو (س) = $\frac{(1-s)^2}{s+3}$ فابحث في اتصال
 الاقتران (فر x هو) (س) على الفترة $[-1, 1]$
 الحل:

فر (س) = $\frac{(1-s)^2}{s+3}$
 $\left. \begin{array}{l} 1 - s \geq 0 \\ 0 \leq s < 1 \\ s = 1 \end{array} \right\}$

$[-1, 1)$ فر متصل لأنه حاصل ضرب وفتح اقترانات متصلة ومعرفة على مجاله
 $(0, 1)$ فر متصل لأنه حاصل ضرب وفتح اقترانات متصلة ومعرفة على مجاله