$\int \text{ق}'(\text{هـ}(\text{س}))\,\text{هـ}'(\text{س})\,\text{دس} = \int \text{ق}'(\text{ص})\,\text{د ص}$ ، حيث ص = هـ (س) ، د ص = هـ´ (س) دس

مثال : احسب قيمة $\int_{١}^{٢} (٢\text{س} - ٣)^{٤}\,\text{دس}$. (في الغالب نضع ما داخل القوس = ص) .

الحل :

افرض ص = ٢س − ٣ ⇐ د ص = ٢ د س ، د س = $\frac{\text{د ص}}{٢}$ عندما س = ١ ⇐ ص = ٢ − ٣ = -١

س = ٢ ⇐ ص = ١

$$\int_{-١}^{١} \text{ص}^{٤}\,\frac{\text{د ص}}{٢} = \int_{-١}^{١} \frac{\text{ص}^{٤}}{٢}\,\text{د ص} = \int_{-١}^{١} \frac{١}{٢}\,\text{ص}^{٤}\,\text{د ص}$$

$$= \frac{١}{٢}\int_{-١}^{١} \text{ص}^{٤}\,\text{د ص} = \frac{١}{٢}\left[\frac{\text{ص}^{٥}}{٥}\right]_{-١}^{١} = \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٥} - \frac{-١}{٥}\right] = \frac{١}{٢}\left[\frac{٢}{٥}\right] = \frac{١}{٥}$$

مثال :

$$\int \frac{\text{س} + ١}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٥}}\,\text{د س}$$

نفرض أن ص = س² + ٢س + ٥ (ما داخل الجذر) ، مشتقة الثابت صفر دائماً .

⇐ د ص = ٢ س + ٢ د س ⇐ د س = $\frac{\text{د ص}}{٢\text{ س} + ٢}$ ، بالقسمة على (٢س +٣) معامل د س

$$\int \frac{\text{س} + ١}{\sqrt{\text{ص}}}\;\frac{\text{د ص}}{٢\text{ س} + ٢}$$ ، (٢س + ٢ = ٢ (س + ١)) أخرج ٢ عامل مشترك .

$$= \int \frac{\cancel{\text{س} + ١}}{\sqrt{\text{ص}}}\;\frac{\text{د ص}}{٢\cancel{(\text{س} + ١)}} = \frac{١}{٢}\int \frac{١}{\sqrt{\text{ص}}}\,\text{د ص} = \frac{١}{٢}\int \frac{١}{\text{ص}^{\frac{١}{٢}}}\,\text{د ص}$$

$$= \frac{١}{٢}\int \text{ص}^{-\frac{١}{٢}}\,\text{د ص} = \frac{١}{٢}\left[\frac{\text{ص}^{-\frac{١}{٢}+١}}{-\frac{١}{٢} + ١}\right] \Leftarrow = \frac{١}{٢}\left[\frac{\text{ص}^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}}\right] = \frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢}}\,\text{ص}^{\frac{١}{٢}} = \text{ص}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$$

$$= \sqrt{\text{ص}} + \text{جـ} = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٥} + \text{جـ} .$$

مثال : احسب قيمة $\int_{0}^{1} \frac{2\,س}{(س^{2}+1)^{3}}\, د\, س$

نفرض أن ص = س^{2} + ١ ⇐ د ص = ٢س د س، د س = $\frac{د\, ص}{2\,س}$ ، عندما س = ٠ ⇐ ص = ١

عندما س = ١ ⇐ ص = ٢

$$= \int_{1}^{2} \frac{\cancel{2\,س}}{ص^{3}} \frac{د\, ص}{\cancel{2\,س}} = \int_{1}^{2} \frac{د\, ص}{ص^{3}} = \int_{1}^{2} \frac{1}{ص^{3}}\, د\, ص \Leftarrow = \int_{1}^{2} ص^{-3}\, د\, ص$$

$$\Leftarrow = \left[\frac{ص^{-3+1}}{-3+1}\right]_{1}^{2} = \left[\frac{ص^{-2}}{-2}\right]_{1}^{2} = \left[\frac{1}{-2\,ص^{2}}\right]_{1}^{2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{1 \times 4}{1 \times 4}\right] = \frac{-1}{2} \times \frac{-3}{4} = \frac{3}{8}$$

مثال : احسب قيمة $\int_{2}^{10} 3\,(5\,س - 1)^{-\frac{1}{2}}\, د\, س$ (نفرض أن ص = ٥س − ١)

$= \frac{د\, ص}{5} = \frac{5}{5}\, د\, س \Leftarrow د\, س = \frac{د\, ص}{5}$ ⇐ عندما س = ١٠ فإن ص = ٥٠ − ١ = ٤٩

عندما س = ٢ فإن ص = ١٠ − ١ = ٩

$$\int_{9}^{49} 3\,ص^{-\frac{1}{2}} \frac{د\, ص}{5} = \frac{3}{5}\int_{9}^{49} ص^{-\frac{1}{2}}\, د\, ص \Leftarrow \frac{3}{5}\left[\frac{ص^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_{9}^{49} = \frac{3}{5}\left[\frac{ص^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{9}^{49}$$

$$\frac{3}{5}\left[2\,ص^{\frac{1}{2}}\right]_{9}^{49} = \frac{3}{5}\left[2\sqrt{ص}\right]_{9}^{49} \Leftarrow = \frac{3}{5}\left[2\sqrt{49} - 2\sqrt{9}\right] = \frac{3}{5}\left[2 \times 7 - 2 \times 3\right]$$

$$\frac{3}{5}\left[14 - 6\right] = \frac{3}{5}\left[8\right] = \frac{24}{5}$$

$\int \text{ق}'(\text{هـ}(\text{س}))\,\text{هـ}'(\text{س})\,\text{دس} = \int \text{ق}'(\text{ص})\,\text{د ص}$ ، حيث $\text{ص} = \text{هـ}(\text{س})$ ، $\text{د ص} = \text{هـ}'(\text{س})\,\text{دس}$

يكون التكامل بالتعويض لاقترانين أحدهما مشتقة الآخر .

أمثلـــة:

أ) $\int_{-1}^{2} (3\text{س} - 1)^{4}\,\text{دس}$ ، نفرض أن ص = ٣س – ١ ،

د ص = ٣ دس بالقسمة على معامل د س ⇐ $\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{3}$

ص = ٣ س – ١ ، عندما س = - ١ فإن ص = ٣ (- ١) – ١ = - ٣ – ١ = - ٤

عندما س = ٢ فإن ص = ٣ (٢) – ١ = ٦ – ١ = ٥

$\int_{-4}^{5} \text{ص}^{4}\,\frac{\text{د ص}}{3} = \frac{1}{3}\int \text{ص}^{4}\,\text{د س} .$

$\Leftarrow = \frac{1}{3}\left[\frac{\text{ص}^{5}}{5}\right]_{-4}^{5} = \frac{1}{3}\left[\frac{(5)^{5} - (-4)^{5}}{5}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{3125 + 1024}{5}\right] = \frac{4149}{15}$

ب) $\int_{0}^{1} \frac{\text{د س}}{\sqrt{5\text{س} + 4}}$ د س ⇐ يجب أن تحول إلى الصورة الأسية و ترفع إلى البسط مع تغيير في إشارة الأس.

$\int_{0}^{1} \frac{\text{د س}}{(5\text{س} + 4)^{\frac{1}{2}}} = \int_{0}^{1} (5\text{س} + 4)^{-\frac{1}{2}}\,\text{د س}$ ، نفرض ص = ٥ س + ٤ ، د ص = ٥، $\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{5}$

عندما س = ٠ فإن ص = ٤ ، عندما س = ١ فإن ص = ٩

$\int_{4}^{9} \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\,\frac{\text{د ص}}{5} = \frac{1}{5}\int_{4}^{9} \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\,\text{د ص} = \frac{1}{5}\left[\frac{\text{ص}^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_{4}^{9} = \frac{1}{5}\left[\frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{4}^{9}$

$= \frac{1}{5}\left[2\,\text{ص}^{\frac{1}{2}}\right]_{4}^{9} = \frac{2}{5}\left[\sqrt{\text{ص}}\right]_{4}^{9} = \frac{2}{5}\left[\sqrt{9} - \sqrt{4}\right] = \frac{2}{5}\left[3 - 2\right] = \frac{2}{5}$

ج) $\int_{-2}^{2} (\text{س}^{3} + 5)^{8}\, \text{س}^{2}\, \text{دس}$.

نفرض ص = ما داخل القوس (س ذات الأس الأكبر)

$\text{ص} = \text{س}^{3} + 5$ ، $\text{د ص} = 3\,\text{س}^{2}\,\text{دس}$ ، $\text{دس} = \dfrac{\text{د ص}}{3\,\text{س}^{2}}$

عندما س = -٢ فإن ص = -٨ + ٥ = -٣ ، عندما س = ٢ فإن ص = ٨ + ٥ = ١٣ .

$$\int_{-3}^{13} \text{ص}^{8}\, \text{س}^{2}\, \frac{\text{د ص}}{3\,\text{س}^{2}} = \frac{1}{3}\int_{-3}^{13} \text{ص}^{8}\, \text{د ص} = \frac{1}{3}\Big[\text{ص}^{9}\Big]_{-3}^{13} = \frac{(13)^{9} - (-3)^{9}}{27}$$

د) $\int_{1}^{2} \dfrac{\text{د س}}{(2\text{س} + 3)^{2}} = \int_{1}^{2} (2\text{س} + 3)^{-2}\, \text{د س}$.

نفرض ص = ٣ + ٢ س ، د ص = ٢ د س ، $\text{د س} = \dfrac{\text{د ص}}{2}$

عندما س = ١ فإن ص = ٥ ، عندما س = ٢ فإن ص = ٧

$$\int_{5}^{7} \text{ص}^{-2}\, \frac{\text{د ص}}{2} = \frac{1}{2}\int_{5}^{7} \text{ص}^{-2}\, \text{د ص} = \frac{1}{2}\left[\frac{\text{ص}^{-1}}{-1}\right]_{5}^{7} = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{\text{ص}}\right]_{5}^{7}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{7} - \frac{-1}{5}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-1 \times 5}{7 \times 5} + \frac{1 \times 7}{5 \times 7}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-5 + 7}{35}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{35}\right] = \frac{1}{35}$$

هـ) $\int_{0}^{1} \text{س}\sqrt{3\text{س}^2+1}\ \text{دس}$ ⇐ $\text{ص} = 3\text{س}^2 + 1$ ، $\text{د ص} = 6\ \text{س د س}$ ⇐ $\text{د س} = \dfrac{\text{د ص}}{6\ \text{س}}$

⇐ عندما س = ٠ فإن ص = ١ و عندما س = ١ فإن ص = ٤

$$\int_{1}^{4} \text{س}\sqrt{\text{ص}}\ \frac{\text{د ص}}{6\ \text{س}} = \frac{1}{6}\int_{1}^{4} \text{ص}^{\frac{1}{2}}\ \text{د ص} \Leftarrow = \frac{1}{6}\left[\frac{\text{ص}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{2\ \text{ص}^{\frac{3}{2}}}{3}\right]$$

$$\Leftarrow = \frac{2}{18}\left[\sqrt{\text{ص}^3}\right]_{1}^{4} = \frac{1}{9}\left[\sqrt{64} - \sqrt{1}\right] = \frac{1}{9}\left[8 - 1\right] = \frac{7}{9}$$

و) $\int_{3}^{4} \text{س}\ (25 - \text{س}^2)^{-\frac{1}{2}}\ \text{د س}$ ، $\text{ص} = 25 - \text{س}^2$ ، $\text{د ص} = -2\ \text{س د س}$ ⇐ $\text{د س} = \dfrac{\text{د ص}}{-2\ \text{س}}$

عندما س = ٣ فإن ص = ١٦ ، عندما س = ٤ فإن ص = ٩

$$\int_{16}^{9} \text{س}\ \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\ \frac{\text{د ص}}{-2\ \text{س}} = -\frac{1}{2}\int_{16}^{9} \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\ \text{د ص} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{16}^{9} = -\frac{1}{2}\left[2\ \text{ص}^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\Leftarrow = -\left[\sqrt{\text{ص}}\right]_{16}^{9} = -\left[\sqrt{9} - \sqrt{16}\right] = -\left[3 - 4\right] = -(-1) = 1$$

<u>أمثلـــة :</u> جد كلاً من التكاملات التالية :

أ) $\int (2 - \text{س})^{\frac{2}{5}}\ \text{دس}$. ⇐ $\text{ص} = 2 - \text{س}$ ⇐ $\text{د ص} = -\text{د س}$ ⇐ $\text{د س} = -\text{د ص}$.

$$\Leftarrow \int -\text{ص}^{\frac{2}{5}}\ \text{د ص} = \frac{-\text{ص}^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + \text{جـ} = \frac{-\text{ص}^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} = \frac{-5\ \text{ص}^{\frac{7}{5}}}{7} = \frac{-5}{7}\left[2 - \text{س}\right]^{\frac{7}{5}} + \text{جـ}$$

ب) $\int (\text{٦ س} + \text{٥})(\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٥س} - \text{٢})^{\text{٤}}\ \text{د س}$.

$\Leftarrow \text{ص} = \text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٥ س} - \text{٢} \Leftarrow \text{د ص} = \text{٦س} + \text{٥ دس} \Leftarrow \text{دس} = \dfrac{\text{د ص}}{\text{٦ س} + \text{٥}}$

$$\int \cancel{(\text{٦ س} + \text{٥})}\ \text{ص}^{\text{٤}} \dfrac{\text{د ص}}{\cancel{\text{٦ س} + \text{٥}}} = \int \text{ص}^{\text{٤}}\ \text{د ص} \Leftarrow = \dfrac{\text{ص}^{\text{٥}}}{\text{٥}} + \text{جـ}$$

$$\Leftarrow = \dfrac{(\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٥ س} - \text{٢})^{\text{٥}}}{\text{٥}} + \text{جـ}$$

ج) $\int \dfrac{\text{س}^{\text{٢}}}{\sqrt[\text{٤}]{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٧}}}\ \text{د س} = \int \text{س}^{\text{٢}}\ (\text{س}^{\text{٣}} + \text{٧})^{-\frac{\text{١}}{\text{٤}}}\ \text{د س}$.

$\Leftarrow \text{ص} = \text{س}^{\text{٣}} + \text{٧} \Leftarrow \text{د ص} = \text{٣ س}^{\text{٢}}\ \text{د س} \Leftarrow \text{د س} = \dfrac{\text{د ص}}{\text{٣ س}^{\text{٢}}}$

$$\int \cancel{\text{س}^{\text{٢}}}\ \text{ص}^{-\frac{\text{١}}{\text{٤}}} \dfrac{\text{د ص}}{\text{٣}\cancel{\text{س}^{\text{٢}}}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٣}} \int \text{ص}^{-\frac{\text{١}}{\text{٤}}}\ \text{د ص} = \dfrac{\text{١}}{\text{٣}} \left[\dfrac{\text{ص}^{-\frac{\text{١}}{\text{٤}} + \text{١}}}{-\frac{\text{١}}{\text{٤}} + \text{١}} \right]$$

$$\Leftarrow = \dfrac{\text{١}}{\text{٣}} \left[\dfrac{\text{٤ ص}^{\frac{\text{٣}}{\text{٤}}}}{\text{٣}} \right] = \dfrac{\text{٤}}{\text{٩}} \sqrt[\text{٤}]{(\text{س}^{\text{٣}} + \text{٧})^{\text{٣}}} + \text{جـ}$$

قـاعدة :

قانون يستخدم في التكامل الخطي فقط و المرفوع إلى قوه غير الواحد .

$$\int (\text{أ}س + \text{ب})^{ن}\, \text{دس} = \frac{(\text{أ}س + \text{ب})^{ن+١}}{\text{أ}(ن+١)} + \text{جـ} \quad ، \quad ن \neq -١$$

مثال : أوجد $\int (٨س + ١٣)^{٩}\, \text{دس} = \frac{(٨س + ١٣)^{٩+١}}{٨(٩+١)} + \text{جـ} = \frac{(٨س + ١٣)^{١٠}}{٨٠} + \text{جـ}$

مثال : أوجد $\int (٧ - ٢س)^{٤}\, \text{د س} = \frac{(٧ - ٢س)^{٥}}{-٢ \times ٥} + \text{جـ} = \frac{(٧ - ٢س)^{٥}}{-١٠} + \text{جـ}$

قاعدة :

$$\int (\text{ق}(س))^{ن}\, \text{ق}'(س)\, \text{د س} = \frac{(\text{ق}(س))^{ن+١}}{ن+١} + \text{جـ}$$

مثال : $\int (س^{٢} + ٣س)^{٨} \times (٢س + ٣)\, \text{دس} = \frac{(س^{٢} + ٣س)^{٩}}{٩} + \text{جـ}$ ، بالتعويض

بالفرض $ص = س^{٢} + ٣س \Leftarrow \text{د ص} = ٢س + ٣\ \text{د س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{د ص}}{٢س + ٣}$

$$= \int ص^{٨} \times (\cancel{٢س + ٣}) \frac{\text{د ص}}{\cancel{٢س + ٣}} = \frac{ص^{٩}}{٩} + \text{جـ} = \frac{(س^{٢} + ٣س)^{٩}}{٩} + \text{جـ}$$

مثال : أوجد $\int (\text{٣س}^{٢} + \text{٢س}) \sqrt{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٣}\ \text{د س}$.

نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} \Leftarrow \text{د ص} = \text{٣س}^{٢} + \text{٢س د س} \Leftarrow \text{د س} = \dfrac{\text{د ص}}{\text{٣س}^{٢} + ٢\ \text{س}}$

$$= \int \cancel{(\text{٣س}^{٢} + \text{٢س})} \sqrt{\text{ص}}\ \dfrac{\text{دص}}{\cancel{\text{٣س}^{٢} + ٢\ \text{س}}} = \int \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\ \text{د ص}$$

$$= \dfrac{\text{ص}^{\frac{١}{٢} + ١}}{\frac{١}{٢} + ١} + \text{جـ} = \dfrac{\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} = \dfrac{٢}{٣}\ \text{ص}^{\frac{٣}{٢}} = \dfrac{٢}{٣} \sqrt{\text{ص}^{٣}} = \dfrac{٢}{٣} \sqrt{(\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٣)^{٣}}$$

<u>تدريب ١:</u> جد كلا من التكاملات التالية :

١) $\int (١ - \text{س})^{٣}\ \text{دس} = \dfrac{(١ - \text{س})^{٤}}{-١ \times ٤} + \text{جـ} = \dfrac{(١ - \text{س})^{٤}}{-٤} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{٣س}^{٢} (\text{س}^{٣} + ٤)^{٥}\ \text{دس} = \dfrac{(\text{س}^{٣} + ٤)^{٦}}{٦} + \text{جـ}$

أو

$\text{ص} = \text{س}^{٣} + ٤ \Leftarrow \text{د ص} = \text{٣س}^{٢}\ \text{دس} \Leftarrow \text{د س} = \dfrac{\text{د ص}}{٣\ \text{س}^{٢}}$

$$= \int ٣\ \text{س ص}^{٥}\ \dfrac{\text{د ص}}{\text{٣س}^{٢}} = \dfrac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \text{جـ} = \dfrac{(\text{س}^{٣} + ٤)^{٦}}{٦} + \text{جـ}$$

٣) $\displaystyle\int \frac{\text{٤ س} - \text{٦}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{١}}}\ \text{د س}$.

ص = س$^{\text{٢}}$ – ٣س .

$\text{د ص} = \text{٢ س} - \text{٣ د س} \Leftarrow \text{دس} = \dfrac{\text{د ص}}{\text{٢س - ٣}}$

$$\int \frac{\text{٢}\ \cancel{(\text{٢س} - \text{٣})}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{ص}}} \cdot \frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{٢س} - \text{٣}}} = \int \frac{\text{٢}}{\text{ص}^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}}\ \text{دص} = \int \text{٢ ص}^{-\frac{\text{١}}{\text{٣}}}\ \text{د ص}$$

$$= \frac{\text{ص}^{-\frac{\text{١}}{\text{٣}} + \text{١}}}{-\frac{\text{١}}{\text{٣}} + \text{١}} + \text{جـ} = \frac{\text{٢ ص}^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}}}{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} + \text{جـ} = \text{٣ ص}^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} + \text{جـ}$$

$$= \text{٣} \sqrt[\text{٣}]{\text{ص}^{\text{٢}}} = \text{٣} \sqrt[\text{٣}]{(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{١})^{\text{٢}}} + \text{جـ}$$

قواعـــد عامـــة :

١) $\displaystyle\int \text{جا أ س د س} = \frac{-\text{١}}{\text{أ}}\ \text{جتا أ س} + \text{جـ}$

$\displaystyle\int \text{جا (أ س + ب) دس} = \frac{-\text{١}}{\text{أ}}\ \text{جتا (أ س + ب)} + \text{جـ}$

٢) $\displaystyle\int \text{جتا أ س د س} = \frac{\text{١}}{\text{أ}}\ \text{جا أ س} + \text{جـ}$

$\displaystyle\int \text{جتا (أ س + ب) د س} = \frac{\text{١}}{\text{أ}}\ \text{جا (أ س + ب)} + \text{جـ}$

٣) $\displaystyle\int \text{قا}^{\text{٢}}\ \text{أ س دس} = \frac{\text{١}}{\text{أ}}\ \text{ظا أ س} + \text{جـ}$

$\displaystyle\int \text{قا}^{\text{٢}}\ \text{(أ س + ب) دس} = \frac{\text{١}}{\text{أ}}\ \text{ظا أ س} + \text{جـ}$

٤) ∫ قتا ^{٢} أ س د س = - $\frac{١}{أ}$ ظتا أ س + جـ

∫ قتا ^{٢} (أ س + ب) د س = - $\frac{١}{أ}$ ظتا (أ س + ب) + جـ

مثال : أوجد التكاملات التالية :

١) ∫ جا ٥ س د س = - $\frac{١}{٥}$ جتا ٥س + جـ

٢) ∫ جا (٨ س – ١) د س = - $\frac{١}{٨}$ جتا (٨ س – ١) + جـ

٣) ∫ جتا ٣ س د س = $\frac{١}{٣}$ جا س + جـ

٤) ∫ جتا (٤ س – ١) د س = $\frac{١}{٤}$ جا (٤ س – ١) + جـ

٥) ∫ جتا (٨ – ٣ س) د س = $\frac{١}{-٣}$ جا (٨ – ٣س) + جـ

٦) ∫ قا ^{٢} ٥ س د س = $\frac{١}{٥}$ ظا ٥ س + جـ

٧) ∫ قا ^{٢} (٢ س + ١) د س = $\frac{١}{٢}$ ظا (٢ س + ١) + جـ

٢) ∫ قتا ^{٢} (٨ – ٣ س) د س = $\frac{-١}{-٣}$ ظتا (٨ – ٣ س) + جـ

مثال : أوجد $\int$ ٥ جا (٢س – ١) د س

- الحل حسب القاعدة = ٥ × $\frac{-١}{٢}$ جا (٢ س – ١) + جـ = $\frac{-٥}{٢}$ جا (٢ س – ١) + جـ

- الحل بالتعويض = نفرض ص = ٢ س – ١ ⇐ د ص = ٢ د س ⇐ د س = $\frac{\text{د ص}}{٢}$

$\int$ ٥ جا ص $\frac{\text{د ص}}{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$ $\int$ جا ص د ص = $\frac{٥}{٢}$ × - جتا ص + جـ

= $\frac{-٥}{٢}$ جتا ص + جـ ⇐ $\frac{-٥}{٢}$ جتا (٢س – ١) + جـ

ملاحظة : في الاقترانات الدائرية دائماً نفرض أن ص = الزاوية

مثال : أوجد $\int$ (٢ س + ١) جتا (س^{٢} + س) د س

نفرض ص = س^{٢} + س ⇐ د ص = (٢س + ١) ⇐ د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{٢ س + ١}}$

$\int$ (٢ س + ١) جتا ص $\frac{\text{د ص}}{\text{٢س + ١}}$ = $\int$ جتا ص د ص = جا ص + جـ = جا (س^{٢} + س) + جـ

ملاحظة : في الاقتران الآسي دائماً نفرض أن ص = س (القوة)

مثال : $\int$ أوجد هـ$^{(٣س-٦)}$ د س

الحل: ص = ٣ س – ٦ ⇐ د ص = ٣ دس ⇐ د س = $\frac{\text{د ص}}{٣}$

$\int$ هـ^{ص} $\frac{\text{د ص}}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$ $\int$ هـ^{ص} د ص = $\frac{١}{٣}$ هـ^{ص} + جـ = $\frac{١}{٣}$ هـ$^{(٣س-٦)}$ + جـ

قاعدة :

$$\int \text{هـ}^{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})}\,\text{دس} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{هـ}^{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})} + \text{جـ}$$

مثال :

$$\int \text{هـ}^{(8-2\text{س})}\,\text{دس} = \frac{1}{-2}\,\text{هـ}^{(8-2\text{س})} + \text{جـ}$$

مثال : أوجد

$$\int (2\text{س}+1)\,\text{هـ}^{(\text{س}^2+\text{س})}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^2 + \text{س} \Leftarrow \text{د ص} = (2\text{س}+1)\,\text{دس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{د ص}}{2\text{س}+1}$$

$$= \int (2\text{س}+1)\,\text{هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{د ص}}{2\text{س}+1} = \int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{د ص} = \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} \Leftarrow = \text{هـ}^{(\text{س}^2+\text{س})} + \text{جـ}$$

تدريب ٢ : جد كلا من التكاملات التالية

١) $\int \text{جا}(3-4\text{س})\,\text{د س} = \frac{-1}{-4}\,\text{جتا}(3-4\text{س}) + \text{جـ} = \frac{1}{4}\,\text{جتا}(3-4\text{س}) + \text{جـ}$

٢) $\int \text{س}\,\text{قا}^2(\text{س}^2+8)\,\text{د س}$

$$\text{ص} = \text{س}^2 + 8 \Leftarrow \text{د ص} = 2\text{س}\,\text{د س} \Leftarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{2\text{س}}$$

$$\int \text{س}\,\text{قا}^2\text{ص}\,\frac{\text{د ص}}{2\text{س}} = \frac{1}{2}\int \text{قا}^2\text{ص}\,\text{د ص} = \frac{1}{2}\,\text{ظا ص} + \text{جـ} = \frac{1}{2}\,\text{ظا}(\text{س}^2+8) + \text{جـ}$$

٣) $\int \frac{-٢}{س + ١}$ د س

ص = س + ١ ⇐ د ص = دس ⇐ = $-٢ \int \frac{١}{ص}$ د ص = -٢ لوهـ |ص| + جـ

= -٢ لو |س + ١| + جـ

٤) $\int$ ٤ س × $هـ^{س^٢}$ د س ⇐ ص = $س^٢$ ⇐ د ص = ٢ س د س ⇐ د س = $\frac{د ص}{٢ س}$

$\int$ ٤ س $هـ^{ص}$ $\frac{د س}{٢ س}$ = $\int$ ٢ $هـ^{ص}$ د ص = ٢ $هـ^{ص}$ + جـ = ٢ $هـ^{س^٢}$ + جـ .

مثال : جد $\int \sqrt{هـ^{س}}$ د س = $\int (هـ^{س})^{\frac{١}{٢}}$ د س = $\int هـ^{\frac{١}{٢} س}$ د س

ص = $\frac{١}{٢}$ س ⇐ د ص = $\frac{١}{٢}$ د س ⇐ د س = ٢ د ص

$\int$ $هـ^{ص}$ × ٢ د ص = $\int$ ٢ $هـ^{ص}$ د ص = ٢ $هـ^{ص}$ + جـ = ٢ $هـ^{\frac{١}{٢} س}$ + جـ

مثال : أوجد

$\int_{٤}^{٥} \frac{٣}{س - ٢}$ د س .

ص = س − ٢ ⇐ د ص = د س ⇐ س = ٤ ⇐ ص = ٤ − ٢ = ٢
⇐ س = ٥ ⇐ ص = ٥ − ٢ = ٣

$\int_{٢}^{٣} \frac{٣}{ص}$ د ص = ٣ $\int_{٢}^{٣} \frac{١}{ص}$ د ص

= ٣ $\left[لو |ص| \right]_{٢}^{٣}$ = ٣ [لو ٣ − لو ٢] = ٣ لو٣ − ٣ لو٢ .

مثال :

$$\int_{٠}^{٢} ٩\ \text{هـ}^{(٣\text{س}+٢)}\ \text{د س}$$

$\text{ص} = ٣\text{س} + ٢ \Leftarrow \text{د ص} = ٣\ \text{د س} \Leftarrow \text{د س} = \dfrac{\text{د ص}}{٣}$

$\Leftarrow \text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = ٢$

$\Leftarrow \text{س} = ٢ \Leftarrow \text{ص} = ٨$

$$\int_{٢}^{٨} ٩\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \frac{\text{د ص}}{٣} = \int_{٢}^{٨} ٣\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{د ص} = ٣\ \text{هـ}^{\text{ص}} \Big]_{٢}^{٨} = ٣\ \text{هـ}^{٨} - ٣\ \text{هـ}^{٢} .$$

<u>تدريب ٣ :</u> احسب قيمة كل من التكاملات التالية

١) $\displaystyle\int_{-١}^{٠} \text{س}\ (\text{س}^{٢} + ٢)^{٣}\ \text{د س}$

الحل :

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٢ \Leftarrow \text{د ص} = ٢\text{س}\ \text{دس} \Leftarrow \text{د س} = \dfrac{\text{د ص}}{٢\text{س}}$

$\Leftarrow \text{س} = -١ \Leftarrow \text{ص} = (-١)^{٢} + ٢ \Leftarrow \text{ص} = ٣$

$\Leftarrow \text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = (٠)^{٢} + ٢ \Leftarrow \text{ص} = ٢$

$$\int_{٣}^{٢} \text{س}\ \text{ص}^{٣}\ \frac{\text{د ص}}{٢\ \text{س}} = \frac{١}{٢} \int_{٣}^{٢} \text{ص}^{٣}\ \text{د ص} = \frac{١}{٢}\ \frac{\text{ص}^{٤}}{٤} \Big]_{٣}^{٢}$$

$$= \frac{١}{٨} [\ (٢)^{٤} - (٣)^{٤}\ ] = \frac{١}{٨} [\ ١٦ - ٨١\ ] = \frac{-٦٥}{٨}$$

٢) $\displaystyle\int_{١}^{٢} \frac{\text{س} + ١}{(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١)}\ \text{د س}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١ \Leftarrow \text{د ص} = (\ ٢\text{س} + ٢\ )\ \text{دس} \Leftarrow \text{د س} = \dfrac{\text{د ص}}{٢\ (\ \text{س} + ١\ )}$

$\text{س} = ١ \Leftarrow \text{ص} = ٤ \text{ ، } \text{س} = ٢ \Leftarrow \text{ص} = ٩$

$$\int_{٤}^{٩} \frac{\text{س} + ١}{\text{ص}^{٢}}\ \frac{\text{د ص}}{٢\ (\text{س} + ١)} = \frac{١}{٢} \int_{٤}^{٩} \frac{١}{\text{ص}^{٢}}\ \text{د ص} = \frac{١}{٢} \int_{٤}^{٩} \text{ص}^{-٢}\ \text{د ص}$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\frac{ص^{-١}}{-١}\right]_{٤}^{٩} = -\frac{١}{٢}\left[\frac{١}{ص}\right]_{٤}^{٩} = -\frac{١}{٢}\left[\frac{١ \times ٤}{٩ \times ٤} - \frac{١ \times ٩}{٤ \times ٩}\right]$$

$$= -\frac{١}{٢}\left[\frac{-٥}{٣٦}\right] = \frac{٥}{٧٢}$$

٣) $\int_{١}^{٣} \frac{٢}{س + ٢}\, د س$

ص = س + ٢ ⇐ د ص = د س ⇐ س = ١ ⇐ ص = ١ + ٢ = ٣ ، س = ٣ ⇐ ص = ٣ + ٢ = ٥

$$٢\int_{٣}^{٥} \frac{١}{ص}\, د ص = ٢\left[لو_{هـ} |ص|\right]_{٣}^{٥} = ٢\left[لو_{هـ} ٥ - لو_{هـ} ٣\right] \Leftarrow = ٢\, لو_{هـ} ٥ - ٢\, لو_{هـ} ٣$$

٤) $\int_{١}^{٤} ٢\, هـ^{(٢س - ١)}\, د س$

ص = ٢ س - ١ ⇐ د ص = ٢ د س ⇐ $د س = \frac{د ص}{٢}$

س = ١ ⇐ ص = ٢ × ١ − ١ = ١ ، س = ٤ ⇐ ص = ٢ × ٤ − ١ = ٧

$$\int_{١}^{٧} ٢\, هـ^{ص}\, \frac{د ص}{٢} = \left[هـ^{ص}\right]_{١}^{٧} = هـ^{٧} - هـ^{١}.$$

١) جد كلا من التكاملات التالية :

أ) $\int \sqrt[٥]{(٥ - ٣س)^{٣}}\ د س$

$\Leftarrow ص = ٥ - ٣س \Leftarrow د ص = -٣\ د س \Leftarrow د س = \frac{د ص}{-٣}$

$\int \sqrt[٥]{ص^{٣}}\ \frac{د ص}{-٣} = -\frac{١}{٣} \int ص^{\frac{٣}{٥}}\ د س$

$= -\frac{١}{٣} \left[\frac{ص^{\frac{٣}{٥} + \frac{١ \times ٥}{١ \times ٥}}}{\frac{٣}{٥} + \frac{١ \times ٥}{١ \times ٥}} \right] + جـ = -\frac{١}{٣} \left[\frac{ص^{\frac{٨}{٥}}}{\frac{٨}{٥}} \right] + جـ$

$= -\frac{١}{٣} \left[\frac{٥\ ص^{\frac{٨}{٥}}}{٨} \right] + جـ$

ب) $\int (س + ٣) \sqrt[٣]{س^{٢} + ٦س - ٤}\ د س$.

$\Leftarrow ص = س^{٢} + ٦س - ٤ \Leftarrow د ص = ٢ س + ٦\ د س \Leftarrow د س = \frac{د ص}{٢ (س + ٣)}$

$= \int (س + ٣) \sqrt[٣]{ص}\ \frac{د ص}{٢ (س + ٣)} = \frac{١}{٢} \int ص^{\frac{١}{٣}}\ د ص$

$= \frac{١}{٢} \left[\frac{ص^{\frac{١}{٣} + \frac{١ \times ٣}{١ \times ٣}}}{\frac{١}{٣} + \frac{١ \times ٣}{١ \times ٣}} \right] = \frac{١}{٢} \left[\frac{ص^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} \right] + جـ$

$= \frac{١}{٢} \left[\frac{٣\ ص^{\frac{٤}{٣}}}{٤} \right] + جـ$

جـ) $\int \frac{\text{١٠ س} - \text{٥}}{(\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} + \text{٥})^{\text{٣}}} \text{ د س}$

$\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} - \text{س} + \text{٥} \Leftarrow \text{د ص} = \text{٢س} - \text{١} \Leftarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{٢ س} - \text{١}}$

$\int \frac{\text{٥}(\text{٢س} - \text{١})}{\text{ص}^{\text{٣}}} \times \frac{\text{د ص}}{\text{٢ س} - \text{١}} = \int \text{٥ ص}^{-\text{٣}} \text{ د ص} = \frac{\text{٥ ص}^{-\text{٣}+\text{١}}}{-\text{٣}+\text{١}} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{٥ ص}^{-\text{٢}}}{-\text{٢}} = \frac{-\text{٥}}{\text{٢ص}^{\text{٢}}} + \text{جـ}$

د) $\int \frac{\text{٣}}{\text{٣س} - \text{١٢}} \text{ د س}$

$\text{ص} = \text{٣ س} - \text{١٢} \Leftarrow \text{د ص} = \text{٣ دس} \Leftarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{٣}}$

$\int \frac{\text{٣}}{\text{ص}} \; \frac{\text{د ص}}{\text{٣}} = \int \frac{\text{١}}{\text{ص}} \text{ د س} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| + \text{جـ} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٣ س} - \text{١٢}| + \text{جـ}$

هـ) $\int \text{قا}^{\text{٢}} (\text{٥ س} - \text{٨}) \text{ د س}$

$\text{ص} = \text{٥ س} - \text{٨} \Leftarrow \text{د ص} = \text{٥ د س} \Leftarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{٥}}$

$\int \text{قا}^{\text{٢}} \text{ص} \; \frac{\text{د ص}}{\text{٥}} = \frac{\text{١}}{\text{٥}} \int \text{قا}^{\text{٢}} \text{ص د ص} = \frac{\text{١}}{\text{٥}} \text{ ظا ص} + \text{جـ}$

و) $\int \text{٢ س} \times \text{جا} (\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}}) \text{ د س}$

$\text{ص} = \text{٤} - \text{س}^{\text{٢}} \Leftarrow \text{د ص} = -\text{٢ س د س} \Leftarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{-\text{٢س}}$

$\int \text{٢ س جا ص} \; \frac{\text{د ص}}{-\text{٢ س}} = - \int \text{جا ص د ص} = - - \text{جتا ص} + \text{جـ} = \text{جتا} (\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}}) + \text{جـ}$

ر) $\int$ هـ $^{(٩س-١)}$ د س $= \frac{١}{٩}$ هـ $^{(٩س-١)}$ + جـ

ح) $\int$ جتا ($\frac{س}{٣}$) د س = ٣ جا ($\frac{س}{٣}$) + جـ

ص = $\frac{س}{٣}$ ⇐ د ص = $\frac{١}{٣}$ د س ⇐ د س = ٣ د ص

$\int$ جتا ص × ٣ د ص = ٣ جا ص + جـ = ٣ جا ($\frac{س}{٣}$) + جـ

٢) جد كلا من التكاملات التالية :

أ) $\int_{١}^{٢} (٢س - ٣)^{٤}$ د س $= \left[\frac{(٢س - ٣)^{٥}}{٢ \times ٥} \right]_{١}^{٢} = \frac{(٢ \times ٢ - ٣)^{٥} - (٢ \times ١ - ٣)^{٥}}{١٠}$

$= \frac{١ - - ١}{١٠} = \frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}$

ب) $\int_{٠}^{٢}$ س ^{٢} (س ^{٣} − ٥) ^{٢} د س

ص = س ^{٣} − ٥ ⇐ د ص = ٣ س ^{٢} د س ⇐ د س = $\frac{د ص}{٣ س^{٢}}$

س = ٠ ⇐ ص = - ٥ ، س = ٢ ⇐ ص = ٣

$\int_{-٥}^{٣}$ س ^{٢} ص ^{٢} $\frac{د ص}{٣ س^{٢}} = \frac{١}{٣} \left[ص^{٣} \right]_{-٥}^{٣} = \frac{١}{٣} \left[٢٧ - - ١٢٥ \right] = \frac{١٥٢}{٣}$

ج) $\int_{-١}^{٠} \frac{٢\text{س}}{٣\text{س}^٢ + ١} \, \text{د س}$

$\text{ص} = ٣\text{س}^٢ + ١ \Leftarrow \text{د ص} = ٦ \text{ س دس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{د ص}}{٦ \text{ س}}$

س = - ١ ⟸ ص = ٤ ، س = ٠ ⟸ ص = ١

$\int_{٤}^{١} \frac{٢\text{ س}}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{د ص}}{٦ \text{ س}} = \frac{٢}{٦} \int_{٤}^{١} \frac{١}{\text{ص}} \, \text{د ص} = \frac{٢}{٦} \left[\text{لو}_{\text{ه}} |\text{ص}| \right]_{٤}^{١} = \frac{١}{٣} \left[\text{لو}_{\text{ه}} ١ - \text{لو}_{\text{ه}} ٤ \right]$

د) $\int_{٣}^{٥} \frac{٢}{٢\text{ س} - ٤} \, \text{د س}$

$\text{ص} = ٢ \text{ س} - ٤ \Leftarrow \text{د ص} = ٢ \text{ د س} \Leftarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٢}$

س = ٣ ⟸ ص = ٢ ، س = ٥ ⟸ ص = ٦

$\int_{٢}^{٦} \frac{٢}{\text{ص}} \, \frac{\text{د ص}}{٢} = \left[\text{لو}_{\text{ه}} |\text{ص}| \right]_{٢}^{٦} = \text{لو}_{\text{ه}} ٦ - \text{لو}_{\text{ه}} ٢$

هـ) $\int_{١}^{٣} ٦ \text{ س ه}^{(\text{س}^٢ - ١)} \, \text{د س}$

$\text{ص} = \text{س}^٢ - ١ \Leftarrow \text{د ص} = ٢ \text{ س د س} \Leftarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٢ \text{ س}}$

س = ١ ⟸ ص = ٠ ، س = ٣ ⟸ ص = ٨

$\int_{٠}^{٨} ٦ \text{ س ه}^{\text{ص}} \frac{\text{د ص}}{٢ \text{ س}} = \int_{٠}^{٨} ٣\text{ه}^{\text{ص}} \, \text{د ص} = ٣\text{ه}^{٨} - ٣\text{ه}^{٠} = ٣\text{ه}^{٨} - ٣$.

٣) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س ، ص) يساوي $(٤ \text{ س} - ٢)^{٣}$ ، فاكتب قاعدة الاقتران علما بأنه يمر بالنقطة (١ ، ٨) .

الحل : م = ق′(س) ، ∫ ق′(س) د س = ق (س) + جـ

$$\Leftarrow \int (٤\text{س} - ٢)^{٣} \text{ د س} = \frac{(٤ \text{ س} - ٢)^{٤}}{٤ \times ٤} + \text{جـ} = \frac{(٤ \text{ س} - ٢)^{٤}}{١٦} + \text{جـ}$$

⇐ يمر بالنقطة (١ ، ٨) ⇐ ق (١) = ٨

$$\text{ق (س)} = \frac{(٤ \text{ س} - ٢)^{٤}}{١٦} + \text{جـ} \Leftarrow \text{ق (١)} = \frac{(٤ \times - ٢)^{٤}}{١٦} + \text{جـ} = ٨ \Leftarrow \frac{١٦}{١٦} + \text{جـ} = ٨$$

$$١ + \text{جـ} = ٨ \Leftarrow \text{جـ} = ٧ \Leftarrow \text{ق (س)} = \frac{(٤ \text{ س} - ٢)^{٤}}{١٦} + ٧$$

٤) إذا علمت أن ق (٤) = ١٢ ، ق (١) = - ٨ ، فاحسب قيمة $\int_{-١}^{٢} ٢ \text{ س ق (س}^{٢} \text{) د س}$

الحل :

$$\text{ص} = \text{س}^{٢} \Leftarrow \text{د ص} = ٢ \text{ س د س} \Leftarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٢ \text{ س}}$$

س = - ١ ⇐ ص = ١ ، س = ٢ ⇐ ص = ٤

$$\int_{١}^{٤} ٢ \text{ س ق}'\text{(ص)} \frac{\text{د ص}}{٢ \text{ س}} = \int_{١}^{٤} \text{ق}'\text{(ص) د ص}$$

$$\text{ق (ص)} \Big]_{١}^{٤} = \text{ق (٤)} - \text{ق (١)} = ١٢ - - ٨ = ١٢ + ٨ = ٢٠ .$$

٥) يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة ع(ن) = $٣ (\text{ن} + ١)^{٢}$ م/ث جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ثانيتين من بدء الحركة ،علما بان موقعه الابتدائي ف (٠) = ١م

الحل : ف(ن) = ∫ ع (ن) د ن ، ف (ن) = $\int ٣ (\text{ن} + ١)^{٢} \text{ د ن}$

$$\text{ف (ن)} = \frac{٣ (\text{ن} + ١)^{٣}}{٣} + \text{جـ} \Leftarrow \text{ف (٠)} = ١ \Leftarrow (٠ + ١)^{٣} + \text{جـ} = ١ ، \Leftarrow ١ + \text{جـ} = ١ \Leftarrow \text{جـ} = ٠$$

$$\Leftarrow \text{ف (ن)} = (\text{ن} + ١)^{٣} \Leftarrow \text{ف (٢)} = (٢ + ١)^{٣} = (٣)^{٣} = ٢٧ \text{ م}$$