التكامل غير المحدود

القواعد

① $\int أ \, د س = أ س + ح$

حيث أ عدد ثابت

مثال: $\int ٢ \, د س = ٢ س + ج$

$\int ٤ \, د س = ٤ س + ج$

$\int -٣ \, د س = -٣ س + ج$

$\int \frac{١}{ج} \, د س = \frac{١}{ج} س + ج$

تكامل الثابت لوحده $\int أ \, د س$، $\int ٥ \, د س$

لباقي الثابت $أ س + ج$

$\int$ ثابت $د س =$ ثابت $\times س + ج$

$\int -٧ \, د س = -٧ \times س + ج$

$= -٧ س + ج$

توجيهي أدبي

(١)

(٢)

* $\int$ د س = $\int$ ١ د س = ١ س + ﺟ

$\int$ د س = س + ﺟ

* $\int$ س^{١} د س = $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ﺟ

قاعدة القاعدة الام Mother Rule

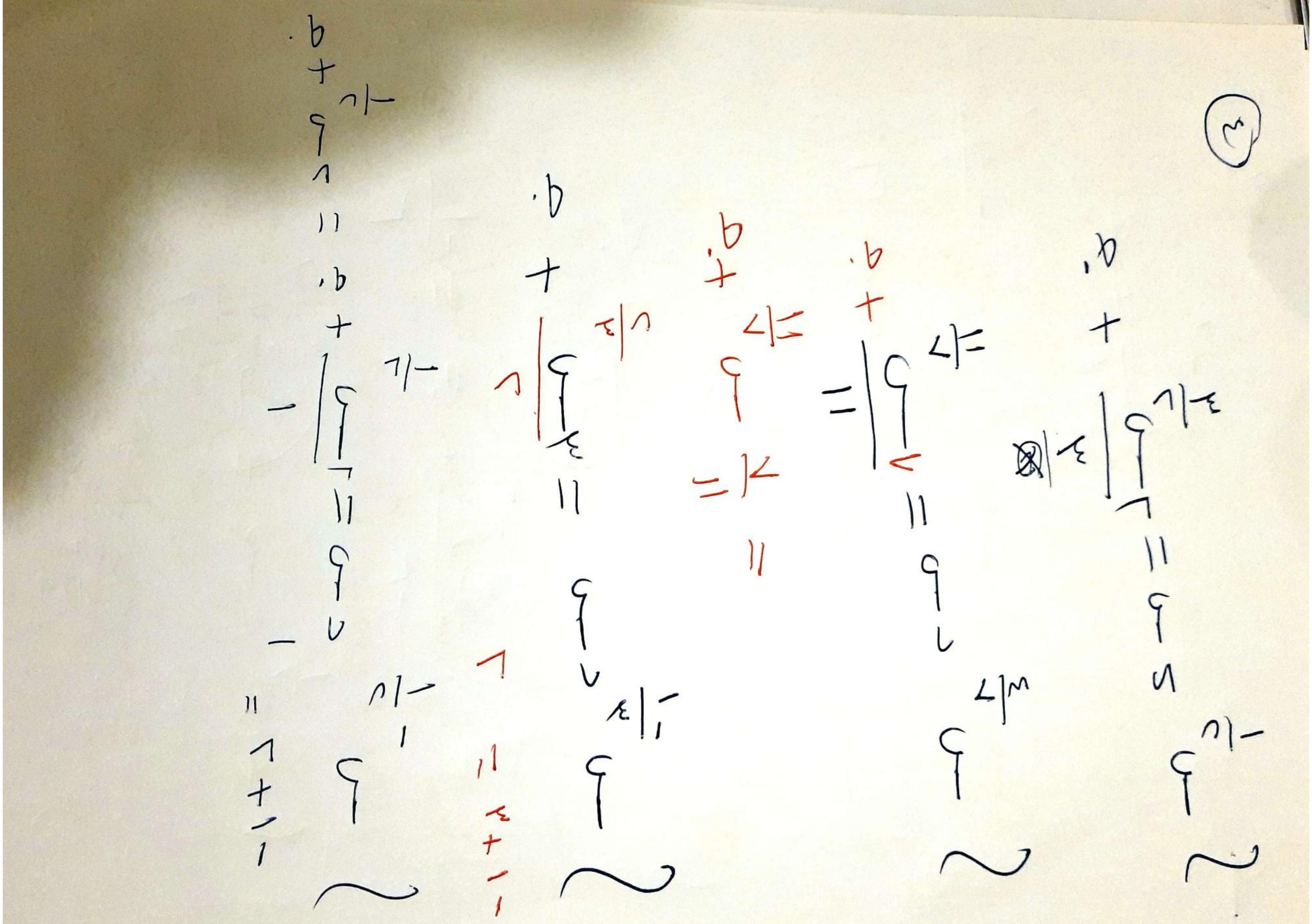
$\int$ س^{ن} د س = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + ﺟ

مثال ٥ $\int$ س د س = $\int$ س^{١} د س = $\frac{س^{١+١}}{١+١}$ + ﺟ

$\int$ أ د س = أ $\int$ د س = أ س + ﺟ

* $\int$ أ س د س = أ $\int$ س د س = أ $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ﺟ

$\int$ س^{٣} د س = $\frac{س^{٣+١}}{٣+١}$ + ﺟ = $\frac{س^{٤}}{٤}$ + ﺟ



(3)

(٥)

$$\sqrt[3]{س^{2}} = س^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{س^{4}} = س^{\frac{4}{3}}$$

$$\sqrt{س^{3}} = س^{\frac{3}{2}}$$

$$\int_{ب}^{ا} س \, د س$$

العبرة في التكامل يجب ان تحول أولاً
الى الصورة الاسية

$$\int_{ب}^{ا} س \, د س = \int_{ب}^{ا} س^{\frac{1}{2}} \, د س$$

$$= \frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + ث$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(س+5)^{3}} + ث$$

(٦)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt[3]{\text{ظا}^2 س}\ \text{قا}^2 س\ د س$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\text{ظا} س)^{\frac{2}{3}}\ \text{قا}^2 س\ د س$$

$$= \int_{1}^{\sqrt{3}} ص^{\frac{2}{3}}\ د ص \quad \leftarrow \text{دنل الجذر (خارج)}$$

$$= \left[\frac{3}{5} ص^{\frac{5}{3}} \right]_{1}^{\sqrt{3}} \quad \leftarrow \text{دنل الحد (داخل)}$$

$$= \frac{3}{5} \left(\sqrt{3}^{5} - 1^{5} \right)$$

$$= \frac{3}{5} \left(\sqrt{3^{5}} - 1 \right)$$

$$= \frac{3}{5} \left(\sqrt{243} - 1 \right)$$

قواعد حفظ

$$\int \text{جا} س\ د س = - \text{جتا} س + جـ$$

$$\int \text{جتا} س\ د س = \text{جا} س + جـ$$

$$\int \text{قا}^2 س\ د س = \text{ظا} س + جـ$$

$$\text{ظا} س = \frac{\text{جا} س}{\text{جتا} س} \quad ,$$

مثال: جد التكاملات التالية

① $\int س^{٤} \, دس = \frac{س^{٥}}{٥} + ج = \frac{١}{٥} س^{٥} + ج$

قاعدة القوى $\Leftarrow \int س^{ن} \, دس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ج$

② $\int -٢ \, دس = -٢س + ج$

$\int ثابت \, دس = ثابت \times س + ج$

③ $\int \frac{١}{س^{ب}} \, دس$

اذا كانت $س^{ب}$ في المقام نرفع $س$ مع المقام الى البسط مع تغيير اشارة الاس

$= \int س^{-ب} \, دس$

$= \frac{س^{-ب+١}}{-ب+١} + ج$

$= \frac{س^{-ب+١}}{١-ب} + ج$

$= \frac{س^{-١}}{-١} + ج = -\frac{١}{س} + ج$

$= -\frac{١}{س} + ج$

$\int \frac{١}{س^{-٥}} \, دس$

نرفع $س^{-٥}$ من المقام الى البسط مع تغيير اشارة الاس ~~صحيح~~

$\int س^{٥} \, دس = \frac{س^{٦}}{٦} + جـ$

$\int \frac{١}{س^{٥}} \, دس$

نرفع $س^{٥}$ من المقام الى البسط مع تغيير اشارة الاس

$= \int س^{-٥} \, دس = \frac{س^{-٥+١}}{-٥+١} + جـ$

$= \frac{س^{-٤}}{-٤} + جـ = -\frac{١}{٤} س^{-٤} + جـ$

$= \frac{-١}{٤ س^{٤}} + جـ$

(٩)

$$\frac{1}{\text{ظتا س}} = \text{ظا س}$$

$$\frac{1}{\text{ظتا}^{٢} \text{س}} = \text{ظا}^{٢} \text{س}$$

$$\text{ظا}^{٢} \text{س} = \frac{1}{\text{ظتا}^{٢} \text{س}}$$

$$\text{ظا}^{٢} \text{س} + ١ = \frac{1}{\text{ظتا}^{٢} \text{س}} + ١$$

$$\text{ظا}^{٢} \text{س} + ١ = \frac{1 + \text{ظتا}^{٢} \text{س}}{\text{ظتا}^{٢} \text{س}}$$

$$\text{ظا}^{٢} \text{س} + ١ = \frac{\text{قا}^{٢} \text{س}}{\text{ظتا}^{٢} \text{س}}$$

$$\text{ظا}^{٢} \text{س} + ١ = \text{قا}^{٢} \text{س} \times \text{ظا}^{٢} \text{س}$$

$$\text{ظا}^{٢} \text{س} + ١ = \text{قا}^{٢} \text{س}$$

(٤)

$$\int \frac{1}{\text{ظتا}^{٢} \text{س}} \, \text{د س} = \int \text{قا}^{٢} \text{س} \, \text{د س}$$

$$= \int \text{قا}^{٢} \text{س} \, \text{د س} = \text{ظا س} + \text{ء}$$

$$\int \frac{٥}{\text{ظتا}^{٢} \text{س}} \, \text{د س} = ٥ \int \frac{1}{\text{ظتا}^{٢} \text{س}} \, \text{د س}$$

$$= ٥ \int \text{قا}^{٢} \text{س} \, \text{د س} = ٥ \text{ظا س} + \text{ء}$$

$$\int \frac{-٤}{\text{ظتا}^{٢} \text{س}} \, \text{د س} = -٤ \int \frac{1}{\text{ظتا}^{٢} \text{س}} \, \text{د س}$$

$$= -٤ \int \text{قا}^{٢} \text{س} \, \text{د س}$$

$$= -٤ \text{ظا س} + \text{ء}$$

القاعده الرابعه

$$\int س^{ن} \, دس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + د$$

$$\int س^{١٠} \, دس = \frac{س^{١١}}{١١} + د$$

$$\int ٤س^{٣} \, دس = ٤ \int س^{٣} \, دس$$

$$= ٤ \frac{س^{٣+١}}{٣+١} + د$$

$$= ٤ \frac{س^{٤}}{٤} + د$$

$$= س^{٤} + د$$

$$\int \left(٥س^{-٤} + ٢س^{-٣} \right) دس = ٥ \int س^{-٤} \, دس + ٢ \int س^{-٣} \, دس$$

$$= ٥ \frac{س^{-٤+١}}{-٤+١} + ٢ \frac{س^{-٣+١}}{-٣+١} + د$$

$$= ٥ \frac{س^{-٣}}{-٣} + ٢ \frac{س^{-٢}}{-٢} + د$$

$$= -\frac{٥}{٣} س^{-٣} - س^{-٢} + د$$

$$= -\frac{٥}{٣ س^{٣}} - \frac{١}{س^{٢}} + د$$

مثال ٢

جد قيمة التكامل

$$\int (٣س - ٥س^{٢} + ٩)\ دس$$

$$= \int ٣س\ دس - \int ٥س^{٢}\ دس + \int ٩\ دس$$

$$\frac{٣س^{٢}}{٢} - \frac{٥س^{٣}}{٣} + س + جـ$$

تدريب

حل

(١) $\int دس = س + جـ$

(٢) $\int س^{٣}\ دس = \frac{س^{٤}}{٤} + جـ$

(٣) $\int س^{-٥}\ دس = \frac{س^{-٥+١}}{-٥+١} + جـ = \frac{س^{-٤}}{-٤} + جـ$

$$= \frac{-١}{٤} س^{-٤} + جـ = \frac{-١}{٤س^{٤}} + جـ$$

(٤)

تدريب ∫ (٤ س − ٢ جا س) د س

$$\frac{٤ س^{٣}}{٣} - ٢ \times (- \text{جتا } س) + ج$$

$$\frac{٤}{٣} س^{٣} + ٢ \text{ جتا } س + ج$$

مثال (٤)

$$\int_{١}^{٢} \left(س^{\frac{١}{٣}} - ١ \right) د س$$

$$= \left[\frac{٣}{٤} س^{\frac{٤}{٣}} - س \right]_{١}^{٢}$$

$$= \left(\frac{٣}{٤} \times ٢^{\frac{٤}{٣}} - ٢ \right) - \left(\frac{٣}{٤} - ١ \right)$$

$$= \frac{٣}{٤} \times ٢ \sqrt[٣]{٢^{٤}} - ٢ - \frac{٣}{٤} + ١$$

$$= \frac{٣}{٢} \sqrt[٣]{١٦} - \frac{٣}{٤} - ١$$

$$\int \frac{\text{س}^{3} - 5\text{س}}{\text{س}}\, د\text{س}$$

نخرج س ذات الأس الأصغر عامل مشترك

$$\int \frac{\text{س}(\text{س}^{2} - 5)}{\text{س}}\, د\text{س}$$

$$= \int (\text{س}^{2} - 5)\, د\text{س}$$

$$= \frac{\text{س}^{3}}{3} - 5\text{س} + جـ$$

$$(\text{س} + \text{ص})^{2} = \text{س}^{2} + 2\text{س}\text{ص} + \text{ص}^{2}$$

تدريب ٤

① $\int (2\text{س} + 3)^{2}\, د\text{س}$

$$(\text{أول} + \text{ثاني})^{2} = (\text{أول})^{2} + 2 \times \text{أول} \times \text{ثاني} + (\text{ثاني})^{2}$$

$$= \int \left((2\text{س})^{2} + 2 \times 2\text{س} \times 3 + 3^{2}\right) د\text{س}$$

$$= \int (4\text{س}^{2} + 12\text{س} + 9)\, د\text{س}$$

$$= \frac{4\text{س}^{3}}{3} + \frac{\cancel{12}^{\,6}\,\text{س}^{2}}{\cancel{2}} + 9\text{س} + جـ$$

(١٦)

تدريب ٤

⑥ $\int \frac{س^2 - ٥س}{\sqrt[3]{س}} \, دس$ ، س > ٠

* نحول الجذر الى صورة أسية $\sqrt[3]{س} = س^{\frac{1}{3}}$

نرفع $س^{\frac{1}{3}}$ من المقام الى البسط مع تغيير إشارة الأس

$\Leftarrow \int (س^2 - ٥س) \, س^{-\frac{1}{3}}$

$\int س^2 \, س^{-\frac{1}{3}} - ٥ س^1 \, س^{-\frac{1}{3}} \, دس$

$٢ + (-) \frac{1}{3}$

$\frac{٣ \times ٢}{١ \times ٣} - \frac{1}{3}$

$\frac{٦}{٣} - \frac{١}{٣} = \frac{٥}{٣}$

$١ + - \frac{1}{3}$

$\frac{٣ \times ١}{١ \times ٣} - \frac{1}{3}$

$\frac{٣}{٣} - \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$

$\int س^{\frac{٥}{٣}} - ٥ س^{\frac{٢}{٣}} \, دس$

$\frac{س^{\frac{٥+٣}{٣}}}{\frac{٥+٣}{٣}} - ٥ \frac{س^{\frac{٢+٣}{٣}}}{\frac{٢+٣}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{٨} س^{\frac{٨}{٣}} - ٥ \times \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{٨} س^{\frac{٨}{٣}} - ٣ س^{\frac{٥}{٣}} + جـ$

١٧

٣)

$$\int \frac{\text{س}^2 + ٢\text{س} - ١٥}{\text{س} - ٣}\, \text{دس} \quad ، \quad \text{س} \neq ٣$$

٢

$$= \int \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٥)}{\text{س} - ٣}\, \text{دس}$$

$$= \int (\text{س} + ٥)\, \text{دس} = \frac{\text{س}^2}{٢} + ٥\text{س} + \text{ث}$$

$$\int \frac{\text{س}^3 + ٦٤}{\text{س} + ٤}\, \text{دس} \quad ، \quad \text{س} \neq -٤$$

$$\int \frac{\text{س}^3 + ٤^3}{\text{س} + ٤}\, \text{دس} = \int \frac{(\text{س} + ٤)(\text{س}^2 - ٤\text{س} + ١٦)}{\text{س} + ٤}\, \text{دس}$$

$$= \frac{\text{س}^3}{٣} - \frac{٤\text{س}^2}{٢} + ١٦\text{س} + \text{ث}$$

$$\frac{\text{س}^3}{٣} - ٢\text{س}^2 + ١٦\text{س} + \text{ث}$$

Scanned by TapScanner

مثال ١

ص $= \int (٤ \text{س}^٢ - ٣\text{س})\, د\text{س}$ جد $\frac{د\text{ص}}{د\text{س}}$ عند س = ٢

$$\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \frac{د \int (٤\text{س}^٢ - ٣\text{س})\, د\text{س}}{د\text{س}}$$

$$= ٤\text{س}^٢ - ٣\text{س}$$

أو مشتقة التكامل تساوي ما داخل التكامل

$$\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = ٤\text{س}^٢ - ٣\text{س}$$

$$\left.\frac{د\text{ص}}{د\text{س}}\right|_{\text{س}=٢} = ٤(٢)^٢ - ٣(٢)$$

$$= ١٦ - ٦ = ١٠$$

تدريب ①

ص $= \int \frac{٤\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + ١}\, د\text{س}$ جد $\left.\frac{د\text{ص}}{د\text{س}}\right|_{\text{س}=-١}$

الحل:

$$\left.\frac{د\text{ص}}{د\text{س}}\right|_{\text{س}=-١} = \frac{٤\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + ١} = \frac{٤(-١) - ١}{(-١)^٢ + ١} = \frac{-٥}{٢}$$

① $\int$ قَ (س) ءس = ق (س) + جـ

② مشتقة التكامل غير المحدد [illegible]

$\int$ (ق (س)) = ق (س)

مشتقة التكامل غير المحدد تساوي ما داخل التكامل

---

(٢٢)

(ف) $\int$ ٣ ظاس جتاس دس

$\int$ ٣ $\dfrac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ × جتاس دس

= -٣ جتاس + ج

(ب) $\int \dfrac{س^٢ + ٦س + ٨}{(س + ٢)}$ دس ، س ≠ -٢

= $\int \dfrac{(س + ٢)(س + ٤)}{س + ٢}$ دس

= $\dfrac{س^٢}{٢}$ + ٤ س + ج