اختبر معلوماتك

جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل من الاقترانات الاتية:

١) ص = س^{٣} – ٤ س + ٣

١) ص = (٢س + ٣)^{٥}

٣) ص = جا(س^{٢} + ٤ س)

٤) ص = لـــوهـ (٢ س) س > ٠

٥) ص = هـ$^{(٣ س + ١)}$

الحل:

١) ص$'$ = ٣ س^{٢} – ٤

٢) ص$'$ = ٥ (٢ س + ٣)^{٤} × ٢

٣) ص$'$ = (٢س+ ٤) جتا(س^{٢}+٤س)

٤) ص$'$ = $\frac{٢}{٢س}$ س > ٠

٥) ص$'$ = ٣هـ$^{(٣ س + ١)}$

---

٢) إذا كان اقتران الايراد الكلي د(س) = س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٥ ، فجد الايراد الحدي .

الحل الايراد الحدي د$'$(س) = ٣ س^{٢} + ٤ س

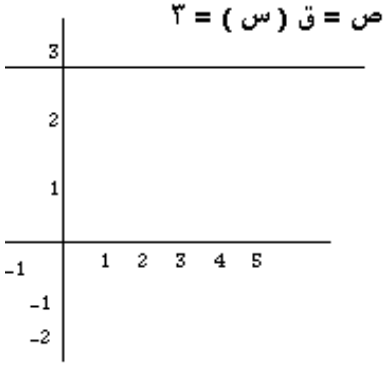
---

٣) ارسم منحنى كل من الاقترانات الاتية:

١) ق (س) = ٣

س	ـ ١	٠	١
ص	٣	٣	٣

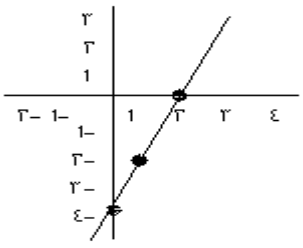
ص = ق (س) = ٣



---

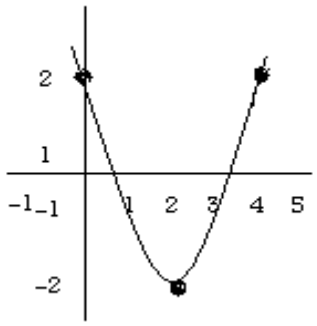
٢) ق (س) = ٢ س – ٤

س	٠	١	٢
ص	ـ٤	ـ٢	٠



٣) ق (س) = س^{٢} – ٤ س + ٢

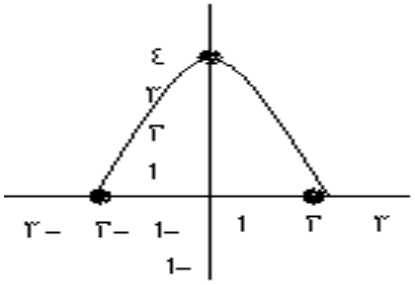
س	٠	٢	٤
ص	٢	-٢	٢



---

٤) ق (س) = ٤ – س^{٢}

س	-٢	٠	٢
ص	٠	٤	٠



---

٤) إذا كان ق(س) = س^{٣} + س^{٢}-٢س+ ١، فجد ميل المماس لمنحنى ق(س) عندما س = -٢

الحل : م = ق َ (-٢) ⇐ ق َ(س) ٣س^{٢} + ٢س -٢

⇐ قَ (-٢) = م = ٣(-٢)^{٢}+٢(-٢) -٢ = ١٢ – ٤ – ٢ = ٦

---

٥) جد مساحة المثلث الذي طول قاعدته ١٢ ســـم وارتفاعه ٤ ســـم .

الحل : مساحة المثلث = نصف القاعدة × الارتفاع

م = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٤ = ٢٤ ســـــــــم^{٢}

أ/ محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

ق (س) = س ٢ + ١

ق َ (س) = ٢س

$\int ٢س = \frac{س^{٢}}{}$ + جـ

حفظ

قاعدة $\int$ ق َ (س) د س = ق (س) + جـ

قاعدة

$\frac{د}{دس} \int$ ق َ (س) دس $\Longleftarrow$ $\frac{د}{د(س)}$ = ق َ (س)

مشتقة التكامل ◄

مشتقة التكامل تساوي ما داخل التكامل	حفظ

مثال :

إذا كان ق (س) = س ٤ + جـ حيث جـ عدد ثابت جد ق َ (س)

ق َ (س) = ٤ س ٣

مثال :

إذا كان ص = س ٤ جد $\frac{د}{دس} \int$ س ٤ دس .

$\Leftarrow$ $\frac{د ص}{دس}$ = ق َ (س) = س ٤

مشتقة التكامل تساوي ما داخل التكامل

مثال :

جد

$\frac{د}{دس} \int$ ٤ س ٣ دس $\Leftarrow$ ق َ (س) = $\frac{د}{د س}$ = ٤ س ٣

مثال :

جد $\frac{د}{دس} \int$ (٦س ٥) دس ، جد ق َ (س)

$\Leftarrow$ المشتقة هي ما داخل التكامل $\Leftarrow$ ق َ (س) = ٦ س ٥

مثال :

إذا كان ص = $\int$ (س ٣ + ٢) دس فجد $\frac{د ص}{د س}$

$\Leftarrow$ المشتقة هي ما داخل التكامل

$\Leftarrow$ $\frac{د ص}{د س}$ = س ٣ + ٢

أ/ محمد مصطفى الشيخ ٠١٢٧٩٥٥٩٨٤٥٦

مثال:

إذا كان ق (س) = $\int \frac{1}{س + ٤}$ دس ، جد ق′ (٢)

الحل :

لإيجاد ق′(٢) يجب أولاً إيجاد ق′(س) و من ثم التعويض ⇐ ق′ (س) = $\frac{١}{س + ٤}$

⇐ ق′(٢) = $\frac{١}{س + ٤}$ ⇐ $\frac{١}{٢ + ٤}$ ⇐ $\frac{١}{٦}$

تذكر دائماً

ق (س) = س^{ن} فإن

ق′ (س) = ن س$^{ن - ١}$

قواعد التكامل

القاعدة الأولى

إذا كان ق′(س) = أ ⇐ حيث أ عدد ثابت ، فإن $\int$ أ دس = أ س + جـ ، جـ عدد ثابت (ثابت التكامل)

أمثلة على القاعدة الأولى :

١ - $\int$ ٣ دس = ٣س + جـ ٢- $\int$ ٧ دس = ٧س + جـ ٣ - $\int$ جـ دس = جـ س + هـ

٤ - $\int$ ن د س = ن س + جـ ٥ - $\int$ ٣ د س = ٣ س + جـ ٦ -$\int$ (٢)^{٢} دس = (٢)^{٢} س + جـ

القاعدة الثانية

$\int$ س^{ن} دس = $\frac{س^{ن + ١}}{ن + ١}$ + جـ ، ن ≠ - ١

⇐ حفظ مهم جدا

مثال : جد التكاملات التالية :

$\int$ س^{٣} دس ، ⇐ الحل : نستخدم القاعدة الثانية $\int$ س^{ن} دس = $\frac{س^{ن + ١}}{ن + ١}$ + جـ ، ن ≠ - ١

⇐ $\int$ س^{٣} دس = $\frac{س^{٤}}{٤}$ + جـ

أ. محمد مصطفى القرداح ٠٩٦٦٥٥٩٨٧٦٠

مثال :

$\int \frac{1}{س^{2}}$ د س الحل : أولاً يجب تحويل الكسر إلى الصورة القياسية

قاعدة :
إذا كان ق (س) = $\frac{أ}{س^{ن}}$ = أس$^{-ن}$ يجب أن نضعها في البسط ونغير إشارة الأس .

$\int \frac{1}{س^{2}}$ د س = $\int$ س$^{-2}$ د س = $\frac{س^{-2+1}}{-2+1}$ = $\frac{س^{-1}}{-1}$ + جـ

$\Leftarrow$ - ١ س$^{-1}$ = $\frac{-1}{س^{1}}$ = $\frac{-1}{س}$

قاعدة :
الأس إذا كان في البسط سالباً ينزل إلى المقام و يصبح موجباً و إذا كان الأس سالباً في المقام يرفع إلى البسط ويصبح موجباً .

مثال :

$\int$ س$^{-\frac{2}{3}}$ د س ، أوجد قيمة التكامل (التكامل غير المحدود).

الحل :

$\int$ س$^{-\frac{2}{3}}$ د س = $\frac{س^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}$ + جـ = $\frac{س^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}$ + جـ

= $\frac{٣س^{\frac{5}{3}}}{٥}$

في حالة الكسور يجب دائماً توحيد المقامات

مقام المقام يرفع إلى البسط

خاصـــــــية (١) :
إذا كان أ عدداً ثابتاً فإن : $\int$ أ ق (س) دس = أ $\int$ ق (س) دس

مثال:

$\int$ ٤ س^{٥} دس = ٤ $\int$ س^{٥} دس = ٤ $\left(\frac{س^{٦}}{٦}\right)$ + جـ = $\frac{٤ س^{٦}}{٦}$ + جـ = $\frac{٢ س^{٦}}{٣}$ + جـ

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

مثال:

$$\int -٦ص^{٢}\,د ص = -٦\int ص^{٢}\,د ص = +جـ = \frac{-٦ص^{٣}}{٣} + جـ = -٢ص^{٣} + جـ$$

خاصـــــية (٢) :

$$\int (ق(س) \pm هـ(س))\,د س = \int ق(س)\,د س \pm \int هـ(س)\,د س$$

مثال :

$$\int (٣س^{٢} + ٥س^{٤})\,د س \Leftarrow = \int ٣س^{٢}\,د س + \int ٥س^{٤}\,د س$$

$$= \frac{٣س^{٣}}{٣} + \frac{٥س^{٥}}{٥} + جـ \Leftarrow = س^{٣} + س^{٥} + جـ$$

يجوز فصل التكامل
يجوز توزيع التكامل

مثال :

$$\int (٦س + ٥)\,د س \Leftarrow = \frac{٦س^{٢}}{٢} + ٥س + جـ \Leftarrow = ٣س^{٢} + ٥س + جـ$$

مثال :

$$\int (٢ع^{٧} - ٣ع + ٩)\,د ع = \frac{٢ع^{٨}}{٨} - \frac{٣ع^{٢}}{٢} + ٩ع + جـ = \frac{ع^{٨}}{٤} - \frac{٣ع^{٢}}{٢} + ٩ع + جـ$$

مثال :

إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س ، ص) يساوي ق´ (س) = ٢س + ١ ، فجد قاعدة الاقتران ق (س) علماً بأنه يمر بالنقطة (١ ، ٤) .

الحل :

تعلم أن ق (س) = $\int$ ق´ (س) دس ⇐ ق (س) = $\int$ (٢ س+ ١) د س ⇐ ق (س) = $\frac{٢س^{٢}}{٢}$ + س + جـ

⇐ بما أنه يمر عبر النقطة (١ ، ٤) يعني ذلك أن ق (١) = ٤

⇐ ق (١) = $\frac{٢(١)^{٢}}{٢}$ + (١) + جـ = ٤ ⇐ ١ + ١ + جـ = ٤ ⇐ = ٢ + جـ = ٤

⇐ جـ = ٤ – ٢ ⇐ جـ = ٢ ⇐ إذن ق (س) = س^{٢} + س + ٢

محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٥٠٦

مثال :

جد $\int (س^{٢} - ١)^{٢} (س + ١)\, د س$

الحل : أولاً نجري عملية الضرب و من ثم نجري عملية التكامل .

$$= \int (س^{٤} - ٢س^{٢} + ١)(س + ١)\, د س \Leftarrow = \int (س^{٥} + س^{٤} - ٢س^{٣} - ٢س^{٢} + س + ١)\, د س$$

$$= \frac{س^{٦}}{٦} + \frac{س^{٥}}{٥} - \frac{٢س^{٤}}{٤} - \frac{٢س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} + س + جـ$$

$$= \frac{س^{٦}}{٦} + \frac{س^{٥}}{٥} - \frac{٢س^{٤}}{٤} - \frac{٢س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} + س + جـ$$

المتشابه نجمعه و غير المتشابه نتركه

$$\begin{array}{r} س^{٢} + ١ \\ \times\ س^{٢} - ١ \\ \hline \\ س^{٤} - ١\ س^{٢} \\ +\ \ - ١\ س^{٢} + ١ \\ \hline \\ س^{٤} - ٢س^{٢} + ١ \\ \times\ س + ١ \\ \hline \\ س^{٥} - ٢س^{٣} + س \\ +\ \ س^{٤} - ٢س^{٢} + ١ \\ \hline \\ س^{٥} + س^{٤} - ٢س^{٣} - ٢س^{٢} + س + ١ \end{array}$$

أ. محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

التكامل غير المحدود و قواعده

\# $\int$ ق´ (س) د س = ق (س) + جـ ⟵ **تعريف التكامل**

\# $\frac{د}{د س} \int$ ق´ (س) د س = ق´ (س) ⟵ **مشتقة التكامل تساوي ما داخل التكامل**

قواعد

القاعدة الأولى

إذا كان ق´(س) = أ ⇐ حيث أ عدد ثابت ، فإن $\int$ **أ دس = أ س + جـ ، جـ عدد ثابت (ثابت التكامل)**

القاعدة الثانية

$$\int س^{ن}\, دس = \frac{س^{ن+١}}{ن + ١} + جـ \quad ، ن \neq - ١$$

القاعدة الأصل $ROOT$

مثـــال : إذا كانت ق(س) = $\int$ ٢ جـا س دس أوجد ق َ(س) .
الحـل: ق َ (س) = ٢ جـا س ، مشتقة التكامل تساوي ماداخل التكامل.

مثـــال :
إذا كانت ق(س) = $\int$ (جـــا س + ٥ ظـــا س) دس أوجد ق َ(س).
الحـل: ق َ (س) = جـــا س + ٥ ظـــا س ، مشتقة التكامل تساوي ماداخل التكامل.

تـدريـب (١)
إذا كانت ق(س) = $\int$ (جـــا س + جتـــا س) دس أوجد ق َ(س).
الحل : ق َ (س) = جـــا س + جتـــا س ، مشتقة التكامل تساوي ماداخل التكامل.

قـواعـد التكـامل غـير المحـدود

الاقتران ق(س)	المشتقة ق َ (س)	التكامل $\int$ ق َ (س) دس = ق (س) + جـ
ق (س) = أ س	ق َ (س) = أ	$\int$ أ دس = أ س + جـ ، أ ثابت ، جـ ثابت التكامل
ق (س) = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ ، ن ≠ -١	ق َ (س) = $س^{ن}$	$\int س^{ن}$ دس = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ ، ن ≠ - ١
ق(س)= لـوهـ |س| ،س≠٠	ق َ (س)= $\frac{١}{س}$ ، س≠٠	$\int \frac{١}{س}$ دس = لـوهـ |س| + جـ
ق (س) = $هـ^{س}$	ق َ (س) = $هـ^{س}$	$\int هـ^{س}$ دس = $هـ^{س}$ + جـ
ق (س) = جـــا س	ق َ (س) = جتـــا س	$\int$ جتـــا س دس = جـــا س + جـ
ق (س) = - جتـــا س	ق َ (س) = جـــا س	$\int$ جـــا س دس = - جتـــا س + جـ
ق (س) = ظـــا س	ق َ (س) = قـــا^{٢} س	$\int$ قـــا^{٢} س دس = ظـــا س + جـ

قاعـدة (٣) : $\int \frac{ق َ(س)}{ق (س)}$ دس = لـوهـ |ق (س) | + جـ
إذا كان البسط مشتقة للمقام فإن تكامل الإقتران يساوي لوغاريتم مطلق المقام

مثـــال: $\int \frac{٥}{س}$ دس = ٥ $\int \frac{١}{س}$ دس = ٥ لـوهـ |س| + جـ

محمد مصطفى الفقاد ٠٧٩٥٥٥٨٤٠٧

مثـــال : $\int \frac{٢س}{س^{٢}+١}$ دس = لـــو$_{هـ}$ |س^{٢} + ١|

لاحظ أن البسط مشتقة للمقام

مثـــال : $\int \frac{٢س+١}{س^{٢}+س}$ دس = لـــو$_{هـ}$ |س^{٢} + س| + جـ

لاحظ أن البسط مشتقة للمقام

قاعـــدة (٤):

$\int$ هـ^{س} دس = هـ^{س} + جـ ، الاقتران الأسي مشتقته نفسه وتكامله ننفسه.

مثـــال :(١) $\int$ ٥ هـ^{س} دس = ٥ هـ^{س} + جـ

(٢) $\int$ (س^{٢} + ٧ هـ^{س}) دس = $\frac{س^{٣}}{٣}$ + ٧هـ^{س} + جـ .

(٣) $\int$ ($\frac{٢}{س^{٣}}$ - ٨ هـ^{س} + $\sqrt[٣]{س^{٢}}$) دس

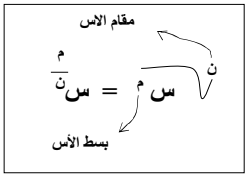
= $\int$ (٢ س$^{-٣}$ - ٨ هـ^{س} + س$^{\frac{٢}{٣}}$) دس

= $\frac{٢ س^{-٢}}{-٢}$ - ٨ هـ^{س} + $\frac{س^{\frac{٢}{٣}+\frac{٣\times١}{٣\times١}}}{\frac{٢}{٣}+\frac{٣\times١}{٣\times١}}$ + جـ

= - س$^{-٢}$ - ٨ هـ^{س} + $\frac{٣ س^{\frac{٥}{٣}}}{٥}$ + جـ

١) هنا يجب رفع س^{٣} من المقام إلى البسط مع تغيير إشارة الأس لنتمكن من إجراء التكامل

٢) نقوم بتحويل الجذر إلى الصورة الأسية لنتمكن من إجراء التكامل



قاعـــدة (٥) :

١) $\int$ جتـــا س دس = جـــا س + جـ .

٢) $\int$ جـــا س دس = - جتـــا س + جـ .

٣) $\int$ قـــا^{٢} س دس = ظـــا س + جـ .

تذكر:

١) قـــا س = $\frac{١}{جتـا س}$

٢) قـــا^{٢} س = $\frac{١}{جتـا^{٢} س}$

٣) ظـــا س = $\frac{جـــا س}{جتـــا س}$

مثـــال :

١) $\int$ (٢ جـــا س + ٣ جتـــا س) دس = -٢ جتـــا س + ٣ جـــا س + جـ .

٢) $\int$ (٢س^{٣}+٥جـــا س – ٨ قـــا^{٢} س دس) = $\frac{٢س^{٤}}{٤}$ - ٥ جتـــا س- ٨ ظـــا س + جـ

٣) $\int \frac{٥}{جتـا^{٢} س}$ دس = ٥ $\int \frac{١}{جتـا^{٢} س}$ دس = ٥ $\int$ قـــا^{٢} س دس = ٥ ظـــا س + جـ

أ. محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٥٥٧٦٨

مثـــال: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س ، ص) يساوي ق ′(س) = ٢ س + ١، فجد قاعدة الاقترا ق (س) إذا علمت أنه يمر بالنقطة (١ ، ٤) ؟

الحل : تعلم من الفصل الماضي أن الميل م = ق′ (س) ⇐ ق′ (س) = ٢ س
من تعريف التكامل ق (س) = ∫ ق′ (س) د س

ق (س) = ∫ (٢ س + ١) د س ⇐ ق (س) = $\frac{٢ س^{٢}}{٢}$ + س + جـ

ق (س) = س^{٢} + س + جـ . بمـا أنه يمر بالنقطة (١ ، ٤) ⇐ ق (١) = ٤

ق (١) = (١)^{٢} + ١ + جـ = ٤ ⇐ ١ + ١ + جـ = ٤ ⇐ ٢ + جـ = ٤ ⇐ جـ = ٢
ق(س) = س^{٢} + س + ٢

مثـــال: يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته ع معطاة بالعلاقة ع (ن)=(٣ن^{٢} – ١٠ن) م/ ث جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٥) ثوان من بدء الحركةعلماً بأن الموقع الإبتدائي للجسيم ف(٠)= ٦

الحـــل: ف (ن) = ∫ ع(ن) د ن = ∫(٣ن^{٢} – ١٠ن) د ن = $\frac{٣ن^{٣}}{٣}$ – $\frac{١٠ن^{٢}}{٢}$ + جـ

ف (ن) = ن^{٣} – ٥ن^{٢} + جـ ، ف(٠) = ٦ ⇐ (٠)^{٣} - ٥(٠)^{٢} + جـ = ٦ ⇐ جـ = ٦
ف (ن) = ن^{٣} – ٥ن^{٢} + ٦
المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٥) ثوان من بدء الحركة هي
ف(٥)= (٥)^{٣} - ٥(٥)^{٢} + ٦ = ١٢٥ – ١٢٥ + ٦ = ٦ م .

مثـــال: إذا كان تسارع جسيم ت بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة ت (ن) = ١٢ن م/ ث^{٢} فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ن ثانية من بدء الحركةعلماً أن السرعة الإبتدائية للجسيم ع(٠)= ٤ م/ ث وموقعه الإبتدائي ف(٠)= ١٥م،ثم أوجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد(٥) ثوان.

تذكر: ∫ ق′(س)دس= ق(س)+جـ

الحـــل: ع(ن) = ف′ (ن) ⇐ ∫ف′ (ن) د ن = ∫ع(ن) د ن = ف (ن)

ت (ن)= ع′(ن) ⇐ ∫ع′(ن) د ن = ∫ ت (ن) د ن = ع (ن)

ع(ن) = ∫ ت(ن) د ن ⇐ ع(ن) = ∫ (١٢ ن) د ن = $\frac{١٢ن^{٢}}{٢}$ + جـ = ٦ ن^{٢} + جـ

ع(٠) = ٤ ⇐ ٦(٠)^{٢} + جـ ⇐ جـ = ٤
ع(ن) = ٦ ن^{٢} + ٤

ف(ن) = ∫ ع(ن) د ن =∫ (٦ ن^{٢} + ٤) د ن = $\frac{٦ ن^{٣}}{٣}$ + ٤ ن + جـ = ٢ ن^{٣}+ ٤ ن + جـ

ف(٠) = ١٥ ⇐ ف(٠) = ٠ + ٠ + جـ = ١٥ ⇐ جـ = ١٥
ف(ن) = ٢ ن^{٣}+ ٤ ن + ١٥
ف(٥) = ٢ (٥)^{٣} +٤× ٥ + ١٥ = ٢ × ١٢٥ + ٢٠ + ١٥ = ٢٥٠ + ٣٥ ٢٨٥ م .

مصطفى الشال ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

تدريب (٢) : جد كلا من التكاملات الآتية:

١) $\int$ د س = $\int$ ١ د س س + جـ

٢) $\int$ $س^{٦}$ د س = $\frac{س^{٧}}{٧}$ + جـ

٣) $\int$ جـــا س د س = - جتـــا س + جـ

٤) $\int$ $هـ^{س}$ د س = $هـ^{س}$ + جـ

٥) $\int$ قـــا^{٢} س د س = ظـــا س + جـ

تدريب (٣) : جد

$\int \frac{٥}{\sqrt{س}}$ د س = $\int \frac{٥}{س^{\frac{١}{٢}}}$ د س = $\int$ ٥ $س^{-\frac{١}{٢}}$ د س

$= \frac{٥ س^{\frac{-١}{٢}+١}}{\frac{-١}{٢}+١} + جـ = ٥ س^{\frac{١}{٢}} + جـ = ١٠ \sqrt{س} + جـ$.

تدريب (٤) : جد

١) $\int$ (٥$س^{٤}$ – ٣$\sqrt[٣]{س}$ + ١) د س = ($٥س^{٤}$ –٢$س^{\frac{١}{٣}}$ + ١) د س

$= \frac{٥ س^{٥}}{٥} - \frac{٢ س^{\frac{١}{٣}+١}}{\frac{١}{٣}+١} + س + جـ = س^{٥} - \frac{٦ س^{\frac{٤}{٣}}}{٤} + س + جـ$

---

٢) $\int \frac{س^{٢}+٣}{س^{٥}}$ د س ، س ≠ ٠ ، = $\int$ ($س^{٢}$ + ٣) $س^{-٥}$ د س = $\int$ ($س^{-٣}$ + ٣ $س^{-٥}$) د س

$\int$ ($س^{-٣}$ + ٣ $س^{-٥}$) د س = $\frac{س^{-٢}}{-٢} + \frac{٣ س^{-٤}}{-٤} + جـ = \frac{-١}{٢س^{٢}} - \frac{٣}{٤ س^{٤}} + جـ$

تدريب (٥) : جد

$\int$ (٥ $هـ^{س}$ - $\frac{٢}{٣ س}$) د س = ٥ $هـ^{س}$ - $\frac{٢}{٣}$ لـــو$_{هـ}$ |س| + جـ

تدريب (٦): جد

١) $\int$ (٤ قـــا^{٢} س + ٤ جـــا س) د س = ٤ ظـــا س – ٤ جتـــا س + جـ.

٢) $\int \frac{٣}{جتـــا^{٢} س}$ د س = ٣ $\int \frac{١}{جتـــا^{٢} س}$ دس = ٣ $\int$ قـــا^{٢}س دس= ٣ظـــا س + جـ

أحمد مصطفى الفضالي ٠١٠٧٩٥٥٩٨٦

أمثلة إضافيـــة:

 # ١) جد كل من التكاملات التالية :

أ) $\int -٢ \ دس$ **⇐ الحل : نطبق القاعدة الأولى حيث – ٢ ثابت ⇐** $\int -٢ \ د س = -٢ س + جـ$.

ب) $\int د س$ **⇐ الحل : هو عبارة عن** $\int ١ \ د س = س + جـ$.

ج) $\int س^{٧} \ د س$ **⇐ الحل : نطبق القاعدة الثانية ⇐** $\int س^{٧} \ د س = \frac{س^{٨}}{٨} + جـ$

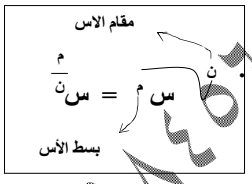
د) $\int \frac{-٣}{س^{٤}} \ د س$ **⇐ الحل : هنا يجب رفع** $س^{٤}$ **من المقام إلى البسط مع تغيير في إشارة الأس .**

$$\Leftarrow \int -٣ س^{-٤} \ د س = -٣ \int س^{-٤} \ د س = -٣ \frac{س^{-٤+١}}{-٤+١} + جـ$$

$$\Leftarrow \frac{-٣ س^{-٣}}{-٣} + جـ = س^{-٣} + جـ = \frac{١}{س^{٣}} + جـ$$

هـ) $\int س^{\frac{١}{٢}} دس = \frac{س^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} + جـ = \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ$

و) $\int \sqrt[٣]{س^{٢}} \ د س$ **⇐ يجب تحويل الجذر إلى الصورة الأسية .**



توحيد مقامات

$$\Leftarrow \int س^{\frac{٢}{٣}} \ د س = \frac{س^{\frac{٢}{٣}+١}}{\frac{٢}{٣}+١} + جـ$$

$$\Leftarrow \frac{س^{\frac{٢}{٣}+\frac{١ \times ٣}{١ \times ٣}}}{\frac{٢}{٣}+\frac{١ \times ٣}{١ \times ٣}} + جـ = \frac{س^{\frac{٢}{٣}+\frac{٣}{٣}}}{\frac{٢}{٣}+\frac{٣}{٣}} + جـ = \frac{س^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣}} + جـ = \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + جـ$$

مثـــال ٢:

جد كل من التكاملات التالية :

أ) $\int (٢س + ٥) \ د س = \int ٢س \ دس + \int ٥ \ دس = \frac{٢س^{٢}}{٢} + ٥ س + جـ = س^{٢} + ٥س + جـ$

هنا نستطيع استخدام خصائص التكامل و توزيع التكامل على عملية الجمع

ب) $\int (٣ س^{٦} + ٤ س^{٣} - ٢) د س$

$$\Leftarrow \frac{٣ س^{٦+١}}{٦+١} + ٤ \frac{س^{٣+١}}{٣+١} - ٢ س + جـ \Leftarrow = \frac{٣ س^{٧}}{٧} + ٤ \frac{س^{٤}}{٤} - ٢ س + جـ$$

$$\Leftarrow \frac{٣}{٧} س^{٧} + س^{٤} - ٢س + جـ$$

ج) $\int (ص + ١) (ص + ٤) د ص$ " هنا يجب أولاً إجراء عملية الضرب ثم التكامل "

$$\Leftarrow \int (ص^{٢} + ٥ ص + ٤) د ص$$

$$\Leftarrow = \frac{ص^{٢+١}}{٢+١} + \frac{٥ ص^{١+١}}{١+١} + ٤ ص + جـ$$

$$\Leftarrow \frac{ص^{٣}}{٣} + \frac{٥ ص^{٢}}{٢} + ٤ ص + جـ$$

ص + ١
× ص + ٤
ص^{٢} + ص
+ ٤ ص + ٤
ص^{٢} + ٥ ص + ٤

د) $\int (٢ ع - ٣)^{٢} د ع$ ، هنا لا بد من فك التربيع أولاً ثم إجراء التكامل .

$$\Leftarrow \int (٤ ع^{٢} - ١٢ ع + ٩) د ع$$

$$\Leftarrow \frac{٤ ع^{٢+١}}{٢+١} - \frac{١٢ ع^{١+١}}{١+١} + ٩ ع + جـ$$

$$\Leftarrow \frac{٤ ع^{٣}}{٣} - \frac{١٢ ع^{٢}}{٢} + ٩ ع + جـ$$

$$\Leftarrow \frac{٤ ع^{٣}}{٣} - ٦ ع^{٢} + ٩ ع + جـ$$

٢ ع – ٣
× ٢ ع – ٣
٤ ع^{٢} – ٦ ع
– ٦ ع + ٩
٤ ع^{٢} – ١٢ ع + ٩

هناك طريقة أخرى للحل :

قانون يستخدم في التكامل الخطي فقط و المرفوع إلى قوة غير الواحد ، وهو

$$\int (أ س + ب)^{ن} د س = \frac{(أ س + ب)^{ن+١}}{أ (ن + ١)} + جـ \quad ، \quad ن \neq - ١$$

محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٠

د) بالطريقة الأخرى

$$\int (٢ع - ٣)^{٢} \, د ع = \frac{(٢ع - ٣)^{٢+١}}{٢(١+٢)} + جـ = \frac{(٢ع - ٣)^{٣}}{(٣)٢} + جـ = \frac{(٢ع - ٣)^{٣}}{٦} + جـ$$

هـ) $\int \frac{س^{٤} + ٦ س}{س^{٦}}$ د س ، س ≠ صفر | يجب رفع $س^{٦}$ من المقام و إدخالها على البسط

$$\Leftarrow = \int (س^{٤} + ٦ س) س^{-٦} \, د س$$ ، الأسس في حالة الضرب تجمع بشرط تساوي الأساسات.

$$\Leftarrow = \int (س^{-٢} + ٦ س^{-٥}) \, دس \Leftarrow = \int (س^{-٢} + ٦ س^{-٥}) \, دس$$

$$\Leftarrow = \frac{س^{-٢+١}}{-٢+١} + \frac{٦ س^{-٥+١}}{-٥+١} + جـ = \frac{س^{-١}}{-١} + \frac{٣ س^{-٤}}{-٤} + جـ = -\frac{١}{س^{١}} - \frac{٣}{٢ س^{٤}} + جـ$$

أمثلـــــة:

٣) إذا كان ق (س) = $\int \frac{س^{٢}}{٣ س + ١}$ د س ، فجد ق´(س) ، ق´ (٢)

$$\Leftarrow$$ = الحل : مشتقة التكامل تساوي ما داخل التكامل .

$$\Leftarrow = ق´(س) = \frac{س^{٢}}{٣ س + ١} \quad ، \Leftarrow = ق´(٢) = \frac{(٢)^{٢}}{٣(٢) + ١} = \frac{٤}{٦ + ١} = \frac{٤}{٧}$$

٤) إذا كان $\int$ ق´(س) دس = ٦ $س^{٢}$ + ٢س + ٣ فجد ق´(س) ، ق´ (١)

$$\Leftarrow$$ = الحل : من تعريف المشتقة $\int$ ق´(س) د س = ق (س) + جـ

$$\Leftarrow$$ إذن ق (س) = ٦ $س^{٢}$ + ٢س + ٣ $\Leftarrow$ = ق´(س) = ١٢ س + ٢

$$\Leftarrow$$ ق´(١) = ١٢ × ١ + ٢ = ١٢ + ٢ = ١٤

٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س ، ص) يساوي ٢ س فجد قاعدة الاقتران ق (س) إذا علمت أنه يمر بالنقطة (- ٢ ، ٢) ؟

$$\Leftarrow$$ = الحل : تعلم من الفصل الماضي أن الميل م = ق´(س) $\Leftarrow$ ق´(س) = ٢ س

من تعريف التكامل $\int$ق´(س) د س = ق (س) + جـ

$$\Leftarrow \int ٢ س \, دس = \frac{٢ س^{٢}}{٢} + جـ = س^{٢} + جـ \Leftarrow ق(س) = س^{٢} + جـ$$

تعلم أن ق (-٢) = ٢ $\Leftarrow$ (- ٢)^{٢} + جـ = ٢ $\Leftarrow$ ٤ + جـ = ٢ $\Leftarrow$ جـ = ٢ – ٤ = - ٢ $\Leftarrow$ جـ = - ٢

ق (س) = $س^{٢}$ – ٢

٦) $\int \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$ د س ، س ≠ ٣ $\Leftarrow$ $\int \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)}$ د س = $\int$ (س + ٣) دس = $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ٣س + جـ

تدريب (٧): جد قاعدة الاقتران ق(س) الذي ميل المماس عند أي نقطة مثل (س ، ص) على منحناه يساوي ق ′(س) = ٢ س + ٣ ، علما بأنه يمر بالنقطة (١ ، -٣) .

الحـــل:

تذكر: $\int$ ق ′(س) د س $= \int$ (٢ س + ٣) د س $= \frac{٢س^{٢}}{٢} + ٣$ س + جـ

ق (س) = $س^{٢}$ +٣ س + جـ ، يمر بالنقطة (١ ، -٣) ⇐ ق (١) = - ٣ ⇐ $(١)^{٢}+٣\times١+$جـ =-٣

١ + ٣ + جـ = -٣ ⇐ ٤ + جـ = -٣ ⇐ جـ = - ٧ ⇐ ق (س) = $س^{٢}$ +٣ س – ٧ .

تدريب (٧): تتحرك نقطة في خط مستقيم بتسارع ثابت (ت) مقداره ت(ن) = ١٢ م / $ث^{٢}$ ، جد سرعتها بعد مرور زمن قدره ن ثانية، علما بأن سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٧ م / ث ، ثم جد سرعتها بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة .

ت (ن) = ع ′(ن) التكامل عملية عكسية للتفاضل

الحـــل :

ع(ن) = $\int$ ت(ن) د ن ⇐ ع(ن) = $\int$ ع′(ن) د ن = $\int$ ١٢ د ن = ١٢ن+ جـ

ع(٠) = ٧ ⇐ ١٢ (٠) + جـ = ٧ ⇐ جـ = ٧

ع (ن) = ١٢ ن + ٧

ع (٢) = ١٢ × ٢ + ٧ = ٢٤ + ٧ = ٣١ م / ث

تمـــــاريـن و مسـائـــــل

جد كلا من التكاملات الاتية :

١) $\int$ - ١٥ د س = - ١٥ س + جـ

٢) $\int \frac{د س}{٣} = \int \frac{١}{٣}$ د س $= \frac{١}{٣}$ س + جـ

٣) $\int$ ٥ $س^{٩}$ د س $= \frac{٥ س^{١٠}}{١٠}$ + جـ

٤) $\int \frac{٧}{س^{-٥}}$ د س $= \int$ ٧ $س^{٥}$ د س $= \frac{٧ س^{٦}}{٦}$ + جـ

٥) $\int \sqrt[٣]{س^{-٤}}$ د س $= \int س^{\frac{-٤}{٣}}$ د س = - ٤ $س^{\frac{-١}{٣}}$ + جـ

٦) $\int \frac{-٢}{٥ س}$ د س $= \frac{-٢}{٥} \int \frac{١}{س}$ د س $= \frac{-٢}{٥}$ لـو| س|+ جـ

جد كلا من التكاملات الاتية :

١) $\int$ (١٠ $س^{٤}$ + ٦ $س^{٣}$ – $\frac{٣}{٤}$ س – ٨) د س $= \frac{١٠}{٥} س^{٥} + \frac{٦}{٤} س^{٤} - \frac{٣ س^{٢}}{٢\times٤} - ٨$ س + جـ

٢) $\int \frac{س^{٦} - ٥}{\sqrt[٣]{س}}$ د س $= \int \frac{س^{٦} - ٥}{س^{\frac{١}{٣}}}$ د س

$= \int (س^{٦} - ٥) س^{-\frac{١}{٣}}$ د س $= \int (س^{\frac{١٧}{٣}} - ٥ س^{-\frac{١}{٣}})$ د س $= س^{\frac{٢٠}{٣}} - ٥ س^{\frac{٢}{٣}} +$ جـ

٣) $\int$ (٥ س + ٢) (س – ١) د س

الحـل : نجري عملية الضرب أولا ثم نجري التكامل.

$\int$ (٥ س^{٢} – ٣ س – ٢) د س $= \frac{٥ س^{٣}}{٣} - \frac{٣ س^{٢}}{٢} - ٢ س +$ جـ

٤) $\int (٣ هـ^{س} - \sqrt{٢}\ هـ^{س})$ د س $= ٣ هـ^{س} - \sqrt{٢}\ هـ^{س} +$ جـ

جد كلا من التكاملات الاتية :

١) $\int$ (- ٣جـــا س + قـــا^{٢} س) د س = ٣ جتـــا س + ظـــا س + جـ

٢) $\int (٢ جتـــا س + \frac{قـــا^{٢} س}{٣})$ د س $= ٢ جـــا س + \frac{ظـــا س}{٣} +$ جـ

٣) $\int$ جتـــا س ظـــاس دس $= \int$ جتـــا س $\times \frac{جـــا س}{جتـــا س}$ د س $= \int$ جـــا س د س د س $= -$ جتـــا س + جـ

---

٤) إذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق وكانت ق ′(س) =٣ س^{٢} – ٤س+١ فجد ق(-١) علما بأن ق(٣) = ٢

الحـــل: ق(س) = $\int$ ق ′(س) د س = $\int$ (٣ س^{٢} – ٤س+١) د س = $\frac{٣ س^{٣}}{٣} - \frac{٤ س^{٢}}{٢} + س +$ جـ

ق(س) = س^{٣} – ٢ س^{٢} + س + جـ ، ق(٣) = ٢ = (٣)^{٣} – ٢(٣)^{٢}+٣+ جـ ⇐ ٢٧- ١٨+٣+ جـ =٢

جـ = - ١٠ ⇐ ق(س) = س^{٣} – ٢ س^{٢} + س – ١٠ ⇐ ق(-١) = (-١)^{٣}- ٢(-١)^{٢}+٣ – ١٠ = - ١٠

---

٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س،ص) يساوي ٤س^{٣} +٦س^{٢} -٣ فجد قاعدة الاقتران ق (س) إذا علمت أنه يمر بالنقطة (- ٢ ، ٠) ؟

الحـــل:

ق (س) = $\int$ (ق ′ (س) = م) د س = $\int$ (٤س^{٣} +٦س^{٢} -٣) د س

$= \frac{٤ س^{٤}}{٤} + \frac{٦ س^{٣}}{٣} - ٣ س +$ جـ $= س^{٤} + ٢ س^{٣} - ٣ س +$ جـ = ق (س)

ق (- ٢) = ٠ ⇐ (-٢)^{٤} + ٢ (-٢)^{٣} – ٣ × - ٢ + جـ = ٠ ⇐ ١٦ - ١٦ + ٦ + جـ = ٠

جـ = - ٦ ⇐ ق (س) = س^{٤} + ٢ س^{٣} - ٣ س – ٦

---

٦) إذا كان $\int$ ق (س) د س = ٤ س^{٣} – ٦ س^{٢} + ٢ ، جد ق ′(١)

الحـــل : ق (س) = $\int$ ق ′(س) د س الاقتران الاصلي ق (س) هو مابعد اشارة المساواة

ق (س) = ٤س^{٣} – ٦ س^{٢} + ٢ ⇐ ق ′(س) = ١٢ س^{٢} – ١٢ س

ق ′(١) ١٢ – ١٢ = ٠

---

٦) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد ن ثانية تساوي ع(ن) = (٤ ن + ٨) م/ ث جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ن ثانية علما بان موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣ م .

ف (ن) = ∫ ع (ن) د ن = ∫ (٤ ن + ٨) د ن = ٤ $\frac{ن^{٢}}{٢}$ + ٨ ن + جـ = ٢ ن^{٢} + ٨ ن + جـ

ف(٠) = ٣ ⇐ ٢ (٠)^{٢} + ٨ × ٠ + جـ = ٣ ⇐ = ٣ ⇐ ف (ن) = ٢ ن^{٢} + ٨ ن + ٣

---

٧) إذا كان تسارع جسيم ت بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة ت (ن) = ٦ن م/ ث^{٢} فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ن ثانية من بدء الحركةعلماً أن السرعة الإبتدائية للجسيم ع(٠)= ٢ م/ ث وموقعه الإبتدائي ف(٠)= ٥م .

ع(ن) = ∫ ت(ن) د ن ⇐ ع(ن) = ∫ (٦ ن) د ن = $\frac{٦ن^{٢}}{٢}$ + جـ = ٣ ن^{٢} + جـ

ع(٠) = ٢ ⇐ ٣(٠)^{٢} + جـ = ٢ ⇐ جـ = ٢

ع(ن) = ٣ ن^{٢} + ٢

ف(ن) = ∫ع(ن) د ن = ∫ (٣ ن^{٢} + ٢) د ن = $\frac{٣ ن^{٣}}{٣}$ + ٢ ن + جـ = ن^{٣}+ ٢ ن + جـ = ف (ن)

ف (٠) = ٥ = (٠)^{٣} + ٢ × ٠ + جـ ⇐ جـ = ٥

ف (ن) = ن^{٣}+ ٢ ن + ٥

End The First Lesson

أ/ محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

تعريف: التكامل المحدود للاقتران ق (س) في الفترة [أ ، ب] هو الفرق بين قيمتي التكامل غير المحدود للاقتران ق (س) عند القيمتين أ ، ب للمتغير س و يعبر عنه بالرموز .

$$\int_{أ}^{ب} ق'(س)\, د س = ق(ب) - ق(أ)$$

ب ← الحد العلوي للتكامل

أ ← الحد السفلي للتكامل

مثال : أحسب قيمة $\int_{1}^{2} ٢س \, د س = \left[\frac{٢ س^{٢}}{٢} \right]_{1}^{٢} = \left[س^{٢} \right]_{1}^{٢} = (٢)^{٢} - (١)^{٢} = ٤ - ١ = ٣$

مثال : أحسب قيمة $\int_{2}^{5} ٤ \, د س$

$$\int_{2}^{5} ٤ \, د س = ٤ (٥ - ٢) = ٤ \times ٣ = ١٢$$

الحالة (١) $= \int_{2}^{5} ٤ س = ٤ [٥ - ٢] = ٤ \times ٣ = ١٢$

الحالة (٢) $= ٤ \times ٥ - ٤ \times ٢ = ٢٠ - ٨ = ١٢$

قاعدة:

$$\int_{أ}^{ب} ك \, د س \text{ ، ك ثابت} = ك (ب - أ)$$

مثال : $\int_{-1}^{7} ٦ \, د س = ٦ (٧ - (-١)) = ٦ (٧ + ١) = ٦ \times ٨ = ٤٨$

مثال : $\int_{1}^{3} س^{٣} \, د س = \left[\frac{س^{٤}}{٤} \right]_{1}^{3} = \frac{(٣)^{٤} - (١)^{٤}}{٤} = \frac{٨١ - ١}{٤} = \frac{٨٠}{٤} = ٢٠$

قاعدة :

$$\int_{أ}^{ب} س^{ن} \, د س = \left(\frac{س^{ن+١}}{ن + ١} \right)_{أ}^{ب} = \frac{ب^{ن+١} - أ^{ن+١}}{ن + ١} \quad ، ن \neq -١$$

أ. محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

مثال : ٤

تدريب ٣

$\int_{1}^{4} \sqrt{س}\ د س$ ⇐ يجب تحويل الجذور إلى الصورة الأسية

$$= \int_{1}^{4} س^{\frac{1}{2}}\ د س = \left[\frac{س^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_{1}^{4} = \left[\frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{1}^{4} = \left[\frac{٢\ س^{\frac{3}{2}}}{٣} \right]_{1}^{4} = \frac{٢\ (٤)^{\frac{3}{2}} - ٢\ (١)^{\frac{3}{2}}}{٣} = \frac{١٤}{٣}$$

مثال : ٢

$\int_{1}^{2} س^{\frac{2}{3}}\ د س$ ⇐ يجب تحويل الجذور إلى الصورة الأسية

$$= \int_{1}^{2} س^{\frac{2}{3}}\ د س = \left[\frac{س^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} \right]_{1}^{2} = \left[\frac{٣\ س^{\frac{5}{3}}}{٥} \right]_{1}^{2}$$ ⇐ يجب تحويلها إلى صورة الجذور

$$= \left[\frac{٣}{٥} \sqrt[3]{س^{٥}} \right]_{1}^{2} = \frac{٣}{٥} \left[\sqrt[3]{(٢)^{٥}} - \sqrt[3]{(١)^{٥}} \right]$$

$$= \frac{٣}{٥} \left[\sqrt[3]{٣٢} - \sqrt[3]{١} \right] = \frac{٣}{٥} \left[٣٢^{\frac{1}{3}} - ١^{\frac{1}{3}} \right]$$

مثال : ٢

$\int_{1}^{2} \frac{١}{س^{٣}}\ د س$ # يجب رفع $س^{٣}$ إلى البسط مع تغيير الإشارة

$\int_{1}^{2} س^{-٣}\ دس$ يجب تحويل $س^{-٢}$ من البسط إلى المقام ليصبح الأس موجب

$$= \left[\frac{س^{-٣+١}}{-٣+١} \right]_{1}^{2} = \frac{س^{-٢}}{-٢}$$

$$= \left[\frac{-١}{٢ س^{٢}} \right]_{1}^{2} = \frac{-١}{٢(٢)^{٢}} - \frac{-١}{٢(١)^{٢}} = \frac{-١}{٨} + \frac{-١}{٢ \times ٢} = \frac{-١}{٨} + \frac{٤ \times ١}{٨} = \frac{٣}{٨}$$

محمد مصطفى الفضاوي ٠٥٥٩٨٤٥٦٣٥

١) $\int_{أ}^{ب} ق'(س)\, د س = ق(س)\Big]_{أ}^{ب} = ق(ب) - ق(أ)$

٢) إذا كان ك عدداً ثابتاً فإن $\int_{أ}^{ب} ك\, د س$ ، ك ثابت = ك (ب – أ) الثابت × (ب – أ)
الثابت × طول الفترة

٣) $\int_{أ}^{ب} س^{ن}\, د س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١}\Big]_{أ}^{ب} = \frac{ب^{ن+١} - أ^{ن+١}}{ن+١}$ ، $ن \neq -١$

أمثـــــــلة متنوعة : أحسب قيمة كل من التكاملات التالية :

أ) $\int_{١}^{٧} ٣\, د س$ ⇐ حسب القاعدة (٣) : ٣ (٧ – ١) = ٣ × ٦ = ١٨

ب) $\int_{-٢}^{٢} -٥\, د س = -٥ (٢ - -٢) = -٥ (٢ + ٢) = -٥ \times ٤ = -٢٠$

جـ) $\int_{-٣}^{-١} س\, د س$ حسب القاعدة (٣) $= \frac{س^{١+١}}{١+١}\Big]_{-٣}^{-١} = \frac{س^{٢}}{٢}\Big]_{-٣}^{-١} = \frac{(-١)^{٢} - (-٣)^{٢}}{٢}$

$= \frac{١ - ٩}{٢} = \frac{-٨}{٢} = -٤$

د) $\int_{٢}^{٣} س^{٤}\, د س = \frac{س^{٥}}{٥}\Big]_{٢}^{٣} = \frac{(٣)^{٥} - (٢)^{٥}}{٥} = \frac{٢٤٣ - ٣٢}{٥} = \frac{٢١١}{٥}$

هـ) $\int_{-١}^{-\frac{١}{٢}} \frac{١}{س^{٢}}\, د س$ ⇐ يجب رفع $س^{٢}$ إلى البسط مع تغيير في إشارة الأس

$\int_{-١}^{-\frac{١}{٢}} س^{-٢}\, د س = \frac{س^{-٢+١}}{-٢+١}\Big]_{-١}^{-\frac{١}{٢}} = \frac{س^{-١}}{-١}\Big]_{-١}^{-\frac{١}{٢}}$ ⇐ يجب إعادة $س^{-١}$ إلى المقام مع تغيير في إشارة الأس

محمد مصطفى الضبع ٠١٧٩٥٥٩٨٤٥٦

$$= \left[\frac{-١}{س} \right]_{-١}^{٢} = \frac{-١}{٢} - \frac{-١}{-١} = \frac{-١}{٢} + \frac{-١}{٢} = \frac{-١ \times ٢}{١ \times ٢} = \frac{-١}{٢} - \frac{٢}{٢} = \frac{-٣}{٢}$$

و) $\int_{١}^{٨} \frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$ د س # يجب تحويلها إلى الصورة الأسية و من ثم رفعها إلى البسط مع تغيير في إشارة الأس

$$= \int_{١}^{٨} س^{-\frac{١}{٣}} \text{ د س} = \left[\frac{س^{-\frac{١}{٣}+١}}{-\frac{١}{٣}+١} \right]_{١}^{٨} = \left[\frac{س^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}} \right]_{١}^{٨} = \left[\frac{٣ س^{\frac{٢}{٣}}}{٢} \right]_{١}^{٨}$$

$$= \left[\frac{٣ \sqrt[٣]{س^{٢}}}{٢} \right]_{١}^{٨} \quad \text{\# نعيدها إلى صورة الجذر} \Leftarrow \quad \left[\frac{٣}{٢} \sqrt[٣]{س^{٢}} \right]_{١}^{٨} = \frac{٣}{٢} \left[\sqrt[٣]{(٨)^{٢}} - \sqrt[٣]{١} \right]$$

$$= \frac{٣}{٢} (٤ - ١) = \frac{٣}{٢} (٣) = \frac{٩}{٢}$$

ز) $\int_{٠}^{١} س^{\frac{١}{٤}} \text{ د س} = \left[\frac{س^{\frac{١}{٤}+١}}{\frac{١}{٤}+١} \right]_{٠}^{١} = \left[\frac{س^{\frac{٥}{٤}}}{\frac{٥}{٤}} \right]_{٠}^{١} = \left[\frac{٤ س^{\frac{٥}{٤}}}{٥} \right]_{٠}^{١} = \frac{٤}{٥} (١ - ٠) = \frac{٤}{٥}$

ج) $\int_{٣}^{٣} س^{٩} \text{ دس} = \left[\frac{س^{١٠}}{١٠} \right]_{٣}^{٣} = \frac{(٣)^{١٠} - (٣)^{١٠}}{١٠} = \text{صفر}$

ط) $\int_{أ}^{ب} س^{٢} \text{ دس} = \left[\frac{س^{٣}}{٣} \right]_{أ}^{ب} = \frac{ب^{٣} - أ^{٣}}{٣}$

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

مثـــال : ١) إذا كان $\int_{-٣}^{١} ك\ دس = ٢٨$ ، فما قيمة ك ؟ **تدريب ٢**

$$= \int_{-٣}^{١} ك\ دس = ك (١ - -٣) = ٢٨ \Leftarrow ك (٤) = ٢٨ \Leftarrow \frac{٤ ك}{٤} = \frac{٢٨}{٤} \Leftarrow ك = ٧$$

$$\int_{-١}^{٣} ك\ دس = ك (٣ - -١) = ٢٤ \Leftarrow ك (٤) = ٢٤ \Leftarrow \frac{٤ ك}{٤} = \frac{٢٤}{٤} \Leftarrow ك = ٦$$

٢) إذا كان $\int_{٠}^{جـ} س\ دس = ٨$ فما قيمة جـ ؟ **تدريب ٤**

$$\int_{٠}^{جـ} س\ دس = \left[\frac{س^٢}{٢} \right]_{٠}^{جـ} = \frac{جـ^٢ - (٠)^٢}{٢} = ٨ \Leftarrow \frac{جـ^٢ - ٠}{٢} = \frac{٨}{١}$$ **ضرب تبادلي**

$جـ^٢ = ١٦ \Leftarrow جـ^٢ = ١٦ \Leftarrow جـ = \pm ٤ \Leftarrow جـ = -٤$ ، $جـ = +٤$

٣) إذا كانت قَ (س) هي مشتقة الاقتران ق (س) المعرف على [٢ ، ٥] و كان ق (٢) = ٤ ، ق (٥) = - ٧ فجد : $\int_{٢}^{٥} ق'(س)\ دس$

الحل : $\int_{٢}^{٥} قَ (س)\ دس = ق (س)]_{٢}^{٥} = ق (٥) – ق (٢) = - ٧ – ٤ = - ١١$

٤) إذا كانت قَ (س) = ٣س هي مشتقة الاقتران ق (س) المعرفة على الفترة [٢ ، ٤] فجد قيمة ق (٤) – ق (٢)

الحل : $\int_{٢}^{٤} قَ (س)\ دس = \int_{٢}^{٤} ٣ س\ دس = \left[\frac{٣ س^٢}{٢} \right]_{٢}^{٤} = \left[\frac{٣}{٢} (٤)^٢ - (٢)^٢ \right] = \left[\frac{٣}{٢} ١٦ - ٤ \right]$

أ/ محمد مصطفى الفضاء ٠٧٩٥٥٩٨٤٣٠

تابع مثـــال (٤)

$$= \frac{٣}{٢_{١}} \times ١٢^{٦} = ١٨$$

أو

$$\int_{٢}^{٤} ق'(س) = ق(س) \Leftarrow \int_{٢}^{٤} ٣س \, دس = \frac{٣س^{٢}}{٢} \, ق(س)$$

$$ق(س) = \frac{٣س^{٢}}{٢} \Leftarrow ق(٤) = \frac{٣(٤)^{٢}}{٢} = ٢٤ \, ، \, ق(٢) = \frac{٣(٢)^{٢}}{٢} = ٦$$

$$ق(٤) - ق(٢) = ٢٤ - ٦ = ١٨$$

٥) إذا كان $\int_{١}^{٣} هـ(س) \, د س = \frac{١}{س^{٢}} + جـ$ **فاحسب قيمة** $\int_{١}^{٣} هـ(س) \, دس$

$$\Leftarrow \left[\frac{١}{س^{٢}} + جـ \right]_{١}^{٣} = \left(\frac{١}{٩} + جـ \right) - \left(\frac{١}{١} + جـ \right)$$

$$= \frac{١}{٩} + جـ - ١ - جـ = \frac{١}{٩} - \frac{٩}{٩} = \frac{-٨}{٩}$$

أ/ محمد مصطفى الفتاة ٠١٧٩٥٥٩٨٤٥٦

مثال :
أوجد قيمة $\int_{2}^{6} \frac{1}{س}$ د س .

الحل : تعلم أن $\int \frac{1}{س}$ دس = لو$_{هـ}$ | س | + جـ

$\Leftarrow \int_{2}^{6} \frac{1}{س}$ د س = لو$_{هـ}$ | س | $\Big]_{1}^{6}$ = لو$_{هـ}$^{6} − لو$_{هـ}$^{2}

مثال :
أوجد قيمة $\int_{3}^{5} \frac{2}{س}$ د س

$\Leftarrow$ ٢ $\int_{3}^{5} \frac{1}{س}$ د س = ٢ $\Big[$ لو$_{هـ}$ | س | $\Big]_{3}^{5}$ = ٢ $\Big[$ لو$_{هـ}$^{5} − لو$_{هـ}$^{3} $\Big]$

تدريب (٥) ١٤٧

احسب قيمة $\int_{1}^{4} \frac{1}{س}$ د س

لو$_{هـ}$ ١ = صفر

$\Leftarrow \int_{1}^{4} \frac{1}{س}$ د س = لو$_{هـ}$ | س | $\Big]_{1}^{4}$ = لو$_{هـ}$^{4} − لو$_{هـ}$^{1} = لو$_{هـ}$^{4}

مثال : احسب قيمة $\int_{1}^{5}$ هـ^{س} دس

تعلم ان $\int_{5}^{5}$ هـ^{س} دس = هـ^{س} + جـ

$\Leftarrow \int_{1}^{5}$ هـ^{س} دس = هـ^{س} $\Big]_{1}^{5}$ = هـ^{5} − هـ^{1}

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٢٦

مثال : إذا كان $\int_{1}^{جـ} هـ^{س}\ دس = صفر$ أوجد قيمة جـ

الحل : $\int_{1}^{جـ} هـ^{س}\ دس = \left[هـ^{س} \right]_{1}^{جـ} = صفر \Leftarrow هـ^{جـ} - هـ^{1} = صفر \Leftarrow هـ^{جـ} = هـ^{1} \Leftarrow جـ = 1$

إذا تساوت الأساسات فإن الأسس متساوية

مثال : إذا كان $\int_{3}^{جـ} هـ^{س}\ دس = صفر$ أوجد قيمة جـ

الحل : $\int_{جـ}^{3} هـ^{س}\ دس = \left[هـ^{س} \right]_{جـ}^{3} = صفر \Leftarrow هـ^{3} - هـ^{جـ} = صفر \Leftarrow هـ^{جـ} = هـ^{3} \Leftarrow جـ = 3$

تدريب (٦) ١٤٨

احسب كل من التكاملات الآتية :

١) $\int_{0}^{3} هـ^{س}\ دس = \left[هـ^{س} \right]_{0}^{3} = هـ^{3} - هـ^{0} = هـ^{3} - 1$

٢) $\int_{1}^{2} \frac{1}{هـ^{-س}}\ د س = \int_{1}^{2} هـ^{س}\ دس = \left[هـ^{س} \right]_{1}^{2} = هـ^{2} - هـ^{1}$

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

١) احسب قيمة كل من التكاملات الاتية :

أ) $\int_{-١}^{٤} -١٢ \, د س = -١٢ (٤ - -١) = -١٢ (٥) = -٦٠$

ب) $\int_{٠}^{٣} س د س = \left[\frac{س^{٢}}{٢} \right]_{٠}^{٣} = \frac{(٣)^{٢} - (٠)^{٢}}{٢} = \frac{٩ - ٠}{٢} = \frac{٩}{٢}$

ج) $\int_{-١}^{٢} س^{٥} د س = \left[\frac{س^{٦}}{٦} \right]_{-١}^{٢} = \frac{(٢)^{٦} - (-١)^{٦}}{٦} = \frac{٦٤ - ١}{٦} = \frac{٦٣}{٦}$

د) $\int_{١}^{٨} \frac{١}{س^{\frac{٤}{٣}}} د س = \int_{١}^{٨} س^{-\frac{٤}{٣}} د س$

$= \left[\frac{س^{-\frac{٤}{٣} + \frac{١ \times ٣}{٣ \times ١}}}{-\frac{٤}{٣} + \frac{١ \times ٣}{٣ \times ١}} \right]_{١}^{٨} = \left[\frac{س^{-\frac{١}{٣}}}{-١} \right]_{١}^{٨} = - \left[\frac{١}{س^{\frac{١}{٣}}} \right]_{١}^{٨} = \left[\frac{-٣}{س} \right]_{١}^{٨}$

$= \left[\frac{-٣}{\sqrt[٣]{س}} \right]_{١}^{٨} = \frac{-٣}{\sqrt[٣]{٨}} - \frac{-٣}{\sqrt[٣]{١}} = \frac{-٣}{٢} + \frac{-٣ \times ٢}{٢ \times ١} = \frac{-٣ + ٦}{٢} = \frac{٣}{٢}$

هـ) $\int_{١}^{٨} \frac{١}{س} د س = لو_{٥} | س | \Big]_{١}^{٨} = لو_{٥}^{٨} - لو_{٥}^{١} = لو_{٥}^{٨}$

و) $\int_{-٣}^{٠} هـ^{س} د س = هـ^{س} \Big]_{-٣}^{٠} = هـ^{٠} - هـ^{-٣} = ١ - هـ^{-٣}$

محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩١٤٥٦

٢) إذا كان $\int_{-٢}^{ب} ٨$ د س = ٢٤ ، فما قيمة ب .

الحل : $٨ (ب - (-٢)) = ٢٤ \Leftarrow \frac{٨}{٨} (ب + ٢) = \frac{٢٤}{٨} \Leftarrow ب + ٢ = ٣ \Leftarrow ب = ٣ - ٢ = ب = ١$

٣) إذا كان $\int_{١}^{٥} ك$ د س = - ٤٨ ، فما قيمة ك .

الحل : $ك (٥ - ١) = -٤٨ \Leftarrow \frac{٤ ك}{٤} = \frac{-٤٨}{٤} \Leftarrow ك = -١٢$

٤) إذا كان $\int_{٣}^{جـ} ٣ س^{٢}$ د س = - ٣٥ ، فما قيمة جـ

الحل : $\left[\frac{٣ س^{٣}}{٣}\right]_{٣}^{جـ} = -٣٥ \Leftarrow جـ^{٣} - (٣)^{٣} = -٣٥ \Leftarrow جـ^{٣} - ٢٧ = -٣٥ \Leftarrow جـ^{٣} = -٨$

$\Leftarrow جـ = -٢$ بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

٥) إذا كان ق (- ٣) = ١٥ ، ق (- ١) = - ٨ ، فجد $\int_{-٣}^{-١}$ ق ` (س) د س

الحل : $\int_{-٣}^{-١} ق`(س)$ د س $= [ق (س)]_{-٣}^{-١}$

= ق (- ١) – ق (- ٣) = - ٨ – ١٥ = - ٢٣

أ . محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

٦) إذا كان $\int_{-١}^{٨}$ ل (س) د س = $س^{\frac{٢}{٣}}$ + جـ ، فجد قيمة $\int_{-١}^{٨}$ ل (س) د س

الحل :

$$\int_{-١}^{٨} \text{ل}(س)\,د\,س = \left[س^{\frac{٢}{٣}} + جـ \right]_{-١}^{٨} = \left[\sqrt[٣]{س^{٢}} + جـ \right]_{-١}^{٨}$$

$$= \left(\sqrt[٣]{٨^{٢}} + جـ \right) - \left(\sqrt[٣]{(-١)^{٢}} + جـ \right)$$

$$= ٤ + جـ - ١ - جـ = ٣$$

٧) إذا كانت هَ (س) = ٦ س هي مشتقة الاقتران هـ (س) المعرف على الفترة [– ٢ ، ٣] فجد قيمة هـ (٣) – هـ (- ٢)

الحل :

$$\int_{-٢}^{٣} \text{هـ}(س)\,د\,س = \int_{-٢}^{٣} ٦ س\,د\,س = \left[٣ س^{٢} \right]_{-٢}^{٣}$$

$$= ٣ (٣)^{٢} - ٣ (-٢)^{٢} = ٢٧ - ١٢ = ١٥$$

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

مثال :احسب قيمة كل من $\int_{1}^{3}$ (١) $\int_{1}^{3}$ ٢ س دس ، (٢) $\int_{1}^{3}$ ٢ س دس

١ - $\int_{1}^{3}$ ٢ س دس $= \left[\frac{٢ س^{٢}}{٢} \right]_{١}^{٣} = (٣)^{٢} - (١)^{٢} = ٩ - ١ = ٨$

٢ - $\int_{1}^{3}$ ٢ س دس $= ٢ \left[\frac{س^{٢}}{٢} \right]_{١}^{٣} = ٢ \left[\frac{٩}{٢} - \frac{١}{٢} \right] = ٢ \left[\frac{٨}{٢} \right] = \frac{١٦}{٢} = ٨$

مثال : احسب قيمة $\int_{0}^{3}$ س^{٢} دس + $\int_{0}^{3}$ ٤ دس وقارن نتيجة $\int_{0}^{3}$ (س^{٢} + ٤) دس .

$\int_{0}^{3}$ س^{٢} دس $= \left[\frac{س^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{٣} = \frac{٢٧}{٣} - ٠ = ٩$

$\int_{0}^{3}$ ٤ دس $= ٤ (٣ - ٠) = ٤ \times ٣ = ١٢ \Leftarrow \int_{0}^{3}$ س^{٢} دس + $\int_{0}^{3}$ ٤ دس $= ٩ + ١٢ = ٢١$

$\int_{0}^{3}$ (س^{٢} + ٤) دس $= \left[\frac{س^{٣}}{٣} + ٤س \right]_{٠}^{٣} = \left[\frac{(٣)^{٣}}{٣} + ٤ (٣) \right] - \left[\frac{(٠)^{٣}}{٣} + ٤ \times ٠ \right]$

$= \frac{٢٧}{٣} + ١٢ = ٩ + ١٢ = ٢١$

أي أن $\int_{0}^{3}$ (س^{٢} + ٤) دس = $\int_{0}^{3}$ س^{٢} دس + $\int_{0}^{3}$ ٤ دس .

أ. محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩١٨٥٦

الخاصية الخطية :

$$\int_{أ}^{ب} \text{جـ ق (س) د س} = \text{جـ} \int_{أ}^{ب} \text{ق (س) دس} \quad ، \text{ جـ ثابت}$$

 # يجوز إخراج الثابت خارج التكامل ، وبعد إجراء التكامل نضرب الثابت بناتج التكامل

$$\int_{أ}^{ب} (\text{ق (س)} \pm \text{هـ (س)}) \text{ دس} = \int_{أ}^{ب} \text{ق (س) دس} \pm \int_{أ}^{ب} \text{هـ (س) دس}$$

يجوز توزيع التكامل على عمليتي الجمع و الطرح

مثال : إذا كان $\int_{1}^{4} \text{ق (س) د س} = ٦$ ، $\int_{1}^{4} \text{هـ (س) دس} = ٧$ ، **فجد**

أ) $\int_{1}^{4} ٥ \text{ ق (س) دس}$ ، **باستخدام الخاصية (١)،** $٥ \int_{1}^{4} \text{ق (س) د س} = ٥ \times ٦ = ٣٠$

ب) $\int_{1}^{4} ٣ \text{ هـ (س)} - ٢ \text{ دس}$. **هنا نستعمل الخواص (١) و (٢) .**

$$= ٣ \int_{1}^{4} \text{هـ (س) دس} - \int_{1}^{4} ٢ \text{ دس} .$$

$$= ٣ (٧) - ٢ (٤ - ١) = ٢١ - ٢ (٣) = ٢١ - ٦ = ١٥ .$$

مثال : احسب قيمة كل من التكاملين التاليين :

أ) $\int_{1}^{٣} ٢ \text{ س دس} = \left[\frac{٢ س^{٢}}{٢} \right]_{١}^{٣} = ٩ - ١ = ٨$

ب) $\int_{٣}^{١} ٢ \text{ س دس} = \left[\frac{٢ س^{٢}}{٢} \right]_{٣}^{١} = (١)^{٢} - (٣)^{٢} = ١ - ٩ = -٨$

قاعدة : $\int_{أ}^{ب} \text{ق (س) دس} = - \int_{ب}^{أ} \text{ق (س) دس} .$

 # عند قلب حدود التكامل تُقلب الإشارة .

أ . محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

مثال : إذا كان $\int_{-2}^{4} ق(س)\,دس = -٥$ فاحسب قيمة $\int_{4}^{-2} ق(س)\,دس$

$$\int_{4}^{-2} ق(س)\,دس = -\int_{-2}^{4} ق(س)\,دس = -(-٥) = ٥ .$$

مثال : احسب قيمة $\int_{0}^{1} ٦س\,دس + \int_{1}^{2} ٦س\,دس$ (١) (٢) وقارن الناتج بـ $\int_{0}^{2} ٦س\,دس$ (٣) .

$$(١)\ \int_{0}^{1} ٦س\,دس = \left[\frac{٦س^{٢}}{٢}\right]_{0}^{1} = \left[٣س^{٢}\right]_{0}^{1} = ٣(١)^{٢} - ٣(٠)^{٢} = ٣ - ٠ = ٣$$

$$(٢)\ \int_{1}^{2} ٦س\,دس = \left[\frac{٦س^{٣}}{٢}\right]_{1}^{2} = \left[٣س^{٣}\right]_{1}^{2} = ٣(٢)^{٣} - ٣(١)^{٢} = ٢٤ - ٣ = ٢١$$

$$\Leftarrow \int_{0}^{1} ٦س\,دس + \int_{1}^{2} ٦س\,دس = ٣ + ٢١ = ٢٤ .$$

$$(٣)\ \int_{0}^{2} ٦س\,دس = \left[\frac{٦س^{٣}}{٢}\right]_{0}^{2} = \left[٣س^{٣}\right]_{0}^{2} = ٣(٢)^{٣} - ٣(٠)^{٣} = ٢٤ - ٠ = ٢٤$$

خاصية الإضافة :

إذا كان أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية فإن :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس + \int_{ب}^{جـ} ق(س)\,دس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس$$

مثال : استخدم خاصية الإضافة لإيجاد قيمة :

$$\int_{-١}^{١} س^{٣}\,دس + \int_{١}^{٢} س^{٣}\,دس = \int_{-١}^{٢} س^{٣}\,دس = \left[\frac{س^{٤}}{٤}\right]_{-١}^{٢} = \frac{١٦}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{١٥}{٤}$$

أ. محمد مصطفى الفضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

مثال : إذا كان $\int_{1}^{4} ق(س)\,دس = ٥$ ، $\int_{4}^{7} ق(س)\,دس = ٦$ ، أوجد قيمة $\int_{1}^{7} ق(س)\,دس$.

$$\int_{1}^{7} ق(س)\,دس = \int_{1}^{4} ق(س)\,دس + \int_{4}^{7} ق(س)\,دس = ٥ + ٦ = ١١ .$$

مثال : إذا كان $\int_{1}^{6} ق(س)\,دس = ٣$ ، $\int_{2}^{6} ق(س)\,دس = -٤$ ، فجد $\int_{1}^{2} ق(س)\,دس$.

$$= \int_{1}^{6} ق(س)\,دس + \int_{2}^{6} ق(س)\,دس = \int_{1}^{6} ق(س)\,دس$$

$$= \int_{1}^{2} ق(س)\,دس + -٤ = ٣ \Leftarrow ٣ + ٤ = ٧ \Leftarrow \int_{1}^{2} ق(س)\,دس = ٧$$

مثال : احسب قيمة $\int_{3}^{3} (س^{٢} + س)\,دس$

الحل :

$$\int_{3}^{3} (س^{٢} + س)\,دس = \left[\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢}\right]_{٣}^{١} = \left[\frac{٢٧}{٣} + \frac{٩}{٢}\right] - \left[\frac{٩}{٣} + \frac{٢٧}{٢}\right]$$

$$= \frac{٢٧}{٣} + \frac{٩}{٢} - \frac{٢٧}{٣} - \frac{٩}{٢} = \text{صفر}$$

قاعدة:

$$\int_{أ}^{أ} ق(س)\,دس = \text{صفر}$$

مثال : احسب قيمة $\int_{4}^{4} \left(٥ س^{٢} + \frac{١}{س^{٣}}\right) دس$ = صفر دائمـــاً

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٦٤٥٦٥٩٨

الخاصية الخطية :

١) $\int_{أ}^{ب} جـ\, ق(س)\, د س = جـ \int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس$ ، جـ ثابت

 # يجوز إخراج الثابت خارج التكامل ، وبعد إجراء التكامل نضرب الثابت بناتج التكامل

٢) $\int_{أ}^{ب} (ق(س) \pm هـ(س))\, دس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, دس$

يجوز توزيع التكامل على عمليتي الجمع و الطرح

خاصية الإضافة :

إذا كان أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية فإن :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس + \int_{ب}^{جـ} ق(س)\, دس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\, دس$$

٤) $\int_{أ}^{أ} ق(س)\, دس = صفراً$

أمثلـــة : جد قيمة التكامل لكل مما يلي :

أ) $\int_{-١}^{٣} (٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ٤)\, دس = \int_{-١}^{٣} ٢س^{٣}\, دس - \int_{-١}^{٣} ٣س^{٢}\, دس + \int_{-١}^{٣} ٤\, دس$

$$= ٢ \int_{-١}^{٣} س^{٣}\, دس - ٣ \int_{-١}^{٣} س^{٢}\, دس + \int_{-١}^{٣} ٤\, دس \Leftarrow = \left[\frac{س^{٤}}{٢}\right]_{-١}^{٣} - ٣\left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{-١}^{٣} + ٤(٣ - (-١))$$

$$= \left[\frac{س^{٤}}{٢}\right]_{-١}^{٣} - \left[س^{٣}\right]_{-١}^{٣} + ١٦ \Leftarrow = \frac{٨١ - ١}{٢} - [٢٧ - (-١)] + ١٦ \Leftarrow = ٤٠ - ٢٨ + ١٦ = ٢٨$$

أ . محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

ب) $\int_{1}^{2} س^{2}\,دس + \int_{2}^{4} س^{2}\,دس = \int_{1}^{4} س^{2}\,دس = \left[\frac{س^{3}}{3}\right]_{1}^{4} = \frac{125 - 1}{3} = \frac{124}{3}$

ج) $\int_{2}^{2} (5 س^{2} + 3س + 3)\,دس$ = صفراً (حسب الخاصية (٤) في الصفحة السابقة .

(٢) : جد قيمة العدد جـ في كل مما يلي :

أ) $\int_{جـ}^{-2} 4\,دس = 12 \Leftarrow 4 (-2 - جـ) = 12 \Leftarrow -8 - 4جـ = 12 \Leftarrow -4جـ = 12 + 8 \Leftarrow \frac{-4}{-4}جـ = \frac{20}{-4}$

$\Leftarrow جـ = -5$

ب) $\int_{جـ}^{0} س\,دس = 32 \Leftarrow \left[\frac{س^{2}}{2}\right]_{جـ}^{4} = 32 \Leftarrow \frac{0 - جـ^{2}}{2} = \frac{32}{1} \Leftarrow جـ^{2} = 64 \Leftarrow جـ = \pm 8$

$\Leftarrow جـ = +8 ، جـ = -8$

ج) $\int_{2}^{جـ} 3 س^{2}\,دس = 19 \Leftarrow \left[\frac{3 س^{3}}{3}\right]_{2}^{جـ} = 19 \Leftarrow س^{3}\Big]_{2}^{جـ} = 19 \Leftarrow جـ^{3} - (2)^{3} = 19$

$\Leftarrow جـ^{3} - 8 = 19 \Leftarrow جـ^{3} = 19 + 8 \Leftarrow جـ^{3} = 27 \Leftarrow جـ = 3$ ، بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

س٣) إذا كان $\int_{1}^{5} ق (س)\,دس = 6$ ، $\int_{5}^{5} ق (س)\,دس = -4$ ، فما قيمة $\int_{1}^{5} 2 ق (س)\,دس$.

$\Leftarrow \int_{1}^{5} 2 ق (س)\,دس = 2 \int_{1}^{5} ق (س)\,دس$

$\Leftarrow \int_{5}^{5} ق (س)\,دس = - \int_{3}^{5} ق (س)\,دس \Leftarrow \int_{3}^{5} ق (س)\,دس = 4$

$\Leftarrow \int_{1}^{5} ق (س)\,دس = \int_{1}^{3} ق (س)\,دس + \int_{3}^{5} ق (س)\,دس \Leftarrow = 6 + 4 = 10$

$\Leftarrow 2 \int_{1}^{5} ق (س)\,دس = 2 \times 10 = 20$

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

س٤) إذا كان $\int_{٤}^{٧}$ ق (س) دس = - ٨ فجد قيمة ما يلي :

أ) $\int_{٤}^{٧}$ (٣ ق (س) – ٢ س + ١) دس ، الحل : $\int_{٤}^{٧}$ ق (س) دس = ٨

$\Leftarrow$ $\int_{٤}^{٧}$ (٣ ق (س) وَ ٢ س + ١) دس $\Leftarrow$ $\int_{٤}^{٧}$ ٣ ق (س) دس – ٢ $\int_{٤}^{٧}$ س دس + $\int_{٤}^{٧}$ ١ دس

$\Leftarrow$ ٣ $\int_{٤}^{٧}$ ق (س) دس – $\left[\frac{- ٢ س^{٢}}{٢} \right]_{٤}^{٧}$ + ١ (٧ – ٤) $\Leftarrow$ ٣ × (٨) – [(٧)٢ – (٤)٢] + (٣)

$\Leftarrow$ ٢٤ - [٤٩ – ١٦] + ٣ $\Leftarrow$ ٢٤ - [٣٣] + ٣ = - ٦ .

ب) $\int_{١}^{٧}$ ق (س) دس – $\int_{١}^{٤}$ ق (س) دس $\Leftarrow$ $\int_{١}^{٧}$ ق (س) دس + $\int_{٤}^{١}$ ق (س) دس = $\int_{٤}^{٧}$ ق (س) دس = ٨

س٥) عبر عن كل من التكاملين التاليين بتكامل واحد على الصورة $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) دس

أ) $\int_{٧}^{٩}$ ق (س) دس + $\int_{٢-}^{٧}$ ق (س) دس $\Leftarrow$ = $\int_{٢-}^{٩}$ ق (س) دس

ب) $\int_{٢}^{٦}$ ق (س) دس – $\int_{٢}^{٥}$ ق (س) دس

$\Leftarrow$ $\int_{٢}^{٦}$ ق (س) دس + $\int_{٥}^{٢}$ ق (س) دس = $\int_{٥}^{٦}$ ق (س) دس .

أ/ محمد مصطفى الفضلي ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

تدريب ١ (١٨٠) :

احسب قيمة $\int_{0}^{3} (٣ س^{٢} + ٤س) د س$

الحل :

$$= \left[\frac{٣ س^{٢}}{٣} + \frac{٤ س^{٢}}{٢} \right]_{0}^{3} = \left[س^{٣} + ٢س^{٢} \right]_{0}^{3} = (٣)^{٣} + ٢ (٣)^{٢} - ٠ = ٢٧ + ١٨ = ٤٥$$

مثال : احسب قيمة :

١) $\int_{٣}^{٧} \frac{٢ لو_{٥} س}{س} د س = ٢ \int_{٣}^{٧} \frac{١}{س} لو_{٥} | س | د س = ٢ \left[لو_{٥} | س | \right]_{٣}^{٧} = ٢ \left[لو_{٥}^{٧} - لو_{٥}^{٣} \right]$

$= ٢ لو_{٥}^{٧} - ٢ لو_{٥}^{٣}$

٢) $\int_{٢}^{٥} ٥ هـ^{س} د س = ٥ \int_{٢}^{٥} هـ^{س} د س = ٥ \left[هـ^{س} \right]_{٢}^{٥} = ٥ \left[هـ^{٥} - هـ^{٢} \right] = ٥ هـ^{٥} - ٥ هـ^{٢}$

تدريب ٢ (١٨١) :

احسب قيمة كل من التكاملات التالية :

١) $\int_{-١}^{-٨} (\sqrt[٣]{س^{-٢}} د س = \int_{-١}^{-٨} س^{\frac{-٢}{٣}} د س = \left[\frac{س^{\frac{-٢}{٣} + ١}}{\frac{-٢}{٣} + ١ \times ٣ \times ١} \right]_{-١}^{-٨} = \left[\frac{س^{\frac{١}{٣}}}{\frac{١}{٣}} \right]_{-١}^{-٨}$

$= ٣ س^{\frac{١}{٣}}]_{-١}^{-٨} = ٣ \sqrt[٣]{س}]_{-١}^{-٨} = ٣ \left[\sqrt[٣]{-٨} - \sqrt[٣]{-١} \right] = ٣ [-٢ - -١] = -٣$

محمد مصطفى الضباع ٠١٢٧٩٥٥٩٨٤٦

٢) $\int_{1}^{3} (٤ هـ^{س} + \frac{٣}{س} - ٢) د س$

$= ٤ هـ^{س} \Big]_{١}^{٣} + ٣ لـو_{هـ} |س| \Big]_{١}^{٣} - ٢ (٣ - ١)$

$= ٤ هـ^{٣} - ٤ هـ^{١} + ٣ لـو_{هـ}^{٣} - ٣ لـو_{هـ} - ٣ لـو_{هـ}^{١} - ٤ \Leftarrow ٤ هـ^{٣} - ٤ هـ + ٣ لـو_{هـ}^{٣} - ٤$

٣) $\int_{-٢}^{٢} (٦ س^{٢} - ٨ س + ٣) د س = \frac{٦ س^{٣}}{٣} \Big]_{-٢}^{٢} - \frac{٨ س^{٢}}{٢} \Big]_{-٢}^{٢} + ٣ (٢ - - ٢)$

$= ٢ س^{٣} \Big]_{-٢}^{٢} - ٤ س \Big]_{-٢}^{٢} + ١٢ \Leftarrow ٢ (٨ - - ٨) - ٤ (٤ - ٤) + ١٢ \Leftarrow ٣٢ + ١٢ = ٤٤$

تدريب ٣ (١٨٢) :

إذا كان $\int_{٣}^{٥} ٢ ق (س) د س = ١٢$ ، فجد $\int_{٥}^{٣} ق (س) د س$.

الحل :

$= (٢ \int_{٣}^{٣} ق (س) د س = ١٢) \div ٢ \Leftarrow \int_{٣}^{٣} ق (س) د س = ٦$

$\Leftarrow \int_{٥}^{٥} ق (س) د س = - ٦ .$

تدريب ٤ :

إذا كان $\int_{-٢}^{١} ق (س) د س = ٩$ ، $\int_{-٢}^{٢} ق (س) د س = ١٨$ ، فجد $\int_{١}^{٢} ٣ ق (س) د س$

الحل :

$\int_{١}^{٢} ٣ ق (س) د س = ٣ \int_{١}^{٢} ق (س) د س$

$\Leftarrow \int_{١}^{٢} ق (س) د س = \int_{-٢}^{١} ق (س) د س + \int_{-٢}^{٢} ق (س) د س \Leftarrow = - ٩ + ١٨ = ٩$

$\Leftarrow \int_{١}^{٢} ق (س) د س = ٩ \Leftarrow ٣ \int_{١}^{٢} ق (س) د س = ٣ \times ٩ = ٢٧$

محمد مصطفى القتاده ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

مثال : ق (س) = { ٣ س ٢ + ١ ، ـ ٢ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٢ س + ٣ ، ٢ < س < ٥ } ، أوجد ∫ ق (س) د س (من ـ ٢ إلى ٥)

نستخدم خاصية الإضافة .

الحل :

$$\int_{-2}^{5} ق(س)\,د س = \int_{-2}^{2} ق(س)\,د س + \int_{2}^{5} ق(س)\,د س .$$

$$= \int_{-2}^{2} (٣ س ٢ + ١)\,د س + \int_{2}^{5} (٢ س + ٣)\,د س$$

$$= \left[\frac{٣ س ٣}{٣} \right]_{-2}^{2} + ١ (٢ - (-٢)) + \left[\frac{٢ س ٢}{٢} \right]_{2}^{5} + ٣ (٥ - ٢)$$

$$= ٨ - (-٨) + ٤ + ٢٥ - ٤ + ٩ = ١٦ + ٤ + ٢١ + ٩ = ٥٠$$

تدريب ٥ :

مثال : ق (س) = { س ٣ ـ ٢ س ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ ٣ ـ ٤ س ، ١ < س ≤ ٢ } ، أوجد ∫ ق (س) د س (من ٠ إلى ٢)

نستخدم خاصية الإضافة .

الحل :

$$\int_{0}^{2} ق(س)\,د س = \int_{0}^{1} ق(س)\,د س + \int_{1}^{2} ق(س)\,د س .$$

$$= \left[\frac{س ٤}{٤} \right]_{0}^{1} - \left[\frac{٢ س ٢}{٢} \right]_{0}^{1} + ٣ (٢ - ١) - \left[\frac{٤ س ٢}{٢} \right]_{1}^{2} + ٣ - ٢ (٤ - ١)$$

$$\Leftarrow = \left(\frac{١}{٤} - \frac{١ \times ١}{٤ \times ١} \right) + ٣ - ٢ (٤ - ١)$$

$$= \frac{-٣}{٤} + ٣ - ٦ \Leftarrow = \frac{-٣}{٤} - \frac{٣ \times ٤}{٤ \times ١} = \frac{-٣ - ١٢}{٤} = \frac{-١٥}{٤}$$

أ. محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

تدريب ٦ :

احسب قيمة $\int_{-3}^{3} \left(\sqrt{س} + \frac{3}{س^4} - س^0 \right) د س$ ،،،،،،، الحل : صفر

تدريب ٧ :

إذا كان $\int_{2}^{أ} ٢ س د س$ = صفر ، فجد قيمة أ

الحل : $= \left[\frac{٢ س^{٢}}{٢} \right]_{2}^{أ}$

$= أ^{٢} - ٤ =$ صفر $\Leftarrow أ^{٢} = ٤ \Leftarrow$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$أ = \pm ٢$

تمـــــــارين ومســـــــــائل

١) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية :

أ) $\int_{-1}^{3} (س^{٢} - ٤س + ٣) د س = \left[\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{٤ س^{٢}}{٢} + ٣ س \right]_{-1}^{3} = (٣ - - ١)$

$= \frac{٢٧ - - ١}{٣} - ٢ (٩ - ١) + ١٢ \Leftarrow \frac{٢٨}{٣} - ١٦ + ١٢ \Leftarrow \frac{٢٨}{٣} - \frac{٤ \times ٣}{١ \times ٣} = \frac{٢٨ - ١٢}{٣} = \frac{١٦}{٣}$

ب) $\int_{0}^{1} \left(٣ \sqrt{س} - ٤ \sqrt[3]{س} \right) د س$

$= \int_{0}^{1} \left(٣ س^{\frac{١}{٢}} - ٤ س^{\frac{١}{٣}} \right) د س = \left[\frac{٣ س^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} - \frac{٤ س^{\frac{١}{٣}+١}}{\frac{١}{٣}+١} \right]_{0}^{1}$

$= \left[\frac{٣ س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} - \frac{٤ س^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} \right]_{0}^{1} = \left[٢ س^{\frac{٣}{٢}} - ٣ س^{\frac{٤}{٣}} \right]_{0}^{1} = ٢ - ٣ = - ١ .$

محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

ج) $\int_{-3}^{3} (3 هـ^{س} + \frac{6}{س^2})$ د س ،،،،،،، الجواب = صفر

٢) إذا كان $\int_{0}^{1} 3$ ق (س) د س = - ١٢ ، $\int_{3}^{1}$ ق (س) د س = - ٨ ، جد قيمة $\int_{0}^{3}$ ق (س) د س

الحل :

$\int_{0}^{1} 3$ ق (س) د س = - ١٢ $\Leftarrow$ (٣ $\int_{0}^{1}$ ق (س) د س = - ١٢) ÷ ٣

$\int_{0}^{1}$ ق (س) د س = - ٤ $\Leftarrow$ $\int_{3}^{1}$ ق (س) د س = - ٨ $\Leftarrow$ $\int_{1}^{3}$ ق (س) د س = ٨

ق(س) د س = $\int_{0}^{1}$ ق (س) د س + $\int_{1}^{3}$ ق (س) د س $\Leftarrow$ - ٤ + ٨ = ٤ .

٣)

ق (س) = { س^2 + ١ ، ١ $\geq$ س $\geq$ ٣ ؛ ٢ س + ٤ ، ٣ < س $\geq$ ٥ }

، أوجد $\int_{1}^{5}$ ق (س) د س

الحل :

$\int_{1}^{5}$ ق (س) د س = $\int_{1}^{3}$ ق (س) د س + $\int_{3}^{5}$ ق (س) د س

= $\int_{1}^{3}$ (س^2 + ١) د س + $\int_{3}^{5}$ (٢س + ٤) د س

= $\left[\frac{س^3}{3} + ١ \right]_{1}^{3}$ (٣ - ١) + $\left[\frac{2 س^2}{2} + ٤ (٥ - ٣) \right]_{3}^{5}$

= $\frac{27 - 1}{3}$ + ٢ + ٢٥ - ٩ + ٨ $\Leftarrow$ $\frac{26}{3}$ + $\frac{26 \times 3}{1 \times 3}$ = $\frac{26 + 78}{3}$ = $\frac{104}{3}$

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

٤) إذا كان $\int_{-١}^{٣} ق(س)\,د س = ٦$ ، $\int_{-١}^{٣} \frac{ع(س)}{٢}\,د س = -٥$ ، فجد

أ) $\int_{-١}^{٣} (٤ ق(س)\,د س - ع(س))\,د س$

الحل :

$\int_{-١}^{٣} \frac{ع(س)}{٢}\,د س = ٥ \Leftarrow \int_{-١}^{٣} ع(س)\,د س = ١٠$

$\Leftarrow \int_{-١}^{٣} (٤ ق(س)\,د س = ٤ \int_{-١}^{٣} ق(س)\,د س - \int_{-١}^{٣} ع(س)\,د س .$

$٤ \times ٦ - ١٠ = ٢٤ - ١٠ = ١٤ .$

ب) $\int_{-١}^{٣} (٦س^{٢} - ٣ ع(س) + ٢)\,د س = \left[\frac{٦س^{٣}}{٣}\right]_{-١}^{٣} - ٣ \int_{-١}^{٣} ع(س)\,د س + ٢(٣ - -١)$

$= ٢(٢٧ - -١) - ٣ \times ١٠ + ٨ \Leftarrow ٥٦ - ٣٠ + ٨ = ٣٤ .$

٥) إذا كان $\int_{-٣}^{جـ} ٢ س\,د س = ٠$ ، جد قيمة جـ

الحل :

$= \left[\frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{-٣}^{جـ} = ٠ \Leftarrow جـ^{٢} - ٩ = ٠ \Leftarrow جـ^{٢} = ٩ \Leftarrow جـ = \pm ٣$

أ. محمد مصطفى القصاص ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

٦) إذا كان $\int_{-٢}^{جـ} ٩ س^{٢} د س = ٢١$ ، جد قيمة جـ

الحل :

$= \left[\frac{٩ س^{٣}}{٣} \right]_{-٢}^{جـ} = ٢١ \Leftarrow (٣ (جـ^{٣} - - ٨) = ٢١) \div ٣$

$= جـ^{٣} + ٨ = ٧ \Leftarrow ج^{٣} = - ١ \Leftarrow جـ = - ١$

٧) إذا كان $\int_{١}^{ب} (٢ س - ٤) د س = ١٥$ ، جد قيمة ب

الحل :

$= \left[\frac{٢ س^{٢}}{٢} - ٤ ب + ٤ \right]_{١}^{ب} = ١٥ \Leftarrow ب^{٢} - ١ - ٤ ب + ٤ = ١٥ \Leftarrow ب^{٢} - ٤ب + ٣ = ١٥$

$ب^{٢} - ٤ب - ١٢ = ٠ \Leftarrow (ب - ٦) (ب + ٢) = ٠$

$ب = ٦ ، ب = - ٢$.

٨) إذا كان $\int_{-١}^{٢} ٢ق (س) - ١) دس = ٨$ ، فجد $\int_{-١}^{٢} ق (س) د س$

$\int_{-١}^{٢} ٢ ق (س) د س - ١ (٢ - ١) = ٨ \Leftarrow ٢ \int_{-١}^{٢} ق (س) د س - ٣ = ٨$

$\Leftarrow ٢ \int_{-١}^{٢} ق (س) دس = ١١ \Leftarrow \int_{-١}^{٢} ق (س) د س = \frac{١١}{٢}$

أ/ محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٦٢

$\int_{1}^{2} (ق'(هـ(س))) هـ'(س)\ دس = \int_{هـ(1)}^{هـ(2)} ق'(ص)\ د ص$ ، حيث ص = هـ (س) ، د ص = هـ ′(س) دس

مثال : احسب قيمة $\int_{-1}^{1} (٢ س - ٣)^{٤}$ دس . (في الغالب نضع ما داخل القوس = ص) .

الحل :

افرض ص = ٢س – ٣ $\Leftarrow$ د ص= ٢ د س ، د س = $\frac{د ص}{٢}$ عندما س = ١ $\Leftarrow$ ص = ٢ – ٣ = - ١

س = ٢ $\Leftarrow$ ص = ١

$$\int_{-1}^{1} ص^{٤} \frac{د ص}{٢} = \int_{-1}^{1} \frac{ص^{٤}}{٢}\ د ص = \int_{-1}^{1} \frac{١}{٢} ص^{٤}\ د ص$$

$$= \frac{١}{٢} \int_{-1}^{1} ص^{٤}\ د ص = \frac{١}{٢} \left[\frac{ص^{٥}}{٥} \right]_{-1}^{1} = \frac{١}{٢} \left[\frac{١}{٥} - \frac{-١}{٥} \right] = \frac{١}{٢} \left[\frac{٢}{٥} \right] = \frac{١}{٥}$$

مثال : $\int \frac{س + ١}{\sqrt{س^{٢} + ٢س + ٥}}$ دس

نفرض أن ص = س^{٢} + ٢س + ٥ (ما داخل الجذر) ، مشتقة الثابت صفر دائماً .

$\Leftarrow$ د ص= ٢ س + ٢ د س $\Leftarrow$ د س = $\frac{د ص}{٢ س + ٢}$ ، بالقسمة على (٢س +٣) معامل د س

$\int \frac{س + ١}{\sqrt{ص}} \frac{د ص}{٢ س + ٢}$ ، (٢س + ٢ = ٢ (س + ١)) أخرج ٢ عامل مشترك .

$$= \int \frac{س + ١}{\sqrt{ص}} \frac{د ص}{٢(س + ١)} = \frac{١}{٢} \int \frac{١}{\sqrt{ص}}\ د ص = \frac{١}{٢} \int \frac{١}{ص^{\frac{١}{٢}}}\ د ص$$

$$= \frac{١}{٢} \left[\frac{ص^{-\frac{١}{٢} + ١}}{-\frac{١}{٢} + ١} \right] \Leftarrow = \frac{١}{٢} \left[\frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} \right] = \frac{١}{٢} \times ٢ ص^{\frac{١}{٢}} = ص^{\frac{١}{٢}} + جـ$$

$= \sqrt{ص} + جـ = \sqrt{س^{٢} + ٢س + ٥} + جـ$.

محمد مصطفى الفضل ٠١٧٩٥٥٨٤٣٦

مثال : احسب قيمة $\int_{0}^{1} \frac{٢ س}{(س^{٢} + ١)^{٣}}$ د س

نفرض أن ص = $س^{٢} + ١$ ⇐ د ص = ٢س د س، د س = $\frac{د ص}{٢س}$ ، عندما س = ٠ ⇐ ص = ١
عندما س = ١ ⇐ ص = ٢

$$\int_{١}^{٢} \frac{٢ س}{ص^{٣}} \frac{د ص}{٢ س} = \int_{١}^{٢} \frac{د ص}{ص^{٣}} = \int_{١}^{٢} \frac{١}{ص^{٣}} د ص \Leftarrow = \int_{١}^{٢} ص^{-٣} د ص$$

$$\Leftarrow = \left[\frac{ص^{-٣+١}}{-٣+١}\right]_{١}^{٢} = \left[\frac{ص^{-٢}}{-٢}\right]_{١}^{٢} = \left[\frac{١}{-٢ ص^{٢}}\right]_{١}^{٢} = -\frac{١}{٢} - \left[-\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤}\right] = -\frac{١}{٢} \times -\frac{٣}{٤} = \frac{٣}{٨}$$

مثال : احسب قيمة $\int_{٢}^{٩} ٣ (٥ س - ١)^{\frac{١}{٢}}$ د س (نفرض أن ص = ٥س – ١)

$$= \frac{د ص}{٥} = د س \Leftarrow د س = \frac{د ص}{٥}$$

عندما س = ١٠ فإن ص = ٥٠ – ١ = ٤٩
عندما س = ٢ فإن ص = ١٠ – ١ = ٩

$$\int_{٩}^{٤٩} ٣ ص^{\frac{١}{٢}} \frac{د ص}{٥} = \int_{٩}^{٤٩} \frac{٣}{٥} ص^{\frac{١}{٢}} د ص \Leftarrow = \left[\frac{ص^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١}\right]_{٩}^{٤٩} \frac{٣}{٥} = \left[\frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}\right]_{٩}^{٤٩}$$

$$\left[\frac{٣}{٥} \left[٢ ص^{\frac{١}{٢}}\right]_{٩}^{٤٩}\right] = \left[\frac{٣}{٥} \left[٢\sqrt{ص}\right]_{٩}^{٤٩}\right] \Leftarrow = \left[\frac{٣}{٥} \left[٢\sqrt{٤٩} - ٢\sqrt{٩}\right]\right] = \left[\frac{٣}{٥} [٢ \times ٧ - ٢ \times ٣]\right]$$

$$\frac{٣}{٥} [١٤ - ٦] = \frac{٣}{٥} [٨] = \frac{٢٤}{٥}$$

محمد مصطفى الضباع ٠١٢٨٤٥٩٥٧٩

$\int$ (ق ′ (هـ (س)) هـ′ (س) دس = $\int$ ق ′ (ص) د ص ، حيث ص = هـ (س) ، د ص = هـ′ (س) دس

يكون التكامل بالتعويض لاقترانين أحدهما مشتقة الأخر .

أمثلـــة:

أ) $\int_{-1}^{2}$ (٣ س – ١) ٤ دس ، نفرض أن ص = ٣س – ١ ، د ص = ٣ دس بالقسمة على معامل د س ⇐ د س = $\frac{\text{د ص}}{٣}$

عندما س = ٢ فإن ص = ٣ (٢) – ١ = ٦ – ١ = ٥

عندما س = – ١ ، فإن ص = ٣ (– ١) – ١ = – ٣ – ١ = – ٤

$\int_{-4}^{5}$ ص٤ $\frac{\text{د ص}}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$ $\int_{-4}^{5}$ ص٤ د س .

⇐ = $\frac{١}{٣}$ $\left[\frac{\text{ص}^{٥}}{٥}\right]_{-٤}^{٥}$ = $\frac{١}{٣}$ $\left[\frac{(٥)^{٥} - (-٤)^{٥}}{٥}\right]$ = $\frac{١}{٣}$ $\left[\frac{٣١٢٥ + ١٠٢٤}{٥}\right]$ = $\frac{٤١٤٩}{١٥}$

ب) $\int_{٠}^{١}$ $\frac{\text{د س}}{\sqrt{٥ س + ٤}}$ د س ⇐ يجب أن تحول إلى الصورة الأسية و ترفع إلى البسط مع تغيير في إشارة الأس.

$\int_{٠}^{١}$ $\frac{\text{د س}}{(٥ س + ٤)^{\frac{١}{٢}}}$ = $\int_{٠}^{١}$ (٥ س + ٤) $^{-\frac{١}{٢}}$ د س ، نفرض ص = ٥ س + ٤ ، د ص = ٥، د س = $\frac{\text{د ص}}{٥}$

عندما س = ٠ فإن ص = ٤ ،عندما س = ١ فإن ص = ٩

$\int_{٤}^{٩}$ ص$^{-\frac{١}{٢}}$ $\frac{\text{د ص}}{٥}$ = $\frac{١}{٥}$ $\int_{٤}^{٩}$ ص$^{-\frac{١}{٢}}$ د ص = $\frac{١}{٥}$ $\left[\frac{\text{ص}^{-\frac{١}{٢}+١}}{-\frac{١}{٢}+١}\right]_{٤}^{٩}$ = $\frac{١}{٥}$ $\left[\frac{\text{ص}^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}}\right]_{٤}^{٩}$

= $\frac{١}{٥}$ $\left[٢ \text{ ص}^{\frac{١}{٢}}\right]_{٤}^{٩}$ = $\frac{٢}{٥}$ $\left[\sqrt{\text{ص}}\right]_{٤}^{٩}$ = $\frac{٢}{٥}$ $\left[\sqrt{٩} - \sqrt{٤}\right]$ = $\frac{٢}{٥}$ [٣ – ٢] = $\frac{٢}{٥}$

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٥٥٦٠٤

ج) $\int_{-2}^{2} (س^3 + 5)^8 س^2$ دس .

نفرض ص = ما داخل القوس (س ذات الأس الأكبر)

ص = $س^3 + 5$ ، د ص = $3 س^2$ دس ، دس = $\frac{د ص}{3 س^2}$

عندما س = -٢ فإن ص = $-8 + 5 = -3$ ، عندما س = ٢ فإن ص = $8 + 5 = 13$.

$$\int_{-3}^{13} ص^8 س^2 \frac{د ص}{3 س^2} = \frac{1}{3} \int_{-3}^{13} ص^8 \, د ص = \frac{1}{3} \left[ص^9 \right]_{-3}^{13} = \frac{(13)^9 - (-3)^9}{27}$$

د) $\int_{1}^{2} \frac{د س}{(3 + 2س)^2} = \int_{1}^{2} (3 + 2س)^{-2} \, د س$.

نفرض ص = $3 + 2 س$ ، د ص = $2 د س$ ، دس = $\frac{د ص}{2}$

عندما س = ١ فإن ص = ٥ ، عندما س = ٢ فإن ص = ٧

$$\int_{5}^{7} ص^{-2} \frac{د ص}{2} = \frac{1}{2} \int_{5}^{7} ص^{-2} \, د ص = \frac{1}{2} \left[\frac{ص^{-1}}{-1} \right]_{5}^{7} = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{ص} \right]_{5}^{7}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{7} - \frac{-1}{5} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{-1 \times 5}{7 \times 5} + \frac{7 \times 1}{5 \times 7} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{-5 + 7}{35} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{35} \right] = \frac{1}{35}$$

هـ) $\int_{0}^{1} س \sqrt{٣ س^{٢} + ١}\ دس$ ⇐ ص = ٣ س^{٢} + ١، د ص = ٦ س د س ⇐ د س = $\frac{د ص}{٦ س}$

⇐ عندما س = ٠ فإن ص = ١ و عندما س = ١ فإن ص = ٤

$$\int_{0}^{1} س \sqrt{٣ س^{٢} + ١}\ دس = \int_{1}^{4} \frac{س \sqrt{ص}}{٦ س}\ د ص = \frac{1}{٦} \int_{1}^{4} ص^{\frac{1}{2}}\ د ص \Leftarrow = \frac{1}{٦} \left[\frac{ص^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] = \frac{1}{٦} \left[\frac{٢ ص^{\frac{3}{2}}}{٣} \right]$$

$$\Leftarrow = \frac{٢}{١٨} \left[\sqrt{ص^{٣}} \right]_{1}^{4} = \frac{1}{٩} \left[\sqrt{٦٤} - \sqrt{١} \right] = \frac{1}{٩} \left[٨ - ١ \right] = \frac{٧}{٩}$$

و) $\int_{3}^{4} س (٢٥ - س^{٢})^{\frac{1}{2}}\ دس$ ، ص = ٢٥ − س^{٢} ، د ص = − ٢ س د س ⇐ د س = $\frac{د ص}{- ٢ س}$

عندما س = ٣ فإن ص = ١٦ ، عندما س = ٤ فإن ص = ٩

$$\int_{3}^{4} س (٢٥ - س^{٢})^{\frac{1}{2}}\ دس = \int_{16}^{9} س ص^{\frac{1}{2}} \frac{د ص}{- ٢ س} = - \frac{1}{٢} \int_{16}^{9} ص^{\frac{1}{2}}\ د ص = - \frac{1}{٢} \left[\frac{ص^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{16}^{9} = - \frac{1}{٣} \left[٢ ص^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$\Leftarrow = - \left[\sqrt{ص^{٣}} \right]_{16}^{9} = - \left[\sqrt{٩} - \sqrt{١٦} \right] = - \left[٣ - ٤ \right] = - (- ١) = ١$$

أمثلـــة : جد كلاً من التكاملات التالية :

أ) $\int (٢ - س)^{\frac{2}{5}}\ دس$. ⇐ ص = ٢ − س ⇐ = د ص = − د س ⇐ د س = − د ص .

$$\Leftarrow \int - ص^{\frac{2}{5}}\ د ص = \frac{- ص^{\frac{2}{5} + ١}}{\frac{2}{5} + ١} + جـ = \frac{- ص^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} = \frac{- ٥ ص^{\frac{7}{5}}}{٧} = \frac{- ٥}{٧} \left[٢ - س \right]^{\frac{7}{5}} + جـ$$

ب) $\int$ (٦ س + ٥) (٣س^{٢} + ٥س – ٢)^{٤} د س .

$\Leftarrow$ ص = ٣س^{٢} + ٥ س – ٢ $\Leftarrow$ د ص = ٦س + ٥ دس $\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{د ص}}{\text{٦ س + ٥}}$

$\int$ ٦ س + ٥ ص^{٤} $\frac{\text{د ص}}{\text{٦ س + ٥}}$ = $\int$ ص^{٤} د ص $\Leftarrow$ = $\frac{\text{ص}^{٥}}{٥}$ + جـ

$\Leftarrow$ = $\frac{(\text{٣س}^{٢} + \text{٥ س} – ٢)^{٥}}{٥}$ + جـ

ج) $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt[٤]{\text{س}^{٣} + ٧}}$ د س = $\int$ س^{٢} (س^{٣} + ٧)$^{-\frac{١}{٤}}$ د س .

$\Leftarrow$ ص = س^{٣} + ٧ $\Leftarrow$ د ص = ٣ س^{٢} د س $\Leftarrow$ د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{٣ س}^{٢}}$

$\int$ س^{٢} ص$^{-\frac{١}{٤}}$ $\frac{\text{د ص}}{\text{٣ س}^{٢}}$ = $\frac{١}{٣}$ $\int$ ص$^{-\frac{١}{٤}}$ د ص = $\frac{١}{٣}$ $\left[\frac{\text{ص}^{-\frac{١}{٤}+١}}{-\frac{١}{٤}+١}\right]$

$\Leftarrow$ = $\frac{١}{٣}$ $\left[\frac{٤\ \text{ص}^{\frac{٣}{٤}}}{٣}\right]$ = $\frac{٤}{٩}$ $\sqrt[٤]{(\text{س}^{٣} + ٧)^{٣}}$ + جـ

محمد مصطفى القصاص ٠١٧٩٥٥٩٨٤٥٦

قـاعدة :

قانون يستخدم في التكامل الخطي فقط و المرفوع إلى قوه غير الواحد .

$$\int (أ س + ب)^{ن} \, دس = \frac{(أ س + ب)^{ن+١}}{أ (ن + ١)} + جـ \quad ، ن \neq -١$$

مثال : أوجد $\int (٨ س + ١٣)^{٩} \, دس = \frac{(٨ س + ١٣)^{٩+١}}{٨ (٩ + ١)} + جـ = \frac{(٨ س + ١٣)^{١٠}}{٨٠} + جـ$

مثال : أوجد $\int (٧ – ٢ س)^{٤} \, دس = \frac{(٧ – ٢ س)^{٥}}{-٢ \times ٥} + جـ = \frac{(٧ – ٢ س)^{٥}}{-١٠} + جـ$

قاعدة :

$$\int (ق (س)) د س)^{ن} \quad ق'(س) \, دس = \frac{(ق (س))^{ن+١}}{ن + ١} + جـ$$

مثال : $\int (س^{٢} + ٣س)^{٨} \times (٢س + ٣) \, دس = \frac{(س^{٢} + ٣س)^{٩}}{٩} + جـ$ **، بالتعويض**

بالفرض $\Leftarrow ص = س^{٢} + ٣س \Leftarrow د ص = ٢س + ٣ \, د س \Leftarrow دس = \frac{د ص}{٢ س + ٣}$

$$= \int ص^{٨} \times (\cancel{٢س + ٣}) \frac{د ص}{\cancel{٢ س + ٣}} = \frac{ص^{٩}}{٩} + جـ = \frac{(س^{٢} + ٣س)^{٩}}{٩} + جـ$$

أ. محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

مثال : أوجد $\int (٣س^{٢} + ٢س) \sqrt{س^{٣} + س^{٢} - ٣}$ د س .

نفرض أن ص = $س^{٣} + س^{٢}$ ⇐ د ص = $٣س^{٢} + ٢س$ د س ⇐ د س = $\frac{\text{د ص}}{٣س^{٢} + ٢ س}$

$= \int (٣س^{٢} + ٢س) \sqrt{ص} \frac{\text{د ص}}{٣س^{٢} + ٢ س} = \int ص^{\frac{١}{٢}}$ د ص

$= \frac{ص^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} + جـ = \frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} = \frac{٢}{٣} \sqrt{ص^{٣}} = \frac{٢}{٣} \sqrt{(س^{٣} + س^{٢} - ٣)^{٣}}$

أ/ محمد مصطفى القصاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

تدريب ١: جد كلا من التكاملات التالية :

١) $\int (١ - س)^{٣}$ دس = $\frac{(١ - س)^{٤}}{-١ \times ٤} + جـ = \frac{(١ - س)^{٤}}{-٤} + جـ$

٢) $\int ٣س^{٢} (س^{٣} + ٤)^{٥}$ دس = $\frac{(س^{٣} + ٤)^{٦}}{٦} + جـ$

أو

ص = $س^{٣} + ٤$ ⇐ د ص = $٣س^{٢}$ دس ⇐ د س = $\frac{\text{د ص}}{٣ س^{٢}}$

$= \int ٣ س ص^{٥} \frac{\text{د ص}}{٣س^{٢}} = \frac{ص^{٦}}{٦} + جـ = \frac{(س^{٣} + ٤)^{٦}}{٦} + جـ$

٣) $\int \frac{٤ س - ٦}{\sqrt[٣]{س^{٢} - ٣س + ١}}$ د س .

ص = $س^{٢} - ٣س$. د ص = ٢ س – ٣ د س ⇐ دس = $\frac{د ص}{٢س - ٣}$

$\int \frac{٣ (٢س - ٣)}{\sqrt[٣]{ص}} \frac{د ص}{٣ س - ٣} = \int \frac{٢}{ص^{\frac{١}{٣}}}$ دص = $\int$ ٢ $ص^{-\frac{١}{٣}}$ د ص

$= \frac{ص^{-\frac{١}{٣}+١}}{-\frac{١}{٣}+١} + جـ = \frac{٢ ص^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}} + جـ = ٣ ص^{\frac{٢}{٣}} + جـ$

$= ٣ \sqrt[٣]{ص^{٢}} = ٣ \sqrt[٣]{(س^{٢} - ٣س + ١)^{٢}} + جـ$

قواعـــد عامـــة :

١) $\int$ جا أس د س = $\frac{-١}{أ}$ جتا أس + جـ

$\int$ جا (أس + ب) دس = $\frac{-١}{أ}$ جتا (أس + ب) + جـ

٢) $\int$ جتا أس د س = $\frac{١}{أ}$ جا أس + جـ

$\int$ جتا (أس + ب) د س = $\frac{١}{أ}$ جا (أس + ب) + جـ

٣) $\int$ قا^{٢} أس دس = $\frac{١}{أ}$ ظا أس + جـ

$\int$ قا^{٢} (أس + ب) دس = $\frac{١}{أ}$ ظا أس + جـ

أ/ أحمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

٤) $\int$ قتا^{٢} أ س د س = $-\frac{١}{أ}$ ظتا أ س + جـ

$\int$ قتا^{٢} (أ س + ب) د س = $-\frac{١}{أ}$ ظتا (أ س + ب) + جـ

مثال : أوجد التكاملات التالية :

١) $\int$ جا ٥ س د س = $-\frac{١}{٥}$ جتا ٥س + جـ

٢) $\int$ جا (٨ س – ١) د س = $-\frac{١}{٨}$ جتا (٨ س – ١) + جـ

٣) $\int$ جتا ٣ س د س = $\frac{١}{٣}$ جا س + جـ

٤) $\int$ جتا (٤ س – ١) د س = $\frac{١}{٤}$ جا (٤ س – ١) + جـ

٥) $\int$ جتا (٨ – ٣ س) د س = $\frac{١}{-٣}$ جا (٨ – ٣س) + جـ

٦) $\int$ قا^{٢} ٥ س د س = $\frac{١}{٥}$ ظا ٥ س + جـ

٧) $\int$ قا^{٢} (٢ س+ ١) د س = $\frac{١}{٢}$ ظا (٢ س + ١) + جـ

٢) $\int$ قتا^{٢} (٨ – ٣ س) د س = $\frac{-١}{-٣}$ ظتا (٨ – ٣ س) + جـ

أ. محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

مثال : أوجد $\int$ ٥ جا (٢س – ١) د س

- الحل حسب القاعدة = ٥ × $\frac{-١}{٢}$ جا (٢ س – ١) + جـ = $\frac{-٥}{٢}$ جا (٢ س – ١) + جـ

- الحل بالتعويض = نفرض ص = ٢ س – ١ ⇐ د ص= ٢ د س ⇐ د س = $\frac{\text{د ص}}{٢}$

$\int$ ٥ جا ص $\frac{\text{د ص}}{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$ $\int$ جا ص د ص = $\frac{٥}{٢}$ × - جتا ص + جـ

= $\frac{-٥}{٢}$ جتا ص + جـ ⇐ $\frac{-٥}{٢}$ جتا (٢س – ١) + جـ

ملاحظة : في الاقترانات الدائرية دائماً نفرض أن ص = الزاوية

مثال : أوجد $\int$ (٢ س + ١) جتا (س^{٢} + س) د س

نفرض ص = س^{٢} + س ⇐ د ص = (٢س + ١) د س ⇐ د س = $\frac{\text{د ص}}{٢س + ١}$

$\int$ (٢ س + ١) جتا ص $\frac{\text{د ص}}{٢س + ١}$ = $\int$ جتا ص د ص = جا ص + جـ = جا (س^{٢} + س) + جـ

ملاحظة : في الاقتران الآسي دائماً نفرض أن ص = س (القوة)

مثال : $\int$ أوجد هـ $^{(٣س - ٦)}$ د س

الحل: ص = ٣ س – ٦ ⇐ د ص = ٣ دس ⇐ د س = $\frac{\text{د ص}}{٣}$

$\int$ هـ ص $\frac{\text{د ص}}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$ $\int$ هـ ص د ص = $\frac{١}{٣}$ هـ ص + جـ = $\frac{١}{٣}$ هـ $^{(٣س - ٦)}$ + جـ

قاعـدة :

$$\int هـ^{(أس+ب)}\, دس = \frac{1}{أ}\, هـ^{(أ س+ب)} + جـ$$

مثال :

$$\int هـ^{(٨-٢س)}\, دس = \frac{1}{-٢}\, هـ^{(٨-٢س)} + جـ$$

مثال : أوجد

$$\int (٢س+١)\, هـ^{(س^{٢}+س)}\, دس$$

$$ص = س^{٢} + س \Leftarrow د ص = (٢س+١)\, دس \Leftarrow دس = \frac{د ص}{٢ س + ١}$$

$$= \int (٢س+١)\, هـ^{ص}\, \frac{د ص}{٢ س + ١} = \int هـ^{ص}\, د ص = هـ^{ص} + جـ \Leftarrow = هـ^{(س^{٢}+س)} + جـ$$

تدريب ٢ : جد كلا من التكاملات التالية

١) $\int جا(٣ - ٤ س)\, د س = \frac{-١}{-٤}\, جتا(٣ - ٤ س) + جـ = \frac{١}{٤}\, جتا(٣ - ٤ س) + جـ$

٢) $\int س\, قا^{٢}(س^{٢} + ٨)\, د س$

$$ص = س^{٢} + ٨ \Leftarrow د ص = ٢س\, د س \Leftarrow د س = \frac{د ص}{٢ س}$$

$$\int س\, قا^{٢} ص\, \frac{د ص}{٢ س} = \frac{١}{٢} \int قا^{٢} ص\, د ص = \frac{١}{٢}\, ظا ص + جـ = \frac{١}{٢}\, ظا(س^{٢} + ٨) + جـ$$

أ/ محمد مصطفى الفضاه ٠١٢٧٩٥٥٩٨٤٥٦

٣) $\int \frac{-٢}{س + ١}$ د س

ص = س + ١ ⇐ د ص = دس ⇐ = $-٢ \int \frac{١}{ص}$ د ص = -٢ لو$_{هـ}$ | ص | + جـ

= -٢ لو$_{هـ}$ | س + ١ | + جـ

٤) $\int ٤ س \times هـ^{س^{٢}}$ د س ⇐ ص = $س^{٢}$ ⇐ د ص = ٢ س د س ⇐ د س = $\frac{د ص}{٢ س}$

$\int ٤ س \, هـ^{ص} \frac{د س}{٢ س} = \int ٢ هـ^{ص}$ د ص = $٢ هـ^{ص}$ + جـ = $٢ هـ^{س^{٢}}$ + جـ .

مثال : جد $\int \sqrt{هـ^{س}}$ د س = $\int (هـ^{س})^{\frac{١}{٢}}$ د س = $\int هـ^{\frac{١}{٢} س}$ د س

ص = $\frac{١}{٢}$ س ⇐ د ص = $\frac{١}{٢}$ د س ⇐ د س = ٢ د ص

$\int هـ^{ص} \times ٢$ د ص = $\int ٢ هـ^{ص}$ د ص = $٢ هـ^{ص}$ + جـ = $٢ هـ^{\frac{١}{٢} س}$ + جـ

مثال : أوجد $\int_{٤}^{٥} \frac{٣}{س - ٢}$ د س .

ص = س – ٢ ⇐ د ص = د س ⇐ س = ٤ ⇐ ص = ٤ – ٢ = ٢
⇐ س = ٥ ⇐ ص = ٥ – ٢ = ٣

$\int_{٢}^{٣} \frac{٣}{ص}$ د ص = ٣ $\int_{٢}^{٣} \frac{١}{ص}$ د ص

= ٣ $\left[لو | ص | \right]_{٢}^{٣}$ = ٣ [لو^{٣} – لو^{٢}] = ٣ لو^{٣} – ٣ لو^{٢} .

أ/ محمد مصطفى الضبع ٠١٢٧٩٥٥٩٨٤٥٦

مثال :

$$\int_{0}^{2} ٩ هـ^{(٣س+٢)} \, د س$$

$$ص = ٣س + ٢ \Leftarrow د ص = ٣ د س \Leftarrow د س = \frac{د ص}{٣}$$

$$\Leftarrow س = ٠ \Leftarrow ص = ٢$$
$$\Leftarrow س = ٢ \Leftarrow ص = ٨$$

$$\int_{2}^{8} ٩ هـ_{ص} \frac{د ص}{٣} = \int_{2}^{8} ٣ هـ_{ص} \, د ص = ٣ هـ_{ص} \Big]_{2}^{8} = ٣ هـ^{٨} - ٣ هـ^{٢} .$$

تدريب ٣ : احسب قيمة كل من التكاملات التالية

١) $\int_{0}^{1} س (س^{٢} + ٢)^{٣} \, د س$

الحل :

$$ص = س^{٢} + ٢ \Leftarrow د ص = ٢س \, دس \Leftarrow د س = \frac{د ص}{٢س}$$

$$\Leftarrow س = -١ \Leftarrow ص = (-١)^{٢} + ٢ \Leftarrow ص = ٣$$
$$\Leftarrow س = ٠ \Leftarrow ص = (٠)^{٢} + ٢ \Leftarrow ص = ٢$$

$$\int_{2}^{3} س \, ص^{٣} \frac{د ص}{٢ س} = \frac{١}{٢} \int_{2}^{3} ص^{٣} \, د ص = \frac{١}{٢} \left[\frac{ص^{٤}}{٤} \right]_{2}^{3}$$

$$= \frac{١}{٨} [(٢)^{٤} - (٣)^{٤}] = \frac{١}{٨} [١٦ - ٨١] = \frac{-٦٥}{٨}$$

٢) $\int_{1}^{2} \frac{س + ١}{(س^{٢} + ٢س + ١)} \, د س$

$$ص = س^{٢} + ٢س + ١ \Leftarrow د ص = (٢س + ٢) دس \Leftarrow د س = \frac{د ص}{٢ (س + ١)}$$

$$س = ١ \Leftarrow ص = ٤ ، س = ٢ \Leftarrow ص = ٩$$

$$\int_{4}^{9} \frac{س + ١}{ص^{٢}} \frac{د ص}{٢ (س + ١)} = \frac{١}{٢} \int_{4}^{9} \frac{١}{ص^{٢}} \, د ص = \frac{١}{٢} \int_{4}^{9} ص^{-٢} \, د ص$$

أ. محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{ص^{-1}}{-1}\right]_{4}^{9} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{ص}\right]_{4}^{9} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1\times 9}{4\times 9} - \frac{1\times 4}{9\times 4}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{-5}{36}\right] = \frac{5}{72}$$

٣) $\int_{1}^{3} \frac{د س}{س + 2}$

ص = س + ٢ ⇐ د ص = د س ⇐ س = ١ ⇐ ص = ١ + ٢ = ٣ ، س = ٣ ⇐ ص = ٣ + ٢ = ٥

٢ $\int_{3}^{5} \frac{1}{ص}$ د ص = ٢ $\left[لو_{5} |ص|\right]_{3}^{5}$ = ٢ [$لو_{5}^{5} - لو_{5}^{3}$] ⇐ = ٢ $لو_{5}^{5}$ − ٢ $لو_{5}^{3}$

٤) $\int_{1}^{4} ٢ هـ^{(٢س-١)}$ د س

ص = ٢ س - ١ ⇐ د ص = ٢ د س ⇐ د س = $\frac{د ص}{٢}$

س = ١ ⇐ ص = ٢ × ١ − ١ = ١ ، س = ٤ ⇐ ص = ٢ × ٤ − ١ = ٧

$\int_{1}^{7} ٢ هـ_{ص}$ $\frac{د ص}{٢}$ = $\left[هـ_{ص}\right]_{1}^{7}$ = $هـ^{٧} - هـ^{١}$.

أ/ محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

١) جد كلا من التكاملات التالية :

أ) $\int_{0}^{} \sqrt{(٥ - ٣س)^{٣}}$ د س

$\Leftarrow$ ص = ٥ – ٣س $\Leftarrow$ د ص = - ٣ د س $\Leftarrow$ د س = $\frac{\text{د ص}}{-٣}$

$= \int_{0}^{} \sqrt{ص^{٣}} \times \frac{\text{د ص}}{-٣} = -\frac{١}{٣} \int ص^{\frac{٣}{٥}}$ د ص

$= -\frac{١}{٣} \left[\frac{ص^{\frac{٣}{٥} + \frac{٥ \times ١}{٥ \times ١}}}{\frac{٣}{٥} + \frac{٥ \times ١}{٥ \times ١}} \right] + جـ = -\frac{١}{٣} \left[\frac{ص^{\frac{٨}{٥}}}{\frac{٨}{٥}} \right] + جـ$

$= -\frac{١}{٣} \left[\frac{٥ ص^{\frac{٨}{٥}}}{٨} \right] + جـ$

ب) $\int (س + ٣) \sqrt[٣]{س^{٢} + ٦س - ٤}$ د س .

$\Leftarrow$ ص = $س^{٢}$ + ٦س – ٤ $\Leftarrow$ د ص = ٢ س + ٦ د س $\Leftarrow$ د س = $\frac{\text{د ص}}{٢ (س + ٣)}$

$= \int (س + ٣) \sqrt[٣]{ص} \times \frac{\text{د ص}}{٢ (س + ٣)} = \frac{١}{٢} \int ص^{\frac{١}{٣}}$ د ص

$= \frac{١}{٢} \left[\frac{ص^{\frac{١}{٣} + \frac{٣ \times ١}{٣ \times ١}}}{\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣ \times ١}} \right] = \frac{١}{٢} \left[\frac{ص^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} \right] + جـ$

$= \frac{١}{٢} \left[\frac{٣ ص^{\frac{٤}{٣}}}{٤} \right] + جـ$

أ/ محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٦٢

جـ) $\int \frac{١٠ س - ٥}{(س^{٢} - س + ٥)^{٣}}$ د س

ص = $س^{٢} - س + ٥ \Leftarrow$ د ص = ٢س – ١ $\Leftarrow$ د س = $\frac{د ص}{٢ س - ١}$

$\int \frac{٥ (٢س - ١)}{ص^{٣}} \times \frac{د ص}{٢ س - ١} = \int ٥ ص^{-٣}$ د ص = $\frac{٥ ص^{-٣+١}}{-٣ + ١} + جـ$

$= \frac{٥ ص^{-٢}}{-٢} = \frac{-٥}{٢ص^{٢}} + جـ$

د) $\int \frac{٣}{٣س - ١٢}$ د س

ص = ٣ س – ١٢ $\Leftarrow$ د ص = ٣ دس $\Leftarrow$ د س = $\frac{د ص}{٣}$

$\int \frac{٣}{ص} \frac{د ص}{٣} = \int \frac{١}{ص}$ د س = لو$_{هـ}$ | ص | + جـ = لو$_{هـ}$ | ٣ س – ١٢ | + جـ

هـ) $\int$ $قا^{٢}$ (٥ س – ٨) د س

ص = ٥ س – ٨ $\Leftarrow$ د ص = ٥ د س $\Leftarrow$ د س = $\frac{د ص}{٥}$

$\int قا^{٢}$ ص $\frac{د ص}{٥} = \frac{١}{٥} \int قا^{٢}$ ص د ص = $\frac{١}{٥}$ ظا ص + جـ

و) $\int ٢ س \times$ جا (٤ – $س^{٢}$) د س

ص = ٤ – $س^{٢} \Leftarrow$ د ص = - ٢ س د س $\Leftarrow$ د س = $\frac{د ص}{-٢س}$

$\int ٢ س$ جا ص $\frac{د ص}{-٢ س} = - \int$ جا ص د ص = - - جتا ص + جـ = جتا (٤ – $س^{٢}$) + جـ

أ. محمد مصطفى الضبع ٠١٧٩٥٥٩٨٤٥٦

ر) $\int$ هـ $^{(٩س-١)}$ د س = $\frac{١}{٩}$ هـ $^{(٩س-١)}$ + جـ

ح) $\int$ جتا ($\frac{س}{٣}$) د س = ٣ جا ($\frac{س}{٣}$) + جـ

ص = $\frac{س}{٣}$ ⇐ د ص = $\frac{١}{٣}$ د س ⇐ د س = ٣ د ص

$\int$ جتا ص × ٣ د ص = ٣ جا ص + جـ = ٣ جا ($\frac{س}{٣}$) + جـ

٢) جد كلا من التكاملات التالية :

أ) $\int_{١}^{٢}$ (٢ س – ٣) ^{٤} د س = $\left[\frac{(٢س-٣)^{٥}}{٥ \times ٢}\right]_{١}^{٢}$ = $\frac{(٢ \times ٢ - ٣)^{٥} - (٢ \times ١ - ٣)^{٥}}{١٠}$

= $\frac{١ - - ١}{١٠}$ = $\frac{٢}{١٠}$ = $\frac{١}{٥}$

ب) $\int_{٠}^{٢}$ س ^{٢} (س^{٣} – ٥)^{٢} د س

ص = س ^{٣} – ٥ ⇐ د ص = ٣ س^{٢} د س ⇐ د س = $\frac{د ص}{٣ س^{٢}}$

س = ٠ ⇐ ص = – ٥ ، س = ٢ ⇐ ص = ٣

$\int_{-٥}^{٣}$ س^{٢} ص^{٢} $\frac{د ص}{٣س^{٢}}$ = $\frac{١}{٣}$ $\left[ص^{٣}\right]_{-٥}^{٣}$ = $\frac{١}{٣}$ [٢٧ – – ١٢٥] = $\frac{١٥٢}{٣}$

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

ج) $\int_{-1}^{0} \frac{2س}{3س^2+1}$ د س

ص = $3س^2 + 1$ ⇐ د ص = ٦ س د س ⇐ د س = $\frac{د ص}{٦ س}$

س = -1 ⇐ ص = ٤ ، س = ٠ ⇐ ص = ١

$$\int_{٤}^{١} \frac{2س}{ص} \frac{د ص}{٦ س} = \frac{2}{٦} \int_{٤}^{١} \frac{1}{ص} د ص = \frac{2}{٦} \left[لو_{ه} |ص| \right]_{٤}^{١} = \frac{1}{3} \left[لو_{ه} ١ - لو_{ه} ٤ \right]$$

د) $\int_{3}^{5} \frac{2}{2س - ٤}$ د س

ص = ٢ س – ٤ ⇐ د ص = ٢ د س ⇐ د س = $\frac{د ص}{2}$

س = ٣ ⇐ ص = ٢ ، س = ٥ ⇐ ص = ٦

$$\int_{2}^{6} \frac{2}{ص} \frac{د ص}{2} = لو_{ه} |ص| \Big]_{2}^{6} = لو_{ه} ٦ - لو_{ه} ٢$$

هـ) $\int_{1}^{3} ٦ س هـ^{(س^2 - ١)}$ د س

ص = $س^2$ – ١ ⇐ د ص = ٢ س د س ⇐ د س = $\frac{د ص}{٢ س}$

س = ١ ⇐ ص = ٠ ، س = ٣ ⇐ ص = ٨

$$\int_{٠}^{٨} ٦ س هـ^{ص} \frac{د ص}{٢ س} = \int_{٠}^{٨} ٣ هـ^{ص} د ص = ٣ هـ^{٨} - ٣ هـ^{٠} = ٣ هـ^{٨} - ٣ .$$

أ. محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

٣) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س ، ص) يساوي (٤ س – ٢) ^{٣} ، فاكتب قاعدة الاقتران علما بأنه يمر بالنقطة (١ ، ٨) .

الحل : م = ق َ (س) = $\int$ ق َ (س) د س = ق (س) + جـ

$$\Leftarrow \int (٤س - ٢)^{٣}\, د س = \frac{(٤ س - ٢)^{٤}}{٤ \times ٤} + جـ = \frac{(٤ س - ٢)^{٤}}{١٦} + جـ$$

⇐ يمر بالنقطة (١ ، ٨) ⇐ ق (١) = ٨

$$ق (س) = \frac{(٤ س - ٢)^{٤}}{١٦} + جـ \Leftarrow ق (١) = \frac{(٤ \times -٢)^{٤}}{١٦} + جـ = ٨ \Leftarrow \frac{١٦}{١٦} + جـ = ٨$$

$$١ + جـ = ٨ \Leftarrow جـ = ٧ \Leftarrow ق (س) = \frac{(٤ س - ٢)^{٤}}{١٦} + ٧$$

٤) إذا علمت أن ق (٤) = ١٢ ، ق (١) = – ٨ ، فأحسب قيمة $\int_{-١}^{٢}$ ٢ س ق (س^{٢}) د س

الحل : ص = س^{٢} ⇐ د ص = ٢ س د س ⇐ د س = $\frac{د ص}{٢ س}$

س = – ١ ⇐ ص = ١ ، س = ٢ ⇐ ص = ٤

$$\int_{١}^{٤} ٢ س ق َ (ص) \frac{د ص}{٢ س} = \int_{١}^{٤} ق َ (ص)\, د ص$$

$$ق (ص) \Big]_{١}^{٤} = ق (٤) – ق (١) = ١٢ – – ٨ = ١٢ + ٨ = ٢٠ .$$

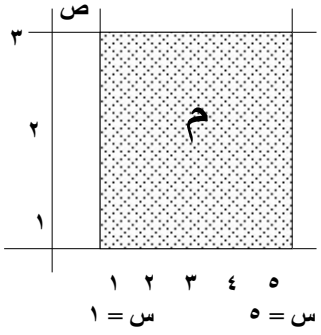
٥) يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة ع(ن) = ٣ (ن + ١)^{٢} م/ث جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ثانيتين من بدء الحركة ،علما بان موقعه الابتدائي ف (٠) = ١ م

الحل : ف (ن) = $\int$ ع (ن) د ن ، ف (ن) = $\int$ ٣ (ن + ١)^{٢} د ن

$$ف (ن) = \frac{٣ (ن + ١)^{٣}}{٣} + جـ \Leftarrow ف (٠) = ١ \Leftarrow (٠ + ١)^{٣} + جـ ، = ١ \Leftarrow ١ + جـ = ١ \Leftarrow جـ = ٠$$

⇐ ف (ن) = (ن + ١)^{٣} ⇐ ف (٢) = (٢ + ١)^{٣} = (٣)^{٣} = ٢٧ م

مثال (١) :
إذا كان ق (س) = ٣ فاحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) و محور السينات و المستقيمين س، = ١ ، س = ٥ .



الحل :
ق (س) = ٣ ، ص = ق (س) = ٣ (المساحة هي مساحة المستطيل)
طوله ٤ وحدات و عرضه ٣ وحدات .

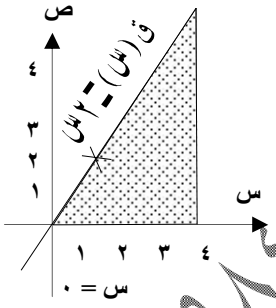
م = الطول × العرض ⇐ ٤ × ٣ = ١٢ وحدة مربعة .

٢) المساحة = $\int_{1}^{5}$ ٣ د س = ٣ (٥ ـ ١) = ٣ × ٤ = ١٢ وحدة مربعة

أو

= $\int_{1}^{5}$ ٣ د س = ٣ س $\Big]_{1}^{5}$ = ٣ × ٥ ـ ٣ × ١ = ١٥ ـ ٣ = ١٢ وحدة مربعة .

مثال (٢) :
إذا كان ق (س) = ٢ س ، فاحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) و محور السينات و المستقيمين س = ٠ ، س = ٤ .



= $\int_{0}^{4}$ ٢ س د س = $\frac{٢ س^{٢}}{٢}\Big]_{0}^{4}$ = ١٦ ـ ٠ = ١٦ وحدة مربعة .

لرسم منحنى ق (س) = ٢ س نفرض قيمة س و نوجد قيم ص .

ص = ٢ س

س	٠	١	٢
ص	٠	٢	٤

قـــاعدة:
مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) الذي يقع فوق محور السينات و بين محور السينات و المستقيمين س = أ ، س = ب ، أي الفترة [أ ، ب] تساوي :

$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س .

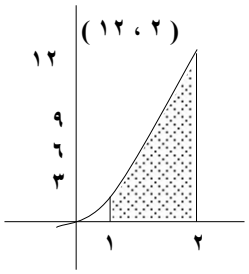
 # دائما نجد جذور الاقتران (نقاط التقاطع مع محور السينات) إذا الجذر واقع ضمن الفترة نكامل مرتين و إذا كان الجذر خارج الفترة نكامل مرة واحدة فقط .

أ . محمد مصطفى القشاه ٠٥٩٩٨٤٥٦

مثال (٣) :
احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = ٣ س^{٢} و محور السينات في الفترة [١ ، ٢] .

$$= \int_{١}^{٢} ٣ س^{٢} \, د س = \left[\frac{٣ س^{٣}}{٣} \right]_{١}^{٢}$$

$$= (٢)^{٣} - (١)^{٣}$$
$$= ٨ - ١ = ٧ \text{ وحدات مربعة}$$



ص = ٣ س^{٢}

س	٠	١	٢
ص	٠	٣	١٢

جذر الاقتران = ٠
٣س^{٢} = ٠ ، س^{٢} = ٠ ، س = ٠
لاحظ أنه ليس ضمن الفترة لذلك نكامل مرة واحدة فقط.

مثال (٤) :
احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = س – ٤ و محور السينات في الفترة [١ ، ٣]

$$= \int_{١}^{٣} (س - ٤) \, د س = \left[\frac{س^{٢}}{٢} - ٤ س \right]_{١}^{٣} = \left(\frac{٩}{٢} - \frac{١٢ \times ٢}{١ \times ٢} \right) - \left(\frac{١}{٢} - \frac{٤ \times ٢}{١ \times ٢} \right)$$

$$= \left(\frac{١٥ -}{٢} \right) - \left(\frac{٧ -}{٢} \right) = \frac{١٥ -}{٢} + \frac{٧}{٢} = \frac{٨ -}{٢} = -٤$$

$$\Leftarrow \int_{١}^{٣} (س - ٤) \, د س = \text{مساحة المنطقة المحصورة} = ٤ \text{ وحدات مربعة ، لأن المساحة دائما موجبة و}$$
المساحة السالبة تعني أن الرسم واقع تحت محور السينات .

= – ٤ وحدات مربعة .

ق (س) = ٠ ، س- ٤ = ٠ ، س = ٤ ، جذر الاقتران خارج الفترة نكامل مرة واحدة فقط

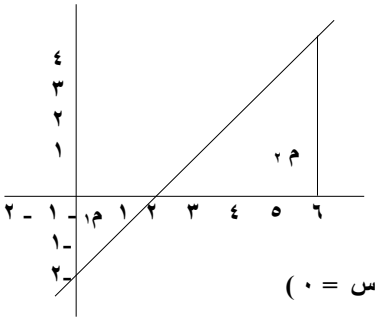
مثال (٥) :
احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = س – ٢ و محور السينات في الفترة [٠ ، ٦]
الحل :

وهنا يجب إيجاد نقطة تقاطع الاقتران مع محور السينات .

ق (س) = ٠ ⇐ س – ٢ = ٠ ⇐ س = ٢

لاحظ أن الجذر واقع ضمن الفترة المعطاة ، لذلك نكامل مرتين من س = ٠ إلى س = ٢
ثم من س = ٢ إلى س= ٦

(الرسم لمن يشاء وهو غير ضروري)
في الاقتران الخطي ق (س) = أ س + ب فإن الخط المستقيم يقطع محورالصادات عند الحد المطلق (ب) .



ق (س) = أ س + ب = النقطة التي يقطع عندها المنحنى محور الصادات

المقطع الصادي

ص = س − ٢

س	٠	٢
ص	٢-	٠

الخلاصـــة (تذكر أن محور الصادات معادلته س = ٠)

المساحة الكلية = م١ + م٢

$$= \int_{0}^{2} (س - ٢)\ د س + \int_{2}^{6} (س - ٢)\ د س$$

$$= \left[\frac{س^{٢}}{٢} - ٢ س \right]_{0}^{2} + \left[\frac{س^{٢}}{٢} - ٢س \right]_{2}^{6}$$

$$= \left(\frac{٤}{٢} - ٤ \right) + \left[\left(\frac{٣٦}{٢} - ١٢ \right) - \left(٤ - ٤ \right) \right]$$

$$= \left(٤ - ٢ \right) + \left(١٨ - ١٢ \right) - \left(٤ - ٢ \right)$$

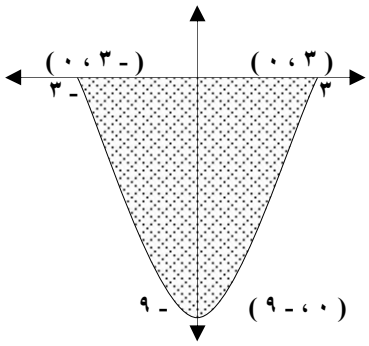
$$= \left(٢ - \right) + \left(٦ + ٢ \right)$$

= - ٢ يعني أن المساحة واقعة تحت محور السينات
⇐ م١ = ٢

المساحة الكلية = م١ + م٢ = ٢ + ٨ = ١٠ وحدات مربعة .

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٩٨٤٥٩٠٢

مثال (٦) :
احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = س^{٢} – ٩ ومحور السينات .
في مثل هذا النوع من الاقترانات يجب إيجاد جذور الاقتران وهي تعتبر حدود التكامل .



⇐ س^{٢} – ٩ = ٠ ⇐ (س – ٣) (س + ٣) = ٠
⇐ س = ٣ ، س = - ٣

قـــاعدة :
عندما تقع المساحة كاملة تحت محور السينات أو كاملة فوق محور السينات، تكامل مرة واحدة فقط .

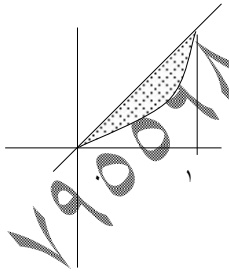
$$\int_{-٣}^{٣} (س^{٢} - ٩)\, د س = \left[\frac{س^{٣}}{٣} - ٩ س \right]_{-٣}^{٣}$$

$$= \left(\frac{٢٧}{٣} - ٢٧ \right) - \left(\frac{-٢٧}{٣} - (-٢٧) \right) \Leftarrow = (٩ - ٢٧) - (-٩ + ٢٧)$$

⇐ = - ١٨ – ١٨ = - ٣٦ (السالب تعني أن المساحة واقعة على محور السينات) .
المساحة = ٣٦ وحدة مربعة

مثال (٧) :
احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق (س) = س ، هـ (س) = س^{٢} .
 # لا يوجد حدود للتكامل لذلك نقوم بمساواة الاقترانين ببعض ونوجد الجذور و تكون (نقاط تقاطع الاقترانين) و تكون هي حدود التكامل .

ق (س) = هـ (س) ⇐ س = س^{٢} ⇐ س^{٢} – س = ٠
س (س – ١) = ٠ ⇐ س = ٠ أو س – ١ = ٠ ⇐ س = ١.



$$\int_{٠}^{١} (س - س^{٢})\, د س = \left[\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{١} = \left[\frac{١ \times ٣}{٢ \times ٣} - \frac{١ \times ٢}{٣ \times ٢} \right] - ٠$$

⇐ = $\frac{١}{٦}$ – $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{-١}{٦}$ و حدة مربعة .

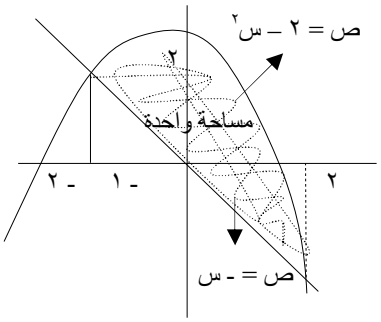
قـــاعدة :
إذا كان ق (س) ، هـ (س) اقترانين بحيث أن قيم ق (س) ≥ هـ (س) لجميع قيم س في الفترة [أ ، ب] فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين في الفترة تساوي

$$\int_{أ}^{ب} (ق(س) - هـ(س))\, د س$$

، ب نقاط تقاطع الاقترانين (الاقتران الأكبر – الأصغر)

م. محمد مصطفى الفضل ٠٧٩٥٥٦٨٤٥٦

مثال (٨) :
احسب مساحة النقطة المحصورة بين منحني الاقترانين ص = ٢ – س^{٢} ، ص = - س ،
الحل :
نقوم بمساواة الاقترانين لإيجاد نقاط التقاطع .



٢ – س ^{٢} = - س ⇐ - س – ٢ + س^{٢} = ٠
س^{٢} – س – ٢ = ٠ ⇐ (س – ٢) (س + ١)
⇐ = س = ٢ ، س = - ١ .

نأخذ عدد يقع في الفترة [– ١ ، ٢] و نقوم بتعويضه في الاقترانين و الاقتران الذي يعطي فيمه أكبر يكون هو أكبر من الاقتران الآخر لنأخذ ٠ (الصفر واقع في الفترة [–١ ، ٢] .

ق (س) = ٢ – س^{٢} ⇐ ق (٠) = ٢ – ٠ = ٢ ⇐ هـ (س) = - س ⇐ هـ (٠) = ٠
لا حظ أن ق (٠) > هـ (٠) إذن ق (٠) يوضع أولاً .

$$\int_{-1}^{2} (٢ - س^{٢}) - (- س)\, د س = \int_{-1}^{2} ٢ - س^{٢} + س\, د س .$$

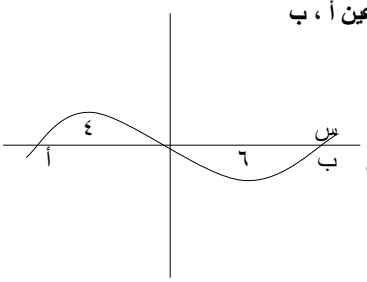
$$= ٢ س - \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} \Big]_{-1}^{٢} = \left[٤ - \frac{٨}{٣} + \frac{٤}{٢} \right] - \left[- ٢ + \frac{١ \times ٢}{٢ \times ٣} + \frac{١ \times ٣}{٣ \times ٢} \right]$$

$$= \left[\frac{٨}{١} - \frac{٦ \times ٣}{٣} \right] - \left[\frac{٦ \times ٢ -}{٦ \times ١} + \frac{٢}{٦} + \frac{٣}{٦} \right] = \left[\frac{٨}{٣} - \frac{١٨}{٣} \right] - \left[\frac{١٢ -}{٦} + \frac{٢}{٦} + \frac{٣}{٦} \right]$$

$$= \left[\frac{١٠}{٣} \right] - \left[\frac{٧ -}{٦} \right] = \frac{١٠ \times ٢}{٢ \times ٣} + \frac{٧}{٦} = \frac{٢٠}{٦} + \frac{٧}{٦} = \frac{٢٧}{٦} = ٤.٥ \text{ وحدة مربعة}$$

أو ٤ – ٨/٣ + ٢ – ١/٢ – ١/٣ = ٦ – ٩/٢ + ٣/٢ = ٣ + ١.٥ = ٤.٥ وحدة مربعة

مثال (٩) :
يمثل الشكل التالي منحنى الاقتران ق (س) في الفترة [أ ، ب] و قيم المساحات المحصورة بين ق (س) و محور السينات بالوحدات المربعة اعتمد على هذا الشكل في إيجاد المساحة في الفرعين أ ، ب



أ) $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س = ٦ وحدات مربعة
فعلياً = - ٦ ، لكن السالب يعني أن المساحة واقعة تحت محور السينات

ب) $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س = ٤ + (- ٦) = - ٢ خطأ
 # السالب يعني المساحة واقعة تحت محور السينات ، وعند إيجاد المساحة الكلية نأخذ المساحة كقيمة موجبة .

$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س = ٤ + ٦ = ١٠ وحدات مربعة .

 # إذا ذكر في السؤال كلمة مساحة صراحة نأخذ جميع القيم موجبة بينما إذا طلب التكامل دون ذكر كلمة مساحة نأخذ القيم الواقعة فوق محور السينات موجبة والقيم الواقعة تحت محور السينات سالبة.

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

ايجاد المساحات

تدريب (٤) احسب مساحة المنطقه المحصوره بين منحنى الاقتران ق(س)= $س^{٣}$
ومحور السينات والمستقيمين س = −٢ ، س = ١

الحل : تساوي الاقتران بالصفر لايجاد نقاط التقاطع مع محور السينات

⇐ ق(س) = ٠ ⇐ $س^{٣}$ = ٠ ⇐ س= ٠

قيم س هي −٢ ، ٠ ، ١ ⇐ هناك مساحتين

> لا يجوز استخدام خاصية الاضافه في المساحات
>
> السالب يعني ان المساحه واقعه تحت محور السينات

$م_{١} = \int_{-٢}^{٠} س^{٣}\ دس$ ، $م_{٢} = \int_{٠}^{١} س^{٣}\ دس$

$= \left| \frac{س^{٤}}{٤} \right|_{-٢}^{٠} + \left| \frac{س^{٤}}{٤} \right|_{٠}^{١}$

$= \left| \frac{٠ - ١٦}{٤} \right| + \left| \frac{١}{٤} \right| = |-٤| + \frac{١}{٤} = ٤ + \frac{١}{٤} = \frac{١٧}{٤}$

تدريب (٥)مدخل مجمع رياضي يمثله منحنى ق(س)= ٤− $س^{٢}$
ما تكلفة إنشاء باب حديدي للمدخل إذا كان سعر الوحدة المربعة ٣٠ دينارا

الحل تساوي الاقتران بالصفر لإيجاد حدود المساحة

⇐ ق (س) = ٠ ⇐ ٤ −$س^{٢}$=٤ ⇐ س= + ٢

$م = \int_{-٢}^{٢} (٤ - س^{٢})\ د س =$

$٤(٢- -٢) - \frac{س^{٣}}{٣} \Big|_{-٢}^{٢} = ٤ \times ٤ - \frac{٨- -٨}{٣}$

$= \frac{١٦ \times ٣}{٣ \times ١} - \frac{١٦}{٣} = \frac{٤٨ -٦}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$ وحده مربعه

التكلفه = $\frac{٣٢}{٣} \times ٣٠ = ٣٢٠$ ديناراً

محمد مصطفى القشاط ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

مثال : احسب المنطقه المحصوره بين منحنى ق(س) = س^{٢} −٥ س +٦ ومحور السينات

الحل : ق (س) ٠ ⇐ س^{٢} −٥ س +٦ = ٠

تحل بطريقة الاقواس نبحث عن عددين حاصل ضربهم = +٦ وحاصل جمعهم = -٥

(س −٣)(س−٢)= ٠

س−٣ =٠ ⇐ س=٣

س−٢ = ٠ ⇐ س= ٢

س=٢ ، س=٣

$$م = \int_{٢}^{٣} (س^{٢} - ٥ س + ٦) \, د س$$

$$= \left[\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{٥ س^{٢}}{٢} \right]_{٢}^{٣} + ٦ (٣ - ٢)$$

$$= \frac{٢٧ - ٨}{٣} - \frac{٥}{٢} (٩ - ٤) + ٦$$

$$\frac{١٩ \times ٢}{٢ \times ٣} - \frac{٢٥ \times ٣}{٢ \times ٣} + \frac{٦ \times ٦}{١ \times ٦}$$

$$\frac{٣٨ - ٧٥ + ٣٦}{٦} = \frac{-١}{٦} \Rightarrow م = \frac{١}{٦}$$ وحدة مربعه

تدريب٦ : احسب مساحة المنطقه المحصوره بين منحنى ق(س) = س^{٢} − ٤ س ومحور السينات

الحل : ق (س) = ٠ ⇐ س^{٢} − ٤ س = ٠ ⇐ س (س − ٤) = ٠

س = ٠ ، س = ٤

⇐ م = $\int_{٠}^{٤}$ (س^{٣} − ٤ س) د س

$$= \left[\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{٤ س^{٢}}{٢} \right]_{٠}^{٤}$$

$$= \left[\frac{س^{٣}}{٣} - ٢ س^{٢} \right]_{٠}^{٤}$$

$$= \frac{٦٤}{٣} - \frac{٣٢ \times ٣}{١ \times ٣} = \frac{٦٤ - ٩٦}{٣} = \frac{-٣٢}{٣}$$ ، م = $\frac{٣٢}{٣}$

د/ محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

تدريب٧ : جد مساحة المنطقه المغلقه المحصوره بين منحنيين الاقترانيين

ق(س) = ٢س −٣ ، ع (س) = س^{٢} − ٢ س

الحل : نساوي الاقترانيين ببعض لإيجاد حدود التكامل

⇐ ق (س) = هـ (س)

٢س −٣ = س^{٢} − ٢ س

س^{٢}−٢س − ٢س + ٣ = ٠

س^{٢} −٤ س + ٣ = ٠

(س − ٣) (س− ١) = ٠

س −١ = ٠ ⇐ س= ١

س −٣ = ٠ ⇐ س = ٣

تحل بالاقواس تبحث عن عددين حاصل ضربهم = ٣ وحاصل جمعهم = -٤

$$م = \int_{١}^{٣} (٢ س − ٣) − (س^{٢} − ٢ س) \, د س$$

$$= \int_{١}^{٣} (٤ س − س^{٢} − ٣) \, د س$$

$$= \int_{١}^{٣} (٤ س − س^{٢} − ٣) \, د س$$

$$= \frac{٤ س^{٢}}{٢} \Big]_{١}^{٣} − \frac{س^{٣}}{٣} \Big]_{١}^{٣} − ٣ (٣ − ١)$$

اكمل م = $\frac{٤}{٣}$ وحدة مربعه

أ. أحمد مصطفى القصاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

تمارين ومسائل

(١) احسب المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات والمستقيمين المذكورين إزاء كل منهما في كل مما ياتي :

أ) ق (س) = ٦ ، س= −٢ ، س = ٥

م = $\int_{-٢}^{٥}$ ٦ د س = ٦ (٥ − −٢) = ٦×٧ = ٤٢ وحده مربعه

ب) ق (س) = ٤ س −١ ، س = ١ ، س = ٣

م = $\int_{١}^{٣}$ (٤ س − ١) د س = $\left[\frac{٤ س^{٢}}{٢} \right]_{١}^{٣}$ − ١ (٣ − ١)

= ٢س^{٢} $\Big]_{١}$ − ٢ = ١٨ − ٢ −٢ = ١٤ وحده مربعه

ج) ق(س) = س^{٢} +١ ، س= −٣ ، س= ٣

م = $\int_{-٣}^{٣}$ (س^{٢} + ١) د س = $\left[\frac{س٣}{٣} \right]_{-٣}^{٣}$ + ١ (٣ − −٣)

= $\frac{٢٧ - -٢٧}{٣}$ + ٦ = $\frac{٥٤}{٣}$ + ٦ = ١٨ + ٦ = ٢٤ وحده مربعه

أ. محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

د) ق(س) = ٤ − ٢ س ، س = ٠ س = ٤

ق(س) ٠ ⇐ ٤ − ٢ س = ٠ ⇐ ٢ س = ٤ ⇐ س = ٢

قيمة س هي : { ٠، ٢ ، ٤ }

ا لمساحة م = $\int_{0}^{2}$ (٤ − ٢س) د س + $\int_{2}^{4}$ (٤ − ٢ س) د س

$= ٤ \left[(٢ - ٠) - \frac{٢س^{٢}}{٢} \right]_{0}^{٢}$ + م٢ $= ٤ \left(٤ - ٢ \right) - \left[\frac{٢س^{٢}}{٢} \right]_{٢}^{٤}$

٨ − (٤ − ٠)

٨− ٤ = ٤

٨ − (١٦ − ٤)

١٢ −٨

−٤ | = ٤ المساحة الكلية =٤+٤ = ٨ وحدات مربعه

هـ) ق (س) = ٢س^{٣} ، س = −١ ، ٠ ، س = ٢

ق (س) = ٠ ⇐ ٢س^{٣} ⇐ = ١ ⇐ س^{٣} = ٠ ⇐ س= ٠

قيمة س هي { −١ ، ٠ ، ٢ }

م١ = $\int_{-١}^{0}$ ٢ س^{٣} د س + م ٢ = $\int_{0}^{2}$ ٢س^{٣} د س اكمل

= $\frac{١٧}{٢}$ وحده مربعه

أ/ احمد مصطفى الفضاء ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

(٢) احسب مساحة المنطقه المغلقه المحصوره بين كل من منحنيات الاقترانات الآتيه ومحور السينات :

أ) ع(س) = ٥ – ٥ س^{٢}

ع (س)= ٠⇐ ٥ – ٥ س^{٢} = ٠ ⇐ ٥ س^{٢} = ٥ ⇐ س^{٢}= ١ ⇐ س ± ١

م= $\int_{-١}^{١}$ (٥ – ٥ س ^{٢}) د س = اكمل م = $\frac{٢٠}{٣}$ وحدة مربعه

(ب) هـ (س) = س^{٢} + ٢ س – ٣

هـ (س) = ٠ ⇐ س^{٢}+٢ س – ٣ = ٠ ⇐(س+٣) (س – ١) = ٠ ، س = –٣ ، س = ١

م = $\int_{-٣}^{١}$ (س^{٢}+ ٢ س – ٣) د س اكمل م = $\frac{٣٢}{٣}$

(ج) ص = س – س^{٣}

الحل : س – س^{٣} = ٠ ⇐ س(١ – س^{٢}) = ٠ ⇐ س =

١– س^{٢} = ٠⇐ س = ± ١

⇐ قيم س هي { –١ ، ٠ ، ١) نكامل مرتين

م$_{١}$ = $\int_{-١}^{٠}$ (س – س ^{٣}) د س + م$_{٢}$ $\int_{٠}^{١}$ (س – س^{٣}) د س اكمل

أ. محمد مصطفى القصاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

(د) ك (س) = س^{٢} – ٢٥

ك (س) = ٠ ⇐ س^{٢}– ٢٥ = ٠ ⇐ س^{٢}= ٢٥ ⇐ س = ± ٥

م= $\int_{-٥}^{٥}$ (س^{٢} – ٢٥) د س اكمل

⇐ م = $\frac{٥٠٠}{٣}$ وحده مربعه

(٣) احسب مساحة المنطقه المغلقه المحصوره بين منحنى الاقترانيين ق (س) = س^{٢} ، هـ (س) = ٢ س

الحل : ق (س) = هـ(س) مساواة الاقترانيين بغرض إيجاد قيم س حدود التكامل

⇐ س^{٢}= ٢س ⇐ س^{٢}– ٢ س = ٠ ⇐ س(س – ٢) = ٠

⇐ س= ٠ ، س –٢ =٠ ⇐ س= ٢

م= $\int_{٠}^{٢}$ (٢ س – س^{٢}) د س = $\frac{٢ س^{٢}}{٢}$ – $\frac{س^{٣}}{٣}$ $\Big|_{٠}^{٢}$

= $\frac{٤ \times ٣}{١ \times ٣}$ – $\frac{٨}{٣}$ = $\frac{٤}{٣}$ وحده مربعه

(٤) احسب مساحة المنطقه المغلقه المحصوره بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} +٢ والمستقيم ص = ٣

الحل : ق(س) = ص ⇐ س^{٢} +٢ = ٣ ⇐ س^{٢} = ١ ⇐ س = ± ١

م = $\left| \int_{-١}^{١} (س^{٢}+٢ -٣) \text{ د س} \right|$ = $\int_{-١}^{١}$ (س^{٢} – ١) د س اكمل م = $\frac{٤}{٣}$

أ/ محمد مصطفى الفحام ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

(٥) احسب المنطقه المغلقه المحصوره بين منحنى الاقتران ع(س) = س^{٢} – ٤ س والمستقيم ص = ٥

الحل : ع (س) = ص ⇐ س^{٢} –٤ س = ٥ ⇐ س^{٢} –٤ س –٥ = ٠

(س–٥) (س +١) = ٠ ⇐ س = ٥ ، س = –١

$$م = \int_{-١}^{٥} (س^{٢} - ٤ س - ٥) \, د س \quad اكمل$$

⇐ م =٣٦ وحده مربعه

(٦) احسب مساحة المنطقه المحصوره بين منحنى الاقتران ق(س) = ١٦ –٤ س^{٢} والمستقيم ص= ٠

الحل : ق (س) = ص ⇐ ١٦ –٤ س^{٢} = ٠ ⇐ ٤س^{٢} = ١٦ ⇐ س^{٢} = ٤، س = ± ٢ ،

$$م = \int_{-٢}^{٢} (١٦ - ٤ س^{٢}) \, د س = \left[١٦ (٢ - -٢) - \frac{٤ س^{٣}}{٣} \right]_{-٢}^{٢} \quad اكمل$$

$$م = \frac{١٢٨}{٣}$$

(٧) احسب مساحة المنطقه المحصوره بين منحنى الاقتران ص – س = ٦ ، ص = س^{٢}

(١) نجعل الاقتران على الصوره العامه ص = ق(س)

ص–س= ٦ ⇐ ص = ٦ + س

ص = س^{٢}

(٢) نجعل ص= ص لايجاد حدود التكامل (المساحه)

٦+س = س^{٢} ⇐ س^{٢} – س – ٦ = ٠

(س–٣) (س+٢) = ٠ ⇐ س= ٣ س = –٢

أ. محمد مصطفى القطاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

$$م = \int_{-٢}^{٣} (٦ + س - س^{٢}) \, د س$$

$$= ٦\left[(٣ - -٢) + \frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٣}}{٣} \right]_{-٢}^{٣}$$

$$٣٠ + \frac{٩ - ٤}{٢} - \frac{٢٧ - -٨}{٣}$$

$$\frac{٦ \times ٣٠}{٦ \times ١} + \frac{٥ \times ٣}{٢ \times ٣} - \frac{٣٥ \times ٢}{٣ \times ٢}$$

$$\frac{١٨٠ + ١٥ - ٧٠}{٦٠} = \frac{١٢٥}{٦} \quad \text{وحده مربعه}$$

(٨) احسب مساحة المنطقه المغلقه المحصوره بين منحنى الاقترانيين

ص = س ^{٣} والمستقيم س= -١ ومحور السينات

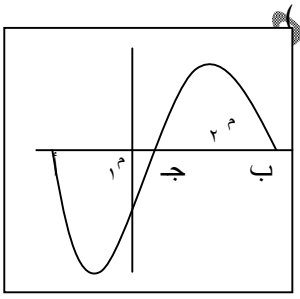
الحل : ص = ٠ $\Leftarrow$ س^{٣} = ٠ $\Leftarrow$ س= ٠ ، س= -١

$$م = \int_{-١}^{٠} س^{٣} \, د س = \left[\frac{س^{٤}}{٤} \right]_{-١}^{٠} = \frac{١}{٤} \quad \text{وحده مربعه}$$

(٩) يمثل الشكل المنطقه المغلقه المحصوره بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في (أ،ب) ،

فاذا علمت ان مساحة (م١) تساوي ٨ وحدات مربعه ومساحة (م٢)تساوي (٥)

وحدات مربعه فاحسب $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس



الحل : م١ = ٨ وحدات مربعه ، م٢ = ٥ وحدات مربعه

$$\int_{أ}^{ب} ق(س) \, د س = \int_{أ}^{جـ} ق(س) \, د س + \int_{جـ}^{ب} ق(س) \, د س$$

$$-٨ + ٥ = -٣$$

اذا ذكر في نص السؤال اوجد مساحة المنطقه المحصوره تاخذ جميع القيم موجبه اسفل وأعلى محور السينات اذا لم يذكر كلمة مساحه صراحه تاخذ ما فوق محور السينات موجب وما تحت (اسفل) مع محور السينات سالب

١) الإيراد الكلي = د (س) ، الإيراد الحدي = د (س)

$\int$ قَ (س) د س = ق (س) + جـ

⇐ تكامل المشتقة يعطي الاقتران الأصلي و تكامل الإيراد الحدي يعطي الإيراد الكلي .

$$د(س) = \int_{٠}^{س} د'(ص)\, د ص$$

مثال : إذا كان الإيراد الحدي لـ س من الوحدات المنتجة في مصنع ما ، هي :
د (س) = ٣ س^{٢} – ٢س + ٥ ، فجد الإيراد الكلي الناتج من هذه الوحدات
الحل :

$$د(ص) = د'(س) = ٣س^{٢} - ٢س + ٥ \Leftarrow د(س) = \int_{٠}^{س} د'(ص)\, د ص$$

$$د(س) = \int_{٠}^{س} (٣ص^{٢} - ٢ص + ٥)\, د ص \Leftarrow = \left[\frac{٣ص^{٣}}{٣} - \frac{٢ص^{٢}}{٢} + ٥ص \right]_{٠}^{س}$$

$$= ص^{٣} - ص^{٢} + ٥ص \Big]_{٠}^{س} = س^{٣} - س^{٢} + ٥س .$$

مثال : إذا كان اقتران الإيراد الحدي لبيع ثلاجات هو : د (س) = ٣٠س^{٢} +٢س+ ٧ فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع ٤ ثلاجات .

$$\int_{٠}^{٤} د'(ص)\, د ص = \int_{٠}^{٤} (٣٠ص^{٢} + ٢٠ص + ٧)\, د ص \Leftarrow = \left[\frac{٣٠ص^{٣}}{٣} + \frac{٢٠ص^{٢}}{٢} + ٧ص \right]_{٠}^{٤}$$

$$\Leftarrow = ١٠ص^{٣} + ١٠ص^{٢} + ٧ص \Big]_{٠}^{٤} \Leftarrow = ٦٤٠ + ١٦٠ + ٢٨ = ٨٢٨ \text{ ديناراً} .$$

٢) **فائض المستهلك**

$$ف_ك = \int_{0}^{س_1} (ق(س) - ع_1)\, د س = \int_{0}^{س_1} ق(س)\, د س - ع_1 س_1$$

مثال : إذا كان ع = ق (س) = ٥٠ – ٦س يمثل اقتران السعر والطلب حيث ع = السعر بالدنانير ، س = عدد القطع المنتجة و إن السعر ثابت عند $ع_1 = 8$ ، فجد فائض المستهلك .

الحل :

$$ف_ك = \int_{0}^{س_1} ق(س)\, د س - ع_1 س_1 \Leftarrow ع = ق(س) = ٥٠ - ٦س$$ **(نوجد $س_1$ بناءً على $ع_1$ المعطاة في السؤال)**

$$ع = ٥٠ - ٦س \Leftarrow 8 = ٥٠ - ٦س \Leftarrow ٨ - ٥٠ = -٦س \Leftarrow \frac{-٤٢}{-٨} = \frac{-٨س}{-٨} \Leftarrow س_1 = ٧$$

$$\Leftarrow \int_{0}^{٧} (٥٠ - ٦س)\, د س - ٨ \times ٧ \Leftarrow \left[٥٠س - \frac{٦س^{٢}}{٢} \right]_{0}^{٧} - ٥٦ = (٥٠ \times ٧ - ٣(٧^{٢} - ٠)) - ٥٦$$

$$\Leftarrow = ٣٥٠ - ١٤٧ - ٥٦ = ١٤٧ .$$

مثال : جد فائض المستهلك لمنحنيات السعر والطلب التالية عند السعر المثبت إزاء كل منها .

$$ع = ٣ - \frac{س}{٨} \ ، \ ع_1 = ١ \Leftarrow ف_ك = \int_{0}^{س_1} ق(س)\, د س - ع_1 س_1$$

 # نعوض قيمة $ع_1$ في الاقتران لإيجاد قيمة $س_1$ $\Leftarrow ١ = ٣ - \frac{س}{٨} \Leftarrow ١ - ٣ = -\frac{س}{٨}$

$$\Leftarrow \frac{-٢}{١} = \frac{س}{٨} \Leftarrow +١٦ = +س \Leftarrow س_1 = ١٦$$

$$\Leftarrow \int_{0}^{١٦} (٣ - \frac{س}{٨})\, د س - ١ \times ١٦ \Leftarrow \left[٣س - \frac{س^{٢}}{١٦} \right]_{0}^{١٦} - ١٦ \Leftarrow ٤٨ - ١٦ - ١٦ = ١٦$$

٣) **فائض المنتج**

$$ف_ج = \int_{0}^{س_1} (ع_1 - هـ(س))\, د س = ع_1 س_1 - \int_{0}^{س_1} هـ(س)\, د س .$$

أ . محمد مصطفى الضناوي ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

مثال ٤ : منحنى السعر و العرض ع = ١٥ + ٣س ، ع، = ٤٥ ديناراً ، أوجد فائض المنتج .

١ ـ نعوض قيمة ع، في الاقتران لإيجاد س، ⇐ ٤٥ = ١٥ + ٣س ⇐ $\frac{٣٠}{٣} = \frac{٣ س}{٣}$ ⇐ س، = ١٠

⇐ $= ٤٥ \times ١٠ - \int_{٠}^{١٠} ١٥ + ٣س \, د س = ٤٥٠ - \left[\left[١٥ س \right]_{٠}^{١٠} + \left[\frac{٣ س^{٢}}{٢} \right]_{٠}^{١٠} \right]$

⇐ ٤٥٠ ـ (١٥٠ + ١٥٠) = ⇐ ٤٥٠ ـ ٣٠٠ = ١٥٠ دينار .

مثال :
إذا كان منحنى اقتران السعر والطلب لمنتج معين هو : ع = ق (س) = ٥٠ ـ ٤س
و كان اقتران السعر والعرض لهذا المنتج هو ع = هـ (س) = ٢٠ + ٢س ، فجد

أ) فائض المستهلك ب) فائض المنتج .

الحل :
نجد سعر التوازن و كمية التوازن و يحدث ذلك عند مساواة الاقترانين ببعض .

٥٠ ـ ٤ س = ٢٠ +٢ س ⇐ ٢٠ +٢س + ٤س ـ ٥٠ = ٠ ⇐ ـ ٣٠ + ٦س = ٠

$\frac{٦ س}{٦} = \frac{٣٠}{٦}$ ⇐ س = ٥ كمية التوازن لأن س تمثل عدد الوحدات المنتجة .

 # لإيجاد سعر التوازن نعوض قيمة كمية التوازن في إحدى المعادلتين (نعوض قيمة س في إحدى الاقترانين)

ع = ٥٠ ـ ٤ س ⇐ ع، = ٥٠ ـ ٤ × ٥ ⇐ ع، = ٥٠ ـ ٢٠ = ٣٠ .

ف ك = $\int_{٠}^{٥} (٥٠ - ٤س) \, د س - ٣٠ \times ٥ = ٥٠ \left(٥ - ٠ \right) - \left[\frac{٤س^{٢}}{٢} \right]_{٠}^{٥} = ١٥٠ - ٢٥٠ - ٥٠ = ١٥٠ - ٥٠$

ف ج = $٣٠ \times ٥ - \int_{٠}^{٥} (٢٠ + ٢س) \, د س = ١٥٠ - ٢٠ \left(٥ - ٠ \right) - \left[\frac{٢ س^{٢}}{٢} \right]_{٠}^{٥}$

١٥٠ ـ ١٠٠ ـ ٢٥ = ٢٥.

أ . محمد مصطفى الفضل ٠٧٩٥٥٩٨٤٠٦

---

١) الإيراد الكلي = د (س) ، الإيراد الحدي = د ` (س)

$$د(س) = \int_{0}^{س} د`(ص)\, د ص$$

٢) فائض المستهلك مرتبط بمعادلة السعر والطلب .

$$ف ك = \int_{0}^{س} ق(س)\, د س - ع_{1} س_{1}$$

٣) فائض الناتج مرتبط بمعادلة السعر والعرض

$$ف ج = ع_{1} س_{1} - \int_{0}^{س_{1}} هـ(س)\, د س .$$

==========

*** أمثلـــــة متنوعـــــــــــه :**

١) أوجد الإيراد الكلي الناتج عن كل من الاقترانات الحدية التالية .

أ) ق (س) = ٣ س + ٥

$$د(س) = \int_{0}^{س} (٣ ص + ٥)\, د ص = \left[\frac{٣ ص^{٢}}{٢} + ٥ ص \right]_{0}^{س} = \frac{٣ س^{٢}}{٢} + ٥ س .$$

ب) هـ (س) = س^{٢} – س + ١١

$$\Leftarrow د(س) = \int_{0}^{س} (ص^{٢} - ص + ١١)\, د ص = \left[\frac{ص^{٣}}{٣} - \frac{ص^{٢}}{٢} + ١١ ص \right]_{0}^{س} = \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٢}}{٢} + ١١ س$$

ج) و (س) = ٢٠ س – ٧س^{٢}

$$\Leftarrow د(س) = \int_{0}^{س} (٢٠ ص - ٧ص^{٢} \Leftarrow ص = \left[\frac{٢٠ ص^{٢}}{٢} - \frac{٧ ص^{٣}}{٣} \right]_{0}^{س} = ١٠ س^{٢} - \frac{٧ س^{٣}}{٣}$$

أحمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

٢) جد فائض المستهلك لمنحنيات السعر والطلب التالية عند السعر المثبت إزاء كل منها .

أ) ع = ٣ – $\frac{س}{٨}$ ، ع$_{،}$ = ١ ⇐ ف ك = $\int_{٠}^{س_{،}}$ ق (س) د س – ع$_{،}$ س$_{،}$

نعوض قيمة ع$_{،}$ في الاقتران لإيجاد قيمة س$_{،}$ ⇐ ١ = ٣ – $\frac{س}{٨}$ ⇐ ١ – ٣ = – $\frac{س}{٨}$

⇐ $\frac{-٢}{١}$ = $\frac{س}{٨}$ ⇐ + ١٦ = + س ⇐ س$_{،}$ = ١٦

⇐ $\int_{٠}^{١٦}$ (٣ – $\frac{س}{٨}$) د س – ١ × ١٦ ⇐ ٣ س – $\left[\frac{س^{٢}}{١٦}\right]_{٠}^{١٦}$ – ١٦ ⇐ ٤٨- ١٦ – ١٦ = ١٦

ب) ع = ٥٠ – س ، ع$_{،}$ = ٣٢ (نساوي قيمة ع$_{،}$ بالاقتران لإيجاد قيمة س$_{،}$)

⇐ ٥٠ – س = ٣٢ ⇐ - س = ٣٢ – ٥٠ ⇐ س$_{،}$ = ١٨ .

ف ك = $\int_{٠}^{١٨}$ (٥٠ – س) د س – ٣٢ × ١٨ ⇐ ٥٠ (١٨ – ٠) – $\left[\frac{س^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{١٨}$ – ٣٢ × ١٨

⇐ = ٩٠٠ – ١٦٢ – ٥٧٦ = ١٦٢ .

٣) جد فائض المنتج لمنحنيات السعر والعرض التالية عند السعر المثبت إزاء كل منها .

أ) ع = $\frac{س}{٢}$ + ٧ ، ع$_{،}$ = ١٢ .

الحل : نساوي قيمة ع$_{،}$ بالاقتران لإيجاد قيمة س$_{،}$.

$\frac{س}{٢}$ + ٧ = ١٢ ⇐ $\frac{س}{٢}$ = ١٢ – ٧ ⇐ $\frac{س}{٢}$ = ٥ ⇐ س$_{،}$ = ١٠ .

ف ج = ١٢ × ١٠ – $\int_{٠}^{١٠}$ ($\frac{س}{٢}$ + ٧) د س = ١٢٠ – $\left[\frac{س^{٢}}{٤}\right]_{٠}^{١٠}$ + ٧ (١٠ – ٠)

= ١٢٠ – [٢٥] - ٧٠ = ٢٥ .

أ. أحمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٢٦

ب) ع = ٢س^{٢} + ٣ ، ع$_{١}$ = ٥٣ .

⇐ ٢س^{٢}+ ٣ = ٥٣ ⇐ ٢س^{٢} = ٥٠ ⇐ س^{٢} = ٢٥ ⇐ س$_{١}$ = ٥ .

$$\text{ف ج} = ٥٣ \times ٥ - \int_{٠}^{٥} (٢س^{٢} + ٣)\, د س \Leftarrow = ٢٦٥ - \left[\frac{٢س^{٣}}{٣}\right]_{٠}^{٥} - ٣ (٥ - ٠)$$

$$\Leftarrow = ٢٦٥ - \left[\frac{٢٥٠}{٣}\right] - \frac{١٥ \times ٣}{١ \times ٣} = \frac{٢٦٥ \times ٣}{١ \times ٣} - \frac{٢٩٥}{٣}$$

$$\Leftarrow \frac{٧٩٥}{٣} - \frac{٢٩٥}{٣} = \frac{٥٠٠}{٣}$$

٤) إذا كان منحنى السعر و الطلب معطى بالعلامة ق (س) = ١٨ – س و منحنى السعر و العرض معطى بالعلامة هـ (س) = $\frac{\text{س}}{٢}$ ، فاحسب ما يلي :

أ) سعر التوازن وكمية التوازن . ب) فائض المستهلك عند سعر التوازن. ج) فائض المنتج عند سعر التوازن .

الحل :

أ) يكون التوازن عندما يتساوى منحنى السعر و الطلب مع منحنى السعر والعرض (ق (س) = هـ (س))

$$\frac{١٨ - \text{س}}{١} = \frac{\text{س}}{٢}$$ بالضرب التبادلي ⇐ ٣٦ – ٢س = س ⇐ ٣٦ = ٣س ⇐ س$_{١}$ = ١٢ كمية التوازن

لإيجاد سعر التوازن نعوض كمية التوازن في إحدى الاقترانين .

ع = ١٨ – س$_{١}$ ⇐ ع$_{١}$ =١٨ – ١٢ = ٦ ⇐ سعر التوازن = ٦

ب) ف ك عند سعر التوازن =

$$\text{ف ك} = \int_{٠}^{١٢} (١٨ - \text{س})\, د س - ٦ \times ١٢ - \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{١٢}$$

⇐ ٢١٦ – ٧٢ – ٧٢ = ٧٢

ج) ف ج = ٦ × ١٢ – $\int_{٠}^{١٢} \frac{\text{س}}{٢}\, د س$ = ٧٢ – $\left[\frac{\text{س}^{٢}}{٤}\right]_{٠}^{١٢}$ = ٧٢ – ٣٦ = ٣٦

أ/ محمد مصطفى الاقتصادي ٠١٧٩٥٥٩٨٤٥٦

٥) إذا كان الاقتران الحدي الناتج عن بيع مواد تموينية هو ق (ن) = ٥٠٠٠ (ن + ١) $^{-\frac{١}{٢}}$
(ن) الزمن بالسنوات فاحسب الإيراد الكلي الناتج من البيع خلال ٣ سنوات .

الحل :
$$د(ن) = \int_{٠}^{٣} ٥٠٠٠ (ن+١)^{-\frac{١}{٢}} \, د ن$$

ص = ن + ١ ⇐ د ص = د ن ⇐ عندما ن = ٠ فإن ص = ١ و عندما ن = ٣ فإن ص = ٤

$$= \int_{١}^{٤} ٥٠٠٠ ص^{-\frac{١}{٢}} \, د ص \Leftarrow = \frac{٥٠٠٠ ص^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} \Big]_{١}^{٤} = ١٠٠٠٠ \, ص^{\frac{١}{٢}} \Big]_{١}^{٤}$$

$$= ١٠٠٠ \left[\sqrt{٤} - \sqrt{١} \right] = ١٠٠٠٠ \times ١ = ١٠٠٠٠ \text{ دينار .}$$

تدريـــب ١ : إذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع س لعبة من لعب الاطفال التي ينتجها مصنع هو
د ′(س) = ٣س^{٢} – ٨ س + ٢ دينار فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع هذه اللعـــب .
الحـــل : الايراد الكلي د (س) = $\int$ د (س) د س = $\int$ (٣س^{٢} – ٨ س + ٢) د س
= $\frac{٣ س^{٣}}{٣} - \frac{٨ س^{٢}}{٢} + ٢ س = س^{٣} - ٤ س^{٢} + ٢ س$

تدريـــب ٢ : يبيع مصنع ثلاجات س ثلاجه من منتجه اسبوعيا إذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع الثلاجات
هو د ′(س) =٦٠ س^{٢} + ٤٠ س + ١٢٥ دينار فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع ٣ ثلاجات .

الحـــل : د (س) = $\int$ (٦٠ س^{٢} + ٤٠ س + ١٢٥) د س = $\frac{٦٠ س^{٣}}{٣} + \frac{٤٠ س^{٢}}{٢} + ١٢٥ س$

= ٢٠ س^{٣} + ٢٠ س^{٢} + ١٢٥ س ⇐ د (٣) = ٢٠(٣)^{٣} = ٢٠(٣)^{٢} + ١٢٥ × ٣
=٢٠× ٢٧ + ٢٠ × ٩ + ٣٧٥ = ٥٤٠ + ١٨٠ + ٣٧٥ = ١٠٩٥

تدريـــب ٣ :إذا كانت ع = ق (س) = ١٦ – $\frac{س}{٤}$ تمثل اقتران (السعر _ الطلب) حيث (ع) السعر بالدينار
(س) عدد الوحدات المنتجة وكان السعر ثابتا عند ع$_{١}$ = ١٢ فجد قيمة فائض المستهلك .

الحـــل : ع$_{١}$ = ١٢ = ١٦ – $\frac{س}{٤}$ ⇐ - ٤ = $-\frac{س}{٤}$ ⇐ س$_{١}$ = ١٦

فائض المستهلك ف ك = $\int_{٠}^{١٦}$ (١٦ – $\frac{س}{٤}$) دس – ١٢ × ١٦ = (١٦ × ١٦ - $\frac{س^{٢}}{٨}$]$_{٠}^{١٦}$) - ١٢×١٦

= ٢٥٦ – $\frac{١٦ \times ١٦}{٨}$ - ١٩٢ = ٢٥٦ – ٣٢ – ١٩٢ = ٣٢ ديناراً .

تدريـــب ٤: إذاكان اقتران (السعر _ العرض) لمنتج معين هو هـ (س) = ٥ + ٣ س^{٢} حيث (ع) السعر بالدينار (س) عدد الوحدات المنتجة وكان السعر ثابتا عند ع$_{١}$ = ٥٣ فجد قيمة فائض المنتج .

الحـــل: ع$_{١}$ = ٥٣ = ٥ + ٣ س^{٢} ⇐ ٣ س^{٢} = ٤٨ ⇐ س^{٢} = ١٦ ⇐ س = ٤

ف ج = ٥٣ × ٤ − ($\int_{٠}^{٤}$ (٥ + ٣ س^{٢}) د س = ٢١٢ − (٥× (٤ − ٠) + $\frac{٣ س^{٣}}{٣}$ $\Big]_{٠}^{٤}$)

= ٢١٢ − ٢٠ − ٦٤ = ١٢٨

تدريـــب ٥: إذا كان منحنى اقتران (السعر – الطلب) لمنتج معين هو : ع = ق (س) = ٤٨ – ٣ س

و كان اقتران (السعر - العرض) لهذا المنتج هو ع = هـ (س) = ٢س + ١٣ ، فجد

١) كمية التوازن، ٢) سعر التوازن، ٣) فائض المستهلك عند سعر التوازن، ٤) فائض المنتج عند سعر التوازن .

الحـــل: ق (س) = هـ (س) ⇐ ٤٨ – ٣ س = ٢س + ١٣ ⇐ ٥ س = ٣٥ ⇐ س = ٧ كمية التوازن

ع = هـ (٧) = ٢ × ٧ + ١٣ = ٢٧ سعر التوازن

ف ك = $\int_{٠}^{٧}$ (٤٨ – ٣ س) – ٧ × ٢٧ = ٤٨ × ٧ – $\frac{٣ س^{٢}}{٢}$ $\Big]_{٠}^{٧}$ - ١٨٩

= ٣٣٦ - $\frac{٣ \times ٤٩}{٢}$ - ١٨٩ = ١٤٧ - $\frac{١٤٧}{٢}$ = $\frac{١٤٧}{٢}$ بعد توحيد المقامات

ف ج = ٧ × ٢٧ – ($\int_{٠}^{٧}$ (٢ س + ١٣) = ١٨٩ – ($\frac{٢ س^{٢}}{٢}$ $\Big]_{٠}^{٧}$ + ١٣ × ٧)

= ١٨٩ – ٤٩ - ٩١ = ٤٩

النمو والاضمحلال

الاقتران الاسي: ص= ع(ن) = ع.×هـ$^{(أن)}$ ، ع. : القيمة الابتدائية ، ن : الزمن ، هـ = ٢.٧ ، أ = $\frac{ع(ن)}{ع(ن)}$

أ > ٠ ⇐ ع(ن) يتزايد وتسمى المعادلة معادلة النمو ، أ : معامل النمو.

أ < ٠ ⇐ ع(ن) يتناقص وتسمى المعادلة معادلة الاضمحلال ، أ: معامل الاضمحلال.

مثـــال: إذا كان عدد سكان العاصمة عمان سنة (٢٠٠٠) قد بلغ (٢٠٠٠٠٠٠) نسمة وكان عدد السكان يتزايد بمعدل ٠.٠٥ سنوياً فجد عدد سكان العاصمة عمان سنة (٢٠٢٠) .

الحـــل: ع. = ٢٠٠٠٠٠٠ ، أ = ٠.٠٥ ، ن = ٢٠

ع(٢٠) = ٢٠٠٠٠٠٠ × هـ$^{(٢٠ \times ٠.٠٥)}$ = ٢٠٠٠٠٠٠ × هـ^{١} = ٢٠٠٠٠٠٠ × ٢.٧ = ٥٤٠٠٠٠٠ نسمة

تدريـــب ٦: يعطي بنك ربحا مركبا مستمرا للمستثمرين لديه بحيث تحسب جملة المبلغ الناتج عن استثمار مبلغ معين حسب قانون النمو ، فإذا كانت نسبة الربح التي يقدمها البنك تبلغ ٠.٠٥ سنوياً ،ووضع مبلغ ١٠٠٠ دينار في البنك، جد جملة المبلغ والربح الناتج بعد مرور ٢٠ عاماً.

الحـــل: ع. = ١٠٠٠ ، أ = ٠.٠٥ ، ن = ٢٠

ع(٢٠) = ١٠٠٠ × هـ$^{(٢٠ \times ٠.٠٥)}$ = ١٠٠٠ × هـ^{١} = ١٠٠٠ × ٢.٧ = ٢٧٠٠ جملة المبلغ = ٢٧٠٠ دينار ، الربح الناتج = ٢٧٠٠ – ١٠٠٠ = ١٧٠٠ دينار

مثـــال: مادة مشعة تتناقص بمعدل ٠.٠٠١ سنويا جد الكمية المتبقية من المادة بعد مرور ٢٠٠٠ سنة علما أن كتلة المادة الأصلية تبلغ ١٠٠ غرام .

الحـــل: ع. = ١٠٠ ، أ = ٠.٠٠١ ، ن = ٢٠٠٠

ع(٢٠٠٠) = ١٠٠ × هـ$^{(-٢٠٠٠\times٠.٠٠١)}$ = ١٠٠ × هـ$^{-٢}$ = ١٠٠ × (٢.٧)$^{-٢}$

= ١٠٠ × $\frac{١}{٧.٢٩}$ المادة المتبقية ≅ ٠.١٣٧٢

تدريب ٧ : يتناقص ثمن سيارة ويخضع هذا التناقص لقانون الاضمحلال ، فإذا كان ثمنها الاصلي(٨٠٠٠) ومعدل التناقص في ثمنها يساوي ٤ % سنويا جد ثمن السيارة بعد مرور ٢٥ سنة .

الحـــل :

ع (٢٥) = ٨٠٠٠ × هـ$^{-٠.٠٤\times٢٥}$ = ٨٠٠٠ × هـ$^{-١}$ = $\frac{٨٠٠٠}{هـ}$ = $\frac{٨٠٠٠}{٢.٧}$ ≅ ٢٩٦٣

مثال : اشترى رجل قطعة أرض بمبلغ (٢٠٠٠) دينار وكان ثمنها يزداد حسب قانون النمو وبعد (٣)سنوات أصبح سعرها (١٦٠٠٠) دينار ، جد ثمنها بعد مرور (٦) سنوات .

الحـــل : ع. = ٢٠٠٠ ، ن = ٣ ، ع (٣) = ١٦٠٠٠

ع(٣) = ع. هـ^{٣أ} ⇐ ١٦٠٠٠ = ٢٠٠٠ هـ^{٣أ} ⇐ ٨ = هـ^{٣أ} ⇐ ٨ = (هـ^{أ})^{٣} بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين ينتج أن هـ^{أ} = ٢

ع (٦) = ٢٠٠٠ هـ^{٦أ} = ٢٠٠٠(هـ^{أ})^{٦} = ٢٠٠٠ × ٢^{٦} = ٦٤ × ٢٠٠٠ = ١٢٨٠٠٠ دينار

تدريب ٨ : يذوب الملح بمعدل يتناسب مع كمية الملح المتبقية وبذلك تخضع عملية الذوبان لقانون الاضمحلال ،إذا وضع (١٠) كغ ملح في الماء فذاب نصفه بعد ربع ساعة ، جد كمية الملح المتبقية بعد مرور ($\frac{٣}{٤}$) الساعه .

الحـــل : ع. = ١٠ ، ع ($\frac{١}{٤}$) = ٥

ع ($\frac{١}{٤}$) = ٥ = ١٠هـ$^{\frac{-١أ}{٤}}$ ⇐ $\frac{١}{٢}$ = (هـ^{أ})$^{\frac{-١}{٤}}$

$\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{(هـ^{أ})^{\frac{١}{٤}}}$ ⇐ (هـ^{أ})$^{\frac{١}{٤}}$ = ٢ ، برفع الطرفين للقوة (٤) ينتج هـ^{أ}= ١٦

ع ($\frac{٣}{٤}$) = ١٠ (هـ^{أ})$^{\frac{-٣}{٤}}$ = ١٠ (١٦)$^{\frac{-٣}{٤}}$ = $\frac{١٠}{(١٦)^{\frac{٣}{٤}}}$ = $\frac{١٠}{\sqrt[٤]{(١٦)^{٣}}}$

= $\frac{١٠}{٨}$ = ١.٢٥

أ.محمد مصطفى الضناوي ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

تمارين ومسائل التطبيقات الاقتصاديه

Application of the Definite Integral

١- اذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع (س)من اجهزة الحاسوب هو د (س) = س^{٢} -١٢ س +٢٥٠ دينار فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع هذه الاجهزه .

الحل :

د(س)= $\int$ س^{٢} - ١٢ س +٢٥٠ دس = $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ - $\frac{١٢\ \text{س}^{٢}}{٢}$ +٢٥٠ س

٢- اذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع (س) علبه من البسكويت والتي ينتجها مصنع هو د(س) =٢س^{٢} – ٤ س+٢٥ قرشا فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (٩) علب .

الحل :

د (س) $\int$ (٢ س^{٢} -٤ س+٢٥) د س

= $\frac{٢\text{س}^{٣}}{٣}$ - $\frac{٤\ \text{س}^{٢}}{٢}$ +٢٥ س

د(٩) = $\frac{٢\ (٩)^{٣}}{٣}$ - ٢ (٩)^{٢} +٢٥×٩

= $\frac{٢ \times ٧٢٩}{٣}$ - ١٦٢ +٢٢٥

٤٨٦ - ١٦٢ +٢٥ = ٥٤٩

٣- جد فائض المستهلك لاقترانات (السعر – الطلب) الآتيه عند السعر المثبت ازاء كل منها

أ) ع = ق(س) = ٢٥-٣س ، ع$_{١}$ =٧

الحل =٢٥- ٣ س= ٧ ⇐ - ٣س = - ١٨ ⇐ س = ٦

ف ك = $\int_{٠}^{٦}$ (٢٥-٣س) دس -٦×٧

=٢٥ ×(٦-٠) - $\left[\frac{٣\text{س}^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٦}$ - ٤٢

١٥٠ - ٥٤ - ٤٢ = ٥٤

ب- ع= ق(س) =٩ – $\frac{\text{س}}{٢}$ ، ع =٣

الحل : ٩- $\frac{\text{س}}{٢}$ = ٣ ⇐ $\frac{-\text{س}}{٢}$ = -٦ ⇐ س = ١٢

محمد مصطفى الضناه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

ف ك = $\int_{0}^{12} (9 - \frac{س}{2})$ د س – ٣ × ١٢

= ٩ (١٢-٠) - $\left[\frac{س^2}{4} \right]_{0}^{12}$ - ٣٦

١٠٨- ٣٦ - ٣٦ = ٣٦

٤- جد فائض المنتج لاقترانات (السعر – العرض) الاتيه عند السعر المثبت ازاء كل منها

أ) ع = هـ (س) = $\frac{٢}{٣}$ س +١٥ ، ع = ١٧

الحل : $\frac{٢}{٣}$ س +١٥ = ١٧ ⇐ $\frac{٢}{٣}$ س = ٢ ⇐٢س = ٦ ⇐ س = ٣

ف ج = ١٧× ٣ - $\int_{0}^{3} (\frac{٢ س}{٣} + ١٥)$ د س

٥١ - $\left[\frac{س^2}{3} \right]_{0}^{3}$ - ٣×١٥

٥١ -٣ - ٤٥ = ٣

ب) ع= هـ(س) = ٣س^2 +٦،ع = ٤٥

الحل : ٣س^2 +٦ = ٤٥ ⇐ ٣س^2 = ٣٩ ⇐ س^2 =١٣ ⇐ س = $\sqrt{١٣}$

ف ج = ٤٥ × $\sqrt{١٣}$ - $\int_{0}^{\sqrt{13}} (٣ س^2 + ٦)$ د س

٤٥ $\sqrt{١٣}$ - $\left[\frac{٣س^3}{3} \right]_{0}^{\sqrt{13}}$ - ٦ × $\sqrt{١٣}$

= ٣٩ $\sqrt{١٣}$ - ١٣ × $\sqrt{١٣}$ = ٢٦ $\sqrt{١٣}$

٥- اذا كان اقتران (السعر – الطلب) المنتج هو ع = ق(س) = ٤٣ – ٤س وكان اقتران (السعر – العرض) لهذا المنتج هو ع = هـ(س) = س+٣ فجد :

أ- كمية التوازن ب) سعر التوازن ج) فائض المستهلك د) فائض المنتج

الحل : = ٤٣ - ٤ س = س+٣ ⇐ ٥ س = ٤٠ ⇐ س= ٨ كمية التوازن

ع= ٨ + ٣ = ١١= ع سعر التوازن

أ/ محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٩

ف ك = $\int_{0}^{8}$ (٤٣ – ٤ س) د س – ٨× ١١ = ٤٣ ×٨ – $\frac{٤س}{٢}$ ^{٢} $]_{0}^{8}$ - ٨٨

١٢٨ = ٨٨ – ١٢٨ – ٣٤٤

ف ج = ٨×١١ - $\int_{0}^{8}$ (س + ٣) د س

= ٨٨ - $\frac{س^{٢}}{٢}$ $]_{0}^{8}$ - ٣ × ٨

= ٨٨ – ٣٢ – ٢٤ = ٣٢

٦- اذا كان تكاثر البكتيريا يخضع لقانون النمو ، واذ ا كان عدد البكتيريا يزداد بشكل منتظم يبلغ ٢٠٠% في الساعه فجد عدد البكتيريا بعد مرور نصف ساعه اذا كان عددها الاصلي يبلغ ٥٠٠٠

ع ($\frac{١}{٢}$) = ٥٠٠٠ هـ $^{\frac{١}{٢}\times ٢}$ = ٥٠٠٠ × هـ ^{١} = ٥٠٠٠ × (٢.٧) ^{١}

= ٥٠٠٠ × ٢.٧ = ١٣٥٠٠

٧- يزيد سعر الارض بمرور الزمن وتخضع هذه الزياده لقانون النمو ، فاذا اشترى فراس قطعة ارض بمبلغ ٤٠٠٠ دينار ، وبعد ٣ سنوات اصبح سعرها ٤٨٠٠ دينار فجد سعر الارض بعد مرور ٦ سنوات

ع. = ٤٠٠٠ ، ن = ٣ ، ع (٣) = ٤٨٠٠

ع(٣) = ٤٨٠٠ = ٤٠٠٠ هـ $^{أ\times ٣}$ ⇐ هـ $^{أ ٣}$ = ١.٢

هـ $^{أ ٦}$ = ١.٤٤

ع(٦) = ٤٠٠٠ × هـ $^{أ ٦}$ = ٤٠٠٠ × ١.٤٤ = ٥٧٦٠

٨-: يتناقص ثمن عقار بمرور الزمن وبشكل منتظم ويخضع لقانون الاضمحلال، فاذا كان ثمن العقار الاصلي ٥٤٠٠٠ دينار ، وكان معدل التناقص يساوي ٢% سنوياً ، فجد ثمن العقار بعد مرور ٥٠ عاما

الحل : ع. = ٥٤٠٠٠ ، أ= -٠.٠٢ ، ن = ٥٠

ع (٥٠) = ٥٤٠٠٠ × هـ $^{-٠.٠٢\times ٥٠}$ = ٥٤٠٠٠ × هـ $^{-١}$

= $\frac{٥٤٠٠٠}{٢.٧}$ = ٢٠٠٠٠ ديناراً

محمد مصطفى القطاونه ٠٧٩٥٥٩٢٥٠٦

١) جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل من الاقتران الآتية : ((مراجعة))

١) $ص = \int \frac{س^٤ + ٣}{س^٣ - ٢س}$ د س $\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{س^٤ + ٣}{س^٣ - ٢س}$ | مشتقة التكامل تساوي ما داخل التكامل

٢) $ص = \int س (س^٢ - ٤)^{٥}$ د س $\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = س (س^٢ - ٤)^{٥}$

٣) $ص = \int_{٢}^{٣} \sqrt{٢ س^٣ + ٥}$ د س $+ \int_{٢}^{٤} \sqrt{٢ س^٣ + ٥}$ د س

$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} =$ صفر | مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر

٤) $ص = \int$ جـــا $(س^٢ + ١)$ د س $\Leftarrow \frac{د ص}{د س} =$ جـــا $(س^٢ + ١)$

٥) $ص = \int (جتـــا ٢ س - قـــا(٥ س + ١)) \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = (جتـــا ٢ س - قـــا(٥ س + ١))$

---

٢) جد كلا من التكاملات الآتية :

١) $\int \frac{س^٢ + ٧ س}{\sqrt{س^٣}}$ د س $= \int \frac{س^٢ + ٧ س}{س^{\frac{١}{٣}}} = \int (س^٢ + ٧س) س^{-\frac{١}{٣}} = \int (س^{\frac{٥}{٣}} + س^{\frac{٢}{٣}})$دس

أولا نقوم بتحويل الجذر إلى الصورة الأسية ثم رفع س من المقام إلى البسط مع تغيير إشارة الأس ثم نقوم بإيجاد التكامل

$= \frac{س^{\frac{٨}{٣}}}{\frac{٨}{٣}} + \frac{س^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣}} +$ جـ

٢) $\int \frac{- ٧}{س^{١٢}}$ د س $= \int - ٧ س^{-١٢}$ د س $= \frac{- ٧ س^{-١٢+١}}{-١٢ + ١} = \frac{٧ س^{-١١}}{١١} +$ جـ

٣) $\int س (٤ س^٢ - ٥ س + ١)$ د س $= \int (٤ س^٣ - ٥ س^٢ + س)$ د س

أولا نقوم بفك التربيع ثم نقوم بإيجاد التكامل

$= \frac{٤ س^٤}{٤} - \frac{٥ س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} +$ جـ

٤) $\int (س^٢ - ٣)^٢$ د س $= \int (س^٤ - ٦ س^٢ + ٩)$ د س $= \frac{س^٥}{٥} - \frac{٦ س^٣}{٣} + ٩س +$ جـ

٥) $\int (٢ س - ١)(س^٢ + ٥)$ د س $= \int (٢س^٣ - س^٢ + ١٠س - ٥)$ د س

أولا نقوم بفك الأقواس وذلك بإجراء عملية الضرب ثم نقوم بإيجاد التكامل

$= \frac{٢س^٤}{٤} - \frac{س^٣}{٣} + ١٠ \frac{س^٢}{٢} - ٥ س +$ جـ

٦) $\int (٤س + \frac{١}{س^٢} + ٢)$ د س $= \int (٤س + س^{-٢} + ٢)$ د س $= \frac{٤س^٢}{٢} + \frac{س^{-١}}{-١} + ٢س +$ جـ

$= ٢ س^٢ - س^{-١} + ٢ س +$ جـ

أ/ محمد مصطفى الدسوقي

٣) جد كلا من التكاملات الآتية :

١) $\int (٤ - ٣س)^{٥}\, د س = \frac{(٤ - ٣س)^{٦}}{-٣ \times ٦} = \frac{(٤ - ٣س)^{٦}}{-١٨}$

٢) $\int (٤س - ٣)(٢س^{٢} - ٣س + ١)^{٩}\, د س$

الحـــل: نفرض ص = ٢ س^{٢} – ٣ س + ١ ⇐ د ص =(٤ س – ٣) د س ⇐ د س = $\frac{د ص}{٤س - ٣}$.

= $\int (٤س - ٣) ص^{٩} \frac{د ص}{(٤س - ٣)} = \int ص^{٩}\, د ص = \frac{ص^{١٠}}{١٠} + جـ = \frac{(٢س^{٢} - ٣س + ١)^{١٠}}{١٠} + جـ$.

٣) $\int \frac{-٣}{(٦س - ١)^{٤}}\, د س = \int -٣(٦س - ١)^{-٤}\, د س = \frac{-٣(٦س - ١)^{-٣}}{-٣ \times ٦} + جـ$

٤) $\int س \sqrt{س^{٢} - ٥}\, د س$ ، **الحـــل:** نفرض ص = س^{٢} – ٥ ⇐ د ص = ٢ س د س

⇐ د س = $\frac{د ص}{٢س}$ ⇐ $\int س ص^{\frac{١}{٢}} \frac{د ص}{٢س} = \frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times ٢} + جـ = \frac{(س^{٢} - ٥)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ$

٥) $\int \frac{د س}{\sqrt[٣]{٢س + ٥}} = \int \frac{د س}{(٢س + ٥)^{\frac{١}{٣}}} = \int (٢س + ٥)^{-\frac{١}{٣}}\, د س = \frac{(٢س + ٥)^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣} \times ٢} + جـ$

٦) $\int \frac{س - ١}{\sqrt{٣س^{٢} - ٦س}}\, د س$ ، **الحـــل :** نفرض ص = ٣س^{٢} – ٦س ⇐ د ص =(٦س – ٦) د س

⇐ د س = $\frac{د ص}{٦(س - ١)}$

= $\int \frac{س - ١}{ص^{\frac{١}{٢}}} \frac{د ص}{٦(س - ١)} = \int ص^{-\frac{١}{٢}}\, د ص = \frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + جـ = ٢(٣س^{٢} - ٦س)^{\frac{١}{٢}} + جـ$

---

٤) جد كلا من التكاملات الآتية :

١) $\int (-٣ هـ^{س} + \frac{٢}{س})\, د س = -٣ هـ^{س} + ٢ لـو_{هـ} | س | + جـ$

٢) $\int (-٣ جـا س + ٢ جتا س)\, د س = ٣ جتا س + ٢ جـا س + جـ$

٣) $\int ٢ جـا (٢س - ١١)\, د س = -٢ \times ٢ جتا (٢س - ١١) + جـ$

٤) $\int س هـ^{٣س^{٢}}\, د س$ ⇐ **الحـــل :** نفرض ص = ٣ س^{٢} ⇐ د ص = ٦ س د س ⇐ د س = $\frac{د ص}{٦ س}$

= $\int س هـ^{ص} \frac{د ص}{٦ س} = \frac{هـ^{ص}}{٦} + جـ = \frac{هـ^{٣س^{٢}}}{٦} + جـ$

أ/ محمد مصطفى القشاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

٥) $\int \frac{٣}{(\text{قـــا س})^{-٢}}$ د س $= \int ٣$ (قـــا س)^{٢} د س $= \int ٣$ قـــا^{٢}س د س $= ٣$ ظـــا س + جـ

إذا كان البسط مشتقة للمقام فإن التكامل يساوي لوغاريتم مطلق المقام

٦) $\int \frac{-٢}{٣ - ٢ \text{ س}}$ د س $=$ لـــوهـ | ٣ – ٢ س | + جـ

٧) $\int$ س جـــا (س^{٢} – ٣) د س ⇐ **الحـــل:** نفرض ص = س^{٢} – ٣ ⇐ د ص = ٢ س د س

⇐ د س = $\frac{\text{د ص}}{٢ \text{ س}}$ ⇐ $\int$ س جـــا ص $\frac{\text{د ص}}{٢ \text{ س}} = -\frac{\text{جتـــا ص}}{٢} + \text{جـ} = -\frac{\text{جتـــا (س}^{٢} - ٣)}{٢} + \text{جـ}$

٨) $\int$ (س + ١) قـــا^{٢}(س^{٢} + ٢ س + ١) د س

الحـــل : نفرض ص = س^{٢} + ٢ س + ١ ⇐ د ص = (٢ س + ٢) د س ⇐ د س = $\frac{\text{د ص}}{٢ \text{ س} + ٢}$

$= \int \frac{(\text{س} + ١) \text{ قـــا}^{٢}\text{ص} \text{ د ص}}{٢ (\text{س} + ١)} = \frac{\text{ظـــا ص}}{٢} + \text{جـ} = \frac{\text{ظـــا (س}^{٢} + ٢ \text{ س} + ١)}{٢} + \text{جـ}$

---

٥) احسب قيمة كل مما يأتي :

١) $\int_{-١}^{٢}$ (٣ س^{٢} + ٤ س – ١) د س $= \left[\frac{٣ \text{ س}^{٣}}{٣} + \frac{٤ \text{ س}^{٢}}{٢} - ١ \text{ س}\right]_{-١}^{٢}$ (٢) – (– ١)

$= (٨ + ٨ - ٢) - (\frac{٤}{٢} + ٩ - ٣) = ١٤ - ٦.٥ = ٧.٥$

٢) $\int_{-٣}^{-\frac{١}{٨}} \frac{١}{٨}$ د س $= \frac{١}{٨}$ (– ١) $= \frac{١}{٨} \times ٢ = \frac{١}{٤}$

٣) $\int_{١}^{٨} \frac{-١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$ د س $= \int_{١}^{٨} -\text{س}^{-\frac{١}{٣}}$ د س $= \left[-\frac{\text{س}^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}}\right]_{١}^{٨}$

$= -\frac{٣}{٢} \left[\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}\right]_{١}^{٨} = -\frac{٣}{٢} \left[\sqrt[٣]{٦٤} - \sqrt[٣]{١}\right] = -\frac{٣}{٢} (٤ - ١) = -٦ + ١.٥ = -٤.٥$

٤) $\int_{١}^{٤} \left(\frac{١}{\text{س}^{٢}} + \sqrt{\text{س}}\right)$ د س $= \int_{١}^{٤} (\text{س}^{-٢} + \text{س}^{\frac{١}{٢}})$ د س $= \left[\frac{\text{س}^{-١}}{-١} + \frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}\right]_{١}^{٤}$

$= -\frac{١}{\text{س}} + \frac{٢}{٣} \sqrt{\text{س}^{٣}} \Big]_{١}^{٤} = -\frac{١}{٤} - -١ + \frac{٢}{٣} (٨ - ١) = \frac{٣}{٤} + \frac{١٤}{٣} = \frac{٦٥}{١٢}$

٥) $\int_{٣}^{أ}$ (٢ س + ١) (س^{٢} + ٢ س)^{٦} = صفـر ، قـــاعدة $\int_{أ}^{أ}$ ق (س) د س = صفـر

محمد مصطفى الضبع ٠١٠٩٩٨٤٥٠٧٩

٦) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

١) $\int_{0}^{2} \frac{(س^{٢} + ٤ س + ٣)}{٢ س + ٢}$ د س $= \int_{0}^{2} \frac{(س + ٣)\ (س + ١)}{٢\ (س + ١)}$ د س $= \left[\frac{س^{٢}}{٤} + ٣ \right]_{0}^{2} (٢ - ٠)$

$= ١ + ٣ = ٤$

٢) $\int_{-٢}^{١} (٣ س^{٢} - ٢)\ (س^{٣} - ٢ س + ١)$ د س

الحل: نفرض ص $= (س^{٣} - ٢ س + ١) \Leftarrow$ د ص $= (٣ س^{٢} - ٢)$ د س $\Leftarrow$ د س $= \frac{\text{د ص}}{٣ س^{٢} - ٢}$.

س $= -٢ \Leftarrow$ ص $= -٣$ ، س $= -١ \Leftarrow$ ص $= ٠$ ،

$= \int_{-٣}^{٠} \frac{(٣ س^{٢} - ٢)\ \text{ص}\ \text{د ص}}{٣ س^{٢} - ٢} = \left[\frac{ص^{٢}}{٢} \right]_{-٣}^{٠} = \frac{٠ - ٩}{٢} = -\frac{٩}{٢}$

٣) $\int_{٢}^{٦} \frac{-٢}{\sqrt{٥ س + ٦}}$ د س، نفرض ص $= ٥ س + ٦ \Leftarrow$ د ص $= ٥$ د س $\Leftarrow$ د س $=$ د ص $/ ٥$

عندما س $= ٢ \Leftarrow$ ص $= ١٦$ ، س $= ٦ \Leftarrow$ ص $= ٣٦$

$\Leftarrow \int_{١٦}^{٣٦} \frac{-٢}{٥} \frac{\text{د ص}}{\text{ص}^{\frac{١}{٢}}}$ د ص $= \int_{١٦}^{٣٦} \frac{-٢}{٥}\ ص^{-\frac{١}{٢}}$ د ص $= \left[\frac{-٢}{٥} \frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} \right]_{١٦}^{٣٦} = -\frac{٤}{٥} \sqrt{ص}\ \Big]_{١٦}^{٣٦}$

$= -\frac{٤}{٥} (٦ - ٤) = -\frac{٨}{٥}$

٤) $\int_{٠}^{١} \frac{١ - ٢ س}{\sqrt{س^{٢} - س + ٤}}$ د س نفرض ص $= س^{٢} - س + ٤ \Leftarrow$ د ص $= (٢س - ١)$ د س

عندما س $= ٠ \Leftarrow$ ص $= ٤$ ، س $= ١ \Leftarrow$ ص $= ٤$

$= \int_{٤}^{٤} \frac{١ - ٢ س\ \text{د ص}}{-\sqrt{ص}\ (١ - ٢س)} =$ صفر

٥) $\int_{١}^{٣} \frac{٢}{١ + ٢ س}$ د س $= \text{لـو}_{هـ} | ١ + ٢ س | \Big]_{١}^{٣} = \text{لـو}_{هـ} ٧ - \text{لـو}_{هـ} ٣$

٦) $\int_{٠}^{١} س\ (\text{هـ})^{س^{٢}}$ د س ، نفرض ص $= س^{٢} \Leftarrow$ د ص $= ٢ س$ د س $\Leftarrow$ د س $= \frac{\text{د ص}}{٢ س}$

س $= ٠ \Leftarrow$ ص $= ٠$ ، س $= ١ \Leftarrow$ ص $= ١$

$\int_{٠}^{١} س\ \text{هـ}^{ص} \frac{\text{د ص}}{٢ س} = \left[\frac{\text{هـ}^{ص}}{٢} \right]_{٠}^{١} = \frac{\text{هـ} - ١}{٢}$

محمد مصطفى القصاص ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

٧) **جد قيمة العدد جـ في كل مما يأتي :**

١) $\int_{-٢}^{٤}$ ٣ جـ د س = ٣٦ ⇐ ٣ جـ (٤ - - ٢) = ٣٦ ⇐ ١٨ جـ = ٣٦ ⇐ جـ = ٢

٢) $\int_{١}^{جـ}$ (٢س+٣)د س = ٠ ⇐ $\left[\frac{٢ س^{٢}}{٢} + ٣ (جـ - ١)\right]_{١}^{جـ}$ =٠ ⇐ جـ^{٢} – ١ + ٣ جـ - ٣ = ٠

جـ^{٢} + ٣ جـ - ٤ = ٠ ⇐ (جـ - ١) (جـ + ٤) = ٠ ⇐ جـ = ١ ، جـ = - ٤

٣) $\int_{٠}^{٣}$ (جـ س^{٢} – ٩) د س = ١٥ ⇐ $\left[\frac{جـ س^{٣}}{٣} - ٩ (٣ – ٠)\right]_{٠}^{٣}$ = ١٥

٩ جـ - ٢٧ = ١٥ ⇐ ٩ جـ = ٤٢ ⇐ جـ = $\frac{٤٢}{٩}$

٤) $\int_{جـ}^{٢}$ (٤ س – ١) د س = - ٣ جـ

$\left[\frac{٤ س^{٢}}{٢} – ١ (٢ – جـ)\right]_{جـ}^{٢}$ = - ٣ جـ ⇐ ٢(٤ – جـ^{٢}) – ٢ + جـ = - ٣ جـ

⇐ ٨ – ٢ جـ^{٢} - ٢ + ٤ جـ = ٠ ⇐ ٢ جـ^{٢} – ٤ جـ - ٦ = ٠ ⇐ جـ^{٢} – ٢ جـ - ٣ = ٠

(جـ - ٣) (جـ + ١) = ٠ ⇐ جـ = ٣ ، جـ = - ١

---

٨)إذا علمت أن $\int_{-١}^{٤}$(٣ ق (س) - ٢) د س = ٨ ، و أن $\int_{٤}^{٢}$ ق(س) د س = - ١٢ ، فاحسب قيمة مايلي

١) $\int_{-١}^{٢}$ ق(س) دس ، **الحـل:** لاحظ أن $\int_{-١}^{٤}$ (٣ ق (س) - ٢) د س = ٣ $\int_{٤}^{٢}$ ق(س) د س – ٢(٤ - -١)=٨

٣ $\int_{-١}^{٤}$ق(س) د س – ١٠ = ٨ ⇐ ٣ $\int_{-١}^{٤}$ق(س) د س = ١٨ ⇐ $\int_{-١}^{٤}$ ق (س) د س = ٦

$\int_{-١}^{٢}$ ق(س) د س = $\int_{-١}^{٤}$ ق (س) د س + $\int_{٤}^{٢}$ ق(س) د س = ٦ – ١٢ = -٦

٢) $\int_{-١}^{٤}$ ($\frac{ق (س)}{٢}$ + ٣ س^{٢}) د س = $\frac{١}{٢}$ $\int_{-١}^{٤}$ ق(س) د س + $\int_{-١}^{٤}$ ٣ س^{٢} د س

= $\left[\frac{- ٦}{٢} + \frac{٣ س^{٣}}{٣}\right]_{٤}^{-١}$ = - ٣ + (- ١ – ٦٤) = - ٣ – ٦٥ = - ٦٨

---

٩) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند أي نقطة (س،ص) يساوي (٣ س - ١)(س + ٥)
فجد قاعدة الاقتران علما بأن ق(٢) = - ٣ .

الحل م = ق ً(س) = ٣س^{٢}+١٤س-٥ ⇐ ق(س) = $\int$ (٣س^{٢}+١٤س-٥)د س=$\frac{٣س^{٣}}{٣}$+$\frac{١٤س^{٢}}{٢}$-٥س+جـ

محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٧٨٢٥

ق(س) = س^{٣}+٧س^{٢}-٥س+جـ ⇐ ق(٢) = ٨ +٢٨ -١٠ + جـ = - ٣ ⇐ ٢٦ + جـ = - ٣
جـ = - ٢٩ ⇐ ق(س) = س^{٣}+٧س^{٢}-٥س – ٢٩

---

١٠) أ) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س – ٣ ، ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٥ .

الحـــل: نجد جذر الاقتران ⇐ ق(س) = ٠ ⇐ س – ٣ = ٠ ⇐ س = ٣ تقع ضمن الفترة المعطاة نكامل مرتين

$$م_{١} = \int_{١}^{٣} (س - ٣)\, د س = \left[\frac{س^{٢}}{٢} - ٣ س \right]_{١}^{٣} = (\frac{٩ - ١}{٢}) - ٦ = - ٢ \Leftarrow م_{١} = ٢$$

$$م_{٢} = \int_{٣}^{٥} (س - ٣)\, د س = \left[\frac{س^{٢}}{٢} - ٣ س \right]_{٣}^{٥} = \frac{٢٥ - ٩}{٢} - ٦ = ٢$$

⇐ المساحة الكلية = ٢ + ٢ = ٤ وحدات مربعة

ب)احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} – ٢ س، ومحور السينات

الحـــل: ق(س) = ٠ ⇐ س^{٢} – ٢س ⇐ س (س – ٢) = ٠ ⇐ س = ٠ ، س = ٢

$$م = \int_{٠}^{٢} (س^{٢} - ٢ س)\, د س = \left[\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{٢ س^{٢}}{٢} \right]_{٠}^{٢} = \frac{٨}{٣} - ٤ = \frac{٨ - ١٢}{٣} = \frac{-٤}{٣} \Leftarrow م = \frac{٤}{٣}$$

جـ) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانيين

ص = س^{٢} + ٢ ، ص = ٥ – ٢ س

الحـــل: نساوي الاقترانيين ببعض ⇐ س^{٢} + ٢ = ٥ – ٢ س ⇐ س^{٢} + ٢ س - ٣ = ٠

(س + ٣)(س – ١) = ٠ ⇐ س = - ٣ ، س = ١

$$م = \int_{-٣}^{١} (س^{٢} + ٢ س - ٣)\, د س = \left[\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٢ س^{٢}}{٢} - ٣ س \right]_{-٣}^{١}$$

$$= (\frac{١ - - ٢٧}{٣}) + (\frac{١ - ٩}{٢}) - ١٢ = \frac{٢٨}{٣} - ٤ - ١٢ = \frac{٢٨ - ٤٨}{٣} = \frac{-٢٠}{٣} ، م = \frac{٢٠}{٣}$$

---

١١) اذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع اجهزة التلفاز هو د ر (س) = ١٢٠س^{٢} – ٣٦ س + ٥٠ فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع ٣ أجهزة .

الحـــل:

$$د (س) = \int (١٢٠ س^{٢} - ٣٦ س + ٥٠)\, د س = \frac{١٢٠ س^{٣}}{٣} - \frac{٣٦ س^{٢}}{٢} + ٥٠ س$$

د (٣) = ٤٠×٢٧ – ١٨×٩ + ١٥٠ = ١٠٨٠ – ١٦٢ +١٥٠ = ١٠٦٨

---

١٢) اذا كان اقتران (السعر – الطلب) لمنتج معين هو ع = ق(س) = ٢٠ – س^{٢}
واقتران (السعر- العرض) لهذا المنتج هو ع = هـ (س) = س^{٢} + ٢ ، فجد
١) كمية التوازن ، ٢) سعر التوازن ، ٣) فائض المستهلك ، ٤) فائض المنتج

الحـــل: ٢٠ – س^{٢} = س^{٢} + ٢ ⇐ ٢ س^{٢} = ١٨ ⇐ س^{٢} = ٩ ⇐ س = ٣ كمية التوازن

ع = ٢٠ – ٩ = ١١ سعر التوازن

محمد مصطفى الفضاله ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

٣) فائض المستهلك ف ك = $\int_{0}^{3} (٢٠ - س^{٢})$ د س – ٣×١١ = $(٢٠ \times ٣ - \frac{س^{٣}}{٣}]_{0}^{3}$) – ٣٣
= ٦٠ - ٩ – ٣٣ = ١٨

ف جـ = ٣×١١ - $\int_{0}^{3} (س^{٢} + ٢)$ د س = ٣٣ - $\frac{س^{٣}}{٣}]_{0}^{3}$ - ٦ = ٣٣ – ٩ – ٦ = ١٨

---

١٣) استثمر شخص مبلغ (٥٠٠) دينار في بنك بحساب الربح المركب المستمر ويخضع لقانون النمو بفائدة مقدارها ٠.٠٨ سنويا جد جملة المبلغ بعد مرور ٢٥ عاما .

ع(٢٥) = ٥٠٠ هـ $^{٢٥ \times ٠.٠٨}$ = ٥٠٠ هـ^{٢} = ٥٠٠ × $(٢.٧)^{٢}$ = ٥٠٠ × ٧.٢٩ = ٣٦٤٥

---

١٤) يتناقص سعر بيت بمعدل يبلغ ٠.٠٢ سنويا ويخضع لقانون الاضمحلال فإذا اشترت دعاء هذا البيت بمبلغ (٤٠٠٠٠) دينار ، فجد سعر البيت بعد مرور ١٠ سنوات .

ع(١٠) = ٤٠٠٠٠ هـ $^{-٠.٠٢ \times ١٠}$ = $\frac{٤٠٠٠٠}{هـ^{٠.٠٢}}$ = $\frac{٤٠٠٠٠}{(٢.٧)^{٠.٠٢}}$ =

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

اختبار التقويم الذاتي

السؤال الأول : يتألف هذا السؤال من خمس فقرات من نوع الاختيار من متعدد وبكل فقرة أربع إجابات واحدة منها فقط صحيحة ، المطلوب حل كل سؤال ثم كتابة رمز الإجابة الصحيحة .

١) اذا علمت ان ص = $\int_{-١}^{٣}$ (٦ س^{٢} – ٢ س) د س ، فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ تســـــاوي :

أ) ٤٠ ب) ٤٩ جـ) صفر د) – ٤٩

(جـ)

الحـــل: مشتقة التكامل المحدود تســـــاوي صفـــر دائمـــاً

٢) اذا علمت ان $\int_{-٢}^{٥}$ ك د س = – ١٠ فإن قيمة الثابت ك تســـــاوي:

أ) ٠ ب) – ٥ جـ) – ٨ د) – ٢٠

الحـــل: ك (٥ – (– ٢)) = – ١٠ ⇐ ٢ ك = – ١٠ ⇐ ك = – ٥

(ب)

٣) اذا كان $\int_{-١}^{٣}$ قَ(س) د س = ٢ س^{٣} – ٥ س فإن قَ(٢) تســـــاوي:

أ) ٦ ب) ١٩ جـ) – ٢ د) – ٦

(ب)

الحـــل: قَ(س) = ٦ س^{٢} – ٥ ⇐ قَ(٢) = ٦×(٢)^{٢} – ٥ = ٢٤ – ٥ = ١٩

٤) اذا كان اقتران (السعر – الطلب) لمنتج معين هو ع = ق(س) = ١٤ – ٢ س وكان اقتران (السعر – العرض) لهذا المنتج هو ع = هـ (س) = س^{٢} + ٢ فإن سعر التوازن هو:

أ) ٦ ب) ٣ جـ) ٤ د)١٢

الحـــل: ١٤ – ٢س = س + ٢ ⇐ ٣ س = ١٢ ⇐ س = ٤ ⇐ ع = ٤ + ٢ = ٦

(أ)

٥) اذا علمت أن $\int_{-١}^{٣}$ ق(س) د س = ٨ ، $\int_{-١}^{٥}$ (ق(س) – ٢) د س = ٣ ، فإن $\int_{٣}^{٥}$ ق (س) د س =

أ) ٢٣ ب) ٧ جـ) ٨ د) – ٥

الحـــل:

(ب)

$\int_{-١}^{٣}$ ق(س) د س = – ٨ ، $\int_{-١}^{٥}$ ق(س) د س – ٢ (٥ – – ١) = ٣

$\int_{-١}^{٥}$ ق(س) د س – ١٢ = ٣ ⇐ $\int_{-١}^{٥}$ ق (س) د س = ١٥

$\int_{٣}^{٥}$ ق(س) د س = – ٨ + ١٥ = ٧

---

٢) جد كلا من التكاملات الاتية :

١) $\int_{٠}^{١}$ ٣س^{٢} (س^{٣} – ٤ س + ١) د س = $\int_{٠}^{١}$ (٣س^{٥} – ١٢س^{٣} + ٣س^{٢}) د س

$= \frac{٣س^{٦}}{٦} - \frac{١٢س^{٤}}{٤} + \frac{٣س^{٣}}{٣} + جـ$

٢) $\int_{١}^{٨} \sqrt[٣]{٩ - س}\ د س = \int_{١}^{٨} (٩ - س)^{\frac{١}{٣}}\ د س = \left[\frac{(٩ - س)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} \right]_{١}^{٨}$

$= \frac{٣}{٤} \left[\sqrt[٣]{(٩ - س)^{٤}} \right]_{١}^{٨} = -\frac{٣}{٤} (١ - ٧\sqrt[٣]{٧})$

---

٣) $\int (٢س - ١)(س^{٢} - س + ٥)\ د س$ ، نفرض ص $= س^{٢} - س + ٥ \Leftarrow د ص = (٢س - ١)\ د س$

$\Leftarrow د س = \frac{د ص}{٢س - ١}$

$\int (٢س - ١) ص \frac{د ص}{٢س - ١} = \frac{ص^{٢}}{٢} + جـ = \frac{(س^{٢} - س + ٥)^{٢}}{٢} + جـ$

---

٤) $\int جتا (٤ - ٣س)\ د س = -\frac{١}{٣} جتا (٤ - ٣س) + جـ$

---

٣) جد المساحة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) $= س^{٢} + س$ ، والمستقيم ص - س $= ١$

الحـــل: $س^{٢} + س = س + ١ \Leftarrow س^{٢} = ١ \Leftarrow س = ١$ ، $س = -١$

$م = \int_{-١}^{١} (س^{٢} - ١)\ د س = \left[\frac{س^{٣}}{٣} - س \right]_{-١}^{١} = (\frac{١}{٣} - ١) - (-\frac{١}{٣} + ١) = -\frac{٢}{٣} - \frac{٢}{٣} = -\frac{٤}{٣} \Leftarrow م = \frac{٤}{٣}$

---

٥) وضع مبلغ ١٢٠٠ دينار في بنك بحساب الربح المركب المستمر علما بأن حساب جملة المبلغ يخضع لقانون النمو وبنسبة فائدة منتظمة مقدارها ٠.١ سنويا جد مقدار الربح المتحقق بعد مرور ٢٠ عاما

الحـــل: ع (٢٠) $= ١٢٠٠ هـ^{٠.١ \times ٢٠} = ١٢٠٠ هـ^{٢} = ١٢٠٠ \times (٢.٧)^{٢} = ١٢٠٠ \times ٧.٢٩ = ٨٧٤٨$

محمد مصطفى الصباغ ٠٧٩٥٥٩٨٤٠٧

اختبر معلوماتك

١) صندوق به (٦) مصابيح كهربائية صالحة و(٤) مصابيح تالفة، اذاتم سحب مصباح واحد عشوائيا
فما احتمال ان يكون المصباح: ١) صالحا = $\frac{٦}{١٠}$ ٢) تالفا = $\frac{٤}{١٠}$

---

٢) اذا كانت علامات خمس طالبات في امتحان قصير هي : ١٠ ، ٧ ، ٦ ، ٣ ، ٤ ، فجد :

أ) الوسط الحسابي = $\overline{س}$ = $\frac{١٠ + ٧ + ٦ + ٣ + ٤}{٥}$ = $\frac{٣٠}{٥}$ = ٦ ، $\overline{س}$ = $\frac{\text{مجموع المشاهدات}}{\text{عددها}}$

ب) الإنحراف المعياري :

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^{٢}}{ن - ١}}$$

$س_ر$	$\overline{س} = ٥٠$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^{٢}$
١٠	٦	٤	١٦
٧	٦	١	١
٦	٦	٠	٠
٣	٦	ـ ٣	٩
٤	٦	ـ ٢	٤
المجموع		٠	٣٠

$$ع = \sqrt{\frac{٣٠}{٥ - ١}} = \sqrt{\frac{٣٠}{٤}} = \sqrt{٧.٥} = ٢.٧٣٨٦$$

---

٣) يبين الجدول الاتي علامات (٢٠) طالبا في صف ما في مبحث الرياضيات

الفئات	٠ ــ ٤	٥ ــ ٩	١٠ ــ ١٤	١٥ ــ ١٩	٢٠ ــ ٢٤
التكرار	٢	٣	١٠	٣	٢

جد :

١) الوسط الحسابي ٢) الانحراف المعياري
٣) ارسم المنحنى التكراري للبيانات الواردة في هذا الجدول .

أ. محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

الفئات	عدد الأطفال	مراكز الفئات	ت × س	س^{٢}	ت × س^{٢}
٠ ــ ٤	٢	٢	٤	٤	٨
٥ ــ ٩	٣	٧	٢١	٤٩	١٤٧
١٠ ــ ١٤	١٠	١٢	١٢٠	١٤٤	١٤٤٠
١٥ ــ ١٩	٣	١٧	٥١	٢٨٩	٨٦٧
٢٠ ــ ٢٤	٢	٢٢	٤٤	٤٨٤	٩٦٨
المجموع	٢٠		٢٤٠		٣٤٣٠

$$\overline{س} = \frac{\sum ت \times س}{\sum ت} = \frac{٢٤٠}{٢٠} = ١٢$$

$$ع = \sqrt{\frac{\sum (س^{٢} \times ت) - ن \times (\overline{س})^{٢}}{ن - ١}}$$ ، حيث ن مجموع التكرارات

$$ع = \sqrt{\frac{٣٤٣٠ - ٢٠ \times (١٢)^{٢}}{١٩}} = \sqrt{\frac{٥٥٠}{١٩}} = ٥.٣٨$$

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

مبـــــدأ العد العـــــام
Counting Principle

قاعـــــدة

عند إجراء عملية تتكون من خطوتين إذا كان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى ن١ و عدد طرق إجراء الخطوة الثانية ن٢ ، فإن عدد طرق إجراء العملية كاملة = ن١ × ن٢ .

مثال :
تخرج طالب و أراد الدراسة في جامعة و لديه خمس جامعات ليختار واحدة منها ، وكل جامعة فيها ١٠ كليات ، فكم طريقة أمامه لاختيار الدراسة في إحدى الكليات .
الحل : ٥ × ١٠ = ٥٠ عملية اختيار

مثال :
لديك حضانة و فيها ٨ كراسي ، ولديك ٨ أشخاص يريدون الجلوس على هذه الكراسي ، كم عدد طرق الجلوس .
الحل : ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٤٠٣٢٠ طريقة .

مثال :
كم طريقة يمكن بها جلوس خمسة أشخاص على خمسة مقاعد مرقمة .
الحل : ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة .

مثال :
أرادت دائرة السير صنع لوحات معدنية للسيارات تحمل كل منها حرفا من الحروف الهجائية العربية متبوعاً بعدد من رقمين من مجموع الأرقام (١ – ٩) فكم لوحة مختلفة يمكن صنعها إذا علمت أن عدد حروف الهجاء العربية = ٢٨ حرفاً .
الحل :
عدد طرق اختيار الحرف = ٢٨ ، عدد طرق اختيار الرقم الأول = ٩ ، عدد طرق اختيار الرقم الثاني = ٩
عدد طرق الاختيار الكلية = ٢٨ × ٩ × ٩ = ٢٢٦٨ لوحة .

#عند إجراء عملية تتكون من خطوتين إذا كان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى ن١ و عدد طرق إجراء الخطوة الثانية ن٢ ، فإن عدد طرق إجراء العملية كاملة = ن١ × ن٢ .

مثال : تحتوى قائمة الطعام الخاصة بإحدى المطاعم (٥) أنواع مختلفة من الشوربة ، (٤) أنواع مختلفة من اللحوم ، (٣) أنواع مختلفة من الحلويات ، (٥) أنواع مختلفة من العصير ، فكم طريقة يمكن لأحد رواد هذا المطعم أن يطلب وجبته التي تتكون من الشوربة واللحم و العصير و الحلويات .

الحل :

الوجبة الواحدة تتكون من (الشوربة ، اللحم ، الحلويات ، العصير)
طرق اختيار الشوربة = ٥ ، طرق اختيار اللحم = ٤ ، طرق اختيار الحلوى = ٣ ، طرق اختيار العصير = ٥
بناءاً على التعريف فإن طرق اختيار العملية كاملة يساوي طرق اختيار الشوربة × اللحم × العصير × الحلويات
و هي تساوي ٥ × ٤ × ٣ × ٥ = ٣٠٠ طريقة .

قاعـــدة :

إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً فإن ن مضروب ن هو ن ! = ن (ن – ١) (ن – ٢) ..... ٣ × ٢ × ١ .
و كحالة خـــاصة مضروب الصفر = ١ (٠ ! = ١) .

مثال : جد قيمة كل مما يلي :

١ ! = ١
٢ ! = ٢ × ١ = ٢
٣ ! = ٣ × ٢ × ١ = ٦
٤ ! = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤
٥ ! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠
٦ ! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠

مثال : جد قيمة كل مما يلي :

أ) $\frac{١٠٠\ !}{٩٩\ !} = \frac{١٠٠ \times ٩٩ \times ٩٨\ !}{٩٩ \times ٩٨\ !} = ١٠٠$

ب) $\frac{١٢\ !}{١٠\ !} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠\ !}{١٠\ !} = ١٣٢$

د) $\frac{٦\ !}{٢ \times ٣!} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣!}{٢ \times ٣!} = ٦٠$

مثال : اكتب العدد ٧٢٠ باستخدام المضروب

٧٢٠	١
٧٢٠	٢
٣٦٠	٣
١٢٠	٤
٣٠	٥
٦	٦
١	٦!

ن ! = (ن – ١) ! ، ن ≥ ٢
٤ ! = ٤ × ٣ !
٥ ! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ ، = ٥ × ٤!
٥ ! = ٥ × ٤ × ٣ ! ، = ٥ × ٤ × ٣ × ٢!
٧ ! = ٧ × ٦ !
٧ ! = ٧ × ٦ × ٥ !
٧ ! = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ !
٧ ! = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ !
وحسب الحاجة يتم التفصيل

جـ) ٥ ! – ٤ !
٥ × ٤! – ٤! ⇐ أخرج ٤! عامل مشترك
٤! (٥ – ١) = ٤! × ٤
= ٤ × ٣ × ٢ × ١ × ٤ = ٩٦
أو
٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠
٤! = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤
⇐ ٥! – ٤! = ١٢٠ – ٢٤ = ٩٦

مثال : إذا كان ٧! = ٥٠٤٠ جد ما يلي :

أ) ٨! = ٨ × ٧! = ٨ × ٥٠٤٠ = ٤٠٣٢٠

ب) $٦\ ! = \frac{٧!}{٧} = \frac{٥٠٤٠}{٧} = ٧٢٠ = ٦!$

ج) $٥\ ! = \frac{٧ \times ٦ \times ٥\ !}{٦ \times ٧} = \frac{٥٠٤٠}{٦ \times ٧} = \frac{٥٠٤٠}{٤٢} = ١٢٠$

محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٠

تعريف :

إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً فإن ، مضروب ن هو ن! = ن × (ن – ١) × (ن – ٢) .... × ٣ × ٢ × ١
و كحاله خاصة فإن مضروب الصفر = ١ ، (٠ ! = ١) ،

و بصورة عامة :

ن! = ن (ن – ١) ! ، = ن (ن – ١) (ن – ٢) ! ، ن ≥ ٢ .

أمثلـــــة :

١) جد قيمة كل مما يأتي :

أ) ٥! + ٥! ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ ٥! + ٥! = ١٢٠ + ١٢٠ = ٢٤٠	ب) ٤! + ٣! ٤! = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ ٣ ! = ٣ × ٢ × ١ = ٦ ٤! + ٣! = ٢٤ + ٦ = ٣٠
جـ) ٥! – ٠ ! ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ ٠ ! = ١ ٥! – ٠! = ١٢٠ – ١ = ١١٩	د) (٧ – ٥) ! الأولوية للأقواس ٢ ! = ٢ × ١ = ٢ أولاً نجري العملية داخل الأقواس ثم نجد المضروب
هـ) ٧! – ٥ ! ٧! = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٥٠٤٠ ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ ٧! – ٥! = ٥٠٤٠ – ١٢٠ = ٤٩٢٠	و) ٥! × ٦! ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ ٦! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠ ٥! × ٦! = ١٢٠ × ٧٢٠ = ٨٦٤٠٠
د) ٩! – ٣ × ٨! ٩! = ٩ × ٨ ! ⇐ ٩ × ٨! – ٣ × ٨! ، إخراج ٨! عامل مشترك ٨! (٩ – ٣) = ٦ × ٨! ٨! = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٤٠٣٢٠ ٦ × ٨! = ٦ × ٤٠٣٢٠ = ٢٤١٩٢٠ .	ح) $\frac{٩!}{٨!} = \frac{٩ \times \cancel{٨!}}{\cancel{٨!}} = ٩$
	ط) $\frac{٩!}{٤! \times ٥!} = \frac{٩ \times \cancel{٨} \times ٧ \times \cancel{٦} \times \cancel{٥!}}{\cancel{٤} \times \cancel{٣} \times \cancel{٢} \times ١ \times \cancel{٥!}}$ = ١٢٦

محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٨٤٥٦

٢) اكتب كلاً مما يلي في أبسط صورة .

أ) $\frac{!٢٠}{٢٠ \times ١٩} = \frac{!١٨ \times ١٩ \times ٢٠}{٢٠ \times ١٩} = !١٨$

ب) $\frac{٢٠ \times ١٨!}{!٥} = \frac{٢٠ \times ١٨}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥} = \frac{٢٠ \times ١٨}{٢٠ \times ٦} = ٣$

٣) إذا علمت أن ٨! = ٤٠٣٢٠ فجد :

أ) ٩ ! = ٩ × ٨! = ٩ × ٤٠٣٢٠ = ٣٦٢٨٨٠

ب) ١٠ ! = ١٠ × ٩ × ٨! = ١٠ × ٩ × ٤٠٣٢٠ = ٣٦٢٨٨٠٠

ج) ٧! ⇐ ٨! = ٤٠٣٢٠ ⇐ ٨ × ٧! = ٤٠٣٢٠ (بالقسمة على ٨)

⇐ $\frac{٨ \times ٧!}{٨} = \frac{٤٠٣٢٠}{٨}$ = ⇐ ٧! = ٥٠٤٠

٤) اكتب العدد ١٢٠ باستخدام المضروب

١	١٢٠
٢	١٢٠
٣	٦٠
٤	٢٠
٥	٥
	١
!٥	

⇐ ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = !٥

٥) كم كلمة من حمس حروف (ليس بالضرورة أن تكون ذات معنى) يمكن تكوينها باستخدام حروف كلمة (مضروب) .

الحل :

عدد طرق اختيار الحرف الأول = ٥ ، الثاني = ٤ ، الثالث = ٣ ، الرابع = ٢ ، الخامس = ١ (بدون تكرار)

عدد طرق إجراء العملية كاملة = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ .

٦) جد قيمة كل مما يلي :

أ) ن! = ٢٤
= ن = ٤
⇐ ٤! = ٢٤

١	٢٤
٢	٢٤
٣	١٢
٤	٤
	١
!٤	

ب) ٣ ن! = ٣٦٠ بالقسمة على ٣
ن! = ١٢٠
ن! = ٥! ، ن = ٥

١	١٢٠
٢	١٢٠
٣	٦٠
٤	٢٠
٥	٥
	١
!٥	

محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٠٦٢

جـ) (٣ ن) ! = ٧٢٠
(٣ ن) ! = ٦!
⇐ ٣ن = ٦ بالقسمة على ٣ ⇐ ن = ٢

١	٧٢٠
٢	٧٢٠
٣	٣٦٠
٤	١٢٠
٥	٣٠
٦	٦
٦!	١

٧) جد قيمة كل مما يلي :

أ) ٦! ، ٢ × ٣!
٦! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠
٢ × ٣! = ٢ × ٣ × ٢ × ١ = ٢ × ٦ = ١٢

ب) ٢! + ٣! ، ٥!
٢! = ٢ × ١ = ٢
٣! = ٣ × ٢ × ١ = ٦
٣! + ٢! = ٢ + ٦ = ٨
٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

جـ) $\frac{٦!}{٣!}$ ، ($\frac{٦}{٣}$) !

$$\frac{٦!}{٣!} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times \cancel{٣!}}{\cancel{٣!}} = ١٢٠$$

($\frac{٦}{٣}$) ! = ٢! = ٢

د) ٥! – ٣! ، (٥ – ٣) !
٥! – ٣! = ٥ × ٤ × ٣! – ٣!
أخرج ٣! عامل مشترك
٣! (٥ × ٤ – ١)
٣ × ٢ × ١ (٢٠ – ١)
٦ × ١٩ = ١١٤
أو
٥! = ١٢٠
٣! = ٦
= ٥! – ٣! = ١٢٠ – ٦ = ١١٤

هـ) (٣ × ٢) ! الأولوية لداخل الأقواس
٦! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠

(٥ – ٣) ! = ٣ ! = ٣ × ٢ × ١ = ٢
الأولوية للأقواس

٨) كم طريقة يمكن بها ترتيب جلوس ٣٠ طالباً على ٣٠ مقعداً
الحل :
٣٠! = ٣٠ × ٢٩ × ٢٨ ..... ٣ × ٢ × ١ .

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

تمارين ومسائل (مبدأ العد العام)

(١) جد قيمة كل مما يلي :

أ) (٢× ٣)! = ٦ ! = ٦×٥×٤×٣×٢×١=٧٢٠

ب)٢ !× ٣ != ٢×١×٣×٢×١= ٢ ×٦=١٢

ج) ٣ !+٢ != ٣×٢×١+٢×١= ٦+٢=٨

د) (٣+٢) ! = ٥ ! = ٥ ! ٥×٤×٣×٢×١= ١٢٠

(٢)جد قيمة ن لكل مما يأتي

أ) ن! = ٧٢٠

ن ! = ٦ !

ن= ٦

ب) ٣(ن!) = ٣٦٠ بقسمة الطرفين على ٣

ن ! = ١٢٠ ⇐

ن ! =٥!

ن = ٥

ج) ن ! – ٤ ! = ٩٦

ن ! – ٤×٣×٢×١=٩٦

ن !–٢٤ = ٩٦

ن ! = ١٢٠

ن ! = ٥!

ن = ٥

١	٧٢٠
٢	٧٢٠
٣	٣٦٠
٤	١٢٠
٥	٣٠
٦	٦
	١

١	١٢٠
٢	١٢٠
٣	٦٠
٤	٢٠
٥	٥
	١

١	١٢٠
٢	١٢٠
٣	٦٠
٤	٢٠
٥	٥
	١

أ. محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

(٣) جد قيمة كل مما ياتي :

أ) $\frac{!٨}{!٦}$ = $\frac{٨\times٧\times\cancel{!٦}}{\cancel{!٦}}$ = ٥٦

ب) $\frac{!٧}{(٧-٢)!}$ = $\frac{٧\times٦\times\cancel{!٥}}{\cancel{!٥}}$ = ٤٢

ج) $\frac{!٦}{!٤\times!٢}$ = $\frac{٦\times٥\times\cancel{!٤}}{\cancel{!٤}\times١\times٢}$ = $\frac{٣٠}{٢}$ = ١٥

(٤) يتكون مجلس احدى الشركات من خمسة اعضاء ، فكم طريقه يمكن بها اختيار رئيس ونائب الرئيس من بين اعضاء مجلس ادارة الشركه ؟

* اختيار الرئيس = ٥ طرق

* اختيار النائب = ٤ طرق

العمليه كامله = ٥×٤ = ٢٠

(٥) دخل احد الزبائن محلاً لبيع اجهزة الحاسوب فوجد أمامه (٣) انواع مختلفه لشاشات العرض و (٤) انواع للوحات المفاتيح و(٥) انواع لوحدات التشغيل فكم طريقه يمكن بها اختيار جهاز مكون من شاشة العرض ولوحة المفاتيح وحدة التشغيل ؟

الحل : الجهاز مكون من شاشه عرض ×لوحة مفاتيح ×وحدة تشغيل

عدد طرق الاختيار = ٣ × ٤ × ٥ = ٦٠

(٦)ارادت دائرة السير صنع لوحات معدنيه للسيارات تحمل كل منها حرفاً من حروف الهجاء العربيه متبوعاً بعدد من رقمين من مجموعة الأرقام ١، ٢ .....٩ فكم لوحه مختلفه يمكن صنعها اذا علمت ان عدد حروف الهجاء العربيه (٢٨) حرفاً ؟

الحل ٢٨ × ٩× ٩ = ٢٢٦٨

أ. احمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٢٠

عدد تباديل مجموعة ذات ن من العناصر = ل (ن ، ن) = ن (ن – ١) (ن – ٢) .... ٣ × ٢ × ١ = ن!

مثال : ما عدد تباديل مجموعة من خمس عناصر .
ل (٥ ، ٥) = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ .
⇐ عبارة عن صندوق يحتوي ٥ كرات متماثلة ويراد سحب خمس كرات دون إرجاع أو خمس أشخاص يريدون الجلوس على خمس مقاعد مرقمة .

مثال :
بكم طريقة يمكن بها جلوس ٦ أشخاص على ٦ مقاعد مرقمة .
ل (٦ ، ٦) = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٦ ! = ٧٢٠

مثال : بكم طريقة يمكن بها سحب ٣ كرات من صندوق يحتوي على خمس كرات بدون إرجاع .
ل (٥ ، ٣) = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ .

مثال : كم طريقة يمكن أن يجلس بها ٦ أشخاص على أربع مقاعد مرقمة .
ل (٦ ، ٤) = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠

مثال : كم عدد تباديل مجموعة من ٦ أشخاص مأخوذ ٣ أشخاص كل مرة .
ل (٦ ، ٣) = ٦ × ٥ × ٤ = ١٢٠

مثال : ل (٩ ، ٣) = ٩ × ٨ × ٧

<u>قـــاعـــدة</u> : ل (ن ، ر) عدد المرات ٠ ≤ ر ≤ ن .

$$ل(ن ، ر) = \frac{ن!}{(ن - ر)!} \quad ، ٠ \leq ر \leq ن$$

عدد المرات .

مثال : ل (٩ ، ٣) = ٩ × ٨ × ٧

$$ل(٩ ، ٣) = \frac{٩!}{(٩ - ٣)!} = \frac{٩ \times ٨ \times ٧ \times \cancel{٦!}}{\cancel{٦!}} = ٩ \times ٨ \times ٧ .$$

مثال : عبر عن كل مما يلي : باستخدام التباديل :

أ) ١٥ × ١٤ × ١٣ × ١٢ = ل (١٥ ، ٤) .

ب) ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ل (٦ ، ٦) .

ج) ٢ = ل (٢ ، ١)

أ/ محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

قـــــاعدة :

ل (ن ، ن) = ل (ن ، ن – ١) (حفظ)
ل (ن ، ١) = ن (حفظ)
ل (ن ، ٠) = ١ (حفظ)

مثال : أوجد ما يلي : ل (٥ ، ١) ، ل (٥ ، ٠) ، ل (٥ ، ٥) ، ل (٥ ، ٤) ، ل (٦ ، ٦) ، ل (٦ ، ٥)

ل (٥ ، ١) = ٥ ، ل (٥ ، ٠) = ١ ، ل (٥ ، ٥) = ٥! = ١٢٠
ل (٥ ، ٤) = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ١٢٠ ، ل (٦ ، ٦) = ٦! = ٧٢٠
ل (٦ ، ٥) = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ٧٢٠ .

مثال : إذا كان ل (٧ ، ر) = ٢١٠ ، فجد قيمة ر .

٢١٠	٧
٣٠	٦
٥	٥
١	١

ل (٧ ، ر) = ٧ × ٦ × ..... ←
ل (٧ ، ٣) = ٧ × ٦ × ٥ = ٢١٠

قسمة القيمة العددية على ن وما قبلها مباشرة (ن،ن-١،ن-٢)

مثال : إذا كان ل (٥ ، ر) = ٦٠ ، فجد قيمة ر .

٦٠	٥
١٢	٤
٣	٣
١	١

ل (٥ ، ر) = ٥ × ٤ × ..... ←
ل (٥ ، ٣) = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠

مثال : إذا كان ل (٤ ، ر) = ٢٤ ، فجد ر .

٢٤	٤
٦	٣
٢	٢
١	١

ل (٤ ، ر) = ٤ × ٣ × .....
ل (٤ ، ٣) = ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤

مثال :

أ) ل (٥ ، ١) = ٥

$$ل(٥،٠) = \frac{٥!}{(٥-٠)!} = \frac{٥!}{٥!} = ١$$

ب) ٤! = ل (٤ ، ٤)

هـ) $$ل(٨،٧) = \frac{٨!}{(٨-٧)!} = \frac{٨!}{١!}$$

و) $$ل(٥،٢) = \frac{٥!}{(٥-٢)!} = \frac{٥ \times ٤ \times \cancel{٣!}}{\cancel{٣!}} = ٥ \times ٤ = ٢٠ .$$

محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

قـــــاعدة :

١ - $\begin{pmatrix} ن \\ ر \end{pmatrix} = \frac{ل(ن ، ر)}{ر!}$ ، $٠ \leq ر \leq ن$ ، حيث ن ، ر عددان طبيعيان .

٢ - $\begin{pmatrix} ن \\ ر \end{pmatrix} = \frac{ن!}{ر! (ن - ر)!}$

مثال (١) : جد قيمة ما يلي :

أ) $\begin{pmatrix} ٦ \\ ٢ \end{pmatrix} = \frac{ل(٦ ، ٢)}{٢!} = \frac{٦ \times ٥}{١ \times ٢} = ٣ \times ٥ = ١٥$ ⇐ قاعدة ١

$\begin{pmatrix} ٦ \\ ٢ \end{pmatrix} = \frac{٦!}{٢! (٦ - ٢)!} = \frac{٦ \times ٥ \times \cancel{٤!}}{٢! \times \cancel{٤!}} = \frac{٣٠}{٢} = ١٥$ ⇐ قاعدة ٢

ب) $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix} = \frac{ل(٥ ، ٢)}{٢!} \times \frac{ل(٥ ، ٣)}{٣!} = \frac{٥ \times ٤}{١ \times ٢} \times \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{١ \times ٢ \times ٣}$

$= ١٠ \times ١٠ = ١٠٠$.

مثال (٢) : ما عدد الطرق التي يمكن بها إجراء مباريات التصفية النهائية لكرة الطاولة بين أربع لاعبين ؟
الحل :

$\begin{pmatrix} ٤ \\ ٢ \end{pmatrix} = \frac{٤!}{٢! (٤ - ٢)!} = \frac{٤ \times ٣ \times ٢!}{٢! \times ٢!} = ٦$

مثال (٣) :

أ) $\begin{pmatrix} ٧ \\ ٠ \end{pmatrix} = \frac{٧!}{٠! (٧ - ٠)!} = \frac{\cancel{٧!}}{١ (\cancel{٧!})} = ١$

ب) $\begin{pmatrix} ٧ \\ ١ \end{pmatrix} = \frac{٧!}{١! (٧ - ١)!} = \frac{٧!}{١! (٦!)} = \frac{٧ \times \cancel{٦!}}{١! \times \cancel{٦!}} = ٧$

ج) $\begin{pmatrix} ٧ \\ ٧ \end{pmatrix} = \frac{٧!}{٧! (٧ - ٧)!} = \frac{٧!}{٧! \times ٠!} = ١$

أ. محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥١

بصورة عامة : (حـــــــفظ)

$$\begin{pmatrix} ن \\ ٠ \end{pmatrix} = ١ \quad ، \quad \begin{pmatrix} ن \\ ١ \end{pmatrix} = ن \quad ، \quad \begin{pmatrix} ن \\ ن \end{pmatrix} = ١ .$$

١) $\begin{pmatrix} ن \\ ر \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ن \\ ن - ر \end{pmatrix}$

مثال :

$$\begin{pmatrix} ٩ \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ \\ ٦ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ١٢ \\ ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ \\ ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ \\ ٦ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ٩ \\ ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ \\ ٥ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ٢٧ \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٧ \\ ٢٤ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ١٠ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٨ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ٩٣ \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩٣ \\ ٩٠ \end{pmatrix}$$

مثال : جد قيمة ما يلي :

$$\begin{pmatrix} ٩ \\ ٢ \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} ٩ \\ ٧ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ٩ \\ ٢ \end{pmatrix} = \frac{!٩}{!٢ \, (٩ - ٢)!} = \frac{٩ \times ٨ \times !٧}{٢ \times ١ \times !٧} = ٣٦$$

$$\begin{pmatrix} ٩ \\ ٧ \end{pmatrix} = \frac{!٩}{!٧ \, (٩ - ٧)!} = \frac{٩ \times ٨ \times !٧}{!٧ \, (!٢)} = ٣٦$$

محمد مصطفى القشاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

قـــــــــاعدة :

$$\begin{pmatrix} ن \\ ر_١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ن \\ ر_٢ \end{pmatrix}$$ فإن $ر_١ = ر_٢$ أو $ر_١ + ر_٢ = ن$.

مثال : حل المعادلة التالية :

$$\begin{pmatrix} ٢٠ \\ ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٠ \\ س \end{pmatrix}$$ إما س = ٩ أو س + ٩ = ٢٠ ⇐ س = ١١ قيم س التي تحقق المعادلة

⇐ س = ٩ أو س = ١١

مثال : حل المعادلة التالية

$$\begin{pmatrix} ١٢ \\ س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ \\ ٥ \end{pmatrix}$$ إما س = ٥ أو س + ٥ = ١٢ ⇐ س = ٧ قيم س التي تحقق المعادلة

⇐ س = ٥ أو س = ٧ .

مثال : كم طريقة يمكن بها اختيار ٣ معلمين و ٢ طالب لتشكيل جمعية الرياضيات في إحدى المدارس من بين ٦ معلمين و ١٠ طلاب مميزين في الرياضيات ؟

⇐ عدد طرق اختيار المعلمين $= \begin{pmatrix} ٦ \\ ٣ \end{pmatrix} = \frac{!٦}{!٣\,(٦-٣)!} = \frac{!٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦}{!٣ \times !٣} = ٢٠$

⇐ عدد طرق اختيار الطلاب $= \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٢ \end{pmatrix} = \frac{!١٠}{!٨ \times !٢} = \frac{!٨ \times ٩ \times ١٠}{!٨ \times ٢} = ٤٥$

⇐ عدد طرق تشكيل الجمعية = عدد طرق اختيار المعلمين × عدد طرق اختيار الطلاب = ٥ × ٤٥ = ٩٠٠ طريقة .

مثال : كم طريقة يمكن بها من تشكيل لجنة من ٣ طلاب على الأقل من بين خمس طلاب .

⇐ ٣ طلاب على الأقل يعني إما ٣ طلاب أو ٤ طلاب أو ٥ طلاب .

$$= \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٥ \\ ٥ \end{pmatrix} = \frac{!٥}{!٣ \times ٢} + \frac{٣ \times ٤ \times ٥}{١ \times ٢ \times ٣} + \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥}{!٥}$$

⇐ = ١٠ + ٥ + ١ = ١٦ طريقة

أ. محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٣٠

١ - $\begin{pmatrix} ن \\ ر \end{pmatrix} = \frac{ل(ن ، ر)}{ر!}$ ، $٠ \leq ر \leq ن$ ، حيث ن ، ر عددان طبيعيان .

٢ - $\begin{pmatrix} ن \\ ر \end{pmatrix} = \frac{ن!}{ر(ن - ر)!}$

$\begin{pmatrix} ن \\ ٠ \end{pmatrix} = ١$ ، $\begin{pmatrix} ن \\ ١ \end{pmatrix} = ن$ ، $\begin{pmatrix} ن \\ ن \end{pmatrix} = ١$.

١) $\begin{pmatrix} ن \\ ر \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ن \\ ن - ر \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ن \\ ر_١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ن \\ ر_٢ \end{pmatrix}$ فإن $ر_١ = ر_٢$ أو $ر_١ + ر_٢ = ن$.

==========

أمثلة :

١) جد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\begin{pmatrix} ٩ \\ ٠ \end{pmatrix} = ١$ ، ب) $\begin{pmatrix} ٩ \\ ١ \end{pmatrix} = ٩$ ، جـ) $\begin{pmatrix} ٩ \\ ٩ \end{pmatrix} = ١$

د) $\begin{pmatrix} ٩ \\ ٤ \end{pmatrix} = \frac{٩!}{٤!(٩ - ٤)!} = \frac{٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥!}{(٤ \times ٣ \times ٢ \times ١) ٥!} = \frac{٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ١٢٦$

هـ) $\begin{pmatrix} ٩ \\ ٥ \end{pmatrix} = \frac{٩!}{٥!(٩ - ٥)!} = \frac{٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥!}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ١٢٦$

و) $\begin{pmatrix} ١٠٠ \\ ٩٨ \end{pmatrix} = \frac{١٠٠!}{(٩٨!)(١٠٠ - ٩٨)!} = \frac{١٠٠ \times ٩٩ \times ٩٨!}{٩٨!(٢)!} = ٥٠ \times ٩٩ = ٤٩٥٠$

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

٢) أكمل ما يأتي لتحصل على عبارات صحيحة :

أ) $\begin{pmatrix} ٧ \\ ٥ \end{pmatrix} = \frac{ل(٧،٥)}{!٥}$ ، ب) $\begin{pmatrix} ١٠ \\ ٦ \end{pmatrix} = \frac{!١٠}{!٤ \times !٦}$ ، جـ $\begin{pmatrix} ٨ \\ ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ \\ ٣ \end{pmatrix}$

د) $\begin{pmatrix} ١٠ \\ ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٤ \end{pmatrix}$ ، هـ) $\begin{pmatrix} ٨ \\ ٦ \end{pmatrix} = \frac{ل(٨،٦)}{!٦}$

٣) جد قيمة س التي تحقق كلا من المعادلتين التاليتين :

أ) $\begin{pmatrix} ٩ \\ س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ \\ ٥ \end{pmatrix}$ ⇐ إما س = ٥ أو س + ٥ = ٩ ⇐ س = ٩ – ٥ ⇐ س = ٤

ب) $\begin{pmatrix} س \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ٩ \end{pmatrix}$ ⇐ حسب القاعدة ر١ + ر٢ = ٩ + ٣ = ١٢ ⇐ س = ١٢ .

٤) ما عدد طرق تشكيل لجنة من ٤ أشخاص من بين ١٠ أشخاص ؟

لا حظ أن الاختيار هنا كمش مرة واحدة فقط.

$\Leftarrow = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٤ \end{pmatrix} = \frac{!١٠}{!٤ (٦)!} = \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times !٦}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ \times !٦} = ٢١٠$

٥) ما عدد المجموعات الجزئية التي تتكون من ٤ عناصر و التي يمكن تكوينها من مجموعة ذات ٦ عناصر .

$\begin{pmatrix} ٦ \\ ٤ \end{pmatrix} = \frac{!٦}{!٤ (٦ - ٤)!} = \frac{٦ \times ٥ \times !٤}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ١٥$

٦) جد عدد طرق اختيار ٣ كتب على الأقل من بين ٧ كتب مختلفة ز
⇐ ٣ كتب على الأقل يعني إما ٤ أو ٥ أو ٦ أو ٧ .

$= \begin{pmatrix} ٧ \\ ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ \\ ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ \\ ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ \\ ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ \\ ٧ \end{pmatrix}$

$= \frac{!٧}{!٣ !٤} + \frac{!٧}{!٤ !٣} + \frac{!٧}{!٥ !٢} + \frac{!٧}{!٦ !١} + ١$

محمد مصطفى القصاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٠٦

$$= \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤!}{٤! \times ١ \times ٢ \times ٣} + \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤!}{٤! \times ٣ \times ٢ \times ١} + \frac{٧ \times ٦ \times ٥!}{٥! \times ٢ \times ١} + \frac{٧ \times ٦!}{٦! \times ١} + ١$$

$\Leftarrow$ ٣٥ + ٣٥ +٢١ + ٧ + ١ = ٩٩ .

٧) جد طرق اختيار ٣ كتب على الأكثر من بين ٧ كتب .
الحل : ٣ كتب على الأكثر يعني إما ٣ أو ٢ أو ١ .

$$= \begin{pmatrix} ٧ \\ ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ \\ ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ \\ ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ \\ ٠ \end{pmatrix} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤!}{٣! \times ٤!} + \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤!}{٥! \times ٢!} + ٧ + ١$$

$= ٣٥ + ٢١ + ٨ = ٦٤$

٨) كم طريقة يمكن بها اختيار ٥ أسئلة للإجابة عنها في امتحان اشتمل على ٦ أسئلة ؟

$$\begin{pmatrix} ٦ \\ ٥ \end{pmatrix} = \frac{٦!}{٥! \times ١!} = \frac{٦ \times ٥!}{٥! \times ١} = ٦$$

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

التبادل والتوافيق

تدريب ١

كم كلمه مكونه من ثلاثه حروف يمكن تكوينها من مجموعة الاحرف {أ،ب،ج،د،هـ}علما بانه ليس ضروريا ان تكون للكلمه معنى ؟

الحل : ل(٣،٥) = ٥×٤×٣=٦٠

تدريب٢ : جد قيمة كل مماياتي :

١) ل(٧، ٣)=٧×٦×٥=٢١٠

٢) ل(٩ ، ١)=٩

٣) ل(٨ ، ٨)=١

٤) ل(٧،٧)= ٧ ! = ٥٠٤٠

تدريب ٣: اذا كان ٣ ل(٦،ر) = ٩٠ ، فما قيمة ر

الحل : تقسيم طرفي المعادله على ٣

ل(٦،ر)=٣٠

٦×٥=٣٠ ⇐ ر=٢

تدريب ٤: جد قيمة كل مما ياتي :

١) $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \end{pmatrix} = \frac{٥\ !}{(٤-٥)!\ ٤!} = \frac{٤\times٥\ !}{١\times٤!} = ٥$

٢) $\begin{pmatrix} ٦ \\ ٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٦ \\ ٣ \end{pmatrix} = \frac{٦\times٥\times٤!}{٤! \times (٦-٤)!} \times \frac{٦\times٥\times٤\times٣!}{٣!\times(٦-٦)!}$

$= \frac{٦^{٣} \times ٥}{١\times٢} \times \frac{٦ \times ٥\times٤}{١\times٢\times٣}$

$١٥ \times ٢٠ = ٣٠٠$

أ. محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

تمارين ومسائل

١) جد قيمة كل مما يلي :

أ) ل (٢٠ ، ١) = ٢٠

ب) ل (٩،٩)=٩! = ٣٦٢٨٨٠

ج) ل(٢٥ ، ٠)= ١

د)ل(٦ ، ٢)= ٦×٥ =٣٠

٢) جد قيمة ن التي تحقق كلاً مما يلي :

أ) ل (ن،٢) = ٥٦

الحل : ما هما العددان المتتاليان اللذان حاصل ضربهما = ٥٦

٨×٧= ٥٦ ⇐ ن = ٨

ب) ل(ن،٣)=٩ل(ن،٢)

ن(ن-١)(ن -٢) = ٩ ن(ن -١)

ن-٢ =٩ ⇐ ن= ٩+٢ = ن =١١

٣) جد قيمة س في المعادله الاتيه :

أ) $\begin{pmatrix} ٩ \\ س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ \\ ٥ \end{pmatrix}$ **⇐ س = ٥ او س = ٩ – ٥ = ٤**

ب) $\begin{pmatrix} س \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ٩ \end{pmatrix}$ **⇐ س = ٩+٣ =١٢**

٤) كم طريقه يمكن بها اختيار مديره ومساعده مديره وسكرتيره ومحاسبه وقيمة مختبر من بين ١٠ معلمات.

الحل : = ل (١٠،٥) = ١٠×٩×٨×٧×٦

٥) ما عدد الطرق الممكنه لاختيار (٥) اشئله للاجابه عنها في امتحان للرياضيات يتكون من ٧ اسئله .

الحل : $\begin{pmatrix} ٧ \\ ٥ \end{pmatrix} = \frac{!٧}{!٥\ (٧-٥)!} = \frac{!٥ \times ٦ \times ٧}{!٥ \times ٢ \times ١} = ٢١$

أ. محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

٦) اذا كان عدد اعضاء مجلس ادارة احدى الشركات (١٠) اعضاء وكان من ضمنهم (٤) سيدات ما عدد طرق اختيار رجلين وسيده من الاعضاء لتمثيل الشركه في احدى المؤتمرات ؟

الحل : عدد السيدات =٤

عدد الرجال =٦

طرق الاختبار اللجنه = طرق اختبار السيدات × طرق اختبار الرجال

$$= \binom{٤}{١} \times \binom{٦}{٢} = ٤ \times \frac{!٦}{!٤ \times !٢}$$

$$٤ \times \frac{٦ \times ٥ \times \cancel{!٤}}{\cancel{!٤} \times !٢} = ٤ \times ١٥ = ٦٠$$

٧) مجموعه مكونه من (٨) طلاب و(٣) معلمين جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنه رباعيه منهم في كل من الحالات الآتيه :

أ) تتكون اللجنه من (٣) طلاب معلم .

$$\binom{٨}{٣} \times \binom{٣}{١}$$

$$\frac{!٨}{!٣ \times (٨-٣)!} \times \frac{!٣}{!(٣-١) \times ١!} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times \cancel{٥!}}{\cancel{٥!} \times ٣ \times ٢ \times ١} \times \frac{\cancel{٣!}}{\cancel{٣!}} = ٥٦ \times ٣ = ١٦٨$$

ب) تتكون من معلمين على الاقل

$$\binom{٣}{٢} \times \binom{٨}{٢} + \binom{٣}{٣} \times \binom{٨}{١}$$

$$\frac{٣ \times \cancel{٢!}}{\cancel{٢!} \times ١!} \times \frac{٨ \times ٧ \times \cancel{٦!}}{\cancel{٦!} \times ٢ \times ١} + ٨ \times ١$$

$$٣ \times ٢٨ + ٨ = ٨٤ + ٨ = ٩٢$$

ج) ل(٣، ٢)$\times \binom{٨}{٢}$ = ٣ × ٢ × $\frac{!٨}{!٢ \times !(٨-٢)}$

رئيس اللجنه ونائبه من المعلمين ٦× $\frac{٨ \times ٧ \times \cancel{٦!}}{\cancel{٦!} \times ٢ \times ١}$ = ٦×٢٨ = ١٦٨

والباقي من الطلاب

أ. محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

المتغير العشوائي المنفصل وتوزيع ذي الحدين

Discrete Random Variable & Binomial Distribution

- التجربة العشوائية : هي التجربه التي تتغير نواتجها من محاوله الى أخرى
- الفضاء العيني : هو مجموعه كل النواتج المكمله للتجربه العشوائيه ويرمز له بالرمز (Ω) أو ميفا

مثال : اكتب الفضاء العيني للتجارب العشوائيه التاليه :

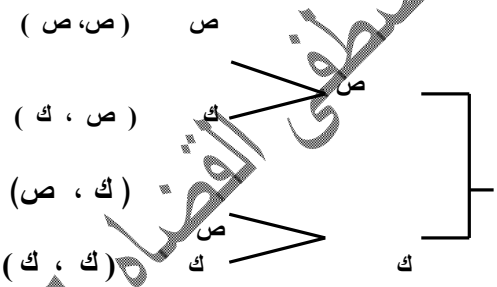
١) القاء حجر نرد مره واحده وملاحظة الوجه الظاهر .

Ω = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ }

٢) القاء قطعة النقد مره واحده وملاحظة الوجه الظاهر

Ω = { ص ، ك }

٣) القاء قطعة النقد مرتين متتاليين



Ω = { (ص ،ص)، (ص ،ك) ، (ك ،ص)، (ك ، ك)}

الحادث : هو مجموعه جزئيه من الفضاء العيني ويرمز له بالرمز (ح)

مثال : في تجربة رمي حجر نرد مره واحده اكتب عناصر الحوادث التاليه

١) ح ١ : **ظهور عدد فردي** ب) ح ٢ ظهور عدد زوجي ج) ح ٣ ظهور عدد اكبر من ٥

الحل : Ω = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

أ) ح ١ :={ ١ ، ٣ ، ٥} ، ب) ح ٢ = {٢ ، ٤ ، ٦ } ، ج) ح ٣ = {٦}

احتمال الحادث ل (ح) = عدد عناصر الحادث

عدد عناصر الفضاء العيني Ω

مثال : القاء حجر نرد مرة واحده اكتب عناصر الحوادث التاليه

١) عناصر الفضاء العيني

٢) احتمال الوجه الظاهر يحمل رقم فردي

٣) احتمال الوجه الظاهر يحمل رقم اكبر من ٤

الحل: ١) Ω = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

٢) ح ١ : الوجه الظاهر يحمل رقم فردي ح ١ {١ ، ٣ ، ٥}

$$ل(ح_1) = \frac{\text{عدد عناصر } ح_1}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{٣}{٦}$$

٣) ح ٢ = {٥ ، ٦ } ⇐ ل (ح٢) = $\frac{٢}{٦}$

تعريف :

المتغير العشوائي هو اقتران معرّف من الفضاء العيني Ω الى مجموعه جزئيه من مجموعه الاعداد الحقيقيه وتستخدم الرموز س ، ص ، ع ....للدلالة على المتغيرات العشوائيه

مثال : في تجربة اختيار عشوائي لعائله لديها طفلان وتسجيل النتائج حسب الجنس وتسلسل الولاده .

١) اكتب عناصر الفضاء العيني Ω

٢) اذا دلّ المتغير العشوائي س على عدد الاطفال الاناث فجد القيم الممكنه للمتغير العشوائي س

الحل : ١) Ω = {(و، و) ، (و، ب) ، (ب ، و) ب ، ب) }

↓ ↓ ↓ ↓

٢) عدد الاطفال الاناث ٠ ١ ١ ٢

س= {٠، ١ ، ٢ }

مثال : اذا دل المتغير العشوائي س على عدد مرات ظهور الصوره عند رمي قطعه نقود ثلاث مرات .

(١) اكتب الفضاء العيني للتجربه

(٢) جد القيمه الممكنه للمتغير العشوائي س

(٣) اوجد احتمال كل قيمه من قيم س وكون جدول التوزيع الاحتمالي .

الحل : ١) Ω={(ص ، ص ، ص) ، (ص، ص ، ك) ، (ص ،ك ،ص) ،(ص ،ك ،ك)
(ك ،ص،ص) ،(ك ،ص ،ك) ، (ك ،ك، ص) ،(ك،ك،ك)}

٢) عدد ظهور الصوره اما ٣ صور او صورتان او صوره واحده فقط او من الممكنه ان لا يكون هناك صوره قد ظهر ت

س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

٣) ل(س=٠) = $\frac{١}{٨}$ ان لا يكون هناك صور قد ظهرت

ل(س= ١) = $\frac{٣}{٨}$ ظهور صوره واحده فقط

ل(س= ٢) = $\frac{٣}{٨}$ ظهور صورتان فقط

ل(س= ٣) = $\frac{١}{٨}$ ظهور ٣ صور فقط

تدريب١:

جدول التوزيع الاحتمالي هو جدول يربط كل قيمه من قيم س واحتمال حدوثها

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

تعريف : اذا كانت مجموعة القيم التي يأخذها متغير عشوائي مجموعه معدودة يسمى المتغير العشوائي متغيراً منفصلاً .

تعريف : يسمى ل اقتران احتمال للمتغير العشوائي المنفصل س الذي ياخذ القيم س١ ،س٢ ،س٣ .....س ن اذا كان

١) ل(س ر) ≥ ٠ ،ر = ١ ، ٢ ، .....، ن

٢) $\sum_{ر=١}^{ن}$ ل(س ر) = ١

محمد مصطفى القناه ٠٧٩٥٥٩٤٥٥٦

مثال : اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى بالمجموعه {(٠ ،٠.٣) ، (١، ب) ، (٢ ، ٠.٤) } فماقيم ة ب

٣) الحل حيثَ أن $\sum_{ر=١}^{ن}$ **ل(س ر)** = **١**

فان ⇐ ٠.٣ + ب + ٠.٤ = ١

= ٠.٧ + ب=١ ⇐ ب= ١ – ٠.٧ =٠.٣

تدريب :

س ر	٠	١	٢
ل(س ر)	٠.٢	ب	٠.٥

اوجد قيمة ب

الحل : $\sum_{ر=١}^{ن}$ **ل(س ر)** = ١ ⇐

٠.٢ + ب + ٠.٥ = ١ ⇐ ٠.٧ + ب =١

⇐ ب = ١ –٠.٧⇐ ب = ٠.٣

مثال :

س	٢	٥	٦	١٢
ل(س ر)	٠.٤	٠.٣	٠.٢	ب

هذا الجدول يمثل التوزيع الاحتمالي ل س اوجد قيمة ب اذا كان اقتران احتمال

الحل : $\sum_{ر=١}^{ن}$ **ل(س ر)** = ١ ⇐ **٠.٤ + ٠.٣ + ٠.٢ + ب = ١**

⇐ **٠.٩ + ب = ١ ⇐ ب = ١–٠.٩ = ٠.١**

أ/ محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٩٨٤٥٦

توزيع ذات الحدين

$$ل(س_ر) = \begin{pmatrix} ن \\ ر \end{pmatrix} (أ)^{ر} (١ - أ)^{ن-ر} \quad \text{حيث ر} = \{ ٠ ، ١ ، ٢ ، ... \}$$

حيث ن : تمثل عدد مرات اجراء التجربه

أ : تمثل احتمال النجاح في المحاوله الواحده

مثال :اذا كان س متغيرا عشوائياً ذا حدين معاملاه ن =٤ ، أ = ٠.٢ فجد كلاً مما ياتي :

١) ل (س =٣) ، $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٣ \end{pmatrix} = \frac{٤!}{٣! (٤-٣)!} = \frac{٤ \times ٣!}{١ \times ٣!} = ٤$

٢) ل(س<٣) ،

٣) ل (س < ١)

$$\begin{pmatrix} ن \\ ن \end{pmatrix} = ١ ، \begin{pmatrix} ن \\ ٠ \end{pmatrix} = ١$$

الحل : ن = ٤ ، أ = ٠.٢ ، ١-أ = ٠.٨

١) ل(س= ٣) = $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٣ \end{pmatrix} \times (٠.٢)^{٣} \times (٠.٨)^{١}$

٢) ل (س< ٣) = ل (س = ٤) = $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٤ \end{pmatrix} \times (٠.٢)^{٤} \times (٠.٨)^{٠}$

٣) ل (س< ١) = ل (س = ٠) = $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٠ \end{pmatrix} \times (٠.٢)^{٠} (٠.٨)^{٤}$

تدريب (٣) اذا كان س متغيرا عشوائيا ذا الحدين معاملاه ن = ٥ ، أ= ٠.٣ فجد كلاً مما ياتي :

١) ل(س=٢) ، ٢) ل(س <١) ، ٣) ل (س ≤ ٤)

الحل : ١) ل (س =٢) = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٢ \end{pmatrix} \times (٠.٣)^{٢} \times (٠.٧)^{٣}$

٢) ل (س < ١) = ل (س = ٠) = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix} (٠.٣)^{٠} (٠.٧)^{٥}$

أ. محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٠٦

٣) ل (س ≤ ٤) = ل (س = ٤) + ل (س =٥)

$$\begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \end{pmatrix} (٠.٣)^{٤} (٠.٧)^{١} + \begin{pmatrix} ٥ \\ ٥ \end{pmatrix} (٠.٣)^{٥} (٠.٧)^{٠}$$

مثال : رميت قطعة نقود غير منتظمه ٥ مرات متتاليه فاذا كان احتمال ظهور الصوره فيها = ٠.٤ فما احتمال ظهور الصوره في ٣ مرات

الحل : ن = ٥ ، أ = ٠.٤ ر = ٣

$$ل (س = ٣) = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix} (٠.٤)^{٣} \times (٠.٦)^{٢}$$

مثال : كيس يحتوي على ٣ كرات خضراء ، ٦ حمراء سحبت ٥ كرات ومع الارجاع فما احتمال ان يكون من بين الكرات المسحوبه ٣ كرات حمراء

الحل : ن = ٥ ، ر = ٣ ، أ = $\frac{٦}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

$$\therefore \quad ل (س =٣) = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}$$

مثال : يحتوي كيس على ٣ كرات حمراء ، ٧ بيضاء سحبت منه ٥ كرات على التوالي مع الارجاع ما احتمال ان تحصل على ٤ كرات بيضاء

الحل : ن = ٥ ، ر = ٤

ل(ب) = ٠.٧ ، ل (ح) =٠.٣

$$ل (٤) = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \end{pmatrix} (٠.٧)^{٤} (٠.٣)^{١}$$

ح ٣ ب ٧

أ/ محمد مصطفى الفتياه ٠٥٥٩٨٤٣٦

مثال : اذا كان احتمال فوز فريق كرة القدم في أي مباراه يلعبها = ٢ لعب الفريق ٤ مباريات
احسب احتمال فوزه في مباراة واحده فقط . ٣

الحل : ن = ٤ ، ر = ١ ، أ = ٢ / ٣ ل(س = ١) = $\binom{٤}{١}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{١}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٣}$

مثال : اطلق صياد (١٠) طلقات على هدف وكان احتمال اصابة الهدف في كل مره (٠.٩)
اوجد احتمال أن يصيب الهدف في مر ه واحده على الاقل .

الحل : ن= ١٠ ، س= ١ ، ٢ ،٣، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠

أ= ٠.٩

ل (مره واحده على الأقل) = ١- ل (٠)

= ١− $\binom{١٠}{٠}$ (٠.٩) ^{٠} (٠.١) ^{١٠} = ١− (٠.١) ^{١٠}

مثال: إذا كان احتمال أن يصيب شخص هدفاً ما في كل طلقه يطلقها على الهدف يساوي ٠.٧ فإذا أطلق (٥) طلقات على الهدف فما احتمال :

١) إصابة الهدف ٣ مرات ؟
٢) عدم إصابة الهدف ؟
٣) إصابة الهدف مره واحده على الأكثر ؟
٤) إصابة الهدف مره واحده على الأقل ؟

الحل : ن = ٥ ، أ= ٠.٧

١) ر= ٣ ⇐ ل (س=٣) = $\binom{٥}{٣}$ (٠.٧) ^{٣} (٠.٣) ^{٢}

٢) ل(س = ٠) = $\binom{٥}{٠}$ (٠.٧) ^{٠} (٠.٣) ^{٥}

٣)ل (س ≥ ١) = ل (س= ١) +(س = ٠)

$\binom{٥}{١}$ (٠.٧) ^{١} (٠.٣) ^{٤} + $\binom{٥}{٠}$ (٠.٧) ^{٠} (٠.٣) ^{٥}

أ/ محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

٥) ل (س ≤ ١) = ل (١) +ل (٢) +ل (٣) +ل (٤) +ل (٥)

= ١- ل (٠) = ١- $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (٠.٧) ٠ (٠.٣) ٣

تدريب (٤)

مصنع به (٥) آلات من نوع واحد اذا كان احتمال ان تحتاج أي اله الى اصلاح في السنه الخامسه من عمرها هو (٠.٢) فاحسب احتمال :

١) ألا تحتاج أي من الالات الى اصلاح

٢) ان تحتاج اثنتان فقط الى اصلاح

٣) ان تحتاج اثنتان على الاكثر الى اصلاح

٤) أن تحتاج واحده على الاقل الى اصلاح

الحل : ن = ٥ ، أ = ٠.٢

١) ل (س =٠) = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (٠.٢) ٠ (٠.٨) ٥

٢) ل (س =٢) = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٢ \end{pmatrix}$ (٠.٢) ٢ (٠.٨) ٣

٣) ل (س ≤ ٢)= ل (٠) +ل(١) +ل (٢)

= $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (٠.٢) ٠ (٠.٨) ٥ + $\begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix}$ (٠.٢) ١ (٠.٨) ٤ + $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٢ \end{pmatrix}$ (٠.٢) ٢ (٠.٨)٣

٤) ل (١) + ل (ب) + ل (٣) + ل (٤) + ل (٥)

١-ل (٠) = ١ - $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (٠.٢) ٠ (٠.٨) ٥

أ. محمد مصطفى الفضلاء ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

تمارين ومسائل

اذا كان س متغيرا عشوائيا ذا الحدين معاملاه ن =٣ ، أ = ٠.٢ جد

أ) قيمة س ⇐ س = { ٠ ، ١ ، ٢ ،٣ }

ب) جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

ل (٠) = $\binom{٣}{٠}$ (٠.٢) ^{٠} (٠.٨) ^{٣} = ٠.٥١٢

ل (١) = $\binom{٣}{١}$ (٠.٢) ^{١} (٠.٨) ^{٢} = ٠.٣٨٤

ل (٢) = $\binom{٣}{٢}$ (٠.٢) ^{٢} (٠.٢) ^{٢} (٠.٨) ^{١}= ٠.٠٩٦

ل (٣) = $\binom{٣}{٣}$ (٠.٢) ^{٣} (٠.٨) ^{٠}= ٠.٠٠٨

س	٠	١	٢	٣
ل(س ر)	٠.٥١٢	٠.٣٨٤	٠.٠٩٦	٠.٠٠٨

(٢) إذا كانت نسبة الانبات في بذور البندورة تساوي ٨٠% ، وتم زراعة خمس بذرات في احدى الحدائق فما احتمال إنبات :

أ) خمس بذرات

ب) ثلاث بذرات على الاقل

الحل : ن = ٥ ، أ = ٠.٨

أ) ل (س = ٥) = $\binom{٥}{٥}$ (٠.٨) ^{٥} (٠.٢) ^{٠}

ب) ل (س ≤ ٣) = ل (٣) +ل (٤) +ل (٥)

= $\binom{٥}{٣}$ (٠.٨) ^{٣} (٠.٢) ^{٢} + $\binom{٥}{٤}$ (٠.٨) ^{٤} (٠.٢) ^{١} + $\binom{٥}{٥}$ (٠.٨) ^{٥} (٠.٢) ^{٠}

محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٢٦

(٣) إذا كانت نسبة القطع المعيبة في إنتاج احد المصانع ١٠% فاذا اخذت (٥) قطع من انتاج المصنع بطريقه عشوائيه فما احتمال :

أ) ان لا تجد أي قطعه معيبة

ب) أن يكون بينها قطعه واحده معيبة

ج) أن لا يزيد عدد القطع المعيبة على قطعه واحده

ن = ٥ ، أ = ٠.١

أ) ل (س = ٠) = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (٠.١) ^{٠} (٠.٩) ^{٥}

ب) ل (س = ١) = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix}$ (٠.١) ^{١} (٠.٩) ^{٤}

ج) ل (س ≥ ١) = ل (س = ٠) + ل (س = ١)

$\begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (٠.١) ^{٠} (٠.٩) ^{٥} + $\begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix}$ (٠.١) ^{١} (٠.٩) ^{٤}

(٤) اذا كان احتمال نجاح عملية جراحيه يساوي ٨٠% فما احتمال نجاح عمليتين على الاقل اذا اجريت ٣ عمليات

الحل : ن = ٣ ، أ = ٠.٨

ل (س ≥ ٢) = ل (٢) +ل (٣) = $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$ (٠.٨) ^{٢} (٠.٢) ^{١} + $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٣ \end{pmatrix}$ (٠.٨) ^{٣} (٠.٢) ^{٠}

(٥) اذا كانت نسبة التالف من انتاج مصنع لاجهزة الحاسوب ٠.٠٠١ واخذت عينه حجمها(٥) اجهزه بطريقه عشوائيه ، فما احتمال ان تكون جميعها صالحه .

التالف = ٠.٠٠١ ⇐ الصالح = ٠.٩٩٩

ن = ٥ ، أ= ٠.٩٩٩

ل (س =٥) = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٥ \end{pmatrix}$ (٠.٩٩٩) ^{٥}×(٠.٠٠١) ^{٠}

(٦)يحتوي صندوق على اربع كرات بيضاء وست كرات حمراء سحبت من الصندوق ثلاث كرات على التوالي مع الارجاع اذا دل المتغير العشوائي س عل عدد الكرات البيضاء المسحوبه كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

ن = ٣ = عدد الكرات البيضاء

٤	٦
ب	ح

اما س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

ل (ب) = ٠.٤

ن = ٣ ، أ = ٠.٦

ل (٠) = $\binom{٣}{٠}$ (٠.٤) ^{٠} (٠.٦) ^{٣} = ٠.٢١٦

ل (١) = $\binom{٣}{١}$ (٠.٤) ^{١} (٠.٦) ^{٢} = ٠.٤٣٢

ل (٢) = $\binom{٣}{٢}$ (٠.٤) ^{٢} (٠.٦) ^{١} = ٠.٢٨٨

ل (٣) = $\binom{٣}{٣}$ (٠.٤) ^{٣} (٠.٦) ^{٠} = ٠.٠٦٤

س	٠	١	٢	٣
ل (س ر)	٠.٢١٦	٠.٤٣٢	٠.٢٨٨	٠.٠٦٤

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

العلامه المعياريه
Standard score

تعريف

اذا كان الوسط الحسابي لعينه عشوائيه($\bar{س}$) وكان الانحراف المعياري لها (ع) فان العلامه المعياريه لمشاهدة قيمتها في هذه العينه س هي : نسبة انحراف المشاهده (س) عن الوسط الحسابي ($\bar{س}$) الى الانحراف المعياري (ع) ويرمز لها بالرمز (ز) أي ان :

$$ز_{س} = \frac{س - \bar{س}}{ع} \quad ، \quad ع \neq صفر$$

مثال اذا كانت علامة طالب في الرياضيات (٨٠) وعلامته في العلوم (٧٠) فايها افضل مستوى تحصيل الطالب في الرياضيات ام في العلوم اذا كان الوسط الحسابي لعلامات الصف في الرياضيات (٧٥) والانحراف المعياري لها (٥) والوسط الحسابي لعلامات الصف في العلوم يساوي (٦٢) والانحراف المعياري (٤)

الحل : العلامه المعياريه للطالب في الرياضيات

$$ز_{س} = \frac{س - \bar{س}}{ع} \Leftarrow ز_{٨٠} = \frac{٨٠ - ٧٥}{٥} = ١$$

العلامه المعياريه في العلوم $ز_{٧٠} = \frac{٧٠ - ٦٢}{٤} = ٢$

⇐ علامة الطالب في الرياضيات اعلى من الوسط الحسابي بانحراف معياري واحد بينما علامته في العلوم اعلى من الوسط الحسابي بانحرافين معياريين

وهذا يعني ان مستوى الطالب بالنسبه لطلاب صفه في العلوم هي افضل من مستواه في الرياضيات .

مثال

اذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلاب التوجيهي في مادة الحاسوب (٧٥) والانحراف المعياري لها (١٠) فجد العلامه المعياريه لعلامات عدي ، سهم ، شام إذا كانت علاماتهم في الحاسوب على الترتيب ٦٥ ، ٧٥ ، ٩٥

الحل :$ز_{٦٥} = \frac{٦٥ - ٧٥}{١٠} = \frac{-١٠}{١٠} = -١$

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٥٨٤٣٦

$$ز_{٧٥} = \frac{٧٥ - ٧٥}{١٠} = صفر$$

$$ز_{٩٥} = \frac{٧٥ - ٩٥}{١٠} = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$$

لاحظ ان علامة عدي اقل من الوسط الحسابي وتنحرف عنه بمقدار (−١٠) علامات وهو سالب ويعادل انحراف معياري واحد وكانت ز = − ١ وان علامة سهم تساوي الوسط الحسابي نفسه وانحرافها يساوي صفراً فكانت ز= صفر اما علامة شام فهي تقع فوق الوسط الحسابي وتنحرف عنه بمقدار (٢٠) علامه وهذا يعادل انحرافين معياريين فكانت ز= ٢

بشكل عام تكون | ز | مساوية لعدد الانحرافات المعياريه التي تنحرفها المشاهدة (س) عن الوسط الحسابي للتوزيع ، اما اشارة (ز) فتدل على موقع المشاهده (س) فوق الوسط الحسابي او تحته

تدريب ١: إذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في اللغه الانجليزيه (٦٠) والانحراف المعياري لها (١٠) فجد :-

١) العلامه (س) التي قيمتها المعياريه (١.٥)
٢) القيمه المعياريه للعلامة (٥٥)
٣) العلامه التي تنحرف فوق الوسط الحسابي انحرافين معياريين
٤) العلامه التي تنحرف تحت الوسط الحسابي انحرافا معياريا واحدا

الحل :١) $ز = ١.٥ = \frac{س - ٦٠}{١٠}$ $= ١.٥ \times ١٠ = س - ٦٠$

$١٥ = س - ٦٠ \Leftarrow س = ٧٥$

٢) $ز_{٥٥} = \frac{٥٥ - ٦٠}{١٠} = \frac{-٥}{١٠} = -٠.٥$

٣) $ز = ٢ = \frac{س - ٦٠}{١٠} \Leftarrow ٢٠ = س - ٦٠ \Leftarrow س = ٨٠$

٤) $ز = -١ = \frac{س - ٦٠}{١٠} \Leftarrow -١٠ = س - ٦٠ \Leftarrow س = -١٠ + ٦٠$

$س = ٥٠$

مثال : اذا كانت علامات روان في الرياضيات (٩٠) وفي الحاسوب (٩٥) وكان الوسط الحسابي لعلامات الرياضيات (٧٤) والانحراف المعياري لها (٤) اما الوسط الحسابي لعلامات الحاسوب (٨٠) والانحراف المعياري لها (٥) في أي المستويين كان مستوى تحصيل روان افضل .

الحل : الرياضيات

العلامه س = ٩٠

الوسط الحسابي ($\bar{س}$) ٧٤

الانحراف المعياري ع = ٤

$ز_{٩٠} = \frac{٩٠ - ٧٤}{٤} = \frac{١٦}{٤} = ٤$

الحاسوب

العلامه س = ٩٥

الوسط الحسابي ($\bar{س}$) = ٨٠

الانحراف المعياري ع = ٥

$ز_{٩٥} = \frac{٩٥ - ٨٠}{٥} = \frac{١٥}{٥} = ٣$

من خلال المقارنه بين القيمتين نجد ان القيمه المعياريه لعلامة روان في الرياضيات اكبر من الحاسوب وعليه يكون تحصيل روان في الرياضيات افضل من مستوى تحصيلها في الحاسوب .

تدريب ٢ : اذا كان الوسط الحسابي لعلامات شعبه الادبي في الرياضيات (٧٠) والانحراف المعياري لها (٨) والوسط الحسابي لعلامات شعبه المعلوماتيه (٧٥) والانحراف المعياري لها (٥) وكانت علامة احد الطلبه في شعبه الادبي في الرياضيات (٦٤) وعلامة احد الطلبه في شعبة المعلوماتيه (٦٥) ، فأي العلامتين افضل .

الادبي

الوسط الحسابي $\bar{س}$ = ٧٠

الانحراف المعياري ع = ٨

العلامه س = ٦٤

$ر_{٦٤} = \frac{٦٤ - ٧٠}{٨} = \frac{-٦}{٨}$

$= -٠.٧٤$

المعلوماتيه

الوسط الحسابي $\bar{س}$= ٧٥

الانحراف المعياري ع = ٥

العلامه س = ٦٥

$ز_{٦٥} = \frac{٦٥ - ٧٥}{٥}$

$= \frac{-١٠}{٥} = -٢$

علامة الأدبي أفضل

تمارين ومسائل

١) اختر رمز الاجابه الصحيحه في كل مما يلي :

١) اذا كان الوسط الحسابي لمجموعه من القيم يساوي (٦٥) والانحراف المعياري لها ٤ فان القيمه التي تنحرف ثلاث انحرافات تحت الوسط الحسابي هي :

أ) ٧٧ ب) ٥٣ ج) ١٢ د) -١٢

الحل : ز س = -٣ = س – ٦٥ ⇐ -١٢ = س – ٦٥ ⇐ س = -١٢ +٦٥
٤

⇐ س= ٥٣ (ب)

٢) اذا كان الفرق بين علامتي طالبتين في الصف نفسه في احد الاختبارات هو (١٢) والفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين لهما هو (١.٢) فان الانحراف المعياري لعلامات الطلاب في هذا الاختبار يساوي :

أ) ١.٢ ب) ٦ ج)١٠ د) ١٢

الحل : في هذه الحاله يفضل الحل على القانون ع = س٢ – س ١ = ١٢ = ١٠ (ج)
ز٢ – ز ١ ١.٢

٣)اذا كانت علامتا طالبتين من الصف نفسه في الرياضيات ٨٥، ٧٠ والعلامتان المعياريتان المقابلتان لهاتين العلامتين هما ١ ، -٢ على الترتيب

فان الانحراف المعياري لعلامات الرياضيات يساوي :

أ) ١٠ ب) ٥ ج) ٣ د)١

الحل : ز = س – س
ع

س١ = ٨٥ ، ز١ = ١ = ٨٥ – س ، ع = ٨٥ – س .....(١)
ع

س٢ = ٧٠ ، ز ٢ = -٢ = ٧٠ – س ⇐ -٢ع = ٧٠ – س .....(٢)
ع

أ/ محمد مصطفى الضناوي ٠١٢٧٩٥٥٩٨٤٣

بطرح المعادلة (٢) من المعادله (١) ٣ع = ١٥ ⇐ ع = ٥ (ب)

(٤) في توزيع تكراري اذا كانت العلامه الخامسه (٧٠) تقابل العلامه المعياريه (٣) وكانت الوسط الحسابي (٥٨) فان الانحراف المعياري للتوزيع يساوي :

أ) ٦ ب ١٢ ج)٨ د) ٤

الحل : ٣ = ٧٠ –٥٨ ⇐ ٣ع = ١٢ ⇐ ع = ٤ (د)

ع

اذا كان الوسط الحسابي لعلامات اللغه العربيه (٦٠) والانحراف المعياري (٥) فان العلامه المعياريه للعلامه (٥٨) هي :

أ) ٢ ب) –٢ ج) ٠.٤ د)–٠.٤

ز = ٥٨ – ٦٠ = – ٢ = –٠.٤ (د)

٥ ٥

(٢)صف مكون من (٢٠) طالبه ، اذا كانت علامات الطالبات هديل ، شروق غدير هي ٩٠، ٨٠ ، س على التوالي وعلاماتهن المعياريه ٣،٢ ،–١ فما علامة الطالبه غدير .

⇐ هديل ز= س – س ⇐ ٣ = ٩٠ – س ، ٣ ع = ٩٠ – س .....(١)

ع ع

شروق ز= ٢ = ٨٠ – س ⇐ ٢ع = ٨٠ – س .....(٢)

ع

بحل المعادلتين (١) (٢) بالحذف . وذلك بضرب المعادله (٢) بـ (–١) وجمعها الى (١)

٣ع = ٩٠ – س

–٢ع = –٨٠ + س

ع = ١٠ لايجاد قيمة س عوض قيمة ع في (١)

٣ع = ٩٠ – س ⇐ ٣٠ = ٩٠ – س ⇐ –٦٠ = – س

⇐ س = ٦٠

غدير ⇐ ز = –١ = س – ٦٠ = ⇐ –١٠ = س –٦٠

١٠

⇐ –١٠ + ٦٠ = س ⇐ س = ٥٠

(٣) اذا كانت العلامات المعياريه للطلبه احمد جاسر وائل هي : ١.٥ ، -١ ، -٢ على الترتيب وكان الوسط الحسابي لعلامات الصف ٧٠ والفرق بين علامتي احمد وجاسر يساوي ١٠ فما العلامه الفعليه للطلبه الثلاث ؟

الحل : $\overline{س} = ٧٠$ ، $س_٢ - س_١ = ١٠$

$ز_١ = ١.٥$ ، $ز_٢ = -١$ ، $ز_٣ = -٢$

$$ز = \frac{س - \overline{س}}{ع}$$

$$١.٥ = \frac{س_١ - ٧٠}{ع} \Leftarrow ١.٥ ع = س_١ - ٧٠ \quad ..... (١)$$

$$-١ = \frac{س_٢ - ٧٠}{ع} \Leftarrow -ع = س_٢ - ٧٠ \quad ..... (٢)$$

$$-٢ = \frac{س_٣ - ٧٠}{ع} \Leftarrow -٢ ع = س_٣ - ٧٠ \quad ..... (٣)$$

بحل المعادلتين بالحذف وذلك بطرح المعادله (١) من (٢)

$-ع = س_٢ - ٧٠$

$-١.٥ ع = - س_١ + ٧٠$

$- ٢.٥ ع = س_٢ - س_١$

$$- ٢.٥ ع = ١٠ \Leftarrow ع = \frac{١٠}{-٢.٥} \Leftarrow ع = -٤$$

عوض في (١) $\Leftarrow ١.٥ \times -٤ = س_١ - ٧٠$

$-٦ = س_١ - ٧٠ \Leftarrow س_١ = ٦٤$

عوض في (٢) $\Leftarrow -(-٤) = س_٢ - ٧٠ \Leftarrow س_٢ = ٧٠ + ٤ = ٧٤$

عوض في (٣) $\Leftarrow -٢ \times -٤ = س_٣ - ٧٠$

$س_٣ = ٧٠ + ٨ = ٧٨$

أ/ محمد مصطفى القشاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

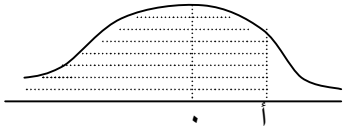
التوزيع الطبيعي

The Normal Distribution

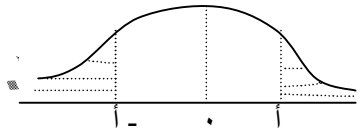
التوزيع الطبيعي المعياري : هو التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (صفر) وانحرافه المعياري يساوي (واحداً) ، ومتغيره العشوائي العلامة المعيارية (ز) .

♠ في التوزيعات المتصلة يتم إيجاد احتمال وقوع المتغير العشوائي (ز) تحت قيمة ما أو فوقها أو محصورة بين قيمتين ، من خلال جداول خاصة للتوزيع الطبيعي المعياري موجودة في نهاية الكتاب لإيجاد الاحتمال لقيم (ز) الأقل من (أ) أي ل (ز ≤ أ) حيث أ ≤ صفر كما في الشكل المجاور

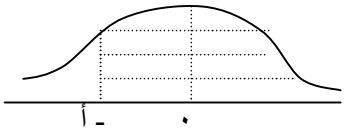
♣ ولإيجاد الاحتمالات على يسار قيم (ز) السالبة أو يمينها ، أو على يمين قيم (ز) الموجبة . فيتم استخدام خاصية التماثل . فإذا كانت أ > صفر فإن :



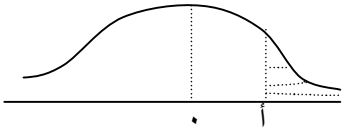
١) ل (ز ≥ - أ) = ل (ز ≤ أ) = ١ – ل (ز ≥ أ)



٢) ل (ز ≤ - أ) = ل (ز ≥ أ) من الجدول مباشرة



٣) ل (ز ≤ أ) = ١ - ل (ز ≥ أ)



مثال : اذا كان (ز) متغيراً عشوائيا طبيعيا معياريا. فجد قيمة كل مما يأتي، باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

١) ل (ز ≥ ١.٢٥) = ٠.٨٩٤٤ من الجدول مباشرة وهي القيمة الواقعة عند تقاطع صف العدد (١.٢) مع عمود الأجزاء من مئة (٠.٠٥)

٢) ل (ز ≤ - ١.٥) = ل (ز ≥ ١.٥) = ٠.٩٣٣٢ من الجدول مباشرة (قاعدة ٢)

٣) ل (- ٢ ≤ ز ≤ ٢) = ل (ز ≥ ٢) – ل (ز ≥ - ٢) = ل (ز ≥ ٢) – (١ - ل (ز ≥ ٢))

= ٠.٩٧٧٢ – (١ – ٠.٩٧٧٢) = ٠.٩٧٧٢ - ٠.٠٢٢٨ = ٠.٩٥٤٤

٤) ل (ز ≥ ١.١٦) = ٠.٨٧٧ من الجدول مباشرة
٥) ل (ز ≤ ١.١٦) = ١ – ل (ز ≥ ١.١٦) = ١ – ٠.٨٧٧ = ٠.١٢٣
٦) ل (ز ≥ - ٠.٨٥) = ل (ز ≤ ٠.٨٥) = ١ – ل (ز ≥ ٠.٨٥) = ١ – ٠.٨٠٢٣ = ٠.١٩٧٧
٧) ل (ز ≤ - ٠.٨٥) = ل (ز ≥ ٠.٨٥) = ٠.٨٠٢٣
٨) ل (١ ≥ ز ≥ ٢) = ل (ز ≥ ٢) – ل (ز ≥ ١) = ٠.٩٧٧٢ – ٠.٨٤١٣ = ٠.١٣٥٩

♠ ل (أ ≥ ز ≥ ب) = ل (ز ≥ ب) – ل (ز ≥ أ)
مثال : ل (٠.٦٥ ≥ ز ≥ ١.٧٥) = ل (ز ≥ ١.٧٥) – ل(ز ≥٠.٦٥)=٠.٩٥٩٥–٠.٧٤٢٢=٠.٢١٧٣

♣ ل(- ب ≥ ز ≥ - أ) = ل (أ ≥ ز ≥ ب) = ل (ز ≥ ب) – ل (ز ≥ أ)
مثال: ل (- ١.٥ ≥ ز ≥ - ٠.٥) = ل (٠.٥ ≥ ز ≥ ١.٥) = ل (ز ≥ ١.٥) – ل (ز ≥ ٠.٥)
٠.٩٣٣٢ – ٠.٦٩١٥ = ٠.٢٤١٧

تدريب ١: إذا كان (ز) متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً ، فجد كلاً مما يلي :
١) ل (ز ≤ ٢) = ١ – ل (ز ≥ ٢) = ١ – ٠.٩٧٧٢ = ٠.٠٢٢٨
٢) ل (ز ≥ - ٠.٨٥) = ١ – ل (ز ≥ ٠.٨٥) = ١ – ٠.٨٠٢٣ = ٠.١٩٧٧
٣) ل (٠.٠٩ ≥ ز ≥ ١.٥) = ل (ز ≥ ١.٥) – ل (ز ≥ ٠.٠٩) = ٠.٩٣٣٢ – ٠.٥٣٥٩ = ٠.٣٩٧٩
٤) ل (- ١.٧ ≥ ز ≥ ٠) = ل (ز ≥ ٠) – ل (ز ≥ - ١.٧) = ل (ز ≥ ٠) – (١ – ل (ز ≥ ١.٧))
= ٠.٥ – (١ – ٠.٩٥٥٤) = ٠.٥ – ٠.٠٤٤٦ = ٠.٤٥٥٤

القيم المعيارية التي علمت مساحتها تحت المنحنى الطبيعي المعياري

١) إذا كانت ل (ز ≥ أ) ≤ ٠.٥ ، فإن أ > ٠ ، فإن ز ≥ ٠
(من الجدول نبحث عنها في المساحات ونأخذ القيم المناظرة لها من عمود ز)
مثال: ل(ز ≥ أ)=٠.٧٤٨٦من الجدول تجد أن قيمة(ز) المناظرة للاحتمال٠.٧٤٨٦هي٠.٦٧⇐ أ=٠.٦٧

٢) إذا كانت ل (ز ≤ أ) = ل (ز ≥ - أ) > ٠.٥ ، حيث أ < ٠ ، = ١ – ل (ز ≥ أ)
مثال: ل (ز ≤ أ) = ٠.٤ ⇐ ل (ز ≥ أ) = ١ – ٠.٤ = ٠.٦ الآن نبحث في جدول المساحات ونأخذ قيمة (ز) المناظرة للاحتمال ٠.٦ (إذا لم تكن موجودة بالضبط نأخذ أقرب قيمة لها وهي ٠.٥٩٨٧ قيمة(ز) المناظرة للاحتمال ٠.٥٩٨٧هي ٠.٢٥ ⇐ أ = ٠.٢٥
٣) إذا كانت ل (ز ≤ أ) > ٠.٥ ، فإن أ < ٠
مثال: ل (ز ≤ أ) = ٠.٩٤٩٥ = ل (ز ≥ - أ) = ٠.٩٤٩٥ مباشرة من الجدول، ز = ١.٦٤
⇐ أ = - ١.٦٤ لأن قيمة أ < ٠ ، نأخذ سالب قيمة (ز)

تدريب ٢: استخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري ، لإيجاد قيمة (أ) في كل من الحالات الآتية :
١) ل (ز ≥ أ) = ٠.٦٧ من الجدول قيمة (ز) التي تقابل ٠.٦٧ هي ٠.٤٤ ⇐ أ = ٠.٤٤
٢) ل (ز ≤ أ) = ٠.٧٤٨٦ ⇐ ل (ز ≥ - أ) = ٠.٧٤٨٦ وقيمة ز التي تقابلها (ز) = ٠.٦٧
أ = - ٠.٦٧لأن قيمة أ < ٠ ، نأخذ سالب قيمة (ز)

♦ ملاحظة: يرمز للوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي بالرمز (μ) والانحراف المعياري بالرمز (δ) .
أما الوسط الحسابي للعينة ($\bar{س}$) والانحراف المعياري (ع).
♥ من خواص منحنى التوزيع الطبيعي
١) متماثل حول الوسط
٢) المنوال = الوسيط = الوسط الحسابي

♣ إذا كان (س) متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه μ ، وانحرافه المعياري δ ، فإن :
العلامة المعيارية (ز) للمتغير العشوائي س هي :

$$\text{ز} = \frac{\text{س} - \mu}{\delta}$$

مثال: أذا كان (س) متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٥٠) ، وانحرافه المعياري (١٠) ، فجد :

١) القيمة المعيارية المقابلة للقيمة س = ١٠٠

الحل: μ = ٥٠ ، δ = ١٠

القيمة المعيارية المقابلة للقيمة (١٠٠) هي : $\text{ز} = \frac{١٠٠ - ٥٠}{١٠} = \frac{٥٠}{١٠} = ٥$

٢) القيمة التي تقابل القيمة المعيارية (٣) .

الحل: إذا كانت س تقابل القيمة المعيارية (٣) فإن : $\frac{\text{س} - ٥٠}{١٠} = ٣ \leftarrow \text{س} - ٥٠ = ٣٠ \leftarrow \text{س} = ٨٠$

مثال: أذا كان (س) متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٨٠) ، وانحرافه المعياري (١٠) ، فجد :

١) ل (س ≥ ١٠٠) = ل (ز ≥ $\frac{١٠٠ - ٨٠}{١٠}$) = ل (ز ≥ ٢) = ٠.٩٧٧٢ (من الجدول مباشرةً)

٢) ل(س ≤ ٦٣) = ل (ز ≤ $\frac{٦٣ - ٨٠}{١٠}$) = ل(ز ≤ $\frac{-١٧}{١٠}$) = ل (≤ - ١.٧)= ل(ز ≥ ١.٧) = ٠.٩٥٥٤

تدريب ٣: أذا كان (س) متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٦٠) ، وانحرافه المعياري (٨) ، فجد :

١) ل (س ≥ ٧٦) = ل (ز ≥ $\frac{٧٦ - ٦٠}{٨}$) = ل (ز ≥ $\frac{١٦}{٨}$) = ل (ز ≥ ٢) = ٠.٩٧٧٢ (من الجدول)

٢)ل(س ≤ ٤٨) = ل (ز ≤ $\frac{٤٨ - ٦٠}{٨}$) = ل(ز ≤ $\frac{-١٢}{٨}$) = ل(ز ≤ - ١.٥) = ل(ز ≥ ١.٥)= ٠.٩٣٣٢

مثال :إذا كانت الرواتب الشهرية في أحد المصانع في مدينة الحسن الصناعية تخضع لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي (١٥٠) وانحرافه المعياري (٢٠) ، فإذا اختير أحد العمال عشوائياً من هذا المصنع احسب

١) احتمال أن يقل راتبه عن (١٢٠) ديناراً .

٢) احتمال أن يزيد راتبه عن (١٦٠) ديناراً.

٣) أن يقع راتبه بين ١٥٠ و ١٨٠ ديناراً.

الحل :

١) ل (س < ١٢٠) = ل (ز < $\frac{١٢٠ - ١٥٠}{٢٠}$) = ل (ز < $\frac{-٣٠}{٢٠}$) = ل (ز < - ١.٥)

= ١ – ل (ز > ١.٥) = ١ – ٠.٩٣٣٢) = ٠.٠٦٦٨

٢) ل (س > ١٦٠) = ل (ز > $\frac{١٦٠ - ١٥٠}{٢٠}$) = ل (ز > $\frac{١٠}{٢٠}$) = ل (ز > ٠.٥)

= ١ – ل (ز ≥ ٠.٥) = ١ – ٠.٦٩١٥) = ٠.٣٠٨٥

٣) ل (١٥٠ < س < ١٨٠) = ل ($\frac{١٥٠ - ١٥٠}{٢٠}$ < ز < $\frac{١٨٠ - ١٥٠}{٢٠}$) = ل (٠ < ز < ١.٥)

= ل (ز < ١.٥) – ل (ز< ٠) = ٠.٩٣٣٢ – ٠.٥ = ٠.٤٣٣٢

تدريب ٤ : μ = ١٠٥ ، δ = ١٠ ، أوجد ل (س > ١١٠)

الحـــل: ل (س > ١١٠) = ل (ز > $\frac{١١٠ - ١٠٥}{١٠}$) = ل (ز > ٠.٥) = ١ – ل (ز < ٠.٥)

= ١ – ٠.٦٩١٥ = ٠.٣٠٨٥

مثال : (وزارة ١٩٨٥) : إذا كان الوسط الحسابي لعلامات (٢٠٠٠) طالب يساوي (٥٠) والانحراف المعياري يساوي (١٠) فإذا كانت علامة النجاح تساوي (٤٥) أوجد عدد الناجحين .

الحـــل: ل (س ≥ ٤٥) = ل (ز ≥ $\frac{٤٥ - ٥٠}{١٠}$) = ل (ز ≥ $\frac{-٥}{١٠}$) = ل (ز ≥ - ٠.٥)

= ل (ز ≥ ٠.٥) = ٠.٦٩١٥ ⇐ نسبة الطلبة الناجحين =٠.٦٩١٥ × ١٠٠% = ٦٩.١٥

عدد الطلبة $\frac{٦٩.١٥}{١٠٠}$ × ٢٠٠٠ = ١٣٨٣ طالب

♣ أو عدد الطلبة = العدد الكلي × الاحتمال = ٢٠٠٠ × ٠.٦٩١٥ = ١٣٨٣ طالباً

مثال : مدرسة ابتدائية فيها (٥٠٠) طالب فإذا كانت أطوالهم قريبة من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (١٣٠) سم ، وانحراف معياري (٥) سم أوجد

١) نسبة الطلاب الذين تنحصر أطوالهم بين ١٢٦ و ١٣٨ .

٢) قيمة س إذا كانت نسبة الطلاب الذين أطوالهم فوق الوسط وأقل من س تساوي (٠.٢٢٥٧)

٣) عدد الطلاب المحصورة أطوالهم بين ١٢٥ و ١٢٠ .

الحـــل : ١) ل (١٢٦ < س < ١٣٨) = ل ($\frac{١٢٦ - ١٣٠}{٥}$ < ز < $\frac{١٣٨ - ١٣٠}{٥}$)

= ل (- ٠.٨ < ز < ١.٦) = ل (ز < ١.٦) – ل (ز < - ٠.٨)

= ل (ز < ١.٦) – (١ - ل (ز < ٠.٨) = ٠.٩٤٥٢ – (١ – ٠.٧٨٨١)

= ٠.٩٤٥٢ – ٠.٢١١٩ = ٠.٧٣٣٣ ⇐ نسبة الطلبة ٠.٧٣٣٣ × ١٠٠% = ٧٣.٣٣%

٢) الوسط = ٠.٥ ومعطى في السؤال أن المساحة فوق الوسط هي ٠.٢٢٥٧ وبذلك تكون المساحة الكلية تحت (ز) الموجبة هي ٠.٥ + ٠.٢٢٥٧ = ٠.٧٢٥٧ ، وبذلك تكون قيمة (ز) = ٠.٦

ز = $\frac{س - \mu}{\delta}$ ⇐ ٠.٦ = $\frac{س - ١٣٠}{٥}$ ⇐ س – ١٣٠ = ٣ ⇐ س = ١٣٣ سم.

٣) ل (١٢٠ < س < ١٢٥) = ل ($\frac{١٢٠ - ١٣٠}{٥}$ < ز < $\frac{١٢٥ - ١٣٠}{٥}$) = ل (- ٢ < ز < - ١)

= ل (١ < ز < ٢) = ل (ز < ٢) – ل (ز < ١) = ٠.٩٧٧٢ – ٠.٨٤١٣ = ٠.١٣٥٩ ×٥٠٠=٦٨

مثال : (وزارة ١٩٧٦) : إذا كانت علامات (١٠٠٠٠) طالب تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٧٠) وانحراف معياري (١٢) ، جد عدد الطلبة الذين تقع علاماتهم بين ٥٨ و ٧٦ .

الحـــل : ل (٥٨ < س < ٧٦) = ل ($\frac{٥٨ - ٧٠}{١٢}$ < ز < $\frac{٧٦ - ٧٠}{١٢}$) = ل (- ١ < ز < ٠.٥)

= ل (ز < ٠.٥) – ل (ز < - ١) = ل (ز < ٠.٥) – (١ – ل (ز < ١))

= ٠.٦٩١٥ - (١ – ٠.٨٤١٣) = ٠.٦٩١٥ – ٠.١٥٨٧ = ٠.٥٣٢٨

عدد الطلبة = ١٠٠٠٠ × ٠.٥٣٢٨ = ٥٣٢٨ طالب

تدريب ٥ : إذا كانت أوزان الاطفال عند الولادة تتبع توزيعاً طبيعيا وسطه الحسابي (٣.٢) كغ وانحرافه المعياري (٠.٤) كغ .إذا اختير طفل عشوائياً عند الولادة ، فما احتمال أن يكون وزنه أكبر من (٤) كغ .

الحـــل : ل (س > ٤) = ل (ز > $\frac{٤ - ٣.٢}{٠.٤}$) = ل (ز > ٢) = ١ – ل (ز < ٢)

= ١ – ٠.٩٧٧٢ = ٠.٠٢٢٨

تمارين ومسائل

١) ليكن (ز) متغيرا عشوائياً معيارياً ، استعمل جدول التوزيع الطبيعي والمعياري لإيجاد كل مما يأتي :

١) ل (ز ≥ ٢.٤٥) = ٠.٩٩٢٧ من الجدول مباشرة

٢) ل (ز ≤ ١) = ١ – ل (ز ≥ ١) = ١ – ٠.٨٤١٣ = ٠.١٥٨٧

٣) ل (ز ≥ - ٢.٠٥) = ل (ز ≤ ٢.٠٥) = ١ – ل (ز ≥ ٢.٠٥) = ١ – ٠.٩٧٩٨ = ٠.٠٢٠٢

٤) ل (ز ≤ - ٠.٦٥) = ل (ز ≥ ٠.٦٥) = ٠.٧٤٢٢

٥) ل (١.٠٨ ≤ ز ≤ ٢.٥) = ل (ز ≥ ٢.٥) – ل (ز ≥ ١.٠٨) = ٠.٩٩٣٨ – ٠.٨٥٩٩ = ٠.١٣٣٩

٦) ل(- ٢ ≤ ز ≤ - ١) = ل(١ < ز < ٢) = ل(ز <٢) – ل(ز < ١) = ٠.٩٧٧٢ – ٠.٨٤١٣ = ٠.١٣٥٩

٧) ل (- ٣ ≤ ز ≤ ٢) = ل(ز <٢) – ل (ز ≥ - ٣) = ل(ز <٢) – (١ - ل (ز ≥ ٣)
= ٠.٩٧٧٢ – (١ – ٠.٩٩٨٧) = ٠.٩٧٧٢ – ٠.٠٠١٣ = ٠.٩٧٥٩

٨) ل (- ١.٦ ≤ ز ≤ ٠) = ل (ز ≥ ٠) – ل (ز ≥ - ١.٦) = ل (ز ≥ ٠) – (١ – ل (ز ≥ ١.٦)
= ٠.٥ – (١ – ٠.٩٤٥٢) = ٠.٥ - ٠.٠٥٤٨ = ٠.٤٤٥٢

---

٢) تتخذ أعمار (٢٠٠٠) شخص شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي (٥٢) سنة ، وانحرافه المعياري (١٠) سنوات إذا اختير أحد الأشخاص عشوائياً ، فما احتمال أن يكون ممن تتراوح أعمارهم بين (٤٦) سنة و (٥٨) سنة .

الحـــل: ل (٤٦ ≤ س ≤ ٥٨) = ل ($\frac{٤٦ - ٥٢}{١٠}$ ≤ ز ≤ $\frac{٥٨ - ٥٢}{١٠}$) = ل (- ٠.٦ ≤ ز ≤ ٠.٦)

= ل (ز ≥ ٠.٦) – ل (ز ≥ - ٠.٦) = ل (ز ≥ ٠.٦) – (١ - ل (ز ≥ ٠.٦))
= ٠.٧٢٥٧ – ٠.٢٧٤٣ = ٠.٤٥١٤

---

٣) إذا كانت علامات (١٠٠٠) طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٦٥) وانحراف معياري (١٠) وكان عدد الناجحين (٧٥٨) طالباً فما علامة النجاح .

الحـــل: ل (ز ≤ أ) = $\frac{٧٥٨}{١٠٠٠}$ = ٠.٧٥٨ ⇐ ل (ز ≥ - أ) = ٠.٧٥٨ ، نبحث عنها في جدول المساحات

⇐ - أ = ٠.٧ ⇐ أ = - ٠.٧ = ز

$\frac{س - ٥٢}{١٠}$ = - ٠.٧ ⇐ س – ٥٢ = - ٧ ⇐ س = – ٧ + ٥٢ ⇐ س = ٤٥ علامة النجاح .

---

٤) وزارة ١٩٨٦ : إذا كانت أوزان سبائك ذهبية تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٠) غرام وانحراف معياري (١٠) غرام إذا تم اختيار أحد السبائك ، فما احتمال أن يقل وزنها عن (٤٤.٩) غراماً

الحـــل : ل (س ≤ ٤٤.٩) = ل (ز ≤ $\frac{٤٤.٩ - ٥٠}{١٠}$) = ل (ز ≥ - $\frac{٥.١}{١٠}$)

ل (ز ≥ - ٠.٥١) = ١ – ل (ز ≥ ٠.٥١) = ١ – ٠.٦٩٥ = ٠.٣٠٥

---

٥) تخضع عبوات إحدى المنتجات الزراعية لتوزيع طبيعي وسطه (٢٥) كغ وانحرافه المعياري (٢) كغ إذا اختيرت احدى العبوات عشوائياً ، فما احتمال أن :

١) يزيد وزنها عن (٢٧) كغ . ل (س > ٢٧) = ل (ز > $\frac{٢٧ - ٢٥}{٢}$) = ل (ز > ١)

= ١ - ل (ز ≥ ١) = ١ – ٠.٨٤١٣ = ٠.١٥٨٧

٢) ينحصر وزنها بين (٢٤.٥) و (٢٥.٥)

ل (٢٤.٥ < س < ٢٤.٥) = ل ($\frac{٢٤.٥ - ٢٥}{٢}$ < ز < $\frac{٢٥.٥ - ٢٥}{٢}$) = ل (- ٠.٢٥ < ز < ٠.٢٥)

= ل (ز ≥ ٠.٢٥) – ل (ز ≥ - ٠.٢٥) = ل (ز ≥ ٠.٢٥) – (١ - ل (ز ≥ ٠.٢٥))
= ٠.٥٩٨٧ – (١ – ٠.٥٩٨٧) = ٠.٥٩٨٧ – ٠.٤٠١٣ = ٠.١٩٧٤

..... صفحة (١٤٠) .....

٦) إذا كان رواتب (١٠٠٠٠) معلم ومعلمة ، تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٢٠٠) دينار شهرياً ، وانحراف معياري يساوي (١٠) دنانير ، فما عدد المعلمين والمعلمات الذين تنحصر رواتبهم بين (١٨٠) ديناراً و (٢١٠) ديناراً .

الحـــــل :

$$ل (١٨٠ < س < ٢١٠) = ل (\frac{١٨٠ - ٢٠٠}{١٠} < ز < \frac{٢١٠ - ٢٠٠}{١٠})$$

$$= ل (- ٢ < ز < ١) = ل (ز \geq ١) - ل (ز \geq - ٢) = ل (ز \geq ١) - (١ - ل (ز \geq ٢))$$

٠.٨٤١٣ – (١ – ٠.٩٧٧٢) = ٠.٨٤١٣ - ٠.٠٢٢٨ = ٠.٨١٨٥

عدد المعلمين هو ١٠٠٠٠ × ٠.٨١٨٥ = ٨١٨٥ معلماً ومعلمة.

أ. محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

الارتباط و معامل الارتباط

Correlation & Correlation Coefficient

- **الارتباط بين متغيرين هو : العلاقة بين المتغيرين بحيث يتغير احد المتغيرين بتغير المتغير الآخر .**

*** أو هو : دراسة العلاقة بين متغيرين مثل نسبة الذكاء والتحصيل الدراسي على سبيل المثال .**

ومقياس الارتباط هو : معامل الارتباط (ر) حيث −١ ≤ ر ≤ ١ أي ان ر ∈ [−١ ، ١]

الارتباط نوعان :

١− ارتباط طردي ويكون موجب

تزداد قيمة احد المتغيرين بزيادة المتغير الآخر مثل العلاقه بين معدل الطالب وعدد ساعات الدراسه .

٢− ارتباط عكسي ويكون سالب

نقصان قيمة احد المتغيرين بزيادة المغير الآخر مثل العلاقه بين معدل الطالب وعدد ساعات مشاهدة التلفزيون .

ملاحظه :

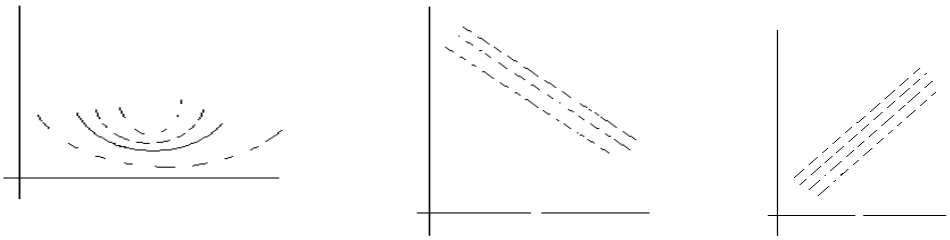
يمكن تمثيل قيم المتغيرين في المستوى الديكارتي فتحصل على ما يسمى شكل الانتشار

- يمكن التعرف على نوع العلاقه بين المتغيرين من شكل الانتشار

١− علاقه خطيه طرديه : اذا كانت النقاط موزعه على شكل خط مستقيم او قريبه منه بشكل متزايد وكلما كانت النقاط قريبه من الخط يكون الارتباط اقوى

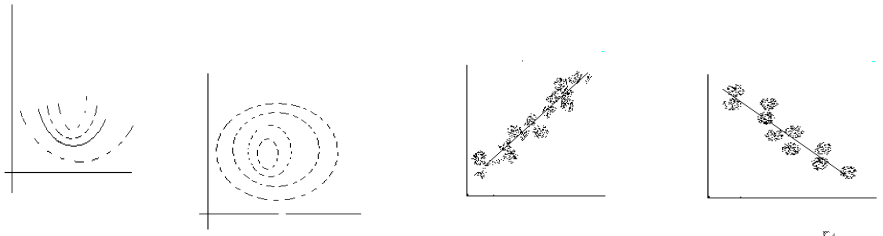
٢− علاقه خطيه عكسيه : اذا كانت على شكل خط مستقيم متناقص او قريبه منه .

٣− لا يمثل علاقه خطيه : اذا كانت النقاط موزعه بشكل منحنى .



(١) علاقه خطيه طرديه (٢) علاقه خطيه عكسيه (٣) لا تمثل علاقه خطيه

مثال :بين نوع الار تباط بين س ، ص في كل شكل مما يلي :



(أ) علاقه خطيه عكسيه

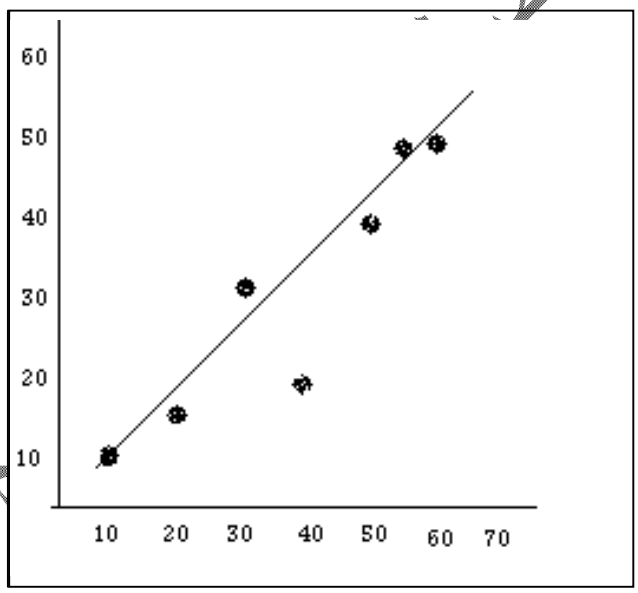
(ب) علاقه خطيه طرديه

(ج) عدم وجود ارتباط

(د) ارتباط ليس خطيا

مثال : ارسم شكل الانتشار و حدد نوع العلاقه بين المتغيرين س ، ص

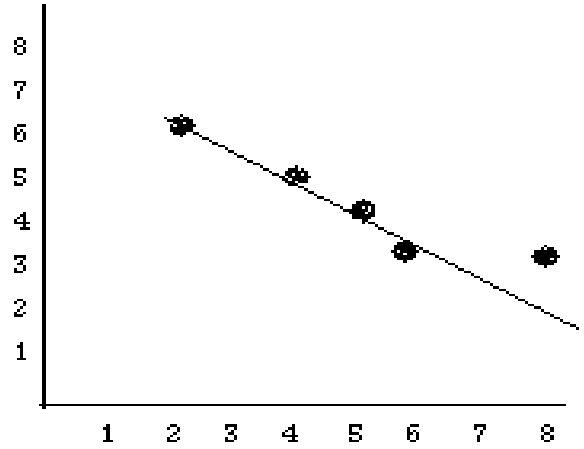
س	٦٠	٣٠	٢٠	٤٠	٥٥	٥٠	١٠
ص	٥٠	٣٠	١٥	٢٠	٥٠	٤٠	١٠



علاقة خطيه طرديه

مثال : ارسم الانتشار وحدد نوع العلاقة بين المتغيرين

س	٢	٤	٦	٨	٥
ص	٦	٥	٣	٣	٤

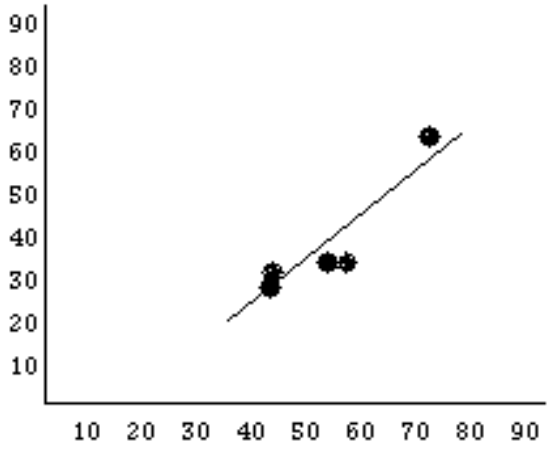


علاقة خطية عكسية

تدريب (١) :

السنه	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦
القمح س	٧٥.٥	٥٧.١	٤٦.٩	٥٨.٥	٤٢.٧
الشعير ص	٦٨.٩	٣١.٨	٢٧.٤	٣١.٧	٢٩.٢

ارسم شكل الانتشار الذي يمثل العلاقه بين المتغيرين س،ص وحدد نوع العلاقه



علاقة طرديه خطيه

مصطفى الفضالي ٠١٢٩٥٥٩٨٤٥

معامل ارتباط بيرسون

_وهي طريقه لقياس قوة العلاقه بين س، ص واعطاؤها قيمه عدديه :

ويحسب معامل ارتباط بيرسون بالطريقه التاليه :

$$\text{ر} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}})(\text{ص}_\text{ر} - \overline{\text{ص}})}{\sqrt{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}})^2 \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ص}_\text{ر} - \overline{\text{ص}})^2}}$$

ولحساب معامل ارتباط بيرسون بهذه الطريقه نجد الوسط الحسابي لكل من المتغيرين س ، ص ثم نضيف خمسة اعمده للجدول

وهي $\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}}$ ، $\text{ص}_\text{ر} - \overline{\text{ص}}$ ، $(\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}})(\text{ص}_\text{ر} - \overline{\text{ص}})$ ، $(\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}})^2$ ، $(\text{ص}_\text{ر} - \overline{\text{ص}})^2$

مثال: احسب معامل ارتباط بيرسون لقيم س ، ص في الجدول المجاور.

س	٥	٨	٧	٤
ص	٢	٦	٨	٤

$$\overline{\text{س}} = \frac{٥ + ٨ + ٧ + ٤}{٤} = \frac{٢٤}{٤} = ٦$$

$$\overline{\text{ص}} = \frac{٢ + ٦ + ٨ + ٤}{٤} = \frac{٢٠}{٤} = ٥$$

أ. محمد مصطفى الفضلاء ٠٧٩٥٥٩٨٤٠٦

س ر	ص ر	(س ر – $\overline{س}$)	(ص ر - $\overline{ص}$)	(س ر – $\overline{س}$)(ص ر - $\overline{ص}$)	(س ر - $\overline{س}$)^{٢}	(ص ر – $\overline{ص}$)^{٢}
٥	٢	١–	٣–	٣	١	٩
٨	٦	٢	١	٢	٤	١
٧	٨	١	٣	٣	١	٩
٤	٤	٢–	١–	٢	٤	١
المجموع	٢٤	٢٠	٠	١٠	١٠	٢٠

ر = ١٠ / √(١٠ × ٢٠) = ١٠ / √٢٠٠ = ١٠ / √(١٠٠ × ٢) = ١٠ / ١٠ √٢ = ١ / √٢

مثال (١) احسب معامل ارتباط بيرسون بين قيم س ، ص في الجدول التالي

س	٧	١٥	١٨	١٢	٦	١٤
ص	٦	٨	١٢	١٠	٨	١٦

الحل : $\overline{س}$ = (٧+١٥+١٨ +١٢ +٦+١٤) / ٦ = ٧٢ / ٦ = ١٢

$\overline{ص}$ = (٦ +٨ + ١٢ +١٠ +٨ +١٤) / ٦ = ٦٠ / ٦ = ١٠

س ر	ص ر	(س ر- $\overline{س}$)	(ص ر – $\overline{ص}$)	(س ر – $\overline{ص}$)(س ر- $\overline{س}$)	(س ر- $\overline{س}$)^{٢}	(ص ر – $\overline{ص}$)^{٢}
٧	٦	٥–	٤–	٢٠	٢٥	١٦
١٥	٨	٣	٢–	٦–	٩	٤
١٨	١٢	٦	٢	١٢	٣٦	٤
١٢	١٠	٠	٠	٠	٠	٠
٦	٨	٦–	٢–	١٢	٣٦	٤
١٤	١٦	٢	٦	١٢	٤	٣٦
٧٢	٦٠	٠	٠	٥٠	١١٠	٦٤

ر = ٥٠ / √(١١٠ ×٦٤) = ٥٠ / ٨ √١١٠

أ. محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٢٦

تدريب (٢)

احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص في الجدول الآتي

س	١١	١٠	١٢	١٤	٨
ص	١٤	١٠	٦	٩	١١

الحل : $\bar{س}$ = $\frac{١١ + ١٠ + ١٢ + ١٤ + ٨}{٥}$ = $\frac{٥٥}{٥}$ = ١١

$\bar{ص}$ = $\frac{١٤ + ١٠ + ٦ + ٩ + ١١}{٥}$ = $\frac{٥٠}{٥}$ = ١٠

س ر	ص ر	(س ر - $\bar{س}$)	(ص ر - $\bar{ص}$)	(ص ر - $\bar{ص}$)(س ر - $\bar{س}$)	(س ر - $\bar{س}$)^{٢}	(ص ر - $\bar{ص}$)^{٢}
١١	١٤	٠	٤	٠	٠	١٦
١٠	١٠	-١	٠	٠	١	٠
١٢	٦	١	-٤	-٤	١	١٦
١٤	٩	٣	-١	-٣	٩	١
٨	١١	-٣	١	-٣	٩	١
٥٥	٦٠	٠	٠	-١٠	٢٤	٣٤

ر = $\frac{-١٠}{\sqrt{٢٠ \times ٣٤}}$ = $\frac{-١٠}{\sqrt{٦٨٠}}$

اثر التعديلات الخطيه في قيمة معامل ارتباط بيرسون:

اذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص يساوي (ر) وعدلت قيمة كل من قيم س ، ص حسب العلاقه :

س* = أ س + ب ، ص* = جـ ص + د

حيث أ ، ب ، جـ ، د أعداد حقيقية أ ≠ ٠ ، جـ ≠ ٠

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

فان معامل الارتباط بين س* ، ص* يساوي

١) (ر) اذا كانت اشارتا أ ،جـ متشابهتين

٢) (– ر) اذا كانت اشارتا أ ،جـ مختلفتين

مثال : اذا كان معامل الارتباط بين س ، ص هو (ر= ٠.٨) فجد معامل الارتباط بين

١) س +٣ ، ص –٨

الحل : لاحظ ان أ معامل س = ١ ،جـ معامل ص = ١ لهما الاشاره نفسها موجبتين

⇐ ر= ٠.٨

٢) ٥س + ٢ ، ٢ ص + ٣

الحل : لاحظ ان أ معامل س = ٥ ، جـ معامل ص = ٢ لهما الاشاره نفسها موجبتين

⇐ ر= ٠.٨

٣)٧ - ٢ س ، ٣ – ص

الحل : لاحظ ان أ معامل س هي -٢ ، جـ معامل ص = -١ لهما الاشاره نفسها

⇐ ر= ٠.٨

٤) ٣ س + ١ ، ٥ – ٢ ص

الحل : لاحظ ان أ معامل س هي ٣ ، جـ معامل ص = -٢ مختلفتين في الاشارة

⇐ ر= - ٠.٨

****

تدريب ٣ : اذا كان معامل ارتباط بيرسون بين متغيرين س ، ص هو (- ٠.٨) فجد معامل الارتباط بين س* ، ص* في كل مما يلي

١) س* = ٢س – ٣ ، ص* = ص- ١ ⇐ أمعامل س = ٢ ، جـ معامل ص = ١ لهما نفس الاشاره ⇐ ر= -٨ .٠

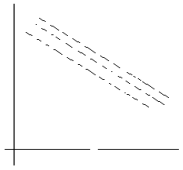
٢) س* = ٣ – ٢س ، ص* = ٥ – ص ⇐ أ معامل س = -٢ ، جـ معامل ص = -١ لهما الاشاره نفسها ⇐ ر= - ٠.٨

محمد مصطفى الفقيه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

تمارين ومسائل

١) اختر رمز الاجابه الصحيحه :

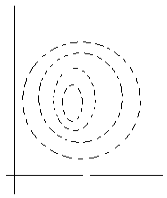
أ) اذا مثلت العلاقه بين التغيرين س ، ص في شكل الانتشار المجاور فان العلاقه بين المتغيرين بانها علاقه :



أ- تامه ب) طرديه ج عكسيه د) لا توجد علاقه

(ج) عكسيه

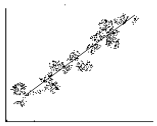
(٢) اذا مثلت العلاقه بين المتغيرين س ، ص في شكل الانتشار المجاور فان العلاقه بين المتغيرين س ، ص بانها



أ- تامه ب) طرديه ج عكسيه د) لا توجد علاقه

(د) لا توجد علاقه

(٣) اذا مثلت العلاقه بين المتغيرين س ، ص في شكل الانتشار المجاور فان العلاقه بين المتغيرين س ، ص بانها :



أ- تامه ب) طرديه ج عكسيه د) لا توجد علاقه

(ب) طرديه

(٤) اذا كان معامل الارتباط بين س ، ص هو ٠.٧ فان قيمة الارتباط س* ص* حيث س* =١-٢س ، ص* = ص +٤ يساوي

أ) ٠.٧ ب) -٠. ٧ ج) -٠. ٥٦ د) ٠. ٥٦

(ب) -٠. ٧

(٥) اذا كان س ، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (١٠) وكان $\sum (س_ر - \bar{س})^2 = ٣٦$

$\sum (ص_ر - \bar{ص})^2 = ١٦٠٠$ ، $\sum (س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص}) = ١٨٠$، **فاحسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س ، ص .**

$$ر = \frac{١٨٠}{\sqrt{٣٦ \times ١٦٠٠}} = \frac{١٨٠}{٦ \times ٤٠} = \frac{٣}{٤}$$

س٣٥

عدد سنوات الخبرة (س)	٥	٦	٧	٨	١٤
الأجر اليومي (ص)	٦	٧	٨	٩	١٠

احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س ، ص وحدد نوع الارتباط

الحل : $\bar{س} = \frac{٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ١٤}{٥} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$

$\bar{ص} = \frac{٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠}{٥} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$

$س_ر$	$ص_ر$	$(س_ر - \bar{س})$	$ص_ر - \bar{ص}$	$(ص_ر - \bar{ص})(س_ر - \bar{س})$	$(س_ر - \bar{س})^2$	$(ص_ر - \bar{ص})^2$
٥	٦	٣-	٢-	٦	٩	٤
٦	٧	٢-	١-	٢	٤	١
٧	٨	١-	٠	٠	١	٠
٨	٩	٠	١	٠	٠	١
١٤	١٠	٦	٢	١٢	٣٦	٤
٤٠	٤٠	٠	٠	٢٠	٥٠	١٠

$$ر = \frac{٢٠}{\sqrt{٥٠ \times ١٠}}$$

علاقه طرديه

محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٩٨٥٥٦

(٤)

اسم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
نسبة الذكاء (س)	١٣٠	١٢٠	١١٥	١١٠	١٠٠
علامة الرياضيات (ص)	٩٥	٧٠	٨٥	٨٠	٥٠

احسب معامل الارتباط برسون بين معامل الذكاء (س) وعلامة الرياضيات ص

$\overline{س} = \frac{١٣٠ + ١٢٠ + ١١٥ + ١١٠ + ١٠٠}{٥} = \frac{٥٧٥}{٥} = ١١٥$

$\overline{ص} = \frac{٩٥ + ٧٠ + ٨٥ + ٨٠ + ٥٠}{٥} = \frac{٣٨٠}{٥} = ٧٦$

س ر	ص ر	(س ر- $\overline{س}$)	ص ر – $\overline{ص}$	(ص ر – $\overline{ص}$)(س ر- $\overline{س}$)	(س ر- $\overline{س}$)^{٢}	(ص ر – $\overline{ص}$)^{٢}
١٣٠	٩٥	١٥	١٩	٢٨٥	٢٢٥	٣٦١
١٢٠	٧٠	٥	–٦	–٣٠	٢٥	٣٦
١١٥	٨٥	٠	٩	٠	٠	٨١
١١٠	٨٠	–٥	٤	–٢٠	٢٥	١٦
١٠٠	٥٠	–١٥	–٢٦	٣٩٠	٢٢٥	٦٧٦
٥٧٥	٣٨٠	٠	٠	٦٢٥	٥٠٠	١١٧٠

$ر = \frac{٦٢٥}{\sqrt{١١٧٠ \times ٥٠٠}}$

محمد مصطفى الفقيه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

معادلة الانحدار

Regression

معادلة الانحدار : هي علاقه خطيه تربط بين المتغرين س،ص وتكتب على الصوره ص= أس+ب ويسمى س المتغير المستقل ،صيسمى المتغير التابع وقيمة أ ، ب يعتمد على المقاييس الاحصائيه .

معادلة الإنحدلر للتنبؤ يقيم ص بدلالة س هي

$$\hat{ص} = أ\,س + ب$$

$$أ = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص})}{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \bar{س})^2}$$

حيث $\bar{س}$ ، $\bar{ص}$ يمثلان الوسط الحسابي لقيم المتغيرين س ، ص على الترتيب

ب = $\bar{ص}$ − أ $\bar{س}$

*** الخطا في التنبؤ = العلامه الحقيقيه – العلامه المتبأ بها**

مثال : يبين الجدول التالي علامات ٥ طلاب في مبحثين س ، ص

١) اكتب معادلة الانحدار

٢) جد خطأ التنبو اذا كانت قيمة س هي ٩

٣) هل يوجد علامه بين قيمة س،ص

اسم الطالب	أ	ب	ج	د	هـ
س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١٢	١٠	٨	٦	٤

$\bar{س} = \frac{١+٢+٣+٤+٥}{٥} = \frac{١٥}{٥} = ٣$ ، $\bar{ص} = \frac{١٢+١٠+٨+٦+٤}{٥} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$

محمد مصطفى الفضلة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

	س ر	ص ر	(س ر - $\overline{س}$)	ص ر – $\overline{ص}$	(س ر - $\overline{س}$)^{٢}	(ص ر – $\overline{ص}$)(س ر - $\overline{س}$)
	١	١٢	-٢	٤	٤	-٨
	٢	١٠	-١	٢	١	-٢
	٣	٨	٠	٠	٠	٠
	٤	٦	١	-٢	١	-٢
	٥	٤	٢	-٤	٤	-٨
مجموع	١٥	٤٠	٠	٠	١٠	-٢٠

أ= $\frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sum (س - \overline{س})^{٢}}$ = $\frac{-٢٠}{١٠}$ = -٢

ب = $\overline{ص}$ - أ $\overline{س}$

ب = ٨ - (-٢) × ٣ = ٨ + ٦ = ١٤

ص^ = -٢ س + ١٤

٢) الخطا في التنبؤ = ص= -٢ × ٩ + ١٤ = -١٨ + ١٤ = -٤

٣) من الجدول الذي يبين شكل الانتشار يوجد علاقه عكسيه قويه

مثال : يبين الجدول الاتي عدد حوادث السير في الفتره (٢٠٠٠ -٢٠٠٤)

السنه	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤
رقم السنه(س)	١	٢	٣	٤	٥
عدد الحوادث (ص)	٩٥	٩٦	٩٤	١١٧	١٣٣

جد مايلي ١) معادلة الانحدار للتنبؤ بقيم ص

٢) الخطا بالتنبؤ بعدد الحوادث اذا كان العدد الفعلي لعدد الحوادث ١١٧ حادثا

٣) استخدم معادلة خط الانحدار للتنبؤ بعدد المركبات المشتركه في الحوادث في عام ٢٠٠٦

الحـــل: $\overline{س}$ = $\frac{١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥}{٥}$ = $\frac{١٥}{٥}$ = ٣

$\overline{ص}$ = $\frac{٩٥ + ٩٦ + ٩٤ + ١١٧ + ١٣٣}{٥}$ = $\frac{٥٣٥}{٥}$ = ١٠٧

أ. محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

س ر	ص ر	(س ر - $\bar{س}$)	ص ر - $\bar{ص}$	(س ر - $\bar{س}$)^2	(ص ر - $\bar{ص}$)(س ر - $\bar{س}$)
١	٩٥	-٢	- ١٢	٤	٢٤
٢	٩٦	-١	- ١١	١	١١
٣	٩٤	٠	- ١٣	٠	٠
٤	١١٧	١	١٠	١	١٠
٥	١٣٣	٢	٢٦	٤	٥٢
مجموع ١٥	٥٣٥	٠	٠	١٠	٩٧

أ = $\frac{٩٧}{١٠}$ = ٩.٧ ، ب = ١٠٧ - ٩.٧ × ٣ = ١٠٧ - ٢٩.١ = ٧٧.٩

معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص هي ص^ = ٩.٧ س + ٧٧.٩

٢) عندما س = ٤ فإن ص ٩.٧ × ٤ + ٧٧.٩ = ١١٦.٧ المتنبأ بها

٣) في عام ٢٠٠٦ س = ٧

ص = ٩.٧ × ٧ + ٧٧.٩ = ١٤٥.٨

تدريب : يبين الجدول معامل الذكاء ومعدل التحصيل لستة طلاب .

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦
معامل الذكاء (س)	٩٥	١٠٦	١١٩	١١٣	١١٥	١٢٤
معدل التحصيل (ص)	٥٣	٦٢	٨٧	٧٥	٨٦	٩٣

١) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س.

٢) قدِّر معدل التحصيل المتنبأ به لطالب معامل ذكائه ١١٠

س ر	ص ر	(س ر - $\bar{س}$)	ص ر - $\bar{ص}$	(س ر - $\bar{س}$)^2	(ص ر - $\bar{ص}$)(س ر - $\bar{س}$)
٩٥	٥٣	-١٧	- ٢٣	٢٨٩	٣٩١
١٠٦	٦٢	-٦	- ١٤	٣٦	٨٤
١١٩	٨٧	٧	١١	٤٩	٧٧
١١٣	٧٥	١	- ١	١	- ١
١١٥	٨٦	٣	١٠	٩	٣٠
١٢٤	٩٣	١٢	١٧	١٤٤	٢٠٤
مجموع ٦٧٢	٤٥٦	٠	٠	٥٢٨	٧٨٥

$\bar{س} = \frac{٦٧٢}{٦} = ١١٢$ ، $\bar{ص} = \frac{٤٥٦}{٦} = ٧٦$

أ $= \frac{٧٨٥}{٥٢٨} = ١.٤٩$ ، ب $= ٧٦ - ١.٤٩ \times ١١٢ = ٧٦ - ١٦٦.٥ = -٩٠.٥$

٢) ص^ $=$ أ س $+$ ب ، ص^ $= ١.٤٩ \times ١١٠ - ٩٠.٥ = ٧٣.٤$

تمارين ومسائل

١) يبين الجدول الاتي علامات خمسة طلاب في مبحثي التاريخ والجغرافيا ، حيث النهاية العظمى للعلامة (١٠) . جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س .

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
علامته في التاريخ (س)	١١	١٢	١٠	١٣	١٤
علامته في الجغرافيا (ص)	١٢	١٦	١٠	١٤	١٨

س ر	ص ر	(س ر - $\bar{س}$)	ص ر - $\bar{ص}$	(س ر - $\bar{س}$)^٢	(ص ر - $\bar{ص}$)(س ر - $\bar{س}$)
١١	١٢	- ١	- ٢	١	٢
١٢	١٦	٠	٢	٠	٠
١٠	١٠	- ٢	- ٤	٤	٨
١٣	١٤	١	٠	١	٠
١٤	١٨	٢	٤	٤	٨
مجموع ٦٠	٧٠	٠	٠	١٠	١٨

$\bar{س} = \frac{٦٠}{٥} = ١٢$ ، $\bar{ص} = \frac{٧٠}{٥} = ١٤$

أ $= \frac{١٨}{١٠} = ١.٨$ ، ب $= ١٤ - ١.٨ \times ١٢ = ١٤ - ٢١.٦ = -٧.٦$

ص^ $= ١.٨$ س $- ٧.٦$

---

٣) إذا كان س ، ص يمثلان رأس مال الشركة وأرباحها مقدرة بآلاف الدنانير على الترتيب وجمعت البيانات الاتية لخمس شركات :

$\bar{س} = ١٠$، $\bar{ص} = ١٢$ ، $\sum (س_ر - \bar{س})^٢ = ١٠٠٠$

$\sum (س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص}) = ٨٠$

أ) جد معادلة الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س .
ب) قدِّر ربح شركة رأس مالها ١٠٠ ألف دينار .

أ. أحمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

الحـــل : أ) أ = $\frac{٨٠}{١٠٠٠}$ = ٠.٠٨ ، ب = ١٢ - ٠.٠٨ × ١٠ = ١٢ – ٠.٨ = ١١.٢

ب) ص^ = أ س + ب

س = ١٠٠ ⇐ ص^ = ٠.٠٨ × ١٠٠ + ١١.٢ = ٨ + ١١.٢ = ١٩.٢

أ/ محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

مراجعـــــــــة

١)حـــلّ المعادلات الاتيــة:

١) $\begin{pmatrix} ٨ \\ ٢س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ \\ ٦ \end{pmatrix} \Leftarrow ٢س = ٦ \Leftarrow س = ٣$

٢) $\begin{pmatrix} س \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ٧ \end{pmatrix} \Leftarrow س = ٣ + ٧ = ١٠$

٣) $ل(ن ، ٢) = ٢٠ \Leftarrow ٢٠ = ٥ \times ٤ \Leftarrow ن = ٥$

٤) $ن! = ٢٤ \Leftarrow ٢٤ = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \Leftarrow ن = ٤$

---

٢) اذا كان س متغيراً عشوائيــاً يخضع لتوزيع ذي الحدين حيث ن = ٣ ،
$ل(س \leq ١) = \frac{١٩}{٢٧}$ ، فجد كلاً مما يأتي :

١) قيمة أ ٢) ل (س = ٢)

الحـــل:

$ل(س \leq ١) = ل(س = ١) + ل(س = ٢) + ل(س = ٣) = \frac{١٩}{٢٧}$

$ل(س = ٠) = ١ - ل(س \leq ١) = ١ - \frac{١٩}{٢٧} = \frac{٢٧ - ١٩}{٢٧} = \frac{٨}{٢٧}$

$ل(س = ٠) = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٠ \end{pmatrix} (أ)^{٠} (١ - أ)^{٣} = \frac{٨}{٢٧}$

$(١ - أ)^{٣} = \frac{٨}{٢٧} \Leftarrow$ بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين $\Leftarrow ١ - أ = \frac{٢}{٣} \Leftarrow أ = ١ - \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣}$

٢) $ل(س = ٢) = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix} (\frac{١}{٣})^{٢} (\frac{٢}{٣})^{١} = ٣ \times \frac{١}{٩} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٦}{٢٧}$

---

٣) اذا كانت نسبة القطع الصالحة من انتاج احد المصانع ٩٥% فإذا اخذت (١٠) قطع من انتاج المصنع بطريقة عشوائية ، فجد احتمال :

أ) ان لا يكون بينها قطع معيبة . ل (س = ١٠) $\begin{pmatrix} ١٠ \\ ١٠ \end{pmatrix} (٠.٩٥)^{١٠} (٠.٠٥)^{٠}$ **(جميع القطع صالحة)**

ب) ان يكون بينها قطعة واحدة معيبة .
ل (س = ١) $= \begin{pmatrix} ١٠ \\ ١ \end{pmatrix} (٠.٠٥)^{١} (٠.٩٥)^{٩}$

جـ) أن لايزيد عدد القطع المعيبة على قطعة واحدة .

ل (س = ٠) + ل (س = ١) $= \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٠ \end{pmatrix} (٠.٠٥)^{٠} (٠.٩٥)^{١٠} + \begin{pmatrix} ١٠ \\ ١ \end{pmatrix} (٠.٠٥)^{١} (٠.٩٥)^{٩}$

..... صفحة (١٥٧) .....

٤) مصنع به (٨) ماكينات، إذا كان احتمال أن تحتاج كل ماكينة إلى إصلاح خلال عامين هو (٠.٢) ، احسب احتمال :

١) أن لا تحتاج أي من الماكينات إلى إصلاح . ٢) أن تحتاج اثنتان فقط إلى إصلاح

٣) أن تحتاج اثنتان على الأكثر إلى إصلاح ٤) أن تحتاج واحدة على الأقل إلى إصلاح

الحـــل: ن = ٨ ، أ = ٠.٢

١) ل (س = ٠) = $\begin{pmatrix} ٨ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (٠.٢)^{٠} (٠.٨)^{٨}

٢) ل (س = ٢) = $\begin{pmatrix} ٨ \\ ٢ \end{pmatrix}$ (٠.٢)^{٢} (٠.٨)^{٦}

٣) ل (س = ٠) + ل (س = ١) + ل (س = ٢)

= $\begin{pmatrix} ٨ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (٠.٢)^{٠} (٠.٨)^{٨} + $\begin{pmatrix} ٨ \\ ١ \end{pmatrix}$ (٠.٢)^{١} (٠.٨)^{٧} + $\begin{pmatrix} ٨ \\ ٢ \end{pmatrix}$ (٠.٢)^{٢} (٠.٨)^{٦}

٤) ١ - ل(س = ٠) = ١ - $\begin{pmatrix} ٨ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (٠.٢)^{٠} (٠.٨)^{٨} = ١ - (٠.٨)^{٨} ١ – ٠.١٦٧٨ = ٠.٨٣٢٢

---

٥) تقدم لامتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة الفرع الادبي (٤٠٠٠٠) طالب وطالبة ، فإذا كان الوسط الحسابي لمعدلات الطلبة في ذلك الامتحان (٦٢) والانحراف المعياري لها (١٥) ، جد عدد الطلبة الذين حصلو على معدل (٩٠) على فرض أن المعدلات مقربة لاقرب علامة صحيحة . اذا كان توزيع العلامات يتبع التوزيع الطبيعي .

μ = ٦٢ ، δ = ١٥ ، ز = $\frac{\text{س} - \mu}{\delta}$ ، عدد الطلبة = ٤٠٠٠٠

ل (س > ٩٠) = ل (ز > $\frac{٩٠ - ٦٢}{١٥}$) = ل (ز > $\frac{٢٨}{١٥}$) = ل (ز > ١.٨٧)

= ١ – ل (ز ≤ ١.٨٧) = ١ – ٠.٩٦٩٣ = ٠.٠٣٠٧

عدد الطلبة = ٤٠٠٠٠ × ٠.٠٣٠٧ = ١٢٢٨ **طالباً**

محمد مصطفى الفضاوي ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

٦) مدرسة فيها (٥٠٠)طالب ، فإذا كانت أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعي وكان الوسط الحسابي لهذه الأطوال يساوي (١٣٠) سم والانحراف المعياري لها (١٠) سم فجد
أ) نسبة الطلبة الذين أطوالهم أكثر من (١٤٠) سم .
ب) نسبة الطلبة الذين تقل أطوالهم عن (١١٨) سم.
جـ) نسبة الطلبة الذين تنحصر أطوالهم بين ١٢٦سم و ١٣٨ سم.

الحـــل: أ) ل (س ≤ ١٤٠) = ل (ز ≤ $\frac{١٤٠ - ١٣٠}{١٠}$) = ل (ز ≤ ١)

= ١ - ل (ز ≥ ١) = ١ – ٠.٨٤١٣ = ٠.١٥٨٧ × ١٠٠% = ١٥.٨٧%

ب) ل (س ≥ ١١٨) = ل (ز ≥ $\frac{١١٨ - ١٣٠}{١٠}$) = ل (ز ≥ - ١.٢)

= ١ - ل (ز ≥ ١.٢) = ١ – ٠.٨٨٤٩ = ٠.١١٥١ × ١٠٠% = ١١.٥١%

جـ) ل (١٣٦ ≥ س ≥ ١٣٨) = ل ($\frac{١٢٦ - ١٣٠}{١٠}$ ≥ ز ≥ $\frac{١٣٨ - ١٣٠}{١٠}$)

= ل (- ٠.٤ ≤ ز ≤ ٠.٨) = ل (ز ≥ ٠.٨) - ل (ز ≥ - ٠.٤)

= ل (ز ≥ ٠.٨) – (١ - ل (ز ≥ ٠.٤) = ٠.٧٨٨١ – (١ – ٠.٦٥٥٤)

= ٠.٧٨٨١ – ٠.٣٤٤٦ = ٠.٤٤٣٥ × ١٠٠% = ٤٤.٣٥ ، عدد الطلبة = ٥٠٠×٠.٤٤٣٥=٢٢٢

---

٧) يبين الجدول المجاور قيم المتغيرين س ، ص جد
أ) معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص
ب) معادلة الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س

س	١	٢	٦	٧
ص	١٠	٨	٩	٥

الحـــل:

	س ر	ص ر	ص ر – $\overline{ص}$	(س ر - $\overline{س}$)	(ص ر – $\overline{ص}$)(س ر - $\overline{س}$)	(س ر - $\overline{س}$)^{٢}	(ص ر – $\overline{ص}$)^{٢}
	١	١٠	٢	-٣	٦ -	٩	٤
	٢	٨	٠	- ٢	٠	٤	٠
	٦	٩	١	٢	٢	٤	١
	٧	٥	- ٣	٣	- ٩	٩	٩
المجموع	١٦	٣٢	٠	٠	- ١٣	٢٦	١٤

$\overline{س} = \frac{١٦}{٤} = ٤$ ، $\overline{ص} = \frac{٣٢}{٤} = ٨$

ر = $\frac{- ١٣}{\sqrt{١٤ \times ٢٦}} = \frac{- ١٣}{\sqrt{٣٦٤}} \cong \frac{- ١٣}{١٩} \cong$ ٠.٦٨٤٢

ب) أ = $\frac{- ١٣}{٢٦}$ ، ب = ٨- $\frac{- ١٣}{٢٦} \times ٤ = ٨ + \frac{٥٢}{٢٦} = \frac{٢٦٠}{٢٦} = ١٠$

ص^ = أ س + ب = $\frac{- ١٣}{٢٦}$ س + ١٠

..... صفحة (١٥٩) .....

٨) توصل قسم الانتاج في مصنع ما الى معادلة الانحدار الخطي البسيط للعلاقة بين عدد ساعات العمل اليومي (س) في المصنع ، وكمية الاستهلاك من الكهرباء بالكيلو واط / ساعة (ص) فكانت ص^ = ٢٥٠ + ٣٠ س ، اعتمد على معادلة الانحدار في الاجابة عن الاسئلة الاتية :

أ) استخرج من المعادلة قيم أ ، ب .

ب) قدر كمية الاستهلاك من الكهرباء إذا كانت ساعات العمل ليوم ما (٨) ساعات .

الحـــــل: ص^ = أ س + ب ⇐ أ = ٣٠ ، ب = ٢٥٠

ب) ص^ = ٢٥٠ + ٣٠×٨ = ٢٥٠ + ٢٤٠ = ٤٩٠

---

٩) يبين الجدول الآتي نتائج دراسة أجريت لمعرفة تأثير عدد ساعات العمل المتواصل في دقة العمل ، من حيث الأخطاء التي يرتكبها الموظف .

عدد ساعات العمل (س)	٨	٨	١٢	١٢	١٦	٢٠	٢٠	٢٤
عدد الأخطاء (ص)	٦	٦	٦	١٠	٨	١٢	١٦	١٦

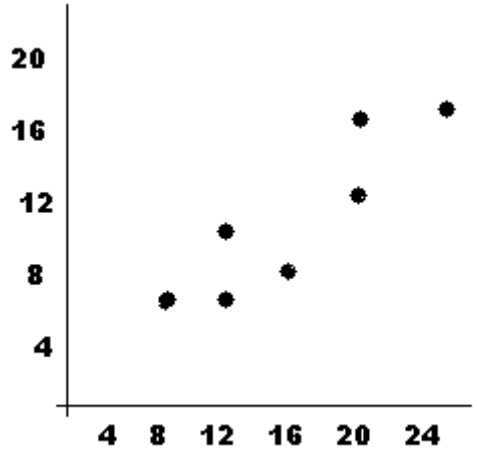
أ) ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين س ، ص .

ب) هل تعتقد بوجود علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص .

جـ) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص أذا علمت قيم س .

د) قدر عدد الاخطاء إذا كانت عدد ساعات العمل ١٠ ساعات .

نعم توجد علاقة خطية طردية



٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

س ر	ص ر	(س ر - $\overline{س}$)	ص ر - $\overline{ص}$	(س ر - $\overline{س}$)^{2}	(ص ر - ص)(س ر - $\overline{س}$)
٨	٦	- ٧	-٤	٤٩	٢٨
٨	٦	- ٧	- ٤	٤٩	٢٨
١٢	٦	- ٣	- ٤	٩	١٢
١٢	١٠	- ٣	٠	٩	٠
١٦	٨	١	- ٢	١	- ٢
٢٠	١٢	٥	٢	٢٥	١٠
٢٠	١٦	٥	٦	٢٥	٣٠
٢٤	١٦	٩	٦	٨١	٦٣
مجموع ١٢٠	٨٠	٠٠٠	٠٠٠	٢٤٨	١٦٩

$\overline{س} = \frac{١٢٠}{٨} = ١٥$ ، $\overline{ص} = \frac{٨٠}{٨} = ١٠$

أ $= \frac{١٦٩}{٢٤٨} = ٠.٦٨$ ، ب $= ١٠ - ٠.٦٨ \times ١٥ = ١٠ - ١٠.٢٢ = -٠.٢٢$

ص^ $= ٠.٦٨$ س $- ٠.٢٢$

س $= ١٠ \Leftarrow$ ص^ $= ٠.٦٨ \times ١٠ - ٠.٢٢ = ٦.٨ - ٠.٢٢ = ٦.٥٨$

أ. محمد مصطفى الضباع ٠١٧٩٥٥٩٨٤٥٩

اختبار ذاتي

١) يتكون هذا السؤال من (١٠) فقرات من نوع الاختيار من متعدد يلي كل فقرة اربع اجابات واحدة فقط منها صحيحة :

١) قيمة المقدار $\begin{bmatrix} ٥ \\ \\ ٣ \end{bmatrix}$ تســـــاوي :

أ) ١٠ ب) ١٥ جـ) ٨ د) ٢٤٣

أ

٢) يتكون مجلس الامهات والمعلمات في احدى المدارس من (٥) أمهات و (٣) معلمات ، فإذا قرر المجلس اختيار معلمة واحدة و(٢) من الامهات للمشاركة في احتفال المدرسة بعيد الاستقلال، بكم طريقة مختلفة يمكنه ذلك؟

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣٠ د) ٦٠

جـ

$$\begin{bmatrix} ٥ \\ \\ ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ \\ \\ ١ \end{bmatrix} = ١٠ \times ٣ = ٣٠$$

٣) عدد طرق اختيار ٥ طلاب من بين ٢٠ طالبا هو:

أ) ل (٢٠ ، ٥) ب) ٢٠ × ٥ جـ) ٢٠ ^ ٥ د) $\begin{bmatrix} ٢٠ \\ \\ ٥ \end{bmatrix}$

د

٤) إذا اشترك أربعة رياضيين في المباراة النهائية للسباحة ، فما عدد التراتيب المختلفة لنتائج السباق ؟

أ) ٢٤ ب) ٤ جـ) ٢٠ د) ٢٥٦

أ

٥) إذا كان احتمال نجاح زراعة شجرة التفاح في منطقة عجلون (٠.٧) فإذا زرع أبو محمد (٣) شجرات في حديقة بيته ، فما احتمال نجاح زراعتها جميعا:

أ) $(٠.٧)^{٣}$ ب) $(٠.٣)^{٣}$ جـ) ٠.٢١ د) ٠.٣

$$ل (س = ٣) = \begin{bmatrix} ٣ \\ \\ ٣ \end{bmatrix} \times (٠.٧)^{٣} \times (٠.٣)^{٠} = (٠.٧)^{٣}$$

أ

٦) رصد قطع التيار الكهربائي لمدة ستة أيام متتالية ، اذ ا كان احتمال أن ينقطع التيار هو (٠.٢) فما احتمال انقطاعه لمدة يومين فقط :

أ) ١٥ $(٠.٢)^{٢} (٠.٨)^{٦}$ ب) ١٥ $(٠.٢)^{٢} (٠.٨)^{٤}$

جـ)١٥ $(٠.٢)^{٦} (٠.٨)^{٢}$ د) ١٥ $(٠.٢)^{٤} (٠.٨)^{٢}$

أ

٧) إذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي هو :

{ (- ٢ ، ٠.٣) ، (٠ ، ٠.٢) ، (١ ، ٠.١٥) ، (٣ ، ك) } فما قيمة ك .

أ) ٠.٦٥ ب) ٠.٣٥ جـ) ٠.١ د) ٠.٧

ب

٨) إذا كان معامل الارتباط بين متغيرين س ، ص يساوي (– ٠.٩٥) فإن الارتباط بين س،ص

أ) طردي قوي ب) عكسي قوي جـ) طردي تام د) عكسي تام

ب

محمد مصطفى القضاة ٠٧٩٥٥٥٥٥٦

٩) لتكن ص^ = ٠.٣ س + ١٠ معادلة الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا عرفت قيم س ، إذا كانت احدى قيم س (١٠٠) وقيمة ص الحقيقية المناظرة لها (٣٧) فإن الخطأ في التنبؤ بقيمة ص يســاوي

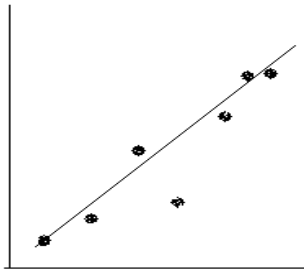
أ) - ٢٤ ب) ٣ جـ) ٢٤ د) – ٣

د

الحــل : ص^ = ٠.٣ × ١٠٠ + ١٠ = ٣٠ + ١٠ = ٤٠

الخطأ بالتنبؤ بقيمة ص = ص – ص^ = ٣٧ – ٤٠ = – ٣

١٠) يمثل الشكل المجاور شكل الانتشار لتوزيع ما بين المتغيرين س ، ص ، يمكن تقدير معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص بـ:



جـ

أ)- ١ ب) – ٠.٨ جـ)١ د) ٠.٨

---

٢) طائرة بها ٣ محركات من نوع واحد ، تعمل بشكل مستقل ، فإذا كان احتمال تعطل المحرك خلال (٢٠٠) ساعة يســاوي ١٠% ، إذا عرف المتغير العشوائي س بأنه عدد المحركات التي يصيبها العطل ، اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير س .

الحــل: ن = ٣ ، أ = ٠.١ ، س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

$$ل(٠) = \binom{٣}{٠} (٠.١)^{٠} (٠.٩)^{٣} = ٠.٧٢٩$$

$$ل(١) = \binom{٣}{١} (٠.١)^{١} (٠.٩)^{٢} = ٠.٢٤٣$$

$$ل(٢) = \binom{٣}{٢} (٠.١)^{٢} (٠.٩)^{١} = ٠.٠٢٧$$

$$ل(٣) = \binom{٣}{٣} (٠.١)^{٣} (٠.٩)^{٠} = ٠.٠٠١$$

{ (٠ ، ٠.٧٢٩) ، (١ ، ٠.٢٤٣) ، (٢ ، ٠.٠٢٧) ، (٣ ، ٠.٠٠١) }

---

٣) تقدم (١٠٠٠٠) طالب لامتحان ، وكان توزيع علاماتهم قريبا من التوزيع الطبيعي ، فإذا كان الوسط الحسابي لهذة العلامات (٥٧) والانحراف المعباري لها (١٠) وكان عدد الطلبة الذين علاماتهم فوق العلامة س وأقل من الوسط الحسابي (١٧٠٠) طالب ، فما قيمة العلامة س .

ملاحظة يمكن الاستفادة من الجدول الاتي :

العلامة المعيارية ز	٠.٠٤	٠.٩٧	٠.٤٤
ل (ز ≥ أ)	٠.٥١٦٠	٠.٨٣٤٠	٠.٦٧٠٠

فتاوى الفقهاء ٧٩٥٥٩٨٤٥٦

الحـــل : $\mu = ٥٧$ ، $\delta = ١٠$ ، $ل(\mu \geq ز \geq أ) = \frac{١٧٠٠}{١٠٠٠٠} = ٠.١٧$

$ل(ز \geq أ) = ٠.١٧ + ٠.٥ = ٠.٦٧$ ، $\Leftarrow ز = ٠.٤٤$

$ز = \frac{س - \mu}{\delta} = \frac{س - ٥٧}{١٠} = ٠.٤٤ \Leftarrow س - ٥٧ = ٤.٤$

$\Leftarrow س = ٧٠ + ٤.٤ = ٧٤.٤$

أ/ محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

تم بحمد الله

إعداد

الأستاذ :

محمد مصطفى القضاه

٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

أ/ محمد مصطفى القضاه ٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦