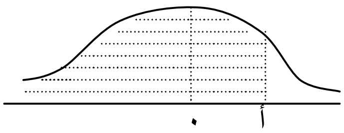
التوزيع الطبيعي

The Normal Distribution

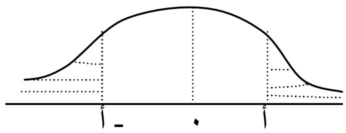
التوزيع الطبيعي المعياري : هو التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (صفر) وانحرافه المعياري يساوي (واحداً) ، ومتغيره العشوائي العلامة المعيارية (ز) .

♠ في التوزيعات المتصلة يتم إيجاد احتمال وقوع المتغير العشوائي (ز) تحت قيمة ما أو فوقها أو محصورة بين قيمتين ، من خلال جداول خاصة للتوزيع الطبيعي المعياري موجودة في نهاية الكتاب لإيجاد الاحتمال لقيم (ز) الأقل من (أ) أي ل (ز ≥ أ) حيث أ ≤ صفر كما في الشكل المجاور

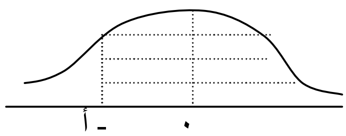
♣ ولإيجاد الاحتمالات على يسار قيم (ز) السالبة أو يمينها ، أو على يمين قيم (ز) الموجبة . فيتم استخدام خاصية التماثل . فإذا كانت أ > صفر فإن :



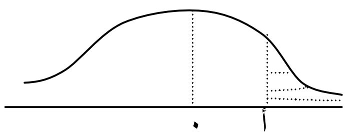
١) ل (ز ≥ - أ) = ل (ز ≤ أ) = ١ – ل (ز ≥ أ)



٢) ل (ز ≤ - أ) = ل (ز ≥ أ) من الجدول مباشرة



٣) ل (ز ≤ أ) = ١ - ل (ز ≥ أ)



مثال : اذا كان (ز) متغيراً عشوائيا طبيعيا معياريا. فجد قيمة كل مما يأتي، باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

١) ل (ز ≥ ١.٢٥) = ٠.٨٩٤٤ من الجدول مباشرة وهي القيمة الواقعة عند تقاطع صف العدد (١.٢) مع عمود الأجزاء من مئة (٠.٠٥)

٢) ل (ز ≤ - ١.٥) = ل (ز ≥ ١.٥) = ٠.٩٣٣٢ من الجدول مباشرة (قاعدة ٢)

٣) ل (- ٢ ≥ ز ≥ ٢) = ل (ز ≥ ٢) – ل (ز ≥ - ٢) = ل (ز ≥ ٢) – (١ - ل (ز ≥ ٢))

= ٠.٩٧٧٢ – (١ – ٠.٩٧٧٢) = ٠.٩٧٧٢ - ٠.٠٢٢٨ = ٠.٩٥٤٤

٤) ل (ز ≤ ١.١٦) = ٠.٨٧٧ من الجدول مباشرة
٥) ل (ز ≥ ١.١٦) = ١ – ل (ز ≤ ١.١٦) = ١ – ٠.٨٧٧ = ٠.١٢٣
٦) ل (ز ≤ - ٠.٨٥) = ل (ز ≥ ٠.٨٥) = ١ – ل (ز ≤ ٠.٨٥) = ١ – ٠.٨٠٢٣ = ٠.١٩٧٧
٧) ل (ز ≥ - ٠.٨٥) = ل (ز ≤ ٠.٨٥) = ٠.٨٠٢٣
٨) ل (١ ≤ ز ≤ ٢) = ل (ز ≤ ٢) – ل (ز ≤ ١) = ٠.٩٧٧٢ – ٠.٨٤١٣ = ٠.١٣٥٩

♠ ل (أ ≤ ز ≤ ب) = ل (ز ≤ ب) – ل (ز ≤ أ)
مثال : ل (٠.٦٥ ≤ ز ≤ ١.٧٥) = ل (ز ≤ ١.٧٥) – ل(ز ≤٠.٦٥)=٠.٩٥٩٥–٠.٧٤٢٢=٠.٢١٧٣

♣ ل(- ب ≤ ز ≤ - أ) = ل (أ ≤ ز ≤ ب) = ل (ز ≤ ب) – ل (ز ≤ أ)
مثال: ل (- ١.٥ ≤ ز ≤ - ٠.٥) = ل (٠.٥ ≤ ز ≤ ١.٥) = ل (ز ≤ ١.٥) – ل (ز ≤ ٠.٥)
٠.٩٣٣٢ – ٠.٦٩١٥ = ٠.٢٤١٧

تدريب ١: إذا كان (ز) متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً ، فجد كلاً مما يلي :
١) ل (ز ≥ ٢) = ١ – ل (ز ≤ ٢) = ١ – ٠.٩٧٧٢ = ٠.٠٢٢٨
٢) ل (ز ≤ - ٠.٨٥) = ١ – ل (ز ≤ ٠.٨٥) = ١ – ٠.٨٠٢٣ = ٠.١٩٧٧
٣) ل (٠.٠٩ ≤ ز ≤ ١.٥) = ل (ز ≤ ١.٥) – ل (ز ≤ ٠.٠٩) = ٠.٩٣٣٢ – ٠.٥٣٥٩ = ٠.٣٩٧٩
٤) ل (- ١.٧ ≤ ز ≤ ٠) = ل (ز ≤ ٠) – ل (ز ≤ - ١.٧) = ل (ز ≤ ٠) – (١ – ل (ز ≤ ١.٧)
= ٠.٥ – (١ – ٠.٩٥٥٤) = ٠.٥ – ٠.٠٤٤٦ = ٠.٤٥٥٤

القيم المعيارية التى علمت مساحتها تحت المنحنى الطبيعي المعيارى

١) إذا كانت ل (ز ≤ أ) ≥ ٠.٥ ، فإن أ > ٠ ، فإن ز ≥ ٠
(من الجدول نبحث عنها في المساحات ونأخذ القيم المناظرة لها من عمود ز)
مثال: ل(ز ≤ أ)=٠.٧٤٨٦ من الجدول تجد أن قيمة(ز) المناظرة للاحتمال٠.٧٤٨٦هي٠.٦٧ ⟸ أ=٠.٦٧

٢) إذا كانت ل (ز ≥ أ) = ل (ز ≤ - أ) < ٠.٥ ، حيث أ > ٠ ، = ١ – ل (ز ≤ أ)
مثال: ل (ز ≥ أ) = ٠.٤ ⟸ ل (ز ≤ أ) = ١ – ٠.٤ = ٠.٦ الآن نبحث في جدول المساحات ونأخذ قيمة (ز) المناظرة للاحتمال ٠.٦ (إذا لم تكن موجودة بالضبط نأخذ أقرب قيمة لها وهي ٠.٥٩٨٧ قيمة(ز) المناظرة للاحتمال ٠.٥٩٨٧ هي ٠.٢٥ ⟸ أ = ٠.٢٥
٣) إذا كانت ل (ز ≤ أ) < ٠.٥ ، فإن أ < ٠
مثال: ل (ز ≤ أ) = ٠.٩٤٩٥ = ل (ز ≥ - أ) = ٠.٩٤٩٥ مباشرة من الجدول، ز = ١.٦٤
⟸ أ = - ١.٦٤ لأن قيمة أ < ٠ ، نأخذ سالب قيمة (ز)

تدريب ٢: استخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري ، لإيجاد قيمة (أ) في كل من الحالات الآتية :
١) ل (ز ≤ أ) = ٠.٦٧ من الجدول قيمة (ز) التي تقابل ٠.٦٧ هي ٠.٤٤ ⟸ أ = ٠.٤٤
٢) ل (ز ≥ أ) = ٠.٧٤٨٦ ⟸ ل (ز ≤ - أ) = ٠.٧٤٨٦ وقيمة ز التي تقابلها (ز) = ٠.٦٧
أ = - ٠.٦٧لأن قيمة أ < ٠ ، نأخذ سالب قيمة (ز)

♦ ملاحظة: يرمز للوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي بالرمز (μ) والانحراف المعياري بالرمز (δ) .
أما الوسط الحسابي للعينة ($\overline{\text{س}}$) والانحراف المعياري (ع).
♥ من خواص منحنى التوزيع الطبيعي
١) متماثل حول الوسط
٢) المنوال = الوسيط = الوسط الحسابي

♣ إذا كان (س) متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه μ ، وانحرافه المعياري δ ، فإن :
العلامة المعيارية (ز) للمتغير العشوائي س هي :

$$\text{ز} = \frac{\text{س} - \mu}{\delta}$$

مثال: أذا كان (س)متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٥٠) ، وانحرافه المعياري (١٠) ، فجد :

١) القيمة المعيارية المقابلة للقيمة س = ١٠٠

الحل: μ = ٥٠ ، δ = ١٠

القيمة المعيارية المقابلة للقيمة (١٠٠) هي : ز = $\frac{\text{١٠٠ – ٥٠}}{\text{١٠}}$ = $\frac{\text{٥٠}}{\text{١٠}}$ = ٥

٢) القيمة التي تقابل القيمة المعيارية (٣) .

الحل: إذا كانت س تقابل القيمة المعيارية (٣) فإن : $\frac{\text{س - ٥٠}}{\text{١٠}}$ = ٣ ⇐ س – ٥٠=٣٠ ⇐ س= ٨٠

مثال: أذا كان (س) متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٨٠) ، وانحرافه المعياري (١٠) ، فجد :

١) ل (س ≥ ١٠٠) = ل (ز ≥ $\frac{\text{١٠٠ – ٨٠}}{\text{١٠}}$) = ل (ز ≥ ٢) = ٠.٩٧٧٢ (من الجدول مباشرةً)

٢) ل(س ≤ ٦٣) = ل (ز ≤ $\frac{\text{٦٣ – ٨٠}}{\text{١٠}}$) = ل(ز ≤ $\frac{\text{-١٧}}{\text{١٠}}$) = ل (≤ - ١.٧)= ل(ز ≥ ١.٧) =٠.٩٥٥٤

تدريب ٣: أذا كان (س)متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٦٠) ، وانحرافه المعياري (٨) ، فجد :

١) ل (س ≥ ٧٦) = ل (ز ≥ $\frac{\text{٧٦ – ٦٠}}{\text{٨}}$) = ل (ز ≥ $\frac{\text{١٦}}{\text{٨}}$) = ل (ز ≥ ٢) = ٠.٩٧٧٢(من الجدول)

٢)ل(س ≤ ٤٨) = ل (ز ≤ $\frac{\text{٤٨ – ٦٠}}{\text{٨}}$) = ل(ز ≤ $\frac{\text{-١٢}}{\text{٨}}$) = ل(ز ≤ - ١.٥) = ل(ز ≥ ١.٥)= ٠.٩٣٣٢

مثال: إذا كانت الرواتب الشهرية في أحد المصانع في مدينة الحسن الصناعية تخضع لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي (١٥٠) وانحرافه المعياري (٢٠) ، فإذا اختير أحد العمال عشوائياً من هذا المصنع احسب

١) احتمال أن يقل راتبه عن (١٢٠) ديناراً .
٢) احتمال أن يزيد راتبه عن (١٦٠) ديناراً.
٣) أن يقع راتبه بين ١٥٠ و ١٨٠ ديناراً.

الحل :

١) ل (س < ١٢٠) = ل (ز < $\frac{\text{١٢٠ – ١٥٠}}{\text{٢٠}}$) = ل (ز < $\frac{\text{-٣٠}}{\text{٢٠}}$) = ل (ز < - ١.٥)

= ١ – ل (ز < ١.٥) = ١ – (٠.٩٣٣٢) = ٠.٠٦٦٨

٢) ل (س > ١٦٠) = ل (ز > $\frac{\text{١٦٠ – ١٥٠}}{\text{٢٠}}$) = ل (ز > $\frac{\text{١٠}}{\text{٢٠}}$) = ل (ز > ٠.٥)

= ١ – ل (ز ≥ ٠.٥) = ١ – (٠.٦٩١٥) = ٠.٣٠٨٥

٣) ل (١٥٠ < س < ١٨٠) = ل ($\frac{\text{١٥٠ – ١٥٠}}{\text{٢٠}}$ < ز < $\frac{\text{١٨٠ – ١٥٠}}{\text{٢٠}}$) = ل (٠ < ز < ١.٥)

= ل (ز < ١.٥) – ل (ز< ٠) = ٠.٩٣٣٢ – ٠.٥ = ٠.٤٣٣٢

تدريب ٤ : μ = ١٠٥ ، δ = ١٠ ، أوجد ل (س > ١١٠)

الحـــل: ل (س > ١١٠) = ل (ز > (١١٠ – ١٠٥) / ١٠) = ل (ز > ٠.٥) = ١ – ل (ز > ٠.٥)

= ١ – ٠.٦٩١٥ = ٠.٣٠٨٥

مثال : (وزارة ١٩٨٥) : إذا كان الوسط الحسابي لعلامات (٢٠٠٠) طالب يساوي (٥٠) والانحراف المعياري يساوي (١٠) فإذا كانت علامة النجاح تساوي (٤٥) أوجد عدد الناجحين .

الحـــل: ل (س ≤ ٤٥) = ل (ز ≤ (٤٥ – ٥٠) / ١٠) = ل (ز ≤ -٥ / ١٠) = ل (ز ≤ - ٠.٥)

= ل (ز ≥ ٠.٥) = ٠.٦٩١٥ ⟸ نسبة الطلبة الناجحين = ٠.٦٩١٥ × ١٠٠% = ٦٩.١٥

عدد الطلبة ٦٩.١٥ / ١٠٠ × ٢٠٠٠ = ١٣٨٣ طالب

♣ أو عدد الطلبة = العدد الكلي × الاحتمال = ٢٠٠٠ × ٠.٦٩١٥ = ١٣٨٣ طالباً

مثال : مدرسة ابتدائية فيها (٥٠٠) طالب فإذا كانت أطوالهم قريبة من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (١٣٠) سم ، وانحراف معياري (٥) سم أوجد

١) نسبة الطلاب الذين تنحصر أطوالهم بين ١٢٦ و ١٣٨ .

٢) قيمة س إذا كانت نسبة الطلاب الذين أطوالهم فوق الوسط وأقل من س تساوي (٠.٢٢٥٧)

٣) عدد الطلاب المحصورة أطوالهم بين ١٢٥ و ١٢٠ .

الحـــل : ١) ل (١٢٦ > س > ١٣٨) = ل ((١٢٦ – ١٣٠) / ٥ > ز > (١٣٨ – ١٣٠) / ٥)

= ل (- ٠.٨ > ز > ١.٦) = ل (ز > ١.٦) – ل (ز > - ٠.٨)

= ل (ز > ١.٦) – (١ - ل (ز > ٠.٨)) = ٠.٩٤٥٢ – (١ – ٠.٧٨٨١)

= ٠.٩٤٥٢ – ٠.٢١١٩ = ٠.٧٣٣٣ ⟸ نسبة الطلبة ٠.٧٣٣٣ × ١٠٠% = ٧٣.٣٣%

٢) الوسط = ٠.٥ ومعطى في السؤال أن المساحة فوق الوسط هي ٠.٢٢٥٧ وبذلك تكون المساحة الكلية تحت (ز) الموجبة هي ٠.٥ + ٠.٢٢٥٧ = ٠.٧٢٥٧ ، وبذلك تكون قيمة (ز) = ٠.٦

ز = (س - μ) / δ ⟸ ٠.٦ = (س – ١٣٠) / ٥ ⟸ س – ١٣٠ = ٣ ⟸ س = ١٣٣ سم.

٣) ل (١٢٠ > س > ١٢٥) = ل ((١٢٠ – ١٣٠) / ٥ > ز > (١٢٥ – ١٣٠) / ٥) = ل (- ٢ > ز > - ١)

= ل (١ > ز > ٢) = ل (ز > ٢) – ل (ز > ١) = ٠.٩٧٧٢ – ٠.٨٤١٣ = ٠.١٣٥٩×٥٠٠=٦٨

مثال : (وزارة ١٩٧٦) : إذا كانت علامات (١٠٠٠٠) طالب تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٧٠) وانحراف معياري (١٢) ، جد عدد الطلبة الذين تقع علاماتهم بين ٥٨ و ٧٦ .

الحـــل : ل (٥٨ > س > ٧٦) = ل ((٥٨ – ٧٠) / ١٢ > ز > (٧٦ – ٧٠) / ١٢) = ل (- ١ > ز > ٠.٥)

= ل (ز > ٠.٥) – ل (ز > - ١) = ل (ز > ٠.٥) – (١ – ل (ز > ١))

= ٠.٦٩١٥ - (١ – ٠.٨٤١٣) = ٠.٦٩١٥ – ٠.١٥٨٧ = ٠.٥٣٢٨

عدد الطلبة = ١٠٠٠٠ × ٠.٥٣٢٨ = ٥٣٢٨ طالب

تدريب ٥ : إذا كانت أوزان الاطفال عند الولادة تتبع توزيعاً طبيعيا وسطه الحسابي (٣.٢) كغ وانحرافه المعياري (٠.٤) كغ .إذا اختير طفل عشوائياً عند الولادة ، فما احتمال أن يكون وزنه أكبر من (٤) كغ .

الحـــل : ل (س > ٤) = ل (ز > (٤ – ٣.٢) / ٠.٤) = ل (ز > ٢) = ١ – ل (ز > ٢)

= ١ – ٠.٩٧٧٢ = ٠.٠٢٢٨

تمارين ومسائل

١) ليكن (ز) متغيرا عشوائياً معيارياً ، استعمل جدول التوزيع الطبيعي والمعياري لإيجاد كل مما يأتي :

١) ل (ز ≥ ٢.٤٥) = ٠.٩٩٢٧ من الجدول مباشرة

٢) ل (ز ≤ ١) = ١ – ل (ز ≥ ١) = ١ – ٠.٨٤١٣ = ٠.١٥٨٧

٣) ل (ز ≥ - ٢.٠٥) = ل (ز ≤ ٢.٠٥) = ١ – ل (ز ≥ ٢.٠٥) = ١ – ٠.٩٧٩٨ = ٠.٠٢٠٢

٤) ل (ز ≤ - ٠.٦٥) = ل (ز ≥ ٠.٦٥) = ٠.٧٤٢٢

٥) ل (١.٠٨ ≥ ز ≥ ٢.٥) = ل (ز ≥ ٢.٥) – ل (ز ≥ ١.٠٨) = ٠.٩٩٣٨ – ٠.٨٥٩٩ = ٠.١٣٣٩

٦) ل(- ٢ ≥ ز ≥ - ١)= ل(١ > ز > ٢)= ل(ز >٢) – ل(ز > ١) = ٠.٩٧٧٢ – ٠.٨٤١٣ = ٠.١٣٥٩

٧) ل (- ٣ ≥ ز ≥ ٢) = ل(ز >٢) – ل (ز ≥ - ٣) = ل(ز >٢) – (١ - ل (ز ≥ ٣)
= ٠.٩٧٧٢ – (١ – ٠.٩٩٨٧) = ٠.٩٧٧٢ – ٠.٠٠١٣ = ٠.٩٧٥٩

٨) ل (- ١.٦ ≥ ز ≥ ٠) = ل (ز ≥ ٠) – ل (ز ≥ - ١.٦) = ل (ز ≥ ٠) – (١ – ل (ز ≥ ١.٦)
= ٠.٥ – (١ – ٠.٩٤٥٢) = ٠.٥ - ٠.٠٥٤٨ = ٠.٤٤٥٢

---

٢) تتخذ أعمار (٢٠٠٠٠) شخص شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي (٥٢) سنة ، وانحرافه المعياري (١٠) سنوات إذا اختير أحد الأشخاص عشوائياً ، فما احتمال أن يكون ممن تتراوح أعمارهم بين (٤٦) سنة و (٥٨) سنة .

الحـــل: ل (٤٦ ≥ س ≥ ٥٨) = ل ((٤٦ – ٥٢)/١٠ ≥ ز ≥ (٥٨ – ٥٢)/١٠) = ل (- ٠.٦ ≥ ز ≥ ٠.٦)

= ل (ز ≥ ٠.٦) – ل (ز ≥ - ٠.٦) = ل (ز ≥ ٠.٦) – (١ - ل (ز ≥ ٠.٦))
= ٠.٧٢٥٧ – ٠.٢٧٤٣ = ٠.٤٥١٤

---

٣) إذا كانت علامات (١٠٠٠) طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٦٥) وانحراف معياري (١٠) وكان عدد الناجحين (٧٥٨) طالباً فما علامة النجاح .

الحـــل: ل (ز ≤ أ) = ٧٥٨/١٠٠٠ = ٠.٧٥٨ ⇐ ل (ز ≥ - أ) = ٠.٧٥٨ ، نبحث عنها في جدول المساحات

⇐ - أ = ٠.٧ ⇐ أ = - ٠.٧ = ز

(س – ٥٢)/١٠ = - ٠.٧ ⇐ س – ٥٢ = - ٧ ⇐ س = – ٧ + ٥٢ ⇐ س = ٤٥ علامة النجاح .

<u>٤) وزارة ١٩٨٦</u> : إذا كانت أوزان سبائك ذهبية تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٠) غرام وانحراف معياري (١٠) غرام إذا تم اختيار أحد السبائك ، فما احتمال أن يقل وزنها عن (٤٤.٩) غراماً

الحـــل : ل (س ≥ ٤٤.٩) = ل (ز ≥ (٤٤.٩ – ٥٠)/١٠) = ل (ز ≥ - ٥.١/١٠)

ل (ز ≥ - ٠.٥١) = ١ – ل (ز ≥ ٠.٥١) = ١ – ٠.٦٩٥ = ٠.٣٠٥

---

٥) تخضع عبوات إحدى المنتجات الزراعية لتوزيع طبيعي وسطه (٢٥) كغ وانحرافه المعياري (٢) كغ إذا اختيرت احدى العبوات عشوائياً ، فما احتمال أن :

١) يزيد وزنها عن (٢٧) كغ . ل (س > ٢٧) = ل (ز > (٢٧ – ٢٥)/٢) = ل (ز > ١)

= ١ - ل (ز ≥ ١) = ١ – ٠.٨٤١٣ = ٠.١٥٨٧

٢) ينحصر وزنها بين (٢٤.٥) و (٢٥.٥)

ل (٢٤.٥ > س > ٢٤.٥) = ل ((٢٤.٥ – ٢٥)/٢ > ز > (٢٥.٥ – ٢٥)/٢) = ل (- ٠.٢٥ > ز > ٠.٢٥)

= ل (ز ≥ ٠.٢٥) – ل (ز ≥ - ٠.٢٥) = ل (ز ≥ ٠.٢٥) – (١ - ل (ز ≥ ٠.٢٥))
= ٠.٥٩٨٧ – (١ – ٠.٥٩٨٧) = ٠.٥٩٨٧ – ٠.٤٠١٣ = ٠.١٩٧٤

٦) إذا كان رواتب (١٠٠٠٠) معلم ومعلمة ، تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٢٠٠) دينار شهرياً ، وانحراف معياري يساوي (١٠) دنانير ، فما عدد المعلمين والمعلمات الذين تنحصر رواتبهم بين (١٨٠) ديناراً و (٢١٠) ديناراً .

<u>الحـــــل :</u>

ل (١٨٠ < س < ٢١٠) = ل ((١٨٠ – ٢٠٠) / ١٠ < ز < (٢١٠ – ٢٠٠) / ١٠)

= ل (- ٢ < ز < ١) = ل (ز ≤ ١) – ل (ز ≤ - ٢) = ل (ز ≤ ١) – (١- ل (ز ≤ ٢))

٠.٨٤١٣ – (١ – ٠.٩٧٧٢) = ٠.٨٤١٣ - ٠.٠٢٢٨ = ٠.٨١٨٥

عدد المعلمين هو ١٠٠٠٠ × ٠.٨١٨٥ = ٨١٨٥ معلماً ومعلمة.