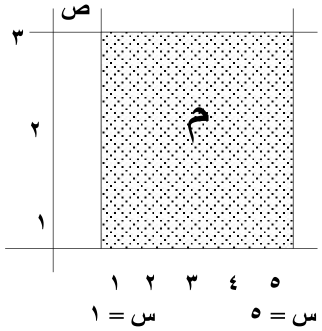
مثال (١) :
إذا كان ق (س) = ٣ فاحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) و محور السينات و المستقيمين س = ١ ، س = ٥ .



الحل :
ق (س) = ٣ ، ص = ق (س) = ٣ (المساحة هي مساحة المستطيل)
طوله ٤ وحدات و عرضه ٣ وحدات .

م = الطول × العرض ⇐ ٤ × ٣ = ١٢ وحدة مربعة .

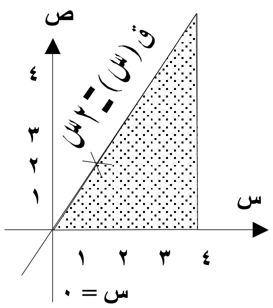
٢) المساحة = $\int_{١}^{٥}$ ٣ د س = ٣ (٥ – ١) = ٣ × ٤ = ١٢ وحدة مربعة

أو

= $\int_{١}^{٥}$ ٣ د س = ٣ س $\Big]_{١}^{٥}$ = ٣ × ٥ – ٣ × ١ = ١٥ – ٣ = ١٢ وحدة مربعة .

مثال (٢) :
إذا كان ق (س) = ٢ س ، فاحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) و محور السينات و المستقيمين س = ٠ ، س = ٤ .

= $\int_{٠}^{٤}$ ٢ س د س = $\Big[\frac{٢ س^{٢}}{٢}\Big]_{٠}^{٤}$ = ١٦ – ٠ = ١٦ و حدة مربعة .



لرسم منحنى ق (س) = ٢ س نفرض قيمة س و نوجد قيم ص .

ص = ٢ س

س	٠	١	٢
ص	٠	٢	٤

قـــاعدة:
مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) الذي يقع فوق محور السينات و بين محور السينات و المستقيمين س = أ ، س = ب ، أي الفترة [أ ، ب] تساوي :

$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س .

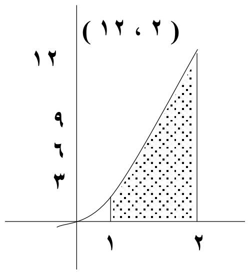
 # دائما نجد جذور الاقتران (نقاط التقاطع مع محور السينات) إذا الجذر واقع ضمن الفترة نكامل مرتين و إذا كان الجذر خارج الفترة نكامل مرة واحدة فقط .

مثال (٣) :

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = ٣ س^{٢} و محور السينات في الفترة [١ ، ٢] .

$$= \int_{١}^{٢} ٣\,\text{س}^{٢}\,\text{د س} = \left[\frac{\cancel{٣}\,\text{س}^{٣}}{\cancel{٣}}\right]_{١}^{٢} = (٢)^{٣} - (١)^{٣}$$

= ٨ − ١ = ٧ وحدات مربعة



جذر الاقتران = ٠

٣س^{٢} = ٠ ، س^{٢} = ٠ ، س = ٠

لاحظ أنه ليس ضمن الفترة لذلك نكامل مرة واحدة فقط.

ص = ٣ س^{٢}

س	٠	١	٢
ص	٠	٣	١٢

مثال (٤) :

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = س − ٤ و محور السينات في الفترة [١ ، ٣]

$$= \int_{١}^{٣} (\text{س} - ٤)\,\text{د س} = \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٤\,\text{س}\right]_{١}^{٣} = \left(\frac{٩}{٢} - \frac{١٢ \times ٢}{١ \times ٢}\right) - \left(\frac{١}{٢} - \frac{٤ \times ٢}{١ \times ٢}\right)$$

$$= \left(\frac{-١٥}{٢}\right) - \left(\frac{-٧}{٢}\right) = \frac{-١٥}{٢} + \frac{٧}{٢} = \frac{-٨}{٢} = -٤$$

$$\Leftarrow \int_{١}^{٣} (\text{س} - ٤)\,\text{د س} = -٤$$ وحدات مربعة .

= مساحة المنطقة المحصورة = ٤ وحدات مربعة ، لأن المساحة دائما موجبة و المساحة السالبة تعني أن الرسم واقع تحت محور السينات .

ق (س) = ٠ ، س- ٤ = ٠ ، س = ٤ ، جذر الاقتران خارج الفترة نكامل مرة واحدة

مثال (٥) :

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = س − ٢ و محور السينات في الفترة [٠ ، ٦]

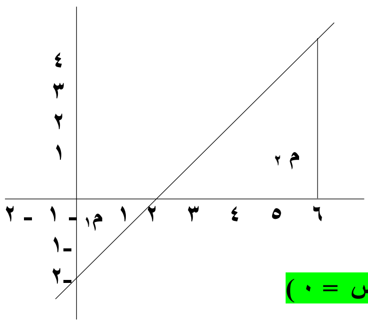
الحل :

وهنا يجب إيجاد نقطة تقاطع الاقتران مع محور السينات .

ق (س) = ٠ ⟸ س − ٢ = ٠ ⟸ س = ٢

لاحظ أن الجذر واقع ضمن الفترة المعطاة ، لذلك نكامل مرتين من س = ٠ إلى س = ٢
ثم من س = ٢ إلى س=٦

(الرسم لمن يشاء وهو غير ضروري)
في الاقتران الخطي ق (س) = أ س + ب فإن الخط المستقيم يقطع محور الصادات عند الحد المطلق (ب) .



ق (س) = أ س + $\boxed{\text{ب}}$ = النقطة التي يقطع عندها المنحنى محور الصادات

المقطع الصادي

ص = س − ٢

س	٠	٢
ص	٢-	٠

الخلاصـــة (تذكر أن محور الصادات معادلته س = ٠)

المساحة الكلية = م١ + م٢

$$= \int_{0}^{2} (\text{س} - ٢)\ \text{د س} + \int_{2}^{6} (\text{س} - ٢)\ \text{د س}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{2}}{٢} - ٢\text{س}\right]_{0}^{2} + \left[\frac{\text{س}^{2}}{٢} - ٢\text{س}\right]_{2}^{6}$$

$$= \left(\frac{٤}{٢} - ٤\right) + \left[\left(\frac{٣٦}{٢} - ١٢\right) - \left(\frac{٤}{٢} - ٤\right)\right]$$

$$= (٢ - ٤) + (١٨ - ١٢) - (٢ - ٤)$$

$$= (-٢) + (٦ + ٢)$$

= - ٢ يعني أن المساحة واقعة تحت محور السينات
⟸ م١ = ٢

المساحة الكلية = م١ + م٢ = ٢ + ٨ = ١٠ وحدات مربعة .

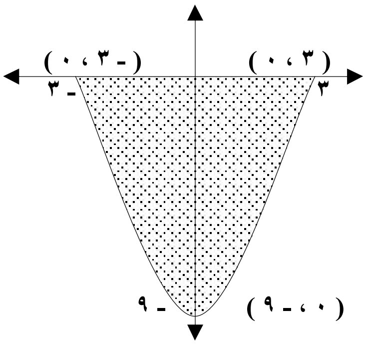
مثال (٦) :

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = س^{٢} – ٩ ومحور السينات .

في مثل هذا النوع من الاقترانات يجب إيجاد جذور الاقتران وهي تعتبر حدود التكامل .

⇐ س^{٢} – ٩ = ٠ ⇐ (س – ٣) (س + ٣) = ٠

⇐ س = ٣ ، س = -٣



قــاعدة :

عندما تقع المساحة كاملة تحت محور السينات أو كاملة فوق محور السينات، تكامل مرة واحدة فقط .

$$\int_{-٣}^{٣} (\text{س}^{٢} - ٩)\, \text{د س} = \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٩\,\text{س} \right]_{-٣}^{٣}$$

$$= \left(\frac{٢٧}{٣} - ٢٧ \right) - \left(\frac{-٢٧}{٣} - (-٢٧) \right) \Leftarrow = (٩ - ٢٧) - (-٩ + ٢٧)$$

⇐ = -١٨ – ١٨ = -٣٦ **(السالب تعني أن المساحة واقعة على محور السينات) .**

المساحة = ٣٦ وحدة مربعة

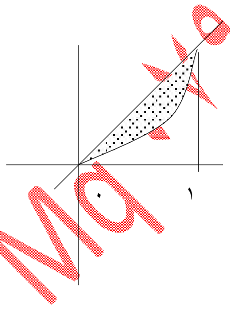
مثال (٧) :

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق (س) = س ، هـ (س) = س^{٢} .

لا يوجد حدود للتكامل لذلك نقوم بمساواة الاقترانين ببعض ونوجد الجذور و تكون (نقاط تقاطع الاقترانين) و تكون هي حدود التكامل .

ق (س) = هـ (س) ⇐ س = س^{٢} ⇐ س^{٢} – س = ٠

س (س – ١) = ٠ ⇐ س = ٠ أو س – ١ = ٠ ⇐ س = ١.



$$\int_{٠}^{١} (\text{س} - \text{س}^{٢})\, \text{د س} = \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{١} = \frac{١ \times ٣}{٢ \times ٣} - \frac{١ \times ٢}{٣ \times ٢} - ٠$$

$$\Leftarrow = \frac{٣}{٦} - \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٦} \text{ و حدة مربعة .}$$

قــاعدة :

إذا كان ق (س) ، هـ (س) اقترانين بحيث أن قيم ق (س) ≤ هـ (س) لجميع قيم س في الفترة [أ ، ب] فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين في الفترة تساوي

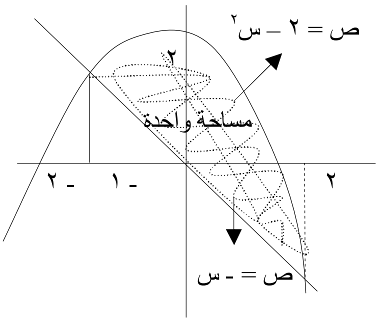
$$\int_{أ}^{ب} (\text{ق (س) – هـ (س)})\, \text{د س}$$ ، أ ، ب نقاط تقاطع الاقترانين (الاقتران الأكبر – الأصغر)

مثال (٨) :

احسب مساحة النقطة المحصورة بين منحني الاقترانين ص = ٢ – $\text{س}^{٢}$ ، ص = - س ،

الحل :

نقوم بمساواة الاقترانين لإيجاد نقاط التقاطع .



٢ – $\text{س}^{٢}$ = - س ⇐ - س – ٢ + $\text{س}^{٢}$ = ٠

$\text{س}^{٢}$ – س – ٢ = ٠ ⇐ (س – ٢) (س + ١)

⇐ = س = ٢ ، س = - ١ .

نأخذ عدد يقع في الفترة [– ١ ، ٢] و نقوم بتعويضه في الاقترانين و الاقتران الذي يعطي قيمه أكبر يكون هو أكبر من الاقتران الآخر، لنأخذ (الصفر واقع في الفترة [–١ ، ٢] .

ق (س) = ٢ – $\text{س}^{٢}$ ⇐ ق (٠) = ٢ – ٠ = ٢ ⇐ هـ (س) = - س ⇐ هـ (٠) = ٠

لا حظ أن ق (٠) > هـ (٠) إذن ق (٠) يوضع أولاً .

$$\int_{-١}^{٢} (٢ - \text{س}^{٢}) - (-\text{س})\ \text{د س} = \int_{-١}^{٢} (٢ - \text{س}^{٢} + \text{س})\ \text{د س} .$$

$$= \left[٢\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} \right]_{-١}^{٢} = \left[٤ - \frac{٨}{٣} + \frac{٤}{٢} \right] - \left[-٢ + \frac{١ \times ٢}{٣ \times ٢} + \frac{١ \times ٣}{٢ \times ٣} \right]$$

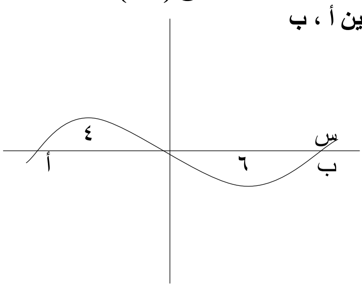
$$= \left[\frac{٦ \times ٣}{١ \times ٣} - \frac{٨}{٣} \right] - \left[\frac{-٢ \times ٦}{١ \times ٦} + \frac{٢}{٦} + \frac{٣}{٦} \right] = \left[\frac{١٨}{٣} - \frac{٨}{٣} \right] - \left[\frac{-١٢}{٦} + \frac{٢}{٦} + \frac{٣}{٦} \right]$$

$$= \left[\frac{١٠}{٣} \right] - \left[\frac{-٧}{٦} \right] = \frac{١٠ \times ٢}{٣ \times ٢} + \frac{٧}{٦} = \frac{٢٠}{٦} + \frac{٧}{٦} = \frac{٢٧}{٦} = ٤.٥ \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{أو } ٤ - \frac{٨}{٣} + \frac{٤}{٢} + ٢ - \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} = ٦ - \frac{٩}{٣} + \frac{٣}{٢} = ٣ + ١.٥ = ٤.٥ \text{ وحدة مربعة}$$

مثال (٩) :

يمثل الشكل التالي منحنى الاقتران ق (س) في الفترة [أ ، ب] و قيم المساحات المحصورة بين ق (س) و محور السينات بالوحدات المربعة اعتمد على هذا الشكل في إيجاد المساحة في الفرعين أ ، ب



أ) $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س = ٦ وحدات مربعة

فعلياً = - ٦ ، لكن السالب يعني أن المساحة واقعة تحت محور السينات

ب) $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س = ٤ + (- ٦) = - ٢ خطأ

السالب يعني المساحة واقعة تحت محور السينات ، وعند إيجاد المساحة الكلية نأخذ المساحة كقيمة موجبة .

$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س = ٤ + ٦ = ١٠ وحدات مربعة .

 # إذا ذكر في السؤال كلمة مساحة صراحة نأخذ جميع القيم موجبة بينما إذا طلب التكامل دون ذكر كلمة مساحة نأخذ القيم الواقعة فوق محور السينات موجبة والقيم الواقعة تحت محور السينات سالبة.