مكثف
المنير
في الرياضيات

الفــــرع الأدبـــي

الفصل الثاني

للمعيدين والدراسة الخاصة

الدورة الصيفية ٢٠٢٠

الأستاذ منير أبو بكر

٠٧٧٥٤٥٧٩٢٥

الوحدة الرابعة
التكامل وتطبيقاته

التكامل غير المحدود

تعريف التكامل بالرموز : $\int$ قَ(س) ءس = ق(س) + جـ حيث جـ ثابت التكامل

يسمى التكامل غير محدود لأن هناك قيم غير محدودة يمكن أن يأخذها الثابت جـ .

مشتقة تكامل الاقتران ق(س) = ق(س) ومعناها بالرموز :

$$\frac{ء}{ءس}\left(\int ق(س)\ ءس\right) = ق(س)$$

١) إذا كان ص = $\int$(٣س^{٢} – ٢س)ءس ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = ٢

الحل :

باشتقاق الطرفين :

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس}\left(\int (٣س^{٢} – ٢س)ءس\right) = ٣س^{٢} – ٢س$

عندما س = ٢ ، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣(٢)^{٢} –٢(٢) = ١٢ – ٤ = ٨

٢) إذا كان ق(س) = $\int$(س^{٢} + ٥س) ءس ، فإن قَ(–١) تساوي :

أ) -٤ ب) -٦ ج) ٣ د) ٤

الحل : نشتق الطرفين :

قَ(س) = س^{٢} + ٥س لأن الاشتقاق يلغي التكامل

قَ(–١) = (-١)^{٢} + ٥(-١) = ١ – ٥ = -٤

٣) إذا كان ق اقتراناً متصلاً وكان $\int$ ق(س) ءس = ٢س^{٣} + ٦س^{٢} + ٥ فجد قَ(١)

الحل : نشتق الطرفين : حيث الاشتقاق يلغي التكامل

ق(س) = ٦س^{٢} + ١٢س نشتق مرة ثانية لإيجاد قَ(س)

قَ(س) = ١٢س + ١٢ ومنه قَ(١) = ١٢ (١)^{٢} + ١٢ = ٢٤

٤) إذا كان ق اقترانا متصلا ، وكان $\int$ قَ(س) ءس = ٢س^{٣} فإن قَ(س) تساوي :

أ) ٣س^{٢} ب) س^{٣} ج)٦س د) ٦س^{٢}

باشتقاق الطرفين ينتج : قَ(س) = ٦س^{٢}

٥) إذا كان ق اقتراناً متصلاً وكان $\int$ ق(س) ءس = جتا٢س فإن قَ(س) تساوي :

أ) ٢ جا٢س ب) -٢ جا٢س ج) ٤ جتا٢س د) – ٤ جتا٢س

نشتق الطرفين :

$\frac{ء}{ءس}$ ($\int$ق(س) ءس) = $\frac{ء}{ءس}$ (جتا٢س)

ق(س) = -٢ جا٢س نشتق الطرفين مرة ثانية لإيجاد قَ(س)

قَ(س) = -٢ × ٢ جتا٢س = -٤ جتا٢س

إذا كان $\int$(قَ(س) + ٣) ءس = س^{٢} + ρ س + ١ وكان قَ(١)= ٤ فجد الثابت ρ ؟

نشتق الطرفين ⟵ قَ(س) + ٣ = ٢س + ρ لأن الاشتقاق يلغي التكامل

قَ(١) + ٣ = ٢ × ١ +ρ ومنه ٤ + ٣ = ٢ + ρ

٧ = ٢ + ρ ومنه ρ = ٥

قواعد التكامل :

القاعدة ١ : $\int$ أ ءس = أس + جـ حيث أ ثابت

مثال $\int$ ٣ءس = ٣س + جـ

القاعدة ٢ : $\int$ س^{ن} ءس = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ حيث ن ≠ -١

مثال $\int$ س^{٤} ءس = $\frac{س^{٥}}{٥}$ + جـ

القاعدة ٣ : $\int$ جاس ءس = - جتاس + جـ

القاعدة ٤ : $\int$ جتاس ءس = جاس + جـ

القاعدة ٥ : $\int$ قا^{٢}س ءس = ظاس + جـ حيث جـ ثابت التكامل

مثال $\int$(٣ جتاس – ٢قا^{٢}س + جاس)ءس

= ٣جاس -٢ظاس – جتاس + جـ

٦) جد قيمة مايلي : $\int$ $\sqrt{س^{٣}}$ ءس = $\int$س$^{\frac{٣}{٢}}$ ءس = $\frac{٢}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ

٧) جد قيمة مايلي : $\int$($\frac{قا^{٢}س}{٣}$ - ٢جاس + س) ءس = $\frac{١}{٣}$ $\int$ قا^{٢}س ءس - ٢ $\int$ جاس ءس + $\int$ س ءس

= $\frac{١}{٣}$ ظاس + ٢جتاس + $\frac{س^{٢}}{٢}$ + جـ

٨) $\int ٤\text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$ يساوي :

أ) $٤\text{ظاس} + \text{جـ}$ ب) $\text{ظاس} + \text{جـ}$ ج) $٤\ \text{قا}^{٢}\text{س} + \text{جـ}$ د) $٤\ \text{ظا}^{٢}\text{س} + \text{جـ}$

٩) جد قيمة مايلي : $\int (١٠\text{س}^{٢} - \sqrt[٦]{\text{س}} + ٣\text{قا}^{٢}\text{س})\ \text{ءس} = \int (١٠\text{س}^{٢} - \text{س}^{\frac{١}{٦}} + ٣\text{قا}^{٢}\text{س})\ \text{ءس}$

$= \frac{١٠}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{٦}{٧}\text{س}^{\frac{٧}{٦}} + ٣\text{ظاس} + \text{جـ}$

١٠) جد قيمة مايلي : $\int (\text{س}^{-٥} + \frac{١}{\text{س}^{٢}} + \text{قا}^{٢}\text{س})\ \text{ءس} = \int (\text{س}^{-٥} + \text{س}^{-٢} + \text{قا}^{٢}\text{س})\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{-٤}}{-٤} + \frac{\text{س}^{-١}}{-١} + \text{ظاس} + \text{جـ}$

١١) $\int \frac{٣}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس}$ يساوي :

أ) $٣\text{جاس} + \text{جـ}$ ب) $٣\text{قا}^{٢}\text{س} + \text{جـ}$ ج) $٣\text{ظاس} + \text{جـ}$ د) $\frac{٣}{\text{جاس}} + \text{جـ}$

الحل : $\int \frac{٣}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \int ٣\ \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس} = ٣\ \text{ظاس} + \text{جـ}$ حيث $\text{قا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

١٢) $\int ٢\text{ظاس جتاس}\ \text{ءس}$ يساوي :

أ) $٢\text{جاس} + \text{جـ}$ ب) $٢\text{قا}^{٢}\text{س} + \text{جـ}$ ج) $-٢\text{جتاس} + \text{جـ}$ د) $\frac{٢}{\text{جاس}} + \text{جـ}$

الحل :

$\int ٢\text{ظاس جتاس}\ \text{ءس} = \int ٢\ \frac{\text{جاس}}{\cancel{\text{جتاس}}} \times \cancel{\text{جتاس}}\ \text{ءس} = \int ٢\text{جاس}\ \text{ءس} = -٢\text{جتاس} + \text{جـ}$ حيث $\text{ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

١٣) $\int \frac{\text{جاس}}{\text{ظاس}}\ \text{ءس}$ يساوي :

ب) $\text{جتاس} + \text{جـ}$ ب) $\text{قا}^{٢}\text{س} + \text{جـ}$ ج) $-\text{جاس} + \text{جـ}$ د) $\text{جاس} + \text{جـ}$

الحل : $\int \frac{\text{جاس}}{\text{ظاس}}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{جاس}}{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}\ \text{ءس} = \int \cancel{\text{جاس}} \times \frac{\text{جتاس}}{\cancel{\text{جاس}}}\ \text{ءس} = \int \text{جتاس}\ \text{ءس} = \text{جاس} + \text{جـ}$

١٤) جد ص= $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\ \text{ءس} = \int (\text{س}^{٢} - ٣\text{س})(\text{س})^{-\frac{١}{٣}}\ \text{ءس}$

ص= $\int (\text{س}^{\frac{٥}{٣}} - ٣\text{س}^{\frac{٢}{٣}})\ \text{ءس} = \frac{٣}{٨}\text{س}^{\frac{٨}{٣}} - ٣ \times \frac{٣}{٥}\text{س}^{\frac{٥}{٣}} + \text{جـ}$

١٥) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، وكان قَ(س) = ٢س – ١ ، وكان ق(٢) = ٣ ، فجد قيمة ق(١)

فكرة الحل : عندما يطلبوا إيجاد ق(١) معنى ذلك يجب أن نجري تكامل قَ(س) لإيجاد ق(س) ثم نعوض س بـ ١

$\int$ قَ(س) ؤس = $\int$(٢س – ١) ؤس

ق(س) = س^{٢} – س + جـ

ق(٢) = (٢)^{٢} – (٢) + جـ

٣ = ٤ – ٢ + جـ ومنه ٣ = ٢ + جـ ومنه جـ = ١ وبالتالي قاعدة الاقتران :

ق(س) = س^{٢} – س + ١ ومنه ق(١) = (١)^{٢} – (١) + ١ = ١

١٦) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، وكان قَ(س) = ٦س^{٢} - ٤س + ١ ، وكان ق (١) = ٠ ، فجد قيمة ق(٢)

الحل :

نكامل الطرفين : $\int$ قَ(س) ؤس = $\int$ (٦س^{٢} – ٤س + ١)ؤ س

ق(س) = ٢س^{٣} – ٢س^{٢} + س + جـ ولكن ق(١) = ٠

ق(١) = ٢(١)^{٣} – ٢(١)^{٢} + ١ + جـ

٠ = ٢ – ٢ + ١ + جـ ومنه جـ = -١ فتكون ق(س) = ٢س^{٣} – ٢س^{٢} + س -١

ق(٢) = ٢(٢)^{٣} – ٢(٢)^{٢} + ٢ -١ = ١٦ -٨ + ٢ -١ = ٩

١٧) جد التكامل الآتي : $\int$ ($\frac{٣}{س^{٢}}$ + $\frac{٢}{جتا^{٢}س}$ - $\sqrt{س^{٣}}$) ؤس

الحل : $\int$(٣س$^{-٢}$ + ٢ قا^{٢}س – س$^{\frac{٣}{٢}}$) ؤس = ٣ $\frac{س^{-١}}{-١}$ + ٢ ظاس – $\frac{٢}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ

= $\frac{-٣}{س}$ + ٢ ظاس – $\frac{٢}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ

١٨) إذا كان $\int$ظا٤س ؤس ، فإنّ $\frac{ؤص}{ؤس}$ تساوي :

أ) ظا٤س ب) قا^{٢} ٤س جـ) ٤ظا٤س ٥) ٤قا^{٢}٤س

١٩) إذا كان ق متصلاً ، وكان $\int$ ق(س)ؤ س = ٥ – س^{٣} ، فإن قيمة ق(١) تساوي :

أ) -٢ ب) ٢ جـ)٣ د) -٣

نشتق الطرفين : ق(س) = -٣س^{٢} ⟵ ق(١) = -٣(١)^{٢} = -٣

التكامل المحدود

التكامل المحدود للاقتران ق على الفترة [أ ، ب] هو :

$\int_{أ}^{ب} ق(س)ءس = ع(س)\Big]_{أ}^{ب} = ع(ب) - ع(أ)$ ، حيث :

أ : الحد السفلي للتكامل المحدود

ب : الحد العلوي للتكامل المحدود

حيث يرمز للمقدار العددي : ع(ب) – ع(أ) بالرمز $ع(س)\Big]_{أ}^{ب}$

١) جد $\int_{١}^{٢} ٤ س^{٣} ءس = \cancel{٤}\frac{س^{٤}}{\cancel{٤}}\Big]_{١}^{٢} = س^{٤}\Big]_{١}^{٢} = (٢)^{٤} - (١)^{٤} = ١٦ - ١ = ١٥$

٢) أوجد تكامل : $\int_{٠}^{١} (\sqrt{س} + س)\, ءس$

$\int_{٠}^{١} (\sqrt{س} + س)\, ءس = \int_{٠}^{١} (س^{\frac{١}{٢}} + س)\, ءس = (\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢} س^{٢})\Big]_{٠}^{١}$

$= (\frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٣}} + \frac{١}{٢} س^{٢}) = (\frac{٢}{٣}\sqrt{(١)^{٣}} + \frac{١}{٢}(١)^{٢}) - (\frac{٢}{٣}\sqrt{(٠)^{٣}} + \frac{١}{٢}(٠)^{٢}) = \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} = \frac{٧}{٦}$

٣) إذا كان $\int_{-١}^{م} ٣\, ءس = ١٥$ ، فجد قيمة الثابت م

$٣س\Big]_{-١}^{م} = ١٥$ ومنه $٣(م) - ٣(-١) = ١٥$ ومنه $٣م + ٣ = ١٥$

$٣م = ١٢$ ومنه $م = ٤$

٤) إذا كان ق(-١)= - ٣ ، ق(٣) = ١٠ ، فإن $\int_{-١}^{٣} قَ(س)\, ءس$ تساوي :

أ) -١٠ ب) ١٣ ج) ٢٠ د) -١٢

$\int_{-١}^{٣} قَ(س)\, ءس = ق(س)\Big]_{-١}^{٣} = ق(٣) - ق(-١) = ١٠ - (-٣) = ١٠ + ٣ = ١٣$

٥) إذا كان ق(س) متصلا وكان ق(١) = ٣ ، ق(٢) = ٤ وكان : $\int_{١}^{٢} أ\, قَ(س)\, ءس = ١٢$

حيث أ ثابت ، فجد قيمة أ ؟

الحل :

$أ\, ق(س)\Big]_{١}^{٢} = ١٢$

$أ(ق(٢) - ق(١)) = ١٢$ ومنه $أ(٤ - ٣) = ١٢$ ومنه $أ = ١٢$

ملاحظة هامة :

مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر لأن التكامل المحدود قيمة ثابتة

٦) إذا كان ص = $\int_{-١}^{٢} (٢س^{٢} - ٣)\, ءس$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل : $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر لأن التكامل المحدود قيمة ثابتة مشتقته صفر

٧) احسب قيمة التكامل التالي : $\int_{-١}^{٢} \frac{س^{٢} + ٢س - ٨}{س + ٤}\, ء س$

الحل : $\int_{-١}^{٢} \frac{س^{٢} + ٢س - ٨}{س + ٤}\, ء س = \int_{-١}^{٢} \frac{\cancel{(س + ٤)}(س - ٢)}{\cancel{س + ٤}}\, ء س$

$= \int_{-١}^{٢} (س - ٢)\, ءس = \left[\frac{س^{٢}}{٢} - ٢س\right]_{-١}^{٢} = \frac{(٢)^{٢}}{٢} - ٢×٢ - \left(\frac{(-١)^{٢}}{٢} - ٢×-١\right)$

$= ٢ - ٤ - (\frac{١}{٢} + ٢) = -٢ - \frac{٥}{٢} = -\frac{٩}{٢}$

٨) إذا كان الاقتران ق معرفاً على الفترة [٢ ، ٣] ، وكان قَ(س) = ٣س^{٢} - ١ ، فجد قيمة ق(٣) – ق(٢)

$\int_{٢}^{٣} قَ(س)\, ءس = \int_{٢}^{٣} (٣س^{٢} - ١)\, ءس$

$\left[ق(س)\right]_{٢}^{٣} = \left[س^{٣} - س\right]_{٢}^{٣}$

$ق(٣) - ق(٢) = ((٣)^{٣} - ٣) - ((٢)^{٣} - ٢) = ٢٤ - ٦ = ١٨$

٩) إذا كان ق(س) = ٦س^{٢} فإنّ $\int_{١}^{٢} قَ(س)\, ءس$ يساوي :

أ) ١٦ ب) ١٢ ج) ١١ د) ١٨

الحل : $\int_{١}^{٢} قَ(س)\, ءس = \left[ق(س)\right]_{١}^{٢} = ق(٢) - ق(١) = ٦(٢)^{٢} - ٦(١)^{٢} = ٢٤ - ٦ = ١٨$

١٠) احسب قيمة التكامل الآتي :

أ) $\int_{-١}^{-٨} \frac{١}{\sqrt[٣]{س}}\, ءس = \int_{-١}^{-٨} س^{-\frac{١}{٣}}\, ءس = \left[\frac{٣}{٢} س^{\frac{٢}{٣}}\right]_{-١}^{-٨} = \left[\frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{س^{٢}}\right]_{-١}^{-٨} = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(-٨)^{٢}} - \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(-١)^{٢}}$

$= \frac{٣}{٢}×٤ - \frac{٣}{٢}×١ = \frac{٩}{٢}$

١١) إذا كان $\int_{٠}^{٢} م\, ءس = ١٥$ ، فإن قيمة الثابت م تساوي :

أ) -٥ ب) ٥ جـ) ٣ د) -٤

$\left[م س\right]_{٤}^{١} = ١٥ \longrightarrow م(١ - ٤) = ١٥ \longrightarrow -٣م = ١٥ \longrightarrow م = -٥$

خصائص التكامل المحدود

١) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ل ق(س) ءس} = \text{ل} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس}$ ، حيث ل ثابت

٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق(س)} + \text{ع(س)}) \text{ ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس} + \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ع(س) ءس}$

٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق(س)} - \text{ع(س)}) \text{ ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ع(س) ءس}$

١) إذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{ق(س)ءس} = \text{٤}$ ، $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{هـ (س)ءس} = \text{-١}$ فجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{٢ق(س)ءس}$ ب) $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} (\text{٢ق(س)-٥هـ (س)+١}) \text{ ءس}$

الحل :

أ) $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{٢ق(س)ءس} = \text{٢} \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{ق(س)ءس} = \text{٢} \times \text{٤} = \text{٨}$

ب) $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} (\text{٢ق (س)-٥هـ (س)+١}) \text{ ءس} = \text{٢} \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{ق(س) ءس} - \text{٥} \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{هـ (س) ءس} + \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{١ ءس}$

$= \text{٢} \times \text{٤} - \text{٥} \times \text{-١} + \Big[\text{س}\Big]_{\text{١}}^{\text{٢}} = \text{٨} + \text{٥} + (\text{٢} - \text{١}) = \text{١٣} + \text{١} = \text{١٤}$

٢) إذا كان $\int_{\text{-١}}^{\text{٣}} \frac{\text{ل(س)}}{\text{٢}} \text{ ءس} = \text{-٢}$ ، $\int_{\text{-١}}^{\text{٣}} \text{ع(س)ءس} = \text{٦}$ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\int_{\text{-١}}^{\text{٣}} \text{٣ل(س) ءس}$ ب) $\int_{\text{-١}}^{\text{٣}} \left(\frac{\text{ع(س)}}{\text{٢}} - \text{٤ ل(س)} - \text{٨س}\right)\text{ءس}$

الحل :

أ) $\int_{\text{-١}}^{\text{٣}} \text{٣ل(س) ءس} = \text{٣} \int_{\text{-١}}^{\text{٣}} \text{ل(س)ءس}$ ولكن $\int_{\text{-١}}^{\text{٣}} \frac{\text{ل(س)}}{\text{٢}} \text{ ءس} = \text{-٢}$ ومنه $\int_{\text{-١}}^{\text{٣}} \text{ل(س)ءس} = \text{-٤}$ نعوض

$= \text{٣} \times \text{-٤} = \text{-١٢}$

ب) $\int_{\text{-١}}^{\text{٣}} \left(\frac{\text{ع(س)}}{\text{٢}} - \text{٤ ل(س)} - \text{٨س}\right)\text{ءس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int_{\text{-١}}^{\text{٣}} \text{ع(س)ءس} - \text{٤} \int_{\text{-١}}^{\text{٣}} \text{ل(س)ءس} - \text{٨} \int_{\text{-١}}^{\text{٣}} \text{س ءس}$ نعوض

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{٦} - \text{٤} \times \text{-٤} - \Big[\text{٤س}^{\text{٢}}\Big]_{\text{-١}}^{\text{٣}} = \text{٣} + \text{١٦} - (\text{٤(٣)}^{\text{٢}} - \text{٤(-١)}^{\text{٢}})$

$= \text{١٩} - (\text{٣٦} - \text{٤}) = \text{١٩} - \text{٣٢} = \text{-١٣}$

٣) إذا كان : $\int_{٠}^{٢} \frac{\text{ق(س)}}{٢}\,\text{ءس} = ٦$ ، فجد قيمة $\int_{٠}^{٢} (٣\text{س}^{٢} + ٣\,\text{ق(س)})\,\text{ءس}$

$\int_{٠}^{٢} \frac{\text{ق(س)}}{٢}\,\text{ءس} = ٦$ نضرب الطرفين بـ ٢ ومنه $\int_{٠}^{٢} \text{ق (س) ءس} = ١٢$

$\int_{٠}^{٢} (٣\text{س}^{٢} + ٣\text{ق(س)})\,\text{ءس} = ٣\int_{٠}^{٢} \text{س}^{٢}\text{ءس} + ٣\int_{٠}^{٢} \text{ق(س) ءس}$

$= \left[\text{س}^{٣}\right]_{٠}^{٢} + ٣ \times ١٢ = (٢)^{٣} - (٠)^{٣} + ٣٦ = ٤٤$

خصائص أخرى للتكامل المحدود

١ - $\int_{أ}^{أ} \text{ق(س)ءس} = \text{صفراً}$ أي عندما الحد العلوي = الحد السفلي ، فإن قيمة التكامل تساوي صفر

مثال $\int_{٢}^{٢} \text{ق(س)ءس} = \text{صفراً}$

٢- $\int_{أ}^{ب} \text{ق(س) ءس} = -\int_{ب}^{أ} \text{ق(س)ءس}$ أي عندما نعكس حدود التكامل نعكس إشارة التكامل

مثال $\int_{١}^{٣} \text{ق(س) ءس} = ٣$ فإن $\int_{٣}^{١} \text{ق(س)ءس} = -٣$

٣- $\int_{أ}^{ب} \text{ق(س)ءس} + \int_{ب}^{جـ} \text{ق(س)ءس} = \int_{أ}^{جـ} \text{ق(س)ءس}$ هذه تسمى خاصة الإضافة

٤) إذا كان $\int_{-٢}^{٤} \frac{\text{ق(س)}}{٢}\,\text{ءس} = ٣$ ، $\int_{-٢}^{٥} \text{ق(س)ءس} = ٤$ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\int_{٤}^{-٢} \text{ق(س)ءس}$ ب) $\int_{٥}^{٤} \text{ق(س)ءس}$

الحل :

أ) $\int_{-٢}^{٤} \frac{\text{ق(س)}}{٢}\,\text{ءس} = ٣$ ومنه $\frac{١}{٢}\int_{-٢}^{٤} \text{ق(س) ءس} = ٣$ نضرب الطرفين بـ ٢

$\int_{-٢}^{٤} \text{ق(س) ءس} = ٦$ ومنه $\int_{٤}^{-٢} \text{ق(س) ءس} = -٦$

ب) $\int_{٥}^{٤} \text{ق(س)ءس} = \int_{٥}^{-٢} \text{ق(س) ءس} + \int_{-٢}^{٤} \text{ق(س) ءس} = -٤ + ٦ = ٢$ (حسب خاصية الإضافة)

٥) إذا كان $\int_{٢}^{٣} \frac{\text{ق(س)}}{٤}\,\text{ء س} = ٣$ ، $\int_{٥}^{٣} \text{ق(س) ءس} = ٤$ ، فما قيمة $\int_{٢}^{٥} (٣\text{ق(س)} + ٢\text{س} + ٤)\,\text{ءس}$ ؟

$\int_{٢}^{٥} (٣\text{ق(س)} + ٢\text{س} + ٤)\,\text{ءس} = ٣\int_{٢}^{٥} \text{ق(س) ءس} + \int_{٢}^{٥} (٢\text{س} + ٤)\,\text{ءس}$

$= ٣\int_{٢}^{٥} \text{ق(س) ءس} + \left[\text{س}^{٢} + ٤\text{س}\right]_{٢}^{٥} = ٣\int_{٢}^{٥} \text{ق(س) ءس} + ((٥)^{٢} + ٤\times٥) - ((٢)^{٢} + ٤ \times ٢)$

= ٣ ($\int_{٢}^{٣}$ ق(س) ءس + $\int_{٣}^{٥}$ ق(س) ءس) + ٤٥ - ١٢ = ٣($\int_{٢}^{٣}$ ق(س) ءس - ٤) + ٣٣

ولكن من الفرض $\int_{٢}^{٣} \frac{ق(س)}{٤}$ ءس = ٣ نضرب الطرفين بـ ٤ ومنه $\int_{٢}^{٣}$ ق(س) ءس = ١٢ نعوض

= ٣(١٢ - ٤) + ٣٣ = ٢٤ + ٣٣ = ٥٧

---

٦) إذا كان $\int_{أ^{٣}+٥}^{-٣}$ ق(س)ءس = ٠ ، فجد قيمة الثابت م .

الحل :

بما أن قيمة التكامل المحدود تساوي صفراً ، وقاعدة الاقتران غير معلومة ، فإن :

الحد العلوي للتكامل = الحد السفلي للتكامل

أ^{٣}+٥ = -٣ ومنه أ^{٣} = -٨ أي أ = -٢

---

٧) إذا كان $\int_{ب}^{٢}$ (٣س^{٢} – ٤)ءس = ٠ فجد قيمة للثابت ب .

$\int_{ب}^{٢}$ (٣س^{٢} – ٤)ءس = (س^{٣} – ٤س) $\Big]_{ب}^{٢}$

٠ = ((٢)^{٣} – ٤(٢)) - ((ب)^{٣} – ٤(ب))

٠ = ٠ – ب^{٣} + ٤ب ومنه ٠ = – ب^{٣} + ٤ب ومنه ب (-ب^{٢} + ٤) = ٠

إما ب = ٠ ، أو - ب^{٢} + ٤ = ٠ ومنه ب^{٢} = ٤ ومنه ب = -٢ ، ٢

---

٨) إذا كان $\int_{٠}^{جـ}$ (٢س – ١) ءس = ٦ ، فجد قيمة الثابت جـ ؟

(س^{٢} – س) $\Big]_{٠}^{جـ}$ = ٦ ومنه ((جـ)^{٢} – جـ) - ((٠)^{٢} – ٠) = ٦

جـ^{٢} – جـ = ٦ ومن جـ^{٢} – جـ - ٦ = ٠ ومنه (جـ - ٣)(جـ + ٢) = ٠ إما جـ = ٣ أو جـ = -٢

---

٩) قيمة $\int_{٠}^{٢}$ ٩س ءس تساوي :

أ) ١٨ ب) ٦ ج) ٣٦ د) صفر

$\int_{٢}^{٢}$ ٩ ءس = صفر لأن مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر

---

١٠) إذا كان $\int_{-٢}^{٣}$ ق(س) ءس = ٤ ، $\int_{-٢}^{٤}$ ق(س) ءس= ٩ ، فإن $\int_{٤}^{٣}$ ٣ق(س) ءس يساوي :

أ) ٦ ب) -٦ ج) -١٥ د) ١٨

$\int_{٤}^{٣}$ ق(س) ءس = $\int_{٤}^{-٢}$ ق(س) ءس + $\int_{-٢}^{٣}$ ق(س) ءس = -٩ + ٤ = -٥

$\int_{٤}^{٣}$ ٣ق(س) ءس = ٣ $\int_{٤}^{٣}$ ق(س) ءس = ٣ × -٥ = -١٥

١١) إذا علمت أن $\int_{٠}^{٢} \text{ق(س)ءس} = ٤$ ، $\int_{٢}^{٣} \text{٦ق(س)ءس} = ١٢$ ، فجد قيمة $\int_{٣}^{٠} \text{ق(س)ءس}$

$\int_{٣}^{٠} \text{ق(س)ءس} = \int_{٣}^{٢} \text{ق(س)ءس} + \int_{٢}^{٠} \text{ق(س)ءس}$ حسب خاصية الإضافة

ولكن $\int_{٢}^{٣} \text{٦ق(س)ءس} = ١٢$ ومنه $٦ \int_{٢}^{٣} \text{ق(س)ءس} = ١٢$ نقسم على ٦ $\int_{٢}^{٣} \text{ق(س)ءس} = ٢$

$\int_{٣}^{٠} \text{ق(س)ءس} = -٢ + -٤ = -٦$

١٢) إذا كان $\int_{-١}^{٢} \text{ق(س) ءس} = ٥$ فإن : $\int_{٢}^{-١} \frac{١}{٥} \text{ق(س) ءس}$ يساوي :

أ) ٥ ب) -٥ جـ) ١ د) -١

١٣) إذا كان : $\int_{-١}^{\text{أ}} \text{٣س}^{٢} \text{ ءس} = ٠$ فإن قيمة قيمة الثابت أ تساوي :

أ) -٢ ب) ٢ ج) -١ د) ١

الحل :

$\int_{-١}^{\text{أ}} \text{٣س}^{٢} \text{ ءس} = ٠$ بما أن قيمة التكامل المحدود تساوي صفر ، وقاعدة الاقتران معلومة فإن :

$\left[\text{س}^{٣}\right]_{-١}^{\text{أ}} = ٠$

$\text{أ}^{٣} - (-١)^{٣} = ٠ \longrightarrow \text{أ}^{٣} + ١ = ٠ \longrightarrow \text{أ}^{٣} = -١ \longrightarrow \text{أ} = -١$

١٤) إذا كان $\int_{٢}^{\text{٢ب}} \text{ق(س) ءس} = ٠$ فإن قيمة الثابت ب تساوي :

أ) ٢ ب) ٤ ب) ١ ب) -١

الحل : بما أن قيمة التكامل المحدود تساوي صفراً ، وقاعدة الاقتران غير معلومة ، فإن :

الحد العلوي للتكامل = الحد السفلي للتكامل

٢ب = ٢ ومنه ب = ١

١٥) إذا كان الاقتران ق معرفاً على الفترة [٠ ، ٢] ، وكان قَ(س) = ٢س + ٥ ، فجد قيمة ق(٢) – ق(٠)

$\int_{٠}^{٢} \text{قَ(س) ءس} = \int_{٠}^{٢} (\text{٢س} + ٥) \text{ ءس}$

$\left[\text{ق(س)}\right]_{٠}^{٢} = \left[(\text{س}^{٢} + \text{٥س})\right]_{٠}^{٢}$

$\text{ق(٢)} - \text{ق(٠)} = ((٢)^{٢} + ٥\times٢) - ((٠)^{٢} + ٥\times٠) = ٤ + ١٠ - ٠ = ١٤$

١٦) إذا كان $\int_{1}^{5}$(ق(س) - ٧) ءس = ٢ ، $\int_{5}^{1}$٣هـ (س) ءس= ٩ ، فجد قيمة : $\int_{1}^{5}$(ق(س) + هـ(س)) ءس

$\int_{1}^{5}$(ق(س) - ٧) ءس = ٢ ⟵ $\int_{1}^{5}$ق(س) ءس - $\int_{1}^{5}$٧ ءس = ٢ ⟵ $\int_{1}^{5}$ق(س) ءس – [٧س]$_{1}^{5}$ =٢

$\int_{1}^{5}$ق(س) ءس - ٧(٥ – ١) = ٢ ⟵ $\int_{1}^{5}$ق(س) ءس - ٢٨ = ٢ ⟵ $\int_{1}^{5}$ ق(س) ءس = ٣٠

وكذلك $\int_{5}^{1}$٣هـ (س) ءس= ٩ نقسم الطرفين على ٣ ⟵ $\int_{5}^{1}$هـ(س) ءس = ٣

$\int_{1}^{5}$(ق(س) + هـ(س)) ءس = $\int_{1}^{5}$ق(س) ءس + $\int_{1}^{5}$هـ (س) ءس = ٣٠ + - ٣ = ٢٧

١) إذا كان $\int_{2}^{3}$ق(س) ءس = -٤ ، $\int_{3}^{6}$ق(س) ءس = ٦ ، فإن قيمة $\int_{2}^{6}$ ق(س) ءس تساوي :

أ) ٢ ب) -١٠ ج) -٢ د) ١٠

$\int_{2}^{6}$ق(س) ءس = $\int_{2}^{3}$ق(س) ءس + $\int_{3}^{6}$ق(س) ءس = -٤ + ٦ = ٢

١٧) $\int_{-1}^{-1}$٣ ءس تساوي :

أ) ٦ ب) -٦ ج) -٣ د) صفر

حسب الخاصية : $\int_{-1}^{1}$ق(س)ء س = صفر

١٨) إذا كان $\int_{1}^{6}$٣ق(س) ءس = ١٥ ، $\int_{2}^{6}$ق(س) ءس = -١٠ ، فإن $\int_{1}^{2}$ق(س) ءس تساوي :

أ) ٥ ب) ١٣ ج) ١٥ د) ٢٥

$\int_{1}^{2}$ق(س) ءس = $\int_{1}^{6}$ق(س) ءس + $\int_{6}^{2}$ ق(س) ءس ولكن $\int_{1}^{6}$ق(س) ءس = ٥

= ٥ + ١٠ = ١٥

التكامل بالتعويض

تستخدم هذه الطريقة عند وجود عملية ضرب داخل التكامل يصعب تبسيطها ، وهي تقوم على عملية التعويض أي كتابة التكامل بدلالة متغير آخر وبشكل يسهل إجراء عملية التكامل لها .

١) جد قيمة التكامل الآتي :

$$\int ٣\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣}+١)^{٢}\ \text{ءس}$$

<u>الخطوة الأولى :</u> بما أن ما خارج القوس يساوي مشتقة ما داخل القوس لذلك نفرض ما داخل القوس = ص أي :

$$\text{ص} = \text{س}^{٣}+١$$

<u>الخطوة الثانية :</u> نشتق ص كما يلي :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^{٢} \quad \text{ثم نوجد}\quad \text{ءس} \quad \text{كما يلي}\quad \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٣\text{س}^{٢}}$$

<u>الخطوة الثالثة</u> : نعوض في التكامل ثم نختصر ثم نجري عملية التكامل :

$$\int ٣\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣}+١)^{٢}\ \text{ءس} = \int \cancel{٣\text{س}^{٢}}\ \text{ص}^{٢}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{٣\text{س}^{٢}}} = \int \text{ص}^{٢}\ \text{ءص} = \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$$

<u>الخطوة الرابعة :</u> نعيد كتابة التكامل بدلالة س :

$$٣\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣}+١)^{٢}\ \text{ءس} = \frac{(\text{س}^{٣}+١)^{٣}}{٣} + \text{جـ}$$

---

٢) جد قيمة التكامل الآتي :

$$\int ٢\text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}\ \text{ءس} = \int ٢\text{س}\,(\text{س}^{٢}+٣)^{\frac{١}{٢}}\ \text{ءس}$$

$$\text{نفرض}\quad \text{ص} = \text{س}^{٢}+٣ \quad \text{ومنه}\quad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} \quad \text{ومنه}\quad \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}}$$

$$\int ٢\text{س}\,(\text{س}^{٢}+٣)^{\frac{١}{٢}}\ \text{ءس} = \int \cancel{٢\text{س}}\ \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{٢\text{س}}} = \int \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\ \text{ءص}$$

$$= \frac{٢}{٣}\ \text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} = \frac{٢}{٣}(\text{س}^{٢}+٣)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$$

---

٣) جد قيمة التكامل الآتي :

$$\int \frac{٢\text{س}+١}{\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{س}-١}}\ \text{ءس} = \int (٢\text{س}+١)(\text{س}^{٢}+\text{س}-١)^{-\frac{١}{٢}}\ \text{ءس}$$

$$\text{نفرض}\quad \text{ص} = \text{س}^{٢}+\text{س}-١ \quad \text{ومنه}\quad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}+١ \quad \text{ومنه}\quad \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}+١}$$

$\int (٢س+١)(س^{٢}+س-١)^{-\frac{١}{٢}}\,ءس = \int (\cancel{٢س+١})\,ص^{-\frac{١}{٢}}\,\frac{ءص}{\cancel{٢س+١}}$

$= \int ص^{-\frac{١}{٢}}\,ءص = ٢\,ص^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$\int \frac{٢س+١}{\sqrt{س^{٢}+س-١}}\,ءس = ٢(س^{٢}+س-١)^{\frac{١}{٢}} + جـ = ٢\sqrt{س^{٢}+س-١} + جـ$

٤) جد قيمة التكامل الآتي :

$\int س\,جا(س^{٢}+٧)\,ءس$

نفرض $ص = س^{٢}+٧$ فيكون $\frac{ءص}{ءس} = ٢س$ ومنه $ءس = \frac{ءص}{٢س}$

$\int س\,جا(س^{٢}+٧)\,ءس = \int \cancel{س}\,جاص\,\frac{ءص}{٢\cancel{س}}$

$\int \frac{١}{٢}\,جاص\,ءص = -\frac{١}{٢}\,جتاص + جـ$

$\int س\,جا(س^{٢}+٧)\,ءس = -\frac{١}{٢}\,جتا(س^{٢}+٧) + جـ$

٥) $\int ٢س\,قا^{٢}(١-س^{٢})\,ءس$

نفرض $ص = ١ - س^{٢}$ ومنه $\frac{ءص}{ءس} = -٢س$ ومنه $ءس = \frac{ءص}{-٢س}$ نعوض

$\int ٢س\,قا^{٢}(١-س^{٢})\,ءس = \int \cancel{٢س}\,قا^{٢}ص\,\frac{ءص}{-\cancel{٢س}}$

$= \int -قا^{٢}ص\,ءص = -ظا\,ص + جـ$

$\int ٢س\,قا^{٢}(١-س^{٢})\,ءس = -ظا(١-س^{٢}) + جـ$

٦) جد قيمة التكامل الآتي :

$\int \frac{٣س^{٢}+١}{(س^{٣}+س+٧)^{٥}}\,ءس = \int (٣س^{٢}+١)(س^{٣}+س+٧)^{-٥}\,ءس$

نفرض $ص = س^{٣}+س+٧$ ومنه $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢}+١$ ومنه $ءس = \frac{ءص}{٣س^{٢}+١}$

$\int (٣س^{٢}+١)(س^{٣}+س+٧)^{-٥}\,ءس = \int (\cancel{٣س^{٢}+١})\,ص^{-٥}\,\frac{ءص}{\cancel{٣س^{٢}+١}}$

$= \int ص^{-٥}\,ءص = \frac{ص^{-٤}}{-٤} + جـ = -\frac{١}{٤}(س^{٣}+س+٧)^{-٤} + جـ$

قواعد التكامل :

إذا أ ، ب ثابتين ، أ ≠ ٠ ، ن ≠ -١ فإن :

١) $\int (\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن}+١)} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{جا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{-\text{جتا}(\text{أس}+\text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$

٣) $\int \text{جتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{\text{جا}(\text{أس}+\text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$

٤) $\int \text{قا}^{٢}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{\text{ظا}(\text{أس}+\text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$

٧) جد قيمة التكامل الآتي : $\int_{٠}^{-١٣} \frac{١}{\sqrt[٣]{٢\text{س}-١}}\,\text{ءس}$

$$\int_{٠}^{-١٣} \frac{١}{\sqrt[٣]{٢\text{س}-١}}\,\text{ءس} = \int_{٠}^{-١٣} (٢\text{س}-١)^{-\frac{١}{٣}}\,\text{ءس}$$

$$= \left[\frac{(٢\text{س}-١)^{\frac{٢}{٣}}}{٢\times\frac{٢}{٣}}\right]_{٠}^{-١٣} = \frac{٣}{٤}\left[\sqrt[٣]{(٢\text{س}-١)^{٢}}\right]_{٠}^{-١٣}$$

$$= \frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{(٢\times -١٣-١)^{٢}} - \frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{(٢\times ٠ - ١)^{٢}} = \frac{٢٧}{٤} - \frac{٣}{٤} = \frac{٢٤}{٤} = ٦$$

٨) جد قيمة التكامل الآتي :

$\int \frac{٣}{(٢\text{س}+١)^{٥}}\,\text{ءس} = \int ٣(٢\text{س}+١)^{-٥}\,\text{ءس}$ حسب القاعدة : $\int (\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن}+١)} + \text{جـ}$

$$= ٣\times \frac{(٢\text{س}+١)^{-٤}}{٢\times -٤} + \text{جـ}$$

٩) جد قيمة التكامل الآتي :

$$\int \frac{٢\text{س}+٣}{\text{جتا}^{٢}(\text{س}^{٢}+٣\text{س})}\,\text{ءس}$$

نفرض ص = $\text{س}^{٢} + ٣\text{س}$ فيكون $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}+٣$ ومنه $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}+٣}$

$$\int \frac{٢\text{س}+٣}{\text{جتا}^{٢}(\text{س}^{٢}+٣\text{س})}\,\text{ءس} = \int \frac{\cancel{٢\text{س}+٣}}{\text{جتا}^{٢}\text{ص}}\,\frac{\text{ءص}}{\cancel{٢\text{س}+٣}}$$

$\int \frac{\text{ءص}}{\text{جتا}^{٢}\text{ص}} = \int \text{قا}^{٢}\text{ص}\,\text{ءص} = \text{ظاص} + \text{جـ} = \text{ظا}(\text{س}^{٢}+٣\text{س}) + \text{جـ}$ حيث $\text{قاص} = \frac{١}{\text{جتاص}}$

١٠) ∫ قا^{٢}(٢س + ٣) ءس يساوي :

أ) ظا (٢س + ٣) + جـ

ب) ٢ظا (٢س+٣)+ جـ

ج) ٢قا^{٢}(٢س +٣) + جـ

د) $\frac{\text{ظا (٢س +٣)}}{٢}$ + جـ

الحل :

∫ قا^{٢}(٢س + ٣) ءس = $\frac{\text{ظا (٢س +٣)}}{٢}$ + جـ

١١) ∫ جتا(٣س+١)ءس يساوي :

أ) $\frac{\text{- جا(٣س+١)}}{٣}$ + جـ ، ب)-٣جا(٣س+١) + جـ

ج) $\frac{\text{جا(٣س+١)}}{٣}$ + جـ ، د) ٣جا(٣س+١) + جـ

١٢) إذا علمت أن ق(-٨)= ٥ ، ق(٢٧) = -٦ ، فجد قيمة التكامل الآتي : $\int_{-٢}^{٣}$ ٣س٢ قَ(س^{٣})ءس

الحل :

نفرض ص= س^{٣} ومنه $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} ومنه ءس = $\frac{\text{ءص}}{\text{٣س}^{٢}}$

∫ ٣س٢قَ(س^{٣})ءس = ∫ $\cancel{\text{٣س}}$٢ قَ(ص) $\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{٣س}}^{٢}}$

∫ قَ(ص) ءص = ق(ص) + جـ = ق(س^{٣}) + جـ

$\int_{-٢}^{٣}$ ٣س٢قَ(س^{٣})ءس = ق(س^{٣})$\Big]_{-٢}^{٣}$ = ق((٣)^{٣}) – ق((-٢)^{٣}) = ق(٢٧) - ق(-٨) = -٦ -٥ = -١١

١٣) إذا علمت أن $\int_{٥}^{٢}$ ق(س)ءس= ٣ ، فجد قيمة التكامل الآتي : $\int_{-١}^{٢}$ ٨ س ق(س^{٢}+١)ءس

الحل : نفرض ص= س^{٢}+١ ومنه $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢س ومنه ءس = $\frac{\text{ءص}}{\text{٢س}}$

∫ ٨ س ق(س^{٢}+١)ءس = ∫ $\cancel{\text{٨س}}$^{٤} ق(ص) $\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{٢س}}}$ = ∫ ٤ ق(ص)ءص

لكن عندما س = -١ فإن ص = (-١)^{٢}+١= ٢ وعندما س =٢ فإن ص =(٢)^{٢}+١ = ٥

$\int_{-١}^{٢}$ ٨ س ق(س^{٢}+١)ءس = $\int_{٢}^{٥}$ ٤ ق(ص)ءص

= ٤ $\int_{٢}^{٥}$ ق(ص)ء ص = ٤×-٣ = -١٢

١٤) $\int$(١ – س)^{٥} ٥س يساوي :

أ) ٥(١ – س)^{٦} + جـ   ب) –٥(١ – س)^{٦}+ جـ

جـ) – $\frac{(١ - س)^{٦}}{٦}$ + جـ   د) $\frac{(١ - س)^{٦}}{٦}$ + جـ

الحل : $\int$(١ – س)^{٥} ٥س = $\frac{(١ - س)^{٦}}{-١ \times ٦}$ + جـ = – $\frac{(١ - س)^{٦}}{٦}$ + جـ

تطبيقات التكامل

تطبيقات هندسية

بما ان التكامل عملية عكسية للتفاضل ، فإنه يمكننا إيجاد قاعدة الاقتران ق بمعرفة ميله قَ(س)عند أي نقطة على منحناه (س ، ص) وإحداثيي إحدى النقط على منحناه .

١) جد قاعدة الاقتران ق ، علما بأن ميل المماس لمنحناه عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة:

قَ(س) = ٣س^{٢} – ٨ س ، وأن منحناه يمر بالنقطة (-١ ، ٣)

<u>خطوات الحل :</u>

<u>الخطوة الأولى</u> : نقوم بإجراء التكامل بالنسبة إلى المتغير س لكل من الطرفين :

$\int$قَ(س) ٥س = $\int$(٣س^{٢}- ٨ س)٥س   ينتج :

ق(س) = س^{٣}-٤س^{٢} + جـ

<u>الخطوة الثانية</u> : نقوم بإيجاد قيمة (جـ) وذلك بتعويض النقطة (-١ ، ٣) في الاقتران

وذلك لأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (-١ ، ٣) أي أن ق(-١) = ٣

ق(-١) = (-١)^{٣}-٤(-١)^{٢} + جـ

٣ = -١ -٤ + جـ   ومنه   جـ = ٨

<u>الخطوة الثالثة</u> : نعوض قيمة جـ في قاعدة الاقتران ق فتكون قاعدة الاقتران على الشكل التالي :

ق(س) = س^{٣}- ٤س^{٢} + ٨

٢) جد قيمة ق(١) ، علما بأن ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة :

قَ(س) = (٦ – ٢س + ٩س^{٣}) ، وأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٥)

الحل :

قَ(س) = ٦ – ٢س + ٩س^{٣} بإجراء التكامل بالنسبة إلى المتغير س لكل من الطرفين ينتج :

$\int$قَ(س) ٥س = $\int$(٦ – ٢س + ٩س^{٣}) ٥س

ق(س) = ٦س – س^{٢} + $\frac{٩}{٤}$س^{٤} + جـ   وبما أن ق(٠) = ٥

$ق(٠) = ٦(٠) - (٠)^{٢} + \frac{٩}{٤}(٠)^{٤} + جـ$

٥ = جـ ومنه قاعدة الاقتران : $ق(س) = ٦س - س^{٢} + \frac{٩}{٤}س^{٤} + ٥$

$ق(١) = ٦\times١ - (١)^{٢} + \frac{٩}{٤}(١)^{٤} + ٥ = ٦ - ١ + \frac{٩}{٤} + ٥ = ١٠ + \frac{٩}{٤} = \frac{٤٩}{٤}$

٣) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ل عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة :

$لَ(س) = ٢س(٤ - ٣س)$ ، فجد قاعدة الاقتران ل ، علما بأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٣)

الحل :

$لَ(س) = ٢س(٤ - ٣س)$ بإجراء التكامل بالنسبة إلى المتغير س لكل من الطرفين ينتج :

$\int لَ(س)\,ءس = \int ٢س(٤ - ٣س)\,ءس = \int (٨س - ٦س^{٢})\,ءس$

$ل(س) = ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + جـ$ ولكن $ل(٠) = ٣$

$ل(٠) = ٤(٠)^{٢} - ٢(٠)^{٣} + جـ$

٣ = جـ ومنه قاعدة الاقتران هي : $ل(س) = ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + ٣$

٤) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) هو $قَ(س) = ٣س^{٢}$ فإن ق(س) تساوي :

أ) $٣س^{٣} + جـ$ ب) $٣س^{٢} + جـ$ ج) $\frac{١}{٣}س^{٣} + جـ$ د) $س^{٣} + جـ$

الحل : $\int قَ(س)\,ءس = \int ٣س^{٢}\,ءس$

$ق(س) = س^{٣} + جـ$

٥) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س ،ص) هو $قَ(س) = ٢س$ وكان ق (٠) = ٢

فإن ق(١) يساوي :

أ)١ ب)٢ ج) ٣ د)٤

الحل :

$\int قَ(س)\,ءس = \int ٢س\,ءس$

$ق(س) = س^{٢} + جـ$ ولكن ق(٠) = ٢

$ق(٠) = (٠)^{٢} + جـ$

٢ = جـ ومنه $ق(س) = س^{٢} + ٢$ ومنه $ق(١) = (١)^{٢} + ٢ = ٣$

٦) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي $(٣س - ١)^{٤}$ ،
فجد قاعدة الاقتران ق ، علما بأن منحناه يمر بالنقطة (١ ، ٥)

الحل :

$قَ(س) = (٣س - ١)^{٤}$ بإجراء التكامل بالنسبة إلى المتغير س لكل من الطرفين ينتج :

$$\int قَ(س)\ ءس = \int (٣س - ١)^{٤}\ ءس$$

$$ق(س) = \frac{(٣س - ١)^{٥}}{٣ \times ٥} + جـ = \frac{(٣س - ١)^{٥}}{١٥} + جـ$$

ولكن المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٥)　أي أن　ق(١) = ٥

$$ق(١) = \frac{(٣\times١ - ١)^{٥}}{١٥} + جـ$$

$$٥ = \frac{٣٢}{١٥} + جـ \quad ومنه \quad ٥ - \frac{٣٢}{١٥} = جـ \quad ومنه \quad جـ = \frac{٤٣}{١٥} \quad نعوض$$

$$ق(س) = \frac{(٣س - ١)^{٥}}{١٥} + \frac{٤٣}{١٥}$$

---

٧) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س ، ص) هو $(٢ - \frac{١}{س^{٢}})$ وكان منحنى الاقتران يمر
بالنقطة $(\frac{١}{٢} ، ١)$ فجد قاعدة الاقتران

الحل :

$قَ(س) = ٢ - \frac{١}{س^{٢}}$ بإجراء عملية التكامل للطرفين بدلالة المتغير س يكون :

$$\int قَ(س)\ ءس = \int (٢ - \frac{١}{س^{٢}})\ ءس = \int (٢ - س^{-٢})\ ءس$$

$$ق(س) = ٢س + \frac{١}{س} + جـ \qquad ولكن \quad ق(\frac{١}{٢}) = ١$$

$$ق(\frac{١}{٢}) = ٢(\frac{١}{٢}) + \frac{١}{\frac{١}{٢}} + جـ$$

$$١ = ١ + ٢ + جـ \quad ومنه\ جـ = -٢$$

قاعدة الاقتران هي : $ق(س) = ٢س + \frac{١}{س} - ٢$

٨) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) يعطى بالقاعدة $ق'(س) = \frac{٢س^٣ - س^٢}{س^٢}$ س $\neq$ ٠ ، فجد ق(١)

، علماً بان المنحنى يمر بالنقطة (-١ ، ٦) .

الحل :

$ق'(س) = \frac{٢س^٣ - س^٢}{س^٢} = (٢س^٣ - س^٢)\, س^{-٢} = ٢س - ١$ نكامل الطرفين

$ق(س) = \int (٢س - ١)\, ءس = س^٢ - س + جـ$ ولكن ق(-١) = ٦ إذن $ق(-١) = (-١)^٢ - (-١) + جـ$

٦ = ١ + ١ + جـ ومنه جـ = ٤

$ق(س) = س^٢ - س + ٤$ ومنه $ق(١) = (١)^٢ - (١) + ٤ = ١ - ١ + ٤ = ٤$

٩) جد قاعدة الاقتران ق ، إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة :

$ق'(س) = \frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^٢ + ٨}}$ ، وكان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٠ ، ٤)

الحل :

$ق'(س) = \frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^٢ + ٨}}$ بإجراء التكامل بالنسبة إلى المتغير س لكل من الطرفين ينتج :

$\int ق'(س)\, ءس = \int \frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^٢ + ٨}}\, ءس$

$ق(س) = \int ٢س(س^٢ + ٨)^{-\frac{١}{٣}}\, ءس$ نفرض ص= س²+٨ ومنه $\frac{ءص}{ءس} = ٢س$

ومنه $ءس = \frac{ءص}{٢س}$ نعوض

$ق(س) = \int ٢س(س^٢ + ٨)^{-\frac{١}{٣}}\, ءس = \int \cancel{٢س}\, ص^{-\frac{١}{٣}} \frac{ءص}{\cancel{٢س}}$

$= \int ص^{-\frac{١}{٣}}\, ءص = \frac{٣}{٢} ص^{\frac{٢}{٣}} + جـ$

$ق(س) = \int ٢س(س^٢ + ٨)^{-\frac{١}{٣}}\, ءس = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(س^٢ + ٨)^٢} + جـ$ ولكن ق(٠) = ٤

$ق(٠) = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{((٠)^٢ + ٨)^٢} + جـ = \frac{٣}{٢} \times ٤ + جـ$

٤ = ٦ + جـ ومنه جـ = -٢

قاعدة الاقتران هي : $ق(س) = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(س^٢ + ٨)^٢} - ٢$

تطبيقات فيزيائية

بما أن ع(ن) = فَ(ن) = $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ فإنه يمكننا معرفة المسافة بمعرفة السرعة ، أو بمعرفة السرعة والتسارع

وبما أن التسارع هو ت(ن) = عَ(ن) = $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ فإنه يمكننا معرفة السرعة بمعرفة مقدار التسارع .

١) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث انطلق من الموقع الابتدائي ف(٠) =٤م ، إذا كانت سرعته بعد مرور ن ثانية تعطى بالعلاقة ع(ن)= (٦ – ٢ن + ٦ن^{٢}) م/ث ، فجد موقعه بعد مرور ثلاث ثوان من بدء الحركة

الحل :

ع(ن) = ٦ – ٢ن + ٦ن^{٢} ، ولكن ع(ن) = $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$

$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٦ – ٢ن + ٦ن

$\int$ ء ف = $\int$ (٦ – ٢ن + ٦ن^{٢}) ءن

ف = ٦ن – ن^{٢} + ٢ن^{٣} + جـ ولكن ف(٠) = ٤

ف(٠) = ٦(٠) – (٠)^{٢} + ٢(٠)^{٣} + جـ

٤ = جـ ومنه ف(ن) = ٦ن – ن^{٢} + ٢ن^{٣} + ٤

ف(٣) = ٦(٣) – (٣)^{٢} + ٢(٣)^{٣} + ٤ = ٦٧

∴ موقع الجسيم بعد مرور ثلاث ثوان من بدء الحركة = ٦٧ م

٢) تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بتسارع ثابت ت مقداره ت(ن) = ١٤ م/ث^{٢} ، جد سرعتها بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ، علما بأن سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٥ م/ث

الحل :

ت(ن) = ١٤

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = ١٤ ومنه ءع = ١٤ ءن نكامل الطرفين

$\int$ءع = $\int$ ١٤ ءن ومنه

ع = ١٤ن + جـ ولكن ع (٠) = ٥

ع(٠) = ١٤(٠) + جـ

٥ = جـ بالتعويض : ع(ن) = ١٤ن + ٥

ع(٢) = ١٤(٢) + ٥ = ٢٨ + ٥ = ٣٣ م/ث

٣) إذا كان تسارع جسيم بعد مرور (ن) من الثواني يعطى بالعلاقة ت(ن) = ٦ ن م/ث٢ ، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة علما بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٢ م/ث وموقعه الابتدائي ف(٠) = ١٢م

الحل :

ت(ن) = ٦ ن

ءع/ءن = ٦ن   ومنه   ∫ ءع = ∫ ٦ن ءن   ومنه   ع = ٣ن٢ + جـ   ولكن ع(٠) = ٢

ع (٠) = ٣(٠)٢ + جـ

٢ = جـ   بالتعويض : ع (ن) = ٣ن٢ + ٢

ءف/ءن = ٣ن٢ + ٢ ومنه   ∫ ءف = ∫ (٣ن٢ + ٢) ءن

ف = ن٣ + ٢ن + جـ   ولكن   ف(٠) = ١٢

ف(٠) = (٠)٣ + ٢(٠) + جـ

١٢ = جـ   بالتعويض : ف(ن) = ن٣ + ٢ن + ١٢

٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالقاعدة :
ع(ن)= (٣ن-١)(٤ن+١)م/ث ، جد :

أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة

أ) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ، علما بأن موقعه الابتدائي ف(٠)=٧م

الحل :

أ) ع(ن)= (٣ن-١)(٤ن+١) = ١٢ن٢ +٣ن -٤ن -١ = ١٢ن٢ - ن -١

ءف/ءن = ١٢ن٢ - ن -١

∫ ءف = ∫ (١٢ن٢ - ن -١) ءن

ف = ٤ن٣ - ١/٢ ن٢ – ن + جـ

ب) عندما ف(٠) = ٧ فإن

ف(٠) = ٤(٠)٣ - ١/٢ (٠)٢ – (٠) + جـ

٧ = جـ   بالتعويض تنتج قاعدة الاقتران :   ف (ن)= ٤ن٣ - ١/٢ ن٢ – ن + ٧

ف(٢) = ٤(٢)٣ - ١/٢ (٢)٢ - (٢) + ٧

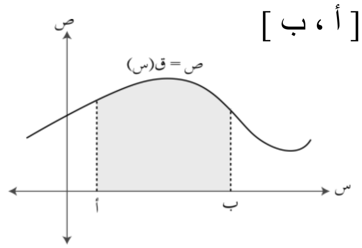
ف(٢) = ٣٢ - ٢ -٢ + ٧ = ٣٥ م

المســاحة

ونميز أربع حالات :

الحالة الأولى : عندما تكون المنطقة المغلقة فوق محور السينات (ق(س) $\geqslant$ ٠) في الفترة [أ ، ب]

المساحة المطلوبة = $\int_{أ}^{ب}$ | ق(س) | ءس = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس



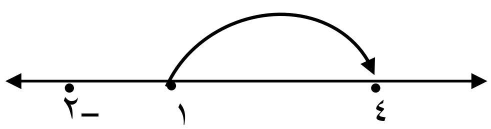
١) جد مساحة المنطقة المغلقة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢س + ٤ ، ومحور السينات والمستقيمين : س = ١ ، س = ٤

خطوات الحل:

الخطوة الأولى : نجعل ق(س) = صفر ونوجد نقاط تقاطع ق مع محور السينات (إن وجدت)

٢س + ٤ = ٠ ومنه ٢س = -٤ ومنه س = -٢

نلاحظ أن هذه القيمة لا تقع ضمن الفترة المطلوبة [١ ، ٤]



الخطوة الثانية : نوجد التكامل التالي ضمن الفترة [١ ، ٤] :

$\int_{١}^{٤}$ (٢س + ٤) ءس = (س^{٢} + ٤س) $\Big]_{١}^{٤}$

= (١٦ + ١٦) – (١ + ٤) = ٣٢ – ٥ = ٢٧ (قيمة التكامل الموجبة تدل على أن المنحنى فوق محور السينات)

الخطوة الثالثة : نوجد المساحة

م = $\int_{١}^{٤}$ | ق(س) | ءس = ٢٧ وحدة مربعة

---

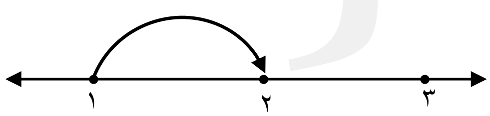
٢) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ١٢ – ٤ س ، ومحور السينات على الفترة [١ ، ٢] .

الحل :

ق(س) = ١٢ – ٤ س

ق(س) = ٠ ومنه ١٢ -٤س = ٠ ومنه ٤س = ١٢ ومنه س = ٣

نلاحظ أن س= ٣ لا تقع ضمن الفترة [١ ، ٢]



$\int_{١}^{٢}$ (١٢– ٤س)ء س = (١٢س -٢س^{٢}) $\Big]_{١}^{٢}$

= (١٢(٢) -٢(٢)^{٢}) - (١٢(١) -٢(١)^{٢}) = ٢٤ – ٨ – ١٢ +٢ = ٦

المساحة المطلوبة = $\int_{١}^{٢}$ ق(س)ء س = ٦ وحدة مربعة

---

٣) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣س + ٦ ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٣]

الحل :

ق(س) = صفر

٣س + ٦ = ٠ ومنه ٣س = -٦ ومنه س = - ٢ لا تقع ضمن الفترة [٠ ، ٣]

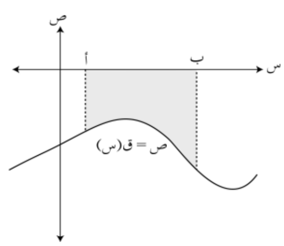
نوجد التكامل في الفترة [٠ ، ٣]

$$\int_{٠}^{٣}(\text{٣س} + ٦)\,\text{ى س} = \left[\frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} + \text{٦س}\right]_{٠}^{٣} = \left(\frac{٣}{٢}(٣)^{٢} + ٦(٣)\right) - \left(\frac{٣}{٢}(٠)^{٢} + ٦(٠)\right)$$

$$= \frac{٢٧}{٢} + ١٨ = \frac{٦٣}{٢}$$

المساحة المطلوبة = $\int_{٠}^{٣}\text{ق(س) ى س} = \frac{٦٣}{٢}$ وحدة مربعة

الحالة الثانية : عندما تكون المنطقة المغلقة تحت محور السينات (ق(س) ⩽ ٠) في الفترة [أ ، ب]



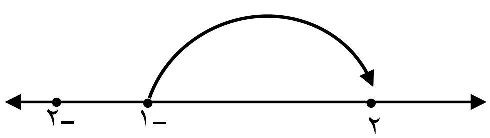
فإن التكامل $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}\text{ق(س)ى س}$ يكون سالباً وبالتالي تكون :

المساحة المطلوبة: م = $\left|\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}\text{ق(س) ى س}\right|$

٤) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = ٣س^{٢} – ١٢

ومحور السينات ، والمستقيمين : س = -١ ، س = ٢

الحل :



الخطوة الأولى : ق(س) = صفر ومنه ٣س^{٢} – ١٢ = صفر ومنه

ومنه ٣س^{٢} = ١٢ نقسم على ٣ ومنه س^{٢} = ٤ ومنه س =-٢ ، س = ٢

وهي قيم س التي يتقاطع منحنى الاقتران ق عندها مع محور السينات نلاحظ أن هذه القيم لا تقع ضمن الفترة المطلوبة

الخطوة الثانية :

$$\int_{-١}^{٢}(\text{٣س}^{٢} - ١٢)\,\text{ى س} = \left[\text{س}^{٣} - \text{١٢س}\right]_{-١}^{٢}$$

$$= (٢)^{٣} - ١٢(٢) - ((-١)^{٣} - ١٢(-١)) = ٨ - ٢٤ - ١١ = -٢٧$$

الخطوة الثالثة : نلاحظ أن قيمة التكامل سالب مما يدل على أن المنطقة المغلقة تحت محور السينات لذلك عندما نحسب

المساحة نضع التكامل داخل القيمة المطلقة :

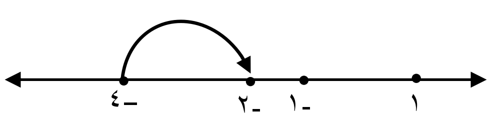
م = $\left|\int_{-١}^{٢}\text{ق(س)ى س}\right| = \left|-٢٧\right| = ٢٧$ وحدة مربعة

٥) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣ – ٣ س^{٢} والمستقيمين ، س= -٢ ، س = -٤

الحل :

ق(س) = صفر ومنه ٣ – ٣ س^{٢}= ٠ ومنه ٣س^{٢}=٣ ومنه س^{٢} = ١ ، ومنه س = -١ ، س = ١

نلاحظ أن س = -١ ، س = ١ لا تقع ضمن الفترة [-٤ ، -٢]

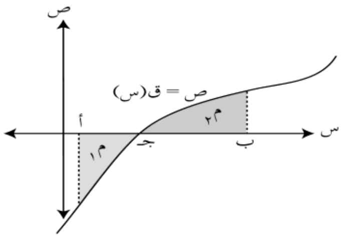


نجري التكامل المحدد للاقتران في الفترة [-٤ ، -٢]

$$\int_{-٤}^{-٢} (٣ - ٣\,\text{س}^{٢})\, ٤\,\text{س} = \left[(٣\text{س} - \text{س}^{٣}) \right]_{-٤}^{-٢} = (٣(-٢) - (-٢)^{٣}) - (٣(-٤) - (-٤)^{٣})$$

$= -٦ + ٨ + ١٢ - ٦٤ = -٥٠$ ، المساحة المطلوبة $= |-٥٠| = ٥٠$ وحدة مربعة

الحالة الثالثة : جزء من المنطقة المغلقة تحت محور السينات (ق(س) $\leqslant$ ٠) في الفترة [أ ، جـ] ، والجزء الآخر فوق محور السينات (ق(س) $\geqslant$ ٠) في الفترة [جـ ، ب] فإن :



المساحة المطلوبة : م = المساحة م$_{١}$ + المساحة م$_{٢}$

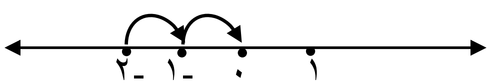
المساحة المطلوبة = $\left| \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)}\, ٤\,\text{س} \right| + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\, ٤\,\text{س}$

٦) جد مساحة المنطقة المغلقة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٦ – ٦س^{٢} ، ومحور السينات على الفترة [-٢ ، ٠] .

الحل :

ق(س) = صفر ومنه ٦ – ٦س^{٢} = ٠ ومنه ٦س^{٢} = ٦ ومنه س^{٢} = ١

ومنه س = -١ ، س = ١



نلاحظ أن س = ١ لا تقع ضمن الفترة [-٢ ، ٠]

وأن س = -١ تقع ضمن الفترة [-٢ ، ٠] لذلك نجري التكامل المحدد للاقتران في الفترة

[-٢ ، -١] ثم نجري التكامل في الفترة [-١ ، ٠]

الحل :

$$\int_{-٢}^{-١} (٦ - ٦\text{س}^{٢})\,٤\text{س} = \left[(٦\text{س} - ٢\text{س}^{٣}) \right]_{-٢}^{-١} = (٦(-١) - ٢(-١)^{٣}) - (٦(-٢) - ٢(-٢)^{٣})$$

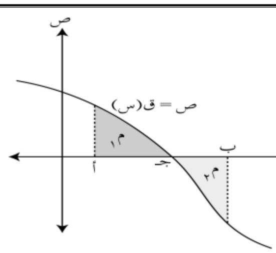
$= -٦ + ٢ + ١٢ - ١٦ = -٨$ ومنه م$_{١}$ $= |-٨| = ٨$ وحدة مربعة

$$\int_{-١}^{٠} (٦ - ٦\text{س}^{٢})\,٤\text{س} = \left[(٦\text{س} - ٢\text{س}^{٣}) \right]_{-١}^{٠} = (٦(٠) - ٢(٠)^{٣}) - (٦(-١) - ٢(-١)^{٣})$$

$= ٦ - ٢ = ٤$ ومنه م$_{٢}$ = ٤ وحدة مربعة

المساحة المطلوبة : م = م$_{١}$ + م$_{٢}$ = ٨ + ٤ = ١٢ وحدة مربعة

الحالة الرابعة : جزء من المنطقة المغلقة فوق محور السينات (ق(س) $\geqslant$ ٠) في الفترة [أ ، جـ] ، والجزء الآخر تحت محور السينات (ق(س) $\leqslant$ ٠) في الفترة [جـ ، ب] فإن :

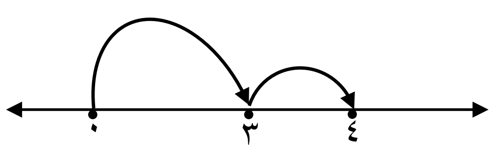


المساحة المطلوبة = المساحة م$_{١}$ + المساحة م$_{٢}$

المساحة المطلوبة = $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)}\, ٤\,\text{س} + \left| \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق (س)}\, ٤\,\text{س} \right|$

٧) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٦ – ٢س ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٤]

الحل :



ق(س) = ٠ ومنه ٦ – ٢س = ٠ ومنه ٦ – ٢س = ٠ ومنه س = ٣

نلاحظ أن س = ٣ تقع ضمن الفترة [٠ ، ٤]

نجري التكامل في الفترة [٠ ، ٣] ثم نجري التكامل في الفترة [٣ ، ٤]

$$\int_{٠}^{٣} (٦ - ٢\text{س})\,\text{ءس} = \left[٦\text{س} - \text{س}^{٢} \right]_{٠}^{٣} = \left(٦(٣) - (٣)^{٢} \right) - \left(٦(٠) - (٠)^{٢} \right)$$

= ١٨ – ٩ = ٩　　ومنه $\text{م}_{١}$ = ٩ وحدة مربعة

$$\int_{٣}^{٤} (٦ - ٢\text{س})\,\text{ءس} = \left[٦\text{س} - \text{س}^{٢} \right]_{٣}^{٤} = \left(٦(٤) - (٤)^{٢} \right) - \left(٦(٣) - (٣)^{٢} \right)$$

= ٢٤ - ١٦ -١٨ + ٩ = -١　　ومنه　$\text{م}_{٢}$ = | -١ | = ١ وحدة مربعة

المساحة المطلوبة = $\text{م}_{١} + \text{م}_{٢}$ = ٩ + ١ = ١٠ وحدة مربعة

ملاحظة هامة : في بعض المسائل يُطلب إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات دون إعطاء فترة محددة في هذه الحالة تعتبر نقاط تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات هي الفترة التي نُجري فيها التكامل كما في المسألة التالية :

٨) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = $\text{س}^{٢}$ – ٢س -٣ ومحور السينات

ق(س) = صفر

$\text{س}^{٢}$ – ٢س -٣ = ٠ ومنه (س – ٣)(س +١) = ٠

إما س = ٣ أو س = -١ هذه نقاط تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات وتمثل حدود التكامل

المساحة المطلوبة محصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات على الفترة [-١، ٣]

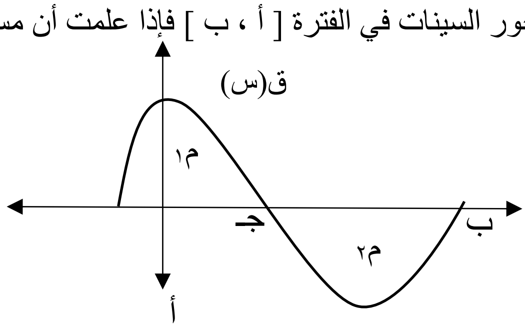
$$\int_{-١}^{٣} (\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣)\,\text{ءس} = \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \text{س}^{٢} - ٣\text{س} \right]_{-١}^{٣}$$

$$= \left(\frac{(٣)^{٣}}{٣} - (٣)^{٢} - ٣(٣) \right) - \left(\frac{(-١)^{٣}}{٣} - (-١)^{٢} - ٣(-١) \right)$$

$$= ٩ - ٩ - ٩ + \frac{١}{٣} + ١ - ٣ = -\frac{٣٢}{٣}$$

المساحة المطلوبة = $\left| \int_{-١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{ءس} \right| = \left| -\frac{٣٢}{٣} \right| = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

٩) يمثل الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات في الفترة [أ ، ب] فإذا علمت أن مساحة ($\text{م}_{١}$) تساوي ٦ وحدات مربعة ،



$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{ءس}$ = -٤ ، فجد مساحة ($\text{م}_{٢}$)

الحل : لحساب المساحة $\text{م}_{٢}$ نوجد أولاً التكامل $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{ءس}$

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)}\,\text{ءس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{ءس}$$

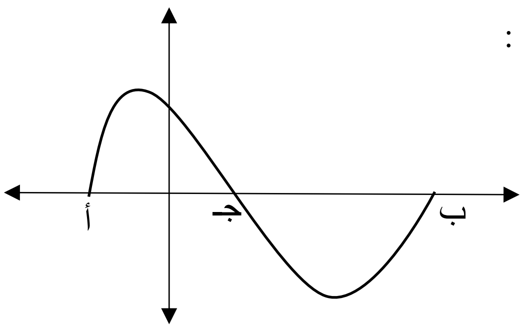
-٤ = ٦ + $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}}$ ق(س) ءس حيث $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}}$ ق(س) ءس = م١ = ٦

$\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}}$ ق(س) ءس = -١٠ نلاحظ ان التكامل سالب لأن المنطقة المغلقة تحت محور السينات

المساحة م٢ = | $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}}$ ق(س) ء س | = |-١٠| = ١٠ وحدة مربعة

١٠) معتمدا الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف في الفترة [أ ، ب] ، إذا علمت أن مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات تساوي (١٤) وحدة مربعة وكان :

$\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}}$ ق(س) ءس = ٦ فما قيمة $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}}$ ق(س) ءس



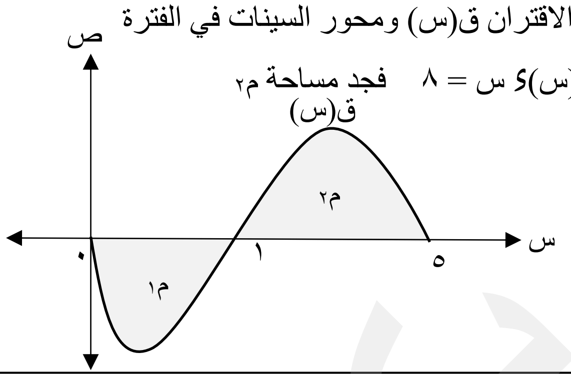
الحل :

م = م١ + م٢ = $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}}$ ق(س) ءس + | $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}}$ ق(س) ءس |

١٤ = ٦ + | $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}}$ ق(س) ءس | ومنه | $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}}$ ق(س) ءس | = ١٤ – ٦ = ٨ وحدة مربعة

$\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}}$ ق(س) ءس = -٨ لأن المنحنى تحت محور السينات في الفترة [جـ ، ب]

١١) اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٥] علمت إذا أن مساحة المنطقة م١ تساوي (٤) وحدة مربعة وان $\int_{\text{٠}}^{\text{٥}}$ ق(س) ءس = ٨ فجد مساحة م٢



الحل : $\int_{\text{٠}}^{\text{٥}}$ ق(س) ء س = $\int_{\text{٠}}^{\text{١}}$ ق(س) ء س + $\int_{\text{١}}^{\text{٥}}$ ق(س) ءس

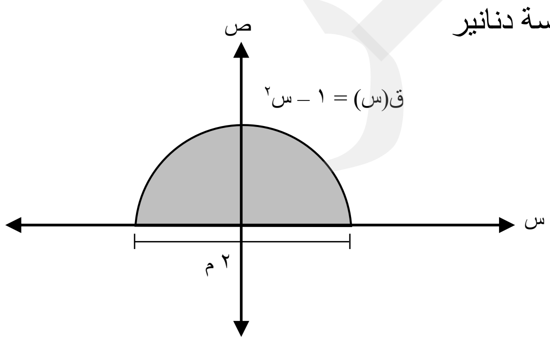
٨ = -٤ + $\int_{\text{١}}^{\text{٥}}$ ق(س) ءس ومنه $\int_{\text{١}}^{\text{٥}}$ ق(س) ءس = ١٢

م٢ = $\int_{\text{١}}^{\text{٥}}$ ق(س) ءس = ١٢ وحدة مربعة

١) يمثل الشكل نافذة طول قاعدتها ٢ م ، محصورة بمنحنى الاقتران ص = ق(س) = ١ – س$^{\text{٢}}$

إذا أردنا وضع زجاج على النافذة ، وكانت تكلفة المتر المربع الواحد منه خمسة دنانير

فما التكلفة الكلية لزجاج النافذة :



التكلفة الكلية = المساحة × ٥

المساحة = $\int_{\text{-١}}^{\text{١}}$ (١ – س$^{\text{٢}}$) ءس

$\int_{\text{-١}}^{\text{١}}$ (١ – س$^{\text{٢}}$) ءس = (س - $\frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٣}}$) $\Big]_{\text{-١}}^{\text{١}}$ = (١ - $\frac{(\text{١})^{\text{٣}}}{\text{٣}}$) - (-١ - $\frac{(\text{-١})^{\text{٣}}}{\text{٣}}$)

= ١ - $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ + ١ - $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ = ٢ - $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ = $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ وحدة مربعة ومنه التكلفة الكلية = $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ × ٥ = $\frac{\text{٢٠}}{\text{٣}}$ دينار

الوحدة الخامسة

الإحصاء والاحتمالات

مبدأ العد

١) بكم طريقة يمكن اختيار نوع واحد من الخضار ونوع واحد من الفواكه من محل تجاري يبيع (٤) أنواع من الخضار و(٣) أنواع من الفواكه ؟

أ) ٤!×٣! ب) ٤ × ٣ ج) ل(٤ ، ٣) د) $\binom{٤}{٣}$

الحل : ٤ × ٣

٢) تبيع إحدى المكتبات (٤) أنواع من الأقلام و (٥) أنواع من الدفاتر ، بكم طريقة يمكن لأحد الطلبة شراء قلم ودفتر من هذه المكتبة ؟

أ) $\frac{٥!}{(٥-٤)!}$ ب) ٤×٥ ج) $\frac{٤!}{(٤-٥)!٥!}$ د) ٥!×٤!

الحل : ٤ × ٥

٣) كم عدد مكون من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} إذا لم يسمح بتكرار الأرقام :

أ) ٤!×٣! ب) ٤ × ٣ ج) ل(٤ ، ٣) د) $\binom{٤}{٣}$

الحل : طرق اختيار المنزلة الأولى : ٤ طرق

طرق اختيار المنزلة الثانية : ٣ طرق

عدد طرق الاختيار الكلي : ٤ × ٣

٤) كم عدد مكون من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {١ ، ٥ ، ٧ ، ٩} إذا سمح بتكرار الأرقام :

أ) ٤!×٣! ب) ٤ × ٣ ج) ل(٤ ، ٣) د) ٤ × ٤

الحل : طرق اختيار المنزلة الأولى : ٤ طرق

طرق اختيار المنزلة الثانية : ٤ طرق

عدد طرق الاختيار الكلي : ٤ × ٤

٥) بكم طريقة يمكن اختيار قميص وحذاء لشرائهما من محل تجاري يبيع (٣) أنواع من القمصان و (٤) أنواع من الأحذية ؟

أ) ٣! × ٤! ب) ل (٤ ، ٣) ج) ٣×٤ د) $\binom{٤}{٣}$

الحل : عدد الطرائق = ٣ × ٤

٦) بكم طريقة يمكن اختيار سيارة لشرائها من معرض سيارات فيه (٥)أنواع مختلفة من السيارات وكل نوع متوفر بـ (٤) ألوان ؟

أ) ٥! × ٤! ب) ٥×٤ ج) ٥! + ٤! د) ٥ + ٤

مضروب العدد الصحيح غير السالب

مضروب أي عدد هو ضرب ذلك العدد بجميع الأعداد التي أقل منه حتى الانتهاء بالعدد واحد .

تعريف : إذا كان (ن) عدد صحيح غير سالب فإن مضروب العدد ن يرمز له بالرمز ن**!** ويساوي :

ن**!** = ن×(ن-١)×(ن-٢)×(ن-٣)× ... ×٣×٢×١

قاعدة للحفظ : **٠! = ١** أي مضروب الصفر يساوي واحد

٧) بكم طريقة يمكن أن تجلس أربع طالبات على أربع مقاعد موضوعة في صف واحد

أ) ٤ ب) ٤ **!** ج) ٤×٤ د) ٤ **!** ×٤ **!**

الحل :

عدد الطرق : ٤ × ٣ ×٢×١ = ٤ **!**

٨) إذا كان ٣ × ن**!** = ٧٢ أوجد قيمة ن :

نقسم الطرفين على ٣ فيكون ن**!** = ٢٤ ⟵ ن**!** =٤**!** ومنه ن = ٤

٩) إذا كان ٣(ن**!**) + ٣ **!** = ٣٦٦ ، فجد قيمة ن

٣(ن**!**) + ٣×٢×١ = ٣٦٦ ⟵ ٣(ن**!**) + ٦ = ٣٦٦ ⟵ ٣(ن**!**) =٣٦٠ نقسم على ٣

ن**!** = ١٢٠ ⟵ ن**!** = ٥**!** ومنه ن = ٥

١٠) جد قيمة : ٥(ن**!**) = ٣٠

٥(ن**!**) = ٣٠ نقسم الطرفين على ٥ فيكون

ن**!** = ٦ ⟵ ن**!** = ٣**!** ومنه ن = ٣

١١) قيمة ٠ **!** تساوي :

أ) ١ ب) ٠ ج) غير موجودة د) ٢

١٢) إذا كان ن**!** = ٢٤ فإن قيمة ن تساوي :

أ) ٢٤**!** ب) ٢٤ ج)٤**!** د)٤

الحل : ن**!** = ٤×٣×٢×١

ن**!** = ٤**!** ومنه ن = ٤

١٣) $\frac{٨ !}{٦ !}$ يساوي :

أ) ٣٠ ب) ٤**!** ج)٥٦ د) ٦**!**

$$\frac{٨!}{٦!} = \frac{٨×٧×\cancel{٦!}}{\cancel{٦!}} = ٥٦$$

١٤) حل المعادلة التالية : (٣ن+١)! = ٢

الحل : (٣ن+١)!=٢! ومنه ٣ن + ١ = ٢ ومنه ٣ن = ١ ومنه ن = $\frac{١}{٣}$

التباديل

١) ما عدد تباديل مجموعة مكونة من (٧) عناصر مأخوذة (٣) في كل مرة ؟

ل (٧ ، ٣) = ٧×٦×٥ = ٢١٠

٢) بكم طريقة يمكن اختيار مدير وأمين سر من بين ٦ معلمين ؟

الحل : ل (٦ ، ٢) = ٦ × ٥ = ٣٠

٣) ما عدد طرائق اختيار رئيس شركة ، ونائب له ، ومدير مالي من بين ٨ موظفين في الشركة ، علما بان الشخص الواحد لا يشغل أكثر من وظيفة واحدة في الشركة ؟

الحل : بما أن الترتيب مهم نستخدم التباديل :

ل (٨ ، ٣) = ٨ × ٧ × ٦ = ٣٣٦

٤) إذا علمت أنّ ل (٥ ، ر) = ٦٠ فإنّ قيمة ر هي :

أ) ١ ب) ٣ ج) ٥ د) ٢

الحل : ل (٥ ، ر) = ٦٠ ومنه ل (٥ ، ر) = ٥×٤×٣ ومنه ل (٥ ، ر) = ل (٥ ، ٣) ومنه ر = ٣

٥) إذا علمت أنّ ل (ن ، ٣) = ٤ ل (ن ، ٢) فإنّ قيمة ن هي :

أ) ٥ ب) ٤ ج) ١ د) ٦

~~ن×(ن-١)~~×(ن-٢) = ٤ ×~~ن×(ن-١)~~ نقسم على ن(ن-١)

ن – ٢ = ٤ ومنه ن = ٦

٦) إذا علمت أنّ ل (ن ، ٣) = ٢١٠ فإنّ قيمة ن هي :

أ) ٣ ب) ٧ ج) ٦ د) ١٢

ن(ن – ١)(ن – ٢) = ٧ ×٦×٥ ومنه ن = ٧

٧) ما هو عدد التباديل الثلاثية المأخوذة من مجموعة سداسية هي :

الحل : ل (٦ ، ٣) = ٦×٥×٤ = ١٢٠

٨) جد قيمة (ر) التي تحقق المعادلة ٣ل (٦ ، ر) = ٣٦٠

الحل :

نقسم على ٣ ⟵ ل (٦ ، ر) = ١٢٠

١٢٠ = ٦ × ٥ × ٤ = ل (٦ ، ٣)

ل (٦ ، ر) = ل (٦ ، ٣) ومنه ر = ٣

---

٩) إذا كان $\frac{ن!}{(ن-٤)!}$ = ل (٦ ، ٤) فجد قيمة ن :

الحل :

ل (ن ، ٤) = ل (٦ ، ٤) وذلك لأن قانون التباديل ل(ن ، ر) = $\frac{ن!}{(ن-ر)!}$

وبالمقارنة نجد : ن = ٦

---

١٠) بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب للرئيس من بين (٨) موظفين ؟

أ) $\binom{٥}{٢}$ ب) ٢! ج) ٨×٧! د) ل (٨ ، ٢)

الحل : ل (٨ ، ٢)

---

١١) بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب الرئيس من مجموعة تتكون من (٥) أفراد ؟

أ) ٥! ب) $\binom{٥}{٢}$ ج) ل(٥ ، ٢) د) ٥! × ٤!

---

١٢) حل المعادلة الآتية :

ن! = ل (ن ، ٢) × ٥!

الحل :

$\cancel{ن(ن-١)}$(ن – ٢) ! = $\cancel{ن(ن-١)}$ × ٥!

(ن – ٢) ! = ٥! ومنه ن – ٢ = ٥ ومنه ن = ٧

---

١٣) بكم طريقة يمكن اختيار رئيس قسم ، ومساعد له ، وامين عهدة من بين ٩ أعضاء في القسم شريطة أن لا يشغل أحدهم وظيفتين معا ؟

الحل : ل (٩ ، ٣) = ٩ × ٨ × ٧ = ٥٠٤

---

١٤) عبّر عما ياتي باستخدام التباديل : ك × (ك -١)×(ك -٢) ، ك ⩾ ٣

الحل : ك × (ك -١)×(ك -٢) = ل (ك ، ٣)

١٥) كم كلمة مكونة من ٣ أحرف مختلفة يمكن تكوينها من مجموعة الأحرف { أ ، ن ، ق ، غ ، م } ،

علماً بأنه ليس شرطاً أن يكون للكلمة معنى ؟

الحل: ل (٥ ، ٣) = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠

١٦) كم عدد مكون من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام { ٥ ، ٧ ، ٨ } إذا لم يسمح بتكرار الأرقام ؟

أ) ٣×٣ ب) ل(٣ ، ٢) ج) $\binom{٣}{٢}$ د) ٥×٧×٨

الحل : بما أن الترتيب مهم نستخدم التباديل : ل(٣ ، ٢)

١٧) جد قيمة ن التي تحقق المعادلة : $\frac{ن!}{(ن - ٢)!} = \frac{ل(٤ ، ٢)}{٦}$

الحل : $\frac{ن(ن - ١)\cancel{(ن - ٢)!}}{\cancel{(ن - ٢)!}} = \frac{٤×٣}{٦}$

ن(ن – ١) = $\frac{١٢}{٦}$ ومنه ن(ن – ١) = ٢

ن^{٢} – ن – ٢ = ٠ ⟵ (ن – ٢)(ن + ١)= ٠

إما ن – ٢ = ٠ ومنه ن = ٢

أو ن + ١ = ٠ ومنه ن = -١ مرفوض

التوافيق

ونرمز للتوفيق بالرمز : وتقرأ : (ن فوق ر) حيث :

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن- ر)!} = \frac{ل(ن ، ر)}{ر!}$$

<u>ملاحظة هامة جداً :</u>

نستخدم التوافيق عندما يكون الترتيب غير مهم مثل اختيار لجنة أو مجموعة او فريق دون تحديد مناصب معينة وكذلك عندما يطلب الإجابة على عدد من الأسئلة من مجموعة من الأسئلة وكذلك عند تحديد عدد مباريات التصفيات التي تجمع عدد من الفرق أو اللاعبين

١) امتحان لمادة العلوم يتكون من ٩ أسئلة ، جد عدد طرائق اختيار ٦ أسئلة للإجابة عنها ؟

الحل :

بما أن الترتيب غير مهم لذلك نستخدم التوافيق

عدد الطرائق = $\binom{٩}{٦} = \frac{!٩}{!٦(٩ - ٦)!} = \frac{٩\times٨\times٧\times\cancel{!٦}}{\cancel{!٦}\times!٣} = \frac{٩\times٨\times٧}{٣\times٢\times١} = ٨٤$ طريقة

٢) في إحدى مديريات التربية والتعليم يراد اختيار لجنة ثلاثية تتولى إعداد خطة استعدادا لبدء العام الدراسي ، من بين ٧ رؤساء أقسام ، و٨ أعضاء أقسام ، بكم طريقة يمكن تكوين اللجنة بحيث تتكون اللجنة من عضوين اثنين على الأقل .

الحل : بما أن اللجنة تتكون من عضوين اثنين على الأقل فإن هناك عدة حالات لاختيار اللجنة :

اللجنة تتكون من عضوين اثنين (و) رئيسي أقسام (أو) من ثلاثة أعضاء (و) رئيس قسم واحد (أو) من أربعة أعضاء فقط

ومن دون رؤساء أقسام

<u>ملاحظة هامة :</u> نستخدم إشارة (×) عند وجود حرف (و) بين أعضاء اللجنة كأن يقال ٣ أعضاء (و) رئيس قسم أما

إذا ذكر (أو) فإننا نستخدم إشارة (+)

عدد طرائق اختيار اللجنة = $\binom{٨}{٢} \times \binom{٧}{٢} + \binom{٨}{٣} \times \binom{٧}{١} + \binom{٨}{٤} \times \binom{٧}{٠}$

$= ٢٨ \times ٢١ + ٥٦ \times ٧ + ٧٠\times١ = ١٠٥٠$ طريقة

٣) في أحد المستشفيات يراد اختيار فريق طبي خماسي لتمثيل المستشفى في مؤتمر صحي ، من بين ٥ أطباء ، و ٦ ممرضين ، بكم طريقة يمكن تكوين الفريق بحيث يكون رئيس الفريق ونائبه من الأطباء ، والبقية ممرضون

الحل : عدد طرائق اختيار رئيس الفريق ونائبه = ل (٥ ، ٢) = ٥ × ٤ = ٢٠

عدد طرائق اختيار ٣ ممرضين من ٦ = $\binom{٦}{٣} = ٢٠$

عدد طرائق اختيار الفريق = ٢٠ × ٢٠ = ٤٠٠ طريقة

قاعدة للحفظ : $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن - ر}$ حيث ن ، ر عددان طبيعيان $٠ \leqslant ر \leqslant ن$

$\binom{ن}{٠} = ١$ ، $\binom{ن}{١} = ن$ ، $\binom{ن}{ن} = ١$

٤) حل المعادلة الآتيـة : $\binom{٩}{٢} = \binom{٩}{س}$

س = ٢ أو س = ٩ – ٢ ومنه س =٧

∴ س =٢ ، س = ٧

٥) مجموعة قيم س التي تحقق المعادلة $\binom{١٢}{س} = \binom{١٢}{٨}$

أ) {٤} ب) {٨} ج) {٤ ، ٨} د) {٤ ، ٨ ، ١٢}

الحل :

س = ٨ أو س = ١٢ – ٨ ومنه س = ٤

٦) إذا كان $\binom{ن}{٣} = \binom{ن}{٥}$ فإن قيمة (ن) تساوي :

أ) ٣ ب) ٥ ج) ٨ د) ١٥

ن – ٥ = ٣ ومنه ن = ٣ + ٥ = ٨

٧) بكم طريقة يمكن اختيار (٣) معلمين وطالبين لتشكيل لجنة في إحدى المدارس من بين (٥) معلمين ، و(٨) طلاب ؟

الحل : بما أنه لم تحدد مناصب معينة للمعلمين والطلاب نستخدم التوافيق

طرائق اختيار اللجنة = $\binom{٥}{٣} \times \binom{٨}{٢} = \frac{٥!}{٣!\,(٥-٣)!} \times \frac{٨!}{٢!\,(٨-٢)!} = ١٠ \times ٢٨ = ٢٨٠$ طريقة

٨) جد قيمة (ن) إذا علمت أن : ن! = ل (٥ ، ٢) + $\binom{٤}{١}$

ن! = $٥ \times ٤ + \frac{٤!}{١!\,(٤-١)!} = ٥ \times ٤ + ٤ = ٢٤$

ن! = $٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٤!$ ومنه ن = ٤

٩) قيمة ن التي تحقق المعادلة : (ن + ١)! = $\binom{١٠}{٣}$ × ل (٦ ، ١)

الحل :

(ن + ١)! = $\frac{١٠!}{٣!\,(١٠-٣)!} \times ٦ = \frac{١٠\times٩\times٨\times\cancel{٧!}}{٣!\times\cancel{٧!}} \times ٦ = ١٢٠ \times ٦ = ٧٢٠$

(ن + ١)! = $٧٢٠ = ٦\times٥\times٤\times٣\times٢\times١ = ٦!$

(ن + ١)! = ٦! ومنه ن + ١ = ٦ ومنه ن = ٥

٧٢٠	٢
٣٦٠	٣
١٢٠	٤
٣٠	٥
٦	٦

١٠) جد قيمة ن التي تحقق المعادلة

ن! = ٢ × $\binom{١٠}{٢}$ + ل (٦ ، ٢)

الحل :

١٢٠	٢
٦٠	٣
٢٠	٤
٥	٥
١	

ن ! = ٢× $\frac{١٠!}{٢! ٨!}$ + ٦×٥ = ٢ × $\frac{١٠×٩×\cancel{٨!}}{٢! \cancel{٨!}}$ + ٣٠

ن ! = ٢×٤٥ + ٣٠ = ١٢٠

ن ! =٥×٤×٣×٢×١ = ٥! ومنه ن = ٥

١١) بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة طلاب من بين (١٠) طلاب لتشكيل لجنة للمشاركة في إحدى المؤتمرات ؟

أ)ل(١٠، ٣) ب)٣! ج) $\binom{١٠}{٣}$ د)١٠!

١٢) ل (ن ، ٣) = ٦٠ ، فإن $\binom{ن}{٣}$ يساوي :

أ) ٣٦٠ ب) ١٨٠ ج) ٢٠ د) ١٠

الحل :

$\binom{ن}{٣} = \frac{ل(ن ، ٣)}{٣!}$ ولكن ل (ن ، ٣) =٦٠ نعوض

= $\frac{٦٠}{٣!} = \frac{٦٠}{٣×٢×١}$ = ١٠

١٣) بكم طريقة يمكن اختيار (٤) طلاب و(٣) طالبات لتشكيل لجنة في إحدى الكليات من بين (١٠) طلاب و(٥) طالبات

أ) $\binom{١٠}{٤}\binom{٥}{٣}$ ب) $\binom{١٠}{٣}\binom{٥}{٤}$ ج) ل (١٠،٤)× ل (٥،٣) د) ل (١٠،٣)×ل (٥،٤)

١٤) عدد توافيق (٦) عناصر مأخوذة (٣) عناصر في كل مرة تساوي :

أ) ل(٦، ٣) ب) ٦×٣ ج)٣! ×٦! د) $\binom{٦}{٣}$

١٥) مجموعة مكونة من (٦) معلمين و (٨) طلاب جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة ثلاثية تتكون من معلمين اثنين على الأقل .

الحل :
تتكون اللجنة من معلمين اثنين و طالب أو من ثلاث معلمين ودون طلاب

عدد طرائق الاختيار = $\binom{٦}{٢}×\binom{٨}{١} + \binom{٦}{٣}×\binom{٨}{٠} = \frac{٦!}{٢!×٤!}$ × ٨ + $\frac{٦!}{٣!×٣!}$ × ١

= ١٥ ×٨ + ٢٠×١ = ١٢٠+٢٠ = ١٤٠

١٦) عائلة تتألف من ٥ أولاد و ٣ بنات ، يراد تكليف ٣ منهم بتنظيف الحديقة ، فبكم طريقة يمكن اختيارهم بحيث :
يوجد بنتان على الاقل ضمن الفريق

في حال يوجد بنتان على الأقل نميز الحالات التالية : بنتان (و) ولد (أو) ثلاثة بنات (و) دون أولاد

طرائق اختيار الفريق $= \binom{٣}{٢} \times \binom{٥}{١} + \binom{٣}{٣} \times \binom{٥}{٠} = \frac{٣!}{٢! \times ١!} \times ٥ + ١ \times ١$

$= ٣ \times ٥ + ١ = ١٦$ طريقة

١٧) جد عدد طرائق اختيار قلمين من علبة تحوي ١٠ أقلام ؟

$\binom{١٠}{٢} = \frac{١٠!}{٢! \times ٨!} = \frac{١٠ \times ٩ \times \cancel{٨!}}{٢! \times \cancel{٨!}} = ٤٥$ طريقة

١٨) حل المعادلة التالية : ل(ن ، ٢) $= \binom{ن}{٣} \times ٣!$ حيث ن عدد صحيح موجب

ل(ن ، ٢) $= \frac{ل(ن ، ٣)}{\cancel{٣!}} \times \cancel{٣!}$

ل(ن ، ٢) = ل (ن ، ٣)

$\cancel{ن(ن-١)} = \cancel{ن(ن-١)}(ن-٢)$ ومنه ١ = ن – ٢ ومنه ن = ٣

١٩) مجموعة مكونة من (٤) معلمين و (٣) معلمات ، بكم طريقة يمكن تكوين لجنة رباعية منهم ، بحيث تتكون اللجنة من معلم واحد على الأقل ؟

تتكون اللجنة من <u>(١) معلم و (٣) معلمات</u> أو <u>(٢) معلم و(٢) معلمة</u> أو<u>(٣) معلم و(١) معلمة</u> أو <u>(٤) معلم و (٠) معلمة</u>

$= \binom{٤}{١} \times \binom{٣}{٣} + \binom{٤}{٢} \times \binom{٣}{٢} + \binom{٤}{٣} \times \binom{٣}{١} + \binom{٤}{٤} \times \binom{٣}{٠}$

$= ٤ \times ١ + \frac{٤!}{٢! \times ٢!} \times \frac{٣!}{٢! \times ١!} + \frac{٤!}{٣! \times ١!} \times ٣ + ١ \times ١$

$= ٤ + \frac{٤ \times ٣ \times \cancel{٢!}}{١ \times ٢ \times \cancel{٢!}} \times \frac{٣ \times \cancel{٢!}}{\cancel{٢!} \times ١} + \frac{٤ \times \cancel{٣!}}{\cancel{٣!} \times ١} \times ٣ + ١ = ٤ + ٦ \times ٣ + ٤ \times ٣ + ١ = ٤ + ١٨ + ١٢ + ١ = ٣٥$

١) جد قيمة المقدار : $\frac{٣! + ٤!}{٥(٢!)} + \binom{٥}{٣} = \frac{٣ \times ٢ \times ١ + ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٥ \times ٢ \times ١} + \frac{٥!}{٣! \times ٢!}$

$= \frac{٦ + ٢٤}{١٠} + \frac{٥ \times ٤ \times ٣!}{٣! \times ٢!} = \frac{٣٠}{١٠} + \frac{٢٠}{٢} = ٣ + ١٠ = ١٣$

المتغير العشوائي المنفصل

١) إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الأطفال الذكور في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها (٣) أطفال وتسجيل النتائج حسب الجنس وتسلسل الولادة ، فإن القيم الممكنة للمتغير العشوائي (س) هي :

أ) ١، ٢، ٣ ب) ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ج) ١ ، ٢ د) ٠ ، ١ ، ٢

٢) في تجربة رمي قطعة نقد مرتين إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور الصورة :

١) اكتب الفضاء العيني لهذه التجربة
٢) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س)

الحل :

١) Ω = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ،(ك ، ك) }

٢) س= { ٠ ، ١ ، ٢ }

ل(س=٠)= (ك ، ك) = $\frac{١}{٤}$

ل(س = ١) = (ص ، ك) ، (ك ، ص) = $\frac{٢}{٤}$

ل(س = ٢)= (ص ، ص) = $\frac{١}{٤}$

س	٠	١	٢
ل(س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$

٣) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س) معطى بالجدول التالي :

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٢	جـ	٠,٣	٠,١

فإن قيمة (جـ) تساوي :

أ) ٠,١ ب) ٠,٢ ج) ٠,٣ د) ٠,٤

الحل: بما أن $\sum$ ل(س ر) = ١ فإن :

٠,٢ + جـ + ٠,٣ + ٠,١ = ١ ⟵ ٠,٦ + جـ = ١ ومنه جـ = ٠,٤

٤) إذا التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (ع) معطى بالمجموعة الآتية :

{ (٠ ، ٠,٢) ، (١ ، ٠,٤) ، (٢ ، ٢ب) } ، فما قيمة الثابت ب ؟

أ) ٠,٠٤ ب) ٠,٤ ج) ٠,٢ د) ٠,٠٦

الحل: بما أن $\sum$ ل(س ر) = ١ فإن :

٠,٢ + ٠,٤ + ٢ب = ١ ومنه ٠,٦ + ب = ١ ومنه ٢ب = ٠,٤ ومنه ب = ٠,٢

توزيع ذي الحدين

١) إذا كان احتمال أن يصيب شخص ما هدفاً في كل طلقة يطلقها على الهدف يساوي (٠,٦) فإذا أطلق (٤) طلقات

على الهدف ، فما احتمال أن يصيب الهدف مرة واحدة على الأقل ؟

الحل :

ن = ٤ ، أ = ٠,٦ ، س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

ل(س ⩾ ١) = ل(س = ١) + ل (س = ٢) + ل (س = ٣) + ل (س = ٤)

ولكن $\sum$ ل(س ر) = ١ أي :

ل(س=٠) + ل(س = ١) + ل (س = ٢) + ل (س = ٣) + ل (س = ٤) = ١

ل(س = ٠) + ل (س ⩾ ١) = ١

ل (س ⩾ ١) = ١ – ل (س =٠) حيث ل(س = ر) = $\binom{ن}{ر}$ (أ)^{ر}(١ – أ)$^{ن-ر}$

= ١ - $\binom{٤}{٠}$(٠,٦)^{٠}(١ – ٠,٦)^{٤} = ١ – ١×١×٠,٠٢٥٦ = ٠,٩٧٤٤

---

٢) إذا كان احتمال نجاح زراعة التفاح في منطقة جرش (٠,٨) ، زرع شخص (٣) شجرات تفاح في حديقة بيته ، ما احتمال نجاح زراعتها جميعا ؟

أ) ٠,٢ ب) (٠,٢)^{٢} ج) (٠,٨)^{٣} د) ٠,٢٤

الحل : ل(س = ر) = $\binom{ن}{ر}$ (أ)^{ر}(١ – أ)$^{ن-ر}$

ل(س= ٣) = $\binom{٣}{٣}$(٠,٨)^{٣}(١ – ٠,٨)^{٠} = ١ × (٠,٨)^{٣} × ١ = (٠,٨)^{٣}

---

٣) أجريت ثلاث عمليات جراحية في أحد المستشفيات الأردنية وكان احتمال نجاح العملية الواحدة يساوي ٨٠%

١) إذا دل المتغير العشوائي س على عدد العمليات الجراحية الناجحة فاكتب قيم س الممكنة
٢) ما احتمال نجاح عملية جراحية واحدة فقط ؟

الحل : ن = ٣ ، أ = ٠,٨

١) س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

٢) ل(س = ر) = $\binom{ن}{ر}$(أ)^{ر}(١ – أ)$^{ن-ر}$

ل(س = ١) = $\binom{٣}{١}$(٠,٨)^{١}(١ – ٠,٨)^{٢} = ٣ × ٠,٨ × ٠,٠٤ = ٠,٠٩٦

٤) زرع شخص شجرتين في حديقة منزله ، إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الأشجار الناجحة وكان احتمال نجاح زراعة الشجرة الواحدة (٠,٨) ، فأجب عما يأتي

١) اكتب قيمة س
٢) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

الحل :

١) ن = ٢ ، أ = ٠,٨
قيم س = { ٠ ، ١ ، ٢ }

$$ل\,(س=٠) = \binom{٢}{٠}(٠,٨)^{٠}(١-٠,٨)^{٢-٠} = ١\times١\times٠,٠٤ = ٠,٠٤$$

$$ل\,(س=١) = \binom{٢}{١}(٠,٨)^{١}(١-٠,٨)^{٢-١} = ٢\times٠,٨\times٠,٢ = ٠,٣٢$$

$$ل\,(س=٢) = \binom{٢}{٢}(٠,٨)^{٢}(١-٠,٨)^{٢-٢} = ١\times٠,٦٤\times١ = ٠,٦٤$$

س	٠	١	٢
ل($س_ر$)	٠,٠٤	٠,٣٢	٠,٦٤

٥) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية ٨٠% ، فما احتمال نجاح عمليتين على الأقل ، إذا أجريت ثلاث عمليات ؟

الحل :

٢) ن = ٣ ، أ = ٠,٨٠ ، قيم س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }
ل (س $\geqslant$ ٢) = ل (س = ٢) + ل (س = ٣)

$$= \binom{٣}{٢}(٠,٨)^{٢}(١-٠,٨)^{٣-٢} + \binom{٣}{٣}(٠,٨)^{٣}(١-٠,٨)^{٣-٣}$$

$$= ٣\times٠,٦٤\times٠,٢ + ١\times٠,٥١٢\times١ = ٠,٣٨٤ + ٠,٥١٢ = ٠,٨٩٦$$

٦) إذا كان س متغيراً عشوائياً ذا حدين ، ومعاملاه : ن = ٢ ، أ = ٠,٣ ، فجد كلاً مما يأتي :

١) قيم س
٢) جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي

الحل : قيم س = { ٠ ، ١ ، ٢ }

١) $ل(س=٠) = \binom{٢}{٠}(٠,٣)^{٠}(١-٠,٣)^{٢-٠} = ١\times١\times٠,٤٩ = ٠,٤٩$

$$\text{ل}(\text{س} = ١) = \binom{٢}{١}(٠,٣)^{١}(١ - ٠,٣)^{٢-١} = ٢ \times ٠,٣ \times ٠,٧ = ٠,٤٢$$

$$\text{ل}(\text{س} = ٢) = \binom{٢}{٢}(٠,٣)^{٢}(١ - ٠,٣)^{٢-٢} = ١ \times ٠,٠٩ \times ١ = ٠,٠٩$$

س	٠	١	٢
ل($\text{س}_\text{ر}$)	٠,٤٩	٠,٤٢	٠,٠٩

٧) في تجربة إلقاء قطعة نقد (٣) مرات متتالية ، إذا دلّ المتغير العشوائي س على عدد مرات ظهور صورة ، فاكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س .

الحل :

ن = ٣ ، أ = $\frac{١}{٢}$ ، س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

$$\text{ل}(\text{س} = ٠) = \binom{٣}{٠}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٠}\left(١ - \frac{١}{٢}\right)^{٣-٠} = ١ \times ١ \times \frac{١}{٨} = \frac{١}{٨}$$

$$\text{ل}(\text{س} = ١) = \binom{٣}{١}\left(\frac{١}{٢}\right)^{١}\left(١ - \frac{١}{٢}\right)^{٣-١} = ٣ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٨}$$

$$\text{ل}(\text{س} = ٢) = \binom{٣}{٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\left(١ - \frac{١}{٢}\right)^{٣-٢} = \frac{!٣}{!٢ \times !١} \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢} = ٣ \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٨}$$

$$\text{ل}(\text{س} = ٣) = \binom{٣}{٣}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}\left(١ - \frac{١}{٢}\right)^{٣-٣}$$

$$= ١ \times \frac{١}{٨} \times ١ = \frac{١}{٨}$$

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

٨) غرس مزارع (٥) نخلات وكانت نسبة احتمال نجاح غرس النخلة الواحدة (٤٠%) ، ما احتمال نجاح غرس (٣) نخلات ؟

الحل : ن = ٥ ، أ = ٠,٤٠ ، ر = ٣

$$\text{ل}(\text{س} = \text{ر}) = \binom{\text{ن}}{\text{ر}}(\text{أ})^{\text{ر}}(١ - \text{أ})^{\text{ن}-\text{ر}}$$

$$\text{ل}(\text{س} = ٣) = \binom{٥}{٣}(٠,٤٠)^{٣}(١ - ٠,٤٠)^{٥-٣} = \frac{!٥}{!٣ \times !٢} \times ٠,٠٦٤ \times ٠,٣٦$$

$$= \frac{٥ \times ٤ \times \cancel{!٣}}{\cancel{!٣} \times !٢} \times ٠,٠٢٣٠٤ = ١٠ \times ٠,٠٢٣٠٤ = ٠,٢٣٠٤$$

٩) إذا كان (س) متغيرا عشوائيا ذا الحدين معاملاه ن= ٣ ، أ = ٠,٩ ، فجد كلاً مما ياتي :

١) ل (س = ٢)

٢) ل (س ⩽ ١)

الحل : $ل(س = ر) = \binom{ن}{ر} (أ)^{ر} (١ - أ)^{ن - ر}$

$ل(س = ٢) = \binom{٣}{٢} (٠,٩)^{٢} (١ - ٠,٩)^{٣ - ٢} = \frac{٣!}{٢! \times ١!} \times ٠,٨١ \times ٠,١ = ٠,٢٤٣$

ل (س ⩽ ١) = ل (س = ١) + ل (س = ٢) + ل (س = ٣) ولكن $\sum ل(س_{ر}) = ١$ أي :

ل (س = ٠) + ل (س = ١) + ل (س = ٢) + ل (س = ٣) = ١ ومنه

ل(س = ٠) + ل (س ⩽ ١) = ١ ومنه ل (س ⩽ ١) = ١ - ل (س = ٠)

$ل(س ⩽ ١) = ١ - \binom{٣}{٠} (٠,٩)^{٠} (١ - ٠,٩)^{٣-٠} = ١ - ١ \times ١ \times ٠,٠٠١ = ٠,٩٩٩$

١٠) إذا كان س متغيراً عشوائياً ذا حدين ، ومعاملاه : ن = ٤ ، أ = ٠,٦ ، فجد كلا مما يأتي :

أ) ل(س = ٢)

ب) ل(س ⩽ ٤) $ل(س = ر) = (أ)^{ر} (١ - أ)^{ن - ر}$

ج) ل (س ⩾ ١)

الحل :

$ل(س=٢) = \binom{٤}{٢} (٠,٦)^{٢} (١ - ٠,٦)^{٤-٢} = ٠,٣٤٥٦$

$ل(س ⩽ ٤) = ل(س = ٤) = \binom{٤}{٤} (٠,٦)^{٤} (١ - ٠,٦)^{٤-٤} = ١ \times ٠,١٢٩٦ \times ١ = ٠,١٢٩٦$

ل(س⩾ ١) = ل(س =١) + ل(س = ٠)

$= \binom{٤}{١} (٠,٦)^{١} (١ - ٠,٦)^{٤-١} + \binom{٤}{٠} (٠,٦)^{٠} (١ - ٠,٦)^{٤-٠}$

$= ٤ \times ٠,٦ \times ٠,٠٦٤ + ١ \times ١ \times ٠,٠٢٥٦ = ٠,١٧٩٢$

١١) يحتوي صندوق على (٤) كرات حمراء و(٦) كرات بيضاء ، سحبت من الصندوق (٣) كرات على التوالي مع الإرجاع ، إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الكرات الحمراء المسحوبة ، فاكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ع .

<u>ملاحظة :</u> معنى مع الإرجاع أي أنني أسحب الكرة الأولى ثم أرجعها ثم أسحب الكرة الثانية ثم أرجعها وهكذا ....

الحل : قيم س = { ٠ ، ١ ، ٢، ٣ }

ن = ٣ ، $أ = \frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥}$ حيث $ل(س = ر) = \binom{ن}{ر} (أ)^{ر} (١ - أ)^{ن - ر}$

$ل(س = ٠) = \binom{٣}{٠} (\frac{٢}{٥})^{٠} (١ - \frac{٢}{٥})^{٣ - ٠} = ١ \times ١ \times \frac{٢٧}{١٢٥} = \frac{٢٧}{١٢٥}$

$$\text{ل}(\text{س} = ١) = \binom{٣}{١}\left(\frac{٢}{٥}\right)^{١}\left(١ - \frac{٢}{٥}\right)^{٣ - ١} = ٣ \times \frac{٢}{٥} \times \frac{٩}{٢٥} = \frac{٥٤}{١٢٥}$$

$$\text{ل}(\text{س} = ٢) = \binom{٣}{٢}\left(\frac{٢}{٥}\right)^{٢}\left(١ - \frac{٢}{٥}\right)^{٣ - ٢} = ٣ \times \frac{٤}{٢٥} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣٦}{١٢٥}$$

$$\text{ل}(\text{س} = ٣) = \binom{٣}{٣}\left(\frac{٢}{٥}\right)^{٣}\left(١ - \frac{٢}{٥}\right)^{٣ - ٣} = ١ \times \frac{٨}{١٢٥} \times ١ = \frac{٨}{١٢٥}$$

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{٢٧}{١٢٥}$	$\frac{٥٤}{١٢٥}$	$\frac{٣٦}{١٢٥}$	$\frac{٨}{١٢٥}$

العلامة المعيارية

قانون العلامة المعيارية ($ز_{س}$) هو $ز_{س} = \frac{س - \bar{س}}{ع}$ حيث ع ≠ صفراً

حيث :

س : وتسمى المشاهدة أو العلامة الأصلية أو العلامة الخام أو الكتلة او الطول وغيرها

$\bar{س}$: المتوسط الحسابي وهو مجموع قيم المشاهدة أو العلامات الأصلية على عددها

ع : وهو الانحراف المعياري

١) إذا كان المتوسط الحسابي لعلامات اللغة العربية (٦٠) والانحراف المعياري لها (٥) ، فإن العلامة المعيارية للعلامة (٥٨) تساوي :

أ) ٢ ب) ٠,٤ ج) - ٠,٤ د) -٢

الحل : $ز_{س} = \frac{س - \bar{س}}{ع}$ ومنه $ز_{٥٨} = \frac{٥٨ - ٦٠}{٥} = - ٠,٤$

٢) إذا كانت المشاهدة (٧٥) تقابل العلامة المعيارية ٢ ، وكان الانحراف المعياري ٣ ، فإن المتوسط الحسابي هو :

أ) ٦٥ ب) ٦٠ ج) ٥٩ د) ٦٩

الحل :

$ز_{٧٥} = \frac{٧٥ - \bar{س}}{٣} = ٢$ ومنه $٦ = ٧٥ - \bar{س}$ ومنه $\bar{س} = ٧٥ - ٦ = ٦٩$

٣) إذا كان المتوسط الحسابي لعلامات صف ما في مادة الرياضيات (٦٥) والانحراف المعياري لها (٦) ، فجد العلامة التي تنحرف فوق الوسط انحرافين معياريين

الحل :

$\bar{س}$ = ٦٥ ، ع = ٦ ، معنى تنحرف فوق الوسط انحرافين معياريين $ز_{س}$ = ٢

$ز_{س} = \frac{س - \bar{س}}{ع}$ ومنه $٢ = \frac{س - ٦٥}{٦}$ ومنه ١٢ = س – ٦٥ ومنه س = ٧٧

٤) إذا كان المتوسط الحسابي لعلامات صف ما ، في مادة الرياضيات (٦٠) والانحراف المعياري لها (٤) وكانت العلامة المعيارية لعلامة الطالب أحمد تساوي (-٣) ، فجد العلامة التي حصل عليها .

الحل :

$ز_{س} = \frac{س - \bar{س}}{ع}$ ومنه $-٣ = \frac{س - ٦٠}{٤}$ ومنه -١٢ = س – ٦٠ ومنه س = ٤٨

٥) إذا كان المتوسط الحسابي لعلامات طلبة في مادة الرياضيات (٦٠) ، والانحراف المعياري لها (٤) فإن العلامة المعيارية للعلامة (٥٦) هي :

أ) -١ ب) ٤ ج) ١ د) ٤

الحل : $ز_{س} = \frac{س - \bar{س}}{ع}$ ومنه $ز_{٥٦} = \frac{٥٦ - ٦٠}{٤} = \frac{-٤}{٤} = -١$

٦) إذا كان المتوسط الحسابي لأعمار مجموعة من الأشخاص ٤٢ سنة والانحراف المعياري لها (٤) ، فإن العمر الذي ينحرف انحرافين معياريين تحت المتوسط الحسابي هو :

أ) ٣٤ ب) ٥٠ ج) ٤٠ د) ٣٨

$ز_{س} = \frac{س - \bar{س}}{ع}$ ومنه $-٢ = \frac{س - ٤٢}{٤}$ ومنه -٨= س – ٤٢ ومنه س = ٣٤

٧) معتمداً الجدول المجاور الذي يبيّن العلامات المعيارية لطالب في خمسة مباحث ، ما البحث الذي يكون تحصيل الطالب فيه أفضل ؟

المبحث	الحاسوب	الرياضيات	التاريخ	الجغرافيا
العلامة المعيارية	٣	-٢	٠	٢

أ) التاريخ ب) الرياضيات ج) الجغرافيا د) الحاسوب

٨) إذا كانت المشاهدتان ٨٥ ، ٧٠ تقابلان العلامتين المعياريتين ٢ ، -١ على الترتيب ، فجد :

العلامة المعيارية للمشاهدة ٩٥ .

$$ز_س = \frac{س - \overline{س}}{ع}$$

$ز_{٨٥} = \frac{٨٥ - \overline{س}}{ع}$ ومنه $٢ = \frac{٨٥ - \overline{س}}{ع}$ ومنه $٢ع = ٨٥ - \overline{س}$ .... (١)

$ز_{٧٠} = \frac{٧٠ - \overline{س}}{ع}$ ومنه $-١ = \frac{٧٠ - \overline{س}}{ع}$ ومنه $- ع = ٧٠ - \overline{س}$ .... (٢)

بطرح المعادلة (٢) من المعادلة (١) ينتج :

$٣ع = ١٥$ ومنه $ع = ٥$ بتعويض قيمة ع في إحدى المعادلتين ولتكن المعادلة (٢) ينتج :

$-٥ = ٧٠ - \overline{س}$ ومنه $\overline{س} = ٧٥$

ومنه $ز_{٩٥} = \frac{٩٥ - ٧٥}{٥} = ٤$

٩) جد قيمة المتوسط الحسابي لعلامات طلبة في مادة اللغة الانجليزية، علما بأن الانحراف المعياري للعلامات ٥ ، وعلامة هديل (٨٥) تنحرف فوق هذا المتوسط بمقدار ٣ انحراف معياري.

الحل : $\overline{س} = ؟$ ، $ع = ٥$ ، $س = ٨٥$ $ز_{٨٥} = ٣$

$ز_س = \frac{س - \overline{س}}{ع}$ ومنه $٣ = \frac{٨٥ - \overline{س}}{٥}$ ومنه $٨٥ - \overline{س} = ١٥$ ومنه $\overline{س} = ٧٠$

التوزيع الطبيعي

١) المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي المعياري هو :

أ) ١-   ب) صفر   ج) ٠,٥   د) ١

٢) الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي المعياري هو :

أ) ١   ب) صفر   ج) ٠,٥   د) ١

٣) إذا كان (ز) متغيرا عشوائيا طبيعيا معياريا ، فجد قيمة كل مما يأتي باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري :

١) ل(ز ≥ ٢,٤)
٢) ل(ز ≤ – ٢,٨٥)
٣) ل(ز≥ –١,١٤)
٤) ل(–١,٣٣ ≤ ز≤١,٥٨)

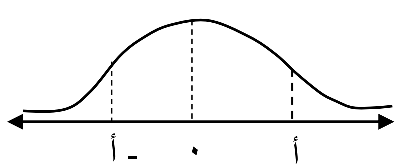
يمكنك الاستفادة من الجدول التالي :

ز	١,١٤	١,٣٣	١,٥٨	٢,٤	٢,٨٥
ل(ز)	٠,٨٧٢٩	٠,٩٠٨٢	٠,٩٤٢٩	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٧٨

الحل :

١) ل(ز ≥ ٢,٤) = ٠,٩٩١٨ من الجدول مباشرة
٢) ل(ز≤ – ٢,٨٥) = ل (ز≥٢,٨٥)= ٠,٩٩٧٨ من الجدول
٣) ل(ز≥ –١,١٤) = ل(ز≤١,١٤) = ١ – ل(ز≥١,١٤)
= ١ – ٠,٨٧٢٩ = ٠,١٢٧١
٤) ل(–١,٣٣ ≤ ز≤١,٥٨) = ل(ز≥١,٥٨) – ل(ز≥ –١,٣٣)
= ل(ز≥١,٥٨) – ل(ز≤ ١,٣٣)
= ٠,٩٤٢٩ – (١ – ل(ز ≥ ١,٣٣))
= ٠,٩٤٢٩ – (١ – ٠,٩٠٨٢)
= ٠,٩٤٢٩ – ٠,٠٩١٨ = ٠,٨٥١١

٤) الشكل المجاور يمثل منحنى توزيع طبيعي معياري لبيانات إحدى الدراسات ، فإذا علمت أن :



ل (ز ≥ – أ) = ٠,٦ ، فما قيمة ل (ز ≥ أ)

أ) ٠,٣   ب) ٠,٤
ج) ٠,٥   د) -٠,٣

الحل :

ل (ز ≤ أ) = ٠,٦

١ - ل (ز ≥ أ) = ٠,٦   ومنه ل (ز ≥ أ) = ١ – ٠,٦ = ٠,٤

٥) إذا كان (س) متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي ٦٥ ، وانحرافه المعياري ٦ ، فجد :

١) قيمة أ حيث ل(ز ⩽ أ) = ٠,٠٢٢٨

٢) ل(س ⩾ ٦٨)

٣) ل(س⩽ ٥٣)

يمكنك الاستفادة من الجدول التالي :

ز	٠,٥	١	٢
ل(ز)	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٧٧٢

الحل :

١) ل(ز ⩽ أ) = ٠,٠٢٢٨ ⟵ ١ – ل (ز⩽أ) = ٠,٠٢٢٨ ⟵ ل (ز⩽أ) = ١ - ٠,٠٢٢٨

ل (ز⩽أ) = ٠,٩٧٧٢ ⟵ أ = ٢

٢) ل(س ⩾ ٦٨) = ل(ز ⩾ $\frac{٦٨ - ٦٥}{٦}$) = ل(ز ⩾ ٠,٥) = ٠,٦٩١٥

٣) ل(س⩽ ٥٣) = ل(ز ⩽ $\frac{٥٣ - ٦٥}{٦}$) = ل(س⩽ -٢) = ل(ز ⩾ ٢) = ٠,٩٧٧٢

٦) إذا كان (س) متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي ٢٥ ، وانحرافه المعياري ٥ ، فجد :

ل(٢٢⩽س⩽ ٣٠)

يمكنك الاستفادة من الجدول التالي :

ز	٠,٦	١	١,٦	٢
ل(ز)	٠,٧٢٥٧	٠,٨٤١٣	٠,٩٤٥٢	٠,٩٧٧٢

الحل : μ = ٢٥ ، σ = ٥ ، ز = $\frac{س - \mu}{\sigma}$

ل(٢٢⩽س⩽ ٣٠) = ل($\frac{٢٢ - ٢٥}{٥}$ ⩽ ز ⩽ $\frac{٣٠ - ٢٥}{٥}$)

= ل (–٠,٦ ⩽ ز ⩽ ١)

= ل(ز ⩽ ١)– ل (ز ⩽ –٠,٦)

= ل(ز ⩽ ١)– ل (ز ⩾ ٠,٦)

= ٠,٨٤١٣ – (١ – ل(ز ⩽ ٠,٦))

= ٠,٨٤١٣ – (١ – ٠,٧٢٥٧)

= ٠,٨٤١٣ – ٠,٢٧٤٣ = ٠,٥٦٧٠

٧) إذا كان متوسط معدل (٥٠٠٠) طالب في إحدى المدارس (٥٧) ، والانحراف المعياري ١٠ ، وكانت المعدلات تتوزع توزيعاً طبيعياً ،واختير أحد الطلاب عشوائياً ، فجد :

أ) احتمال أن لايزيد معدل الطالب عن ٥٥

ب) احتمال أن يكون معدل الطالب محصوراً بين ٥٠ و ٦٥
ج) عدد الطلاب الذين يزيد معدل كل منهم على ٥٠

ملاحظة : يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

ز	صفر	٠,٢	٠,٧	٠,٨	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٥٧٩٣	٠,٧٥٨٠	٠,٧٨٨١	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

الحل : μ = ٥٧ ، σ = ١٠ ، ز= $\frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$

أ) ل(س ⩾ ٥٥) = ل (ز ⩾ $\frac{\text{٥٥ - ٥٧}}{\text{١٠}}$) = ل(ز ⩾ -٠,٢) = ل(ز ⩽ ٠,٢)

= ١ - ل (ز ⩾ ٠,٢) = ١ – ٠,٥٧٩٣ = ٠,٤٢٠٧

ب) ل(٥٠ ⩾ س ⩾ ٦٥) = ($\frac{\text{٥٠ - ٥٧}}{\text{١٠}}$ ⩾ ز ⩾ $\frac{\text{٦٥ - ٥٧}}{\text{١٠}}$)

= (-٠,٧ ⩾ ز ⩾ ٠,٨) = ل(ز⩾ ٠,٨) – ل (ز ⩾ -٠,٧)

= ٠,٧٨٨١ – ل(ز ⩽ ٠,٧) = ٠,٧٨٨١ – (١ – ل (ز ⩾ ٠,٧))

= ٠,٧٨٨١ – (١ – ٠,٧٥٨٠) = ٠,٧٨٨١ – ٠,٢٤٢ = ٠,٥٤٦١

ج) ل (س ⩽ ٥٠) = ل(ز ⩽ $\frac{\text{٥٠ - ٥٧}}{\text{١٠}}$)

= ل (ز ⩽ -٠,٧) = ل(ز⩾ ٠,٧) = ٠,٧٥٨٠

عدد الطلاب الذين يزيد معدل كل منهم على ٥٠ هو :

٠,٧٥٨٠ × ٥٠٠٠ = ٣٧٩٠ طالب

٨) إذا كانت علامات امتحان عام تتبع توزيعا طبيعيا متوسطه الحسابي ٧٠ ، وانحرافه المعياري ١٠ ، فما نسبة العلامات التي تقل عن ٦٥ ؟

ملاحظة : يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

ز	٠,٥	١,٦	١,٢٧
ل(ز≥أ)	٠,٦٩١٥	٠,٩٤٥٢	٠,٨٩٨٠

الحل : ل (س ⩾ ٦٥) = ل (ز ⩾ $\frac{\text{٦٥ - ٧٠}}{\text{١٠}}$) = ل (ز ⩾ -٠,٥)

= ل (ز ⩽ ٠,٥) = ١ – ل (ز ⩾ ٠,٥) = ١ – ٠,٦٩١٥ = ٠,٣٠٨٥

٩) إذا كانت أوزان الأطفال عند الولادة تتبع توزيعا طبيعيا متوسطه الحسابي (٣,٢) كغم وانحرافه المعياري (٠,٤) كغم ، اختير أحد الاطفال عشوائيا عند الولادة ما احتمال ان يكون وزنه أكثر من (٤) كغم ؟

ملاحظة : يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

ز	صفر	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

الحل : μ = ٣,٢ ، σ = ٠,٤ ، ز = $\frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$

ل(س ⩽ ٤) = ل (ز ⩽ $\frac{٤ - ٣,٢}{٠,٤}$) = ل (ز ⩽ ٢) = (١ – ل (ز ⩽ ٢)) = ١ – ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

١٠) إذا كان(ز) متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً ، وكان ل(ز⩽أ) = ٠,٨ ، فإن قيمة ل(ز⩾– أ) تساوي :

أ) ٠,٨　　ب) ٠,٢　　ج) ٠,٠٢　　د) ٠,٨

ل(ز⩾– أ) = ل(ز ⩽ أ) = ١ - ل(ز⩽أ) = ١ – ٠,٨ = ٠,٢

١١) تتبع كتل (٢٠٠٠٠) طفل حديثي الولادة توزيعاً طبيعياً متوسطه الحسابي (٤) كغم ، وانحرافه المعياري (٠,٥) ،
ما عدد الأطفال الذين تكون كتلهم أكبر من أو يساوي (٣,٥) كغم ؟

ملاحظة :يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي الذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري :

الحل :

أ	٠	٠,٥	١	١,٥	٢
ل(ز⩽أ)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢

ل(س ⩾ ٣,٥) = ل(ز ⩾ $\frac{٣,٥ - ٤}{٠,٥}$) = ل (ز ⩾ -١) = ل(ز ⩽ ١) = ٠,٨٤١٣ من الجدول

الارتباط

١) معتمدا شكل الانتشار المجاور الذي يبين العلاقة بين المتغيرين س ، ص ، ما نوع العلاقة التي تربط بين المتغيرين س ، ص ؟

أ) طردية تامة　　ب) عكسية

ج) عكسية تامة　　د) طردية

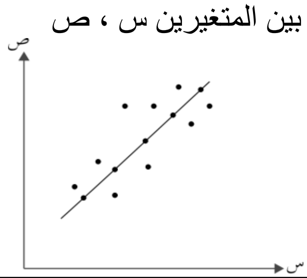
٢) إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص يساوي (٠,٩٤) فإن الارتباط بين س ، ص :

أ) طردي تام　　ب) عكسي　　ج) طردي　　د) عكسي تام

٣) إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص يساوي (٠,٣٥) فإن الارتباط بين س ، ص :

أ) طردي قوي　　ب) عكسي قوي　　ج) طردي ضعيف　　د) عكسي ضعيف

٤) يمثل الشكل المجاور شكل الانتشار بين المتغيرين س ، ص فإنه يمكن الحكم على نوع العلاقة بين المتغيرين س ، ص على أنها :



أ) تامة　　ب) طردية

ج) عكسية　　د) لا توجد علاقة

٥) يبين الجدول الآتي علامات ٥ طلاب في امتحان الرياضيات والعلوم :

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
علامة الرياضيات س	١٠	١٦	١٢	١٤	٨
علامة العلوم ص	١٢	١٤	١٦	١٨	١٠

احسب معامل الارتباط بين علامات الرياضيات (س) والعلوم (ص) للطلبة الخمسة .

الحل :

$$\overline{س} = \frac{(١٠ + ١٦ + ١٢ + ١٤ + ٨)}{٥} = ١٢$$

$$\overline{ص} = \frac{(١٢ + ١٤ + ١٦ + ١٨ + ١٠)}{٥} = ١٤$$

$س_ك$	$ص_ك$	$س_ك - \overline{س}$	$ص_ك - \overline{ص}$	$(س_ك - \overline{س})(ص_ك - \overline{ص})$	$(س_ك - \overline{س})^٢$	$(ص_ك - \overline{ص})^٢$
١٠	١٢	٢-	٢-	٤	٤	٤
١٦	١٤	٤	٠	٠	١٦	٠
١٢	١٦	٠	٢	٠	٠	٤
١٤	١٨	٢	٤	٨	٤	١٦
٨	١٠	٤-	٤-	١٦	١٦	١٦
المجموع		٠	٠	٢٨	٤٠	٤٠

$$ر = \frac{\sum_{ك=١}^{ن}(س_ك - \overline{س})(ص_ك - \overline{ص})}{\sqrt{\sum_{ك=١}^{ن}(س_ك - \overline{س})^٢ \sum_{ك=١}^{ن}(ص_ك - \overline{ص})^٢}} = \frac{٢٨}{\sqrt{٤٠ \times ٤٠}} = \frac{٢٨}{٤٠} = ٠,٧$$

٦) إذا كان س ، ص متغيرين ، وعدد قيم كل منهما (٥) ، $\sum_{ك=١}^{٥}(س_ك - \overline{س})^٢ = ٢٥$ ،

$\sum_{ك=١}^{٥}(ص_ك - \overline{ص})^٢ = ١٦$ ، $\sum_{ك=١}^{٥}(س_ك - \overline{س})(ص_ك - \overline{ص}) = -١٥$

فاحسب معامل ارتباط بيرسون بين هذين المتغيرين ، محددا نوع العلاقة بينهما

الحل :

$$ر = \frac{\sum_{ك=١}^{ن}(س_ك - \overline{س})(ص_ك - \overline{ص})}{\sqrt{\sum_{ك=١}^{ن}(س_ك - \overline{س})^٢ \sum_{ك=١}^{ن}(ص_ك - \overline{ص})^٢}}$$

$$ر = \frac{-١٥}{\sqrt{٢٥ \times ١٦}} = \frac{-١٥}{٢٠} = -٠,٧٥$$

∴ توجد علاقة عكسية قوية بين هذين المتغيرين

٧) إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص يساوي ٠,٨ ، عدلت قيم كل من المتغيرين س ، ص حسب العلاقة س* = ٢س - ١ ، ص* = ١ - ٤ص ، فإن معامل ارتباط بيرسون بين س* ، ص* يساوي :

أ) -٠,٢ ب) ٠,٢ ج) ٠,٨ د) -٠,٨

الحل : نلاحظ أن معامل س هو (٢) موجب ، ومعامل ص هو (-٤) سالب

∴ المعاملان ليس لهما نفس الإشارة ، لذا فإن ر = -٠,٨

٨) إذا كان معامل الارتباط بين س ، ص يساوي ٠,٤ ، فجد قيمة معامل الارتباط بين س* ، ص*

حيث س* = ٥ + س ، ص*= -٢ص

الحل :

نلاحظ أن معامل س هو (١) موجب ، ومعامل ص هو (-٢) سالب

∴ المعاملان ليس لهما نفس الإشارة ، لذا فإن ر = -٠,٤

٩) أي معاملات الارتباط الآتية أقوى :

أ) ٠,٧ ب) -٠,٩ جـ) ٠,٨ د) -٠,٨

الحل : -٠,٩ وذلك لأنها أقرب إلى -١

الانحدار

١) إذا كانت معادلة الانحدار الخطي البسيط للعلاقة بين معامل الذكاء (س) ومعدل التحصيل (ص) هي :

صَ = ١,٤ س – ٨١ ، فإن المعدل التحصيلي المتنبأ به لطالب معامل ذكائه ١١٠ هو :

أ) ٨٠ ب) ٩٢ ج) ٧٣ د) ٦١

الحل : عندما س = ١١٠ فإن صَ = ١,٤ × ١١٠ – ٨١ = ١٥٤ – ٨١ = ٧٣

٢) إذا كانت معادلة الانحدار للعلاقة بين معدل طالب في الثانوية العامة (س) ومعدله في الجامعة (ص) هي :

صَ = ١,٤ س – ٣٥ ، فتنبأ بمعدل طالب في الجامعة إذا كان معدله في الثانوية العامة (٨٥)

الحل : عندما س = ٨٥ فإن صَ = ١,٤ × ٨٥ – ٣٥ = ٨٤

٣) إذا علمت أن معادلة خط الانحدار للعلاقة بين قيمة رأس المال(س) والأرباح السنوية لشركة بالألف دينار (ص) هي : صَ = ٠,٣ س + ١٠ ، فجد الخطأ في التنبؤ بأرباح شركة رأس مالها ٦٠ ألف دينار ، وأرباحها السنوية ٢٧,٤ ألف دينار

الحل : س = ٦٠ ألف دينار ، صر = ٢٧,٤ ألف دينار

صَ = ٠,٣ × ٦٠ + ١٠ = ١٨ + ١٠ = ٢٨

الخطأ في التنبؤ = صر – صَ = ٢٧,٤ – ٢٨ = -٠,٦

٤) الجدول الآتي يبين معدل خمسة طلاب في الصفين : التاسع والعاشر

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
التاسع (س)	٥٠	٥٥	٧٠	٨٥	٩٠
العاشر (ص)	٦٠	٧٠	٦٠	٧٠	٨٠

أ) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بمعدل الطالب في الصف العاشر إذا علم معدله في الصف التاسع
ب) تنبأ بمعدل طالب في الصف العاشر إذا كان معدله في الصف التاسع ٨٨
ج) جد الخطأ في التنبؤ بمعدل طالب في الصف العاشر إذا كان معدله في الصف التاسع ٩٠

أ) $\overline{\text{س}} = \frac{(٥٠ + ٥٥ + ٧٠ + ٨٥ + ٩٠)}{٥} = \frac{٣٥٠}{٥} = ٧٠$

$\overline{\text{ص}} = \frac{(٦٠ + ٧٠ + ٦٠ + ٧٠ + ٨٠)}{٥} = \frac{٣٤٠}{٥} = ٦٨$

$\text{س}_{\text{ك}}$	$\text{ص}_{\text{ك}}$	$\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}}$	$\text{ص}_{\text{ك}} - \overline{\text{ص}}$	$(\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}})(\text{ص}_{\text{ك}} - \overline{\text{ص}})$	$(\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}})^٢$
٥٠	٦٠	٢٠-	٨-	١٦٠	٤٠٠
٥٥	٧٠	١٥-	٢	٣٠-	٢٢٥
٧٠	٦٠	٠	٨-	٠	٠
٨٥	٧٠	١٥	٢	٣٠	٢٢٥
٩٠	٨٠	٢٠	١٢	٢٤٠	٤٠٠
المجموع		٠	٠	٤٠٠	١٢٥٠

$$\text{أ} = \frac{\sum_{\text{ك}=١}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}})(\text{ص}_{\text{ك}} - \overline{\text{ص}})}{\sum_{\text{ك}=١}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}})^٢} = \frac{٤٠٠}{١٢٥٠} = \frac{٨}{٢٥} = ٠,٣٢$$

$\text{ب} = \overline{\text{ص}} - \text{أ}\,\overline{\text{س}} = ٦٨ - ٠,٣٢ \times ٧٠ = ٤٥,٦$

معادلة خط الانحدار $\hat{\text{ص}} = \text{أس} + \text{ب}$ هي $\hat{\text{ص}} = ٠,٣٢\ \text{س} + ٤٥,٦$

ب) $\hat{\text{ص}} = ٠,٣٢ \times ٨٨ + ٤٥,٦ = ٧٣,٧٦$

ج) عندما س = ٩٠ ، $\text{ص}_{\text{ر}} = ٨٠$

القيمة المتنبأ بها $\hat{\text{ص}} = ٠,٣٢ \times ٩٠ + ٤٥,٦ = ٧٤,٤$

الخطأ في التنبؤ $= \text{ص}_{\text{ر}} - \hat{\text{ص}}_{\text{ر}} = ٨٠ - ٧٤,٤ = ٥,٦$

٥) إذا كان س ، ص متغيرين وعدد قيم كل منهما ٥ ، $\overline{\text{س}} = ٦$ ، $\overline{\text{ص}} = ١٣$ ،

$\sum_{\text{ك}=١}^{٨} (\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}})^٢ = ٤٠$ ، $\sum_{\text{ك}=١}^{٨} (\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}})(\text{ص}_{\text{ك}} - \overline{\text{ص}}) = ٨٠$

فجد معادلة خط الانحدار الخطي للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س

الحل :

١) $أ = \dfrac{\sum_{ك=١}^{ن} (س_ك - \overline{س})(ص_ك - \overline{ص})}{\sum_{ك=١}^{ن} (س_ك - \overline{س})^٢} = \dfrac{٨٠}{٤٠} = ٢$

$ب = \overline{ص} - أ\overline{س} = ١٣ - ٢\times٦ = ١٣ - ١٢ = ١$

معادلة خط الانحدار $\hat{ص}$ = أ س + ب هي : $\hat{ص}$ = ٢س + ١

٦) إذا كانت معادلة الانحدار الخطي للعلاقة بين رأس المال (س) والأرباح السنوية (ص) هي : $\hat{ص}$ = ٢س + ٥

فإن الخطأ في التنبؤ لشركة رأس مالها (٣٠) ألف دينار وأرباحها السنوية (٧٠) ألف دينار هي :

أ) ٣ ألف ب) ٥ ألف ج) ٧ألف د) ـ٣ ألف

$\hat{ص}$ = ٢س + ٥ = ٢× ٣٠ + ٥ = ٦٥ ألف دينار

الخطأ في التنبؤ = $ص_ر - \hat{ص}$ = ٧٠ ـ ٦٥ = ٥ ألف دينار

إذا علمت أن معادلة خط الانحدار للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة (س) والمعدل في الثانوية العامة (ص) هي :

$\hat{ص}$ = ٣س + ٦٥

ا) ماقيمة كل من أ ، ب

ب) درست طالبة (٨) ساعات يوميا وحصلت على معدل (٨٦) احسب الخطأ في التنبؤ للمعدل الذي حصلت عليه الطالبة

أ) أ = ٣ ، ب = ٦٥

ب) $\hat{ص}$ = ٣× ٨ + ٦٥ = ٢٤ + ٦٥ = ٨٩ ، الخطأ في التنبؤ = $ص_ر - \hat{ص}$ = ٨٦ ـ ٨٩ = ـ٣