مكثف
المنير
في الرياضيات

الفـــــرع الأدبـــــي

وحدة التكامل وتطبيقاته

جيل ٢٠٠٢

الدورة الصيفية ٢٠٢٠

الأستاذ منير أبو بكر

٠٧٧٥٤٥٧٩٢٥

الوحدة الرابعة
التكامل وتطبيقاته

التكامل غير المحدود

تعريف التكامل بالرموز : $\int$ قَ(س) ءس = ق(س) + جـ حيث جـ ثابت التكامل

يسمى التكامل غير محدود لأن هناك قيم غير محدودة يمكن أن يأخذها الثابت جـ .

مشتقة تكامل الاقتران ق(س) = ق(س) ومعناها بالرموز :

$$\frac{ء}{ءس} \left(\int ق(س)\, ءس \right) = ق(س)$$

١) إذا كان ص = $\int$ (٣س^{٢} – ٢س)ءس ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = ٢

الحل :

باشتقاق الطرفين :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس} \left(\int (٣س^{٢} - ٢س)ءس \right) = ٣س^{٢} - ٢س$$

عندما س = ٢ ، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣(٢)^{٢} –٢(٢) = ١٢ – ٤ = ٨

٢) إذا كان ق(س) = $\int$ (س^{٢} + ٥س) ءس ، فإن قَ(–١) تساوي :

أ) -٤ ب) -٦ ج) ٣ د) ٤

الحل : نشتق الطرفين :

قَ(س) = س^{٢} + ٥س لأن الاشتقاق يلغي التكامل

قَ(–١) = (-١)^{٢} + ٥(-١) = ١ – ٥ = -٤

٣) إذا كان ق اقتراناً متصلاً وكان $\int$ ق(س) ءس = ٢س^{٣} + ٦س^{٢} + ٥ فجد قَ(١)

الحل : نشتق الطرفين : حيث الاشتقاق يلغي التكامل

ق(س) = ٦س^{٢} + ١٢س نشتق مرة ثانية لإيجاد قَ(س)

قَ(س) = ١٢س + ١٢ ومنه قَ(١) = ١٢ (١)^{٢} + ١٢ = ٢٤

٤) إذا كان ق اقترانا متصلا ، وكان $\int$ قَ(س) ءس = ٢س^{٣} فإن قَ(س) تساوي :

أ) ٣س^{٢} ب) س^{٣} ج)٦س د) ٦س^{٢}

باشتقاق الطرفين ينتج : قَ(س) = ٦س^{٢}

٥) إذا كان ق اقتراناً متصلاً وكان $\int$ ق(س) ءس = جتا٢س فإن قَ(س) تساوي :

أ) ٢ جا٢س   ب) -٢ جا٢س   ج) ٤ جتا٢س   د) – ٤ جتا٢س

نشتق الطرفين :

$$\frac{ء}{ءس}\left(\int ق(س)\ ءس\right) = \frac{ء}{ءس}(جتا٢س)$$

ق(س) = -٢ جا٢س   نشتق الطرفين مرة ثانية لإيجاد قَ(س)

قَ(س) = -٢ × ٢ جتا٢س = -٤ جتا٢س

إذا كان $\int$(قَ(س) + ٣) ءس = $س^٢$ + أ س + ١ وكان قَ(١) = ٤ فجد الثابت أ ؟

نشتق الطرفين ⟵ قَ(س) + ٣ = ٢س + أ   لأن الاشتقاق يلغي التكامل

قَ(١) + ٣ = ٢ × ١ + أ   ومنه ٤ + ٣ = ٢ + أ

٧ = ٢ + أ   ومنه   أ = ٥

قواعد التكامل :

القاعدة ١ : $\int$ أ ءس = أس + جـ   حيث أ ثابت

مثال $\int$ ٣ءس = ٣س + جـ

القاعدة ٢ : $\int س^ن\ ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ   حيث ن ≠ -١

مثال $\int س^٤\ ءس = \frac{س^٥}{٥}$ + جـ

القاعدة ٣ : $\int$ جاس ءس = - جتاس + جـ

القاعدة ٤ : $\int$ جتاس ءس = جاس + جـ

القاعدة ٥ : $\int$ $قا^٢$س ءس = ظاس + جـ   حيث جـ ثابت التكامل

مثال $\int$(٣ جتاس – ٢$قا^٢$س + جاس)ءس

= ٣جاس -٢ظاس – جتاس + جـ

---

٦) جد قيمة مايلي : $\int \sqrt{س^٣}\ ءس = \int س^{\frac{٣}{٢}}\ ءس = \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ

---

٧) جد قيمة مايلي : $\int(\frac{قا^٢س}{٣}$ - ٢جاس + س) ءس = $\frac{١}{٣}\int$ $قا^٢$س ءس - ٢ $\int$ جاس ءس + $\int$ س ءس

= $\frac{١}{٣}$ ظاس + ٢جتاس + $\frac{س^٢}{٢}$ + جـ

٨) $\int$ ٤قا^{٢}س ءس يساوي :

(أ) ٤ظاس + جـ   ب) ظاس + جـ   ج) ٤ قا^{٢}س + جـ   د) ٤ ظا^{٢}س + جـ

٩) جد قيمة مايلي : $\int$(١٠س^{٢} - $\sqrt[٦]{\text{س}}$ + ٣قا^{٢}س) ءس = $\int$(١٠س^{٢} – س$^{\frac{١}{٦}}$ + ٣قا^{٢}س) ءس

= $\frac{١٠}{٣}$ س^{٣} - $\frac{٦}{٧}$ س$^{\frac{٧}{٦}}$ + ٣ظاس + جـ

١٠) جد قيمة مايلي : $\int$(س$^{-٥}$ + $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$ + قا^{٢}س) ءس = $\int$(س$^{-٥}$ + س$^{-٢}$ + قا^{٢}س)ءس = $\frac{\text{س}^{-٤}}{-٤}$ + $\frac{\text{س}^{-١}}{-١}$ + ظاس+ جـ

١١) $\int \frac{٣}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ ءس يساوي :

أ) ٣جاس + جـ   ب) ٣قا^{٢}س + جـ   (ج) ٣ظاس + جـ   د) $\frac{٣}{\text{جاس}}$ + جـ

الحل : $\int \frac{٣}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ ءس = $\int$ ٣ قا^{٢}س ءس = ٣ ظاس + جـ   حيث قا^{٢}س = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

١٢) $\int$٢ظاس جتاس ءس يساوي :

أ) ٢جاس + جـ   ب) ٢قا^{٢}س + جـ   (ج) -٢جتاس + جـ   د) $\frac{٢}{\text{جاس}}$ + جـ

الحل :

$\int$٢ظاس جتاس ءس = $\int$٢ $\frac{\text{جاس}}{\cancel{\text{جتاس}}}$ × $\cancel{\text{جتاس}}$ ءس = $\int$٢جاس ءس = - ٢جتاس + جـ   حيث ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

١٣) $\int \frac{\text{جاس}}{\text{ظاس}}$ ءس يساوي :

ب) جتاس + جـ   ب) قا^{٢}س + جـ   ج) – جاس + جـ   (د) جاس + جـ

الحل : $\int \frac{\text{جاس}}{\text{ظاس}}$ ءس = $\int \frac{\text{جاس}}{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}$ ءس = $\int \cancel{\text{جاس}} \times \frac{\text{جتاس}}{\cancel{\text{جاس}}}$ ءس = $\int$جتاس ءس = جاس + جـ

١٤) جد ص= $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$ ءس = $\int$(س^{٢} -٣س)(س)$^{-\frac{١}{٣}}$ ءس

ص= $\int$(س$^{\frac{٥}{٣}}$ - ٣س$^{\frac{٢}{٣}}$)ءس = $\frac{٣}{٨}$س$^{\frac{٨}{٣}}$ - ٣ × $\frac{٣}{٥}$س$^{\frac{٥}{٣}}$ + جـ

١٥) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، وكان قَ(س) = ٢س – ١ ، وكان ق(٢) = ٣ ، فجد قيمة ق(١)

فكرة الحل : عندما يطلبوا إيجاد ق(١) معنى ذلك يجب أن نجري تكامل قَ(س) لإيجاد ق(س) ثم نعوض س بـ ١

$\int$ قَ(س) ءس = $\int$(٢س – ١) ءس

ق(س) = س^{٢} – س + جـ

ق(٢) = (٢)^{٢} – (٢) + جـ

٣ = ٤ – ٢ + جـ ومنه ٣ = ٢ + جـ ومنه جـ = ١ وبالتالي قاعدة الاقتران :

ق(س) = س^{٢} – س + ١ ومنه ق(١) = (١)^{٢} – (١) + ١ = ١

١٦) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، وكان قَ(س) = ٦س^{٢} - ٤س + ١ ، وكان ق (١) = ٠ ، فجد قيمة ق(٢)

الحل :

نكامل الطرفين : $\int$ قَ(س) ءس = $\int$(٦س^{٢} – ٤س + ١)ء س

ق(س) = ٢س^{٣} – ٢س^{٢} + س + جـ ولكن ق(١) = ٠

ق(١) = ٢(١)^{٣} – ٢(١)^{٢} + ١ + جـ

٠ = ٢ – ٢ + ١ + جـ ومنه جـ = -١ فتكون ق(س) = ٢س^{٣} – ٢س^{٢} + س -١

ق(٢) = ٢(٢)^{٣} – ٢(٢)^{٢} + ٢ -١ = ١٦ -٨ + ٢ -١ = ٩

١٧) جد التكامل الآتي : $\int$($\frac{٣}{س^{٢}}$ + $\frac{٢}{جتا^{٢}س}$ - $\sqrt{س^{٣}}$) ءس

الحل : $\int$(٣س$^{-٢}$ + ٢ قا^{٢}س – س$^{\frac{٣}{٢}}$) ءس = ٣ $\frac{س^{-١}}{-١}$ + ٢ ظاس – $\frac{٢}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ

= $\frac{-٣}{س}$ + ٢ ظاس – $\frac{٢}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ

١٨) إذا كان $\int$ظا٤س ءس ، فإنّ $\frac{ءص}{ءس}$ تساوي :

أ) ظا٤س		ب) قا^{٢}٤س		جـ) ٤ظا٤س		د) ٤قا^{٢}٤س

١٩) إذا كان ق متصلاً ، وكان $\int$ق(س)ء س = ٥ – س^{٣} ، فإن قيمة ق(١) تساوي :

أ) -٢		ب) ٢		جـ) ٣		د) -٣

نشتق الطرفين : ق(س) = -٣س^{٢} ⟵ ق(١) = -٣(١)^{٢} = -٣

التكامل المحدود

التكامل المحدود للاقتران ق على الفترة [أ ، ب] هو :

$\int_{أ}^{ب} ق(س)ءس = ع(س)\Big]_{أ}^{ب} = ع(ب) - ع(أ)$ ، حيث :

أ : الحد السفلي للتكامل المحدود

ب : الحد العلوي للتكامل المحدود

حيث يرمز للمقدار العددي : ع(ب) – ع(أ) بالرمز $ع(س)\Big]_{أ}^{ب}$

١) جد $\int_{١}^{٢} ٤ س^{٣} ءس = \cancel{٤}\frac{س^{٤}}{\cancel{٤}}\Big]_{١}^{٢} = س^{٤}\Big]_{١}^{٢} = (٢)^{٤} - (١)^{٤} = ١٦ - ١ = ١٥$

---

٢) أوجد تكامل : $\int_{٠}^{١} (\sqrt{س} + س)\, ءس$

$\int_{٠}^{١} (\sqrt{س} + س)\, ءس = \int_{٠}^{١} (س^{\frac{١}{٢}} + س)\, ءس = (\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢} س^{٢})\Big]_{٠}^{١}$

$= (\frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٣}} + \frac{١}{٢} س^{٢}) = (\frac{٢}{٣}\sqrt{(١)^{٣}} + \frac{١}{٢}(١)^{٢}) - (\frac{٢}{٣}\sqrt{(٠)^{٣}} + \frac{١}{٢}(٠)^{٢}) = \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} = \frac{٧}{٦}$

---

٣) إذا كان $\int_{-١}^{م} ٣\, ءس = ١٥$ ، فجد قيمة الثابت م

$٣س\Big]_{-١}^{م} = ١٥$ ومنه $٣(م) - ٣(-١) = ١٥$ ومنه $٣م + ٣ = ١٥$

$٣م = ١٢$ ومنه $م = ٤$

---

٤) إذا كان ق(-١)= - ٣ ، ق(٣) = ١٠ ، فإن $\int_{-١}^{٣} ق'(س)\, ءس$ تساوي :

أ) -١٠ ب) ١٣ ج) ٢٠ د) -١٢

$\int_{-١}^{٣} ق'(س)\, ءس = ق(س)\Big]_{-١}^{٣} = ق(٣) - ق(-١) = ١٠ - (-٣) = ١٠ + ٣ = ١٣$

---

٥) إذا كان ق(س) متصلا وكان ق(١) = ٣ ، ق(٢) = ٤ وكان : $\int_{١}^{٢} أ\, ق'(س)\, ءس = ١٢$

حيث أ ثابت ، فجد قيمة أ ؟

الحل :

$أ\, ق(س)\Big]_{١}^{٢} = ١٢$

$أ(ق(٢) - ق(١)) = ١٢$ ومنه $أ(٤ - ٣) = ١٢$ ومنه $أ = ١٢$

ملاحظة هامة :

مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر لأن التكامل المحدود قيمة ثابتة

٦) إذا كان ص = $\int_{١-}^{٢} (٢\text{س}^{٢} - ٣)\ \text{ؤس}$ أوجد $\frac{\text{ؤص}}{\text{ؤس}}$

الحل : $\frac{\text{ؤص}}{\text{ؤس}}$ = صفر لأن التكامل المحدود قيمة ثابتة مشتقته صفر

٧) احسب قيمة التكامل التالي : $\int_{١-}^{٢} \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٨}{\text{س} + ٤}\ \text{ؤ س}$

الحل : $\int_{١-}^{٢} \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٨}{\text{س} + ٤}\ \text{ؤ س} = \int_{١-}^{٢} \frac{\cancel{(\text{س}+٤)}(\text{س} - ٢)}{\cancel{\text{س} + ٤}}\ \text{ؤ س}$

$= \int_{١-}^{٢} (\text{س} - ٢)\ \text{ؤس} = \left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٢\text{س}\right)\Big]_{١-}^{٢} = \frac{(٢)^{٢}}{٢} - ٢\times٢ - \left(\frac{(١-)^{٢}}{٢} - ٢\times١-\right)$

$= ٢ - ٤ - \left(\frac{١}{٢} + ٢\right) = ٢- - \frac{٥}{٢} = -\frac{٩}{٢}$

٨) إذا كان الاقتران ق معرفاً على الفترة [٢ ، ٣] ، وكان قَ(س) = ٣س^{٢} - ١ ، فجد قيمة ق(٣) – ق(٢)

$\int_{٢}^{٣} \text{قَ(س) ؤس} = \int_{٢}^{٣} (٣\text{س}^{٢} - ١)\ \text{ؤس}$

$\text{ق(س)}\Big]_{٢}^{٣} = (\text{س}^{٣} - \text{س})\Big]_{٢}^{٣}$

$\text{ق(٣)} - \text{ق(٢)} = \left((٣)^{٣} - ٣\right) - \left((٢)^{٣} - ٢\right) = ٢٤ - ٦ = ١٨$

٩) إذا كان ق(س) = ٦س^{٢} فإنّ $\int_{١}^{٢} \text{قَ(س) ؤس}$ يساوي :

أ) ١٦ ب) ١٢ ج) ١١ د) ١٨

الحل : $\int_{١}^{٢} \text{قَ(س) ؤس} = \text{ق (س)}\Big]_{١}^{٢} = \text{ق(٢)} - \text{ق(١)} = ٦(٢)^{٢} - ٦(١)^{٢} = ٢٤ - ٦ = ١٨$

١٠) احسب قيمة التكامل الآتي :

أ) $\int_{١-}^{٨-} \frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\ \text{ؤس} = \int_{١-}^{٨-} \text{س}^{-\frac{١}{٣}}\ \text{ؤس} = \frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{٢}{٣}}\Big]_{١-}^{٨-} = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}\Big]_{١-}^{٨-} = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(٨-)^{٢}} - \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(١-)^{٢}}$

$= \frac{٣}{٢}\times٤ - \frac{٣}{٢}\times١ = \frac{٩}{٢}$

١١) إذا كان $\int_{٠}^{٢} \text{م ؤس} = ١٥$ ، فإن قيمة الثابت م تساوي :

أ) ٥- ب) ٥ جـ) ٣ د) ٤-

$\text{م س}\Big]_{٤}^{١} = ١٥ \longrightarrow \text{م}(١ - ٤) = ١٥ \longrightarrow -٣\text{م} = ١٥ \longrightarrow \text{م} = ٥-$

خصائص التكامل المحدود

١) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ل ق(س) ءس} = \text{ل} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس}$ ، حيث ل ثابت

٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق(س)} + \text{ع(س)})\ \text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس} + \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ع(س) ءس}$

٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق(س)} - \text{ع(س)})\ \text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ع(س) ءس}$

١) إذا كان $\int_{١}^{٢} \text{ق(س)ءس} = ٤$ ، $\int_{١}^{٢} \text{هـ(س)ءس} = -١$ فجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\int_{١}^{٢} ٢\text{ق(س)ءس}$　　ب) $\int_{١}^{٢} (٢\text{ق(س)} - ٥\text{هـ(س)} + ١)\ \text{ءس}$

الحل :

أ) $\int_{١}^{٢} ٢\text{ق(س)ءس} = ٢\int_{١}^{٢} \text{ق(س)ءس} = ٢ \times ٤ = ٨$

ب) $\int_{١}^{٢} (٢\text{ق(س)} - ٥\text{هـ(س)} + ١)\ \text{ءس} = ٢\int_{١}^{٢} \text{ق(س) ءس} - ٥\int_{١}^{٢} \text{هـ(س) ءس} + \int_{١}^{٢} ١\ \text{ءس}$

$= ٢ \times ٤ - ٥ \times -١ + [\text{س}]_{١}^{٢} = ٨ + ٥ + (٢ - ١) = ١٣ + ١ = ١٤$

٢) إذا كان $\int_{-١}^{٣} \frac{\text{ل(س)}}{٢}\ \text{ءس} = -٢$ ، $\int_{-١}^{٣} \text{ع(س)ءس} = ٦$ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\int_{-١}^{٣} ٣\text{ل(س) ءس}$　　ب) $\int_{-١}^{٣} (\frac{\text{ع(س)}}{٢} - ٤\ \text{ل(س)} - ٨\text{س})\text{ءس}$

الحل :

أ) $\int_{-١}^{٣} ٣\text{ل(س) ءس} = ٣\int_{-١}^{٣} \text{ل(س)ء س}$　ولكن　$\int_{-١}^{٣} \frac{\text{ل(س)}}{٢}\ \text{ءس} = -٢$　ومنه　$\int_{-١}^{٣} \text{ل(س)ءس} = -٤$　نعوض

$= ٣ \times -٤ = -١٢$

ب) $\int_{-١}^{٣} (\frac{\text{ع(س)}}{٢} - ٤\ \text{ل(س)} - ٨\text{س})\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\int_{-١}^{٣} \text{ع(س)ءس} - ٤\int_{-١}^{٣} \text{ل(س)ءس} - ٨\int_{-١}^{٣} \text{س ءس}$　نعوض

$= \frac{١}{٢} \times ٦ - ٤ \times -٤ - [٤\text{س}^{٢}]_{-١}^{٣} = ٣ + ١٦ - (٤(٣)^{٢} - ٤(-١)^{٢})$

$= ١٩ - (٣٦ - ٤) = ١٩ - ٣٢ = -١٣$

٣) إذا كان : $\int_{٠}^{٢} \frac{ق(س)}{٢} ءس = ٦$ ، فجد قيمة $\int_{٠}^{٢} (٣س^{٢} + ٣ ق(س)) ءس$

$\int_{٠}^{٢} \frac{ق(س)}{٢} ءس = ٦$ نضرب الطرفين بـ ٢ ومنه $\int_{٠}^{٢} ق(س) ءس = ١٢$

$\int_{٠}^{٢} (٣س^{٢} + ٣ق(س)) ءس = ٣\int_{٠}^{٢} س^{٢}ءس + ٣\int_{٠}^{٢} ق(س)) ءس$

$= [س^{٣} + ٣ \times ١٢]_{٠}^{٢} = (٢)^{٣} - (٠)^{٣} + ٣٦ = ٤٤$

خصائص أخرى للتكامل المحدود

١ - $\int_{أ}^{أ} ق(س)ءس =$ صفراً أي عندما الحد العلوي = الحد السفلي ، فإن قيمة التكامل تساوي صفر

مثال $\int_{٢}^{٢} ق(س)ءس =$ صفراً

٢- $\int_{أ}^{ب} ق(س) ءس = -\int_{ب}^{أ} ق(س)ءس$ أي عندما نعكس حدود التكامل نعكس إشارة التكامل

مثال $\int_{١}^{٣} ق(س) ءس = ٣$ فإن $\int_{٣}^{١} ق(س)ءس = -٣$

٣- $\int_{أ}^{ب} ق(س)ءس + \int_{ب}^{جـ} ق(س)ءس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)ءس$ هذه تسمى خاصة الإضافة

٤) إذا كان $\int_{-٢}^{٤} \frac{ق(س)}{٢} ءس = ٣$ ، $\int_{-٢}^{٥} ق(س)ءس = ٤$ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\int_{٤}^{-٢} ق(س)ءس$ ب) $\int_{٥}^{٤} ق(س)ءس$

الحل :

أ) $\int_{-٢}^{٤} \frac{ق(س)}{٢} ءس = ٣$ ومنه $\frac{١}{٢} \int_{-٢}^{٤} ق(س) ءس = ٣$ نضرب الطرفين بـ ٢

$\int_{-٢}^{٤} ق(س) ءس = ٦$ ومنه $\int_{٤}^{-٢} ق(س) ءس = -٦$

ب) $\int_{٥}^{٤} ق(س)ءس = \int_{٥}^{-٢} ق(س) ءس + \int_{-٢}^{٤} ق(س) ءس = -٤ + ٦ = ٢$ (حسب خاصية الإضافة)

٥) إذا كان $\int_{٢}^{٣} \frac{ق(س)}{٤} ء س = ٣$ ، $\int_{٥}^{٣} ق(س) ءس = ٤$ ، فما قيمة $\int_{٢}^{٥} (٣ق(س) + ٢س + ٤) ءس$ ؟

$\int_{٢}^{٥} (٣ق(س) + ٢س + ٤) ءس = ٣\int_{٢}^{٥} ق(س) ءس + \int_{٢}^{٥} (٢س + ٤) ءس$

$= ٣\int_{٢}^{٥} ق(س) ءس + [س^{٢} + ٤س]_{٢}^{٥} = ٣\int_{٢}^{٥} ق(س) ءس + ((٥)^{٢} + ٤ \times ٥) - ((٢)^{٢} + ٤ \times ٢)$

= ٣ ($\int_{٢}^{٣}$ ق(س) ؤس + $\int_{٣}^{٥}$ ق(س) ؤس) + ٤٥ - ١٢ = ٣($\int_{٢}^{٣}$ ق(س) ؤس - ٤) + ٣٣

ولكن من الفرض $\int_{٢}^{٣} \frac{ق(س)}{٤}$ ؤس = ٣ نضرب الطرفين بـ ٤ ومنه $\int_{٢}^{٣}$ ق(س) ؤس = ١٢ نعوض

= ٣(١٢ - ٤) + ٣٣ = ٢٤ + ٣٣ = ٥٧

---

٦) إذا كان $\int_{أ^{٣}+٥}^{-٣}$ ق(س)ؤس = ٠ ، فجد قيمة الثابت م .

الحل :

بما أن قيمة التكامل المحدود تساوي صفراً ، وقاعدة الاقتران غير معلومة ، فإن :

الحد العلوي للتكامل = الحد السفلي للتكامل

$أ^{٣}$+٥ = -٣ ومنه $أ^{٣}$ = -٨ أي أ = -٢

---

٧) إذا كان $\int_{ب}^{٢}$ (٣$س^{٢}$ – ٤)ؤس = ٠ فجد قيمة للثابت ب .

$\int_{ب}^{٢}$ (٣$س^{٢}$ – ٤)ؤس = $\left[(س^{٣} – ٤س) \right]_{ب}^{٢}$

٠ = (($٢)^{٣}$ – ٤(٢)) - (($ب)^{٣}$ – ٤(ب))

٠ = ٠ – $ب^{٣}$ + ٤ب ومنه ٠ = – $ب^{٣}$ + ٤ب ومنه ب (-$ب^{٢}$ + ٤) = ٠

إما ب = ٠ ، أو - $ب^{٢}$ + ٤ = ٠ ومنه $ب^{٢}$ = ٤ ومنه ب = -٢ ، ٢

---

٨) إذا كان $\int_{٠}^{جـ}$ (٢س – ١) ؤس = ٦ ، فجد قيمة الثابت جـ ؟

$\left[(س^{٢} – س) \right]_{٠}^{جـ}$ = ٦ ومنه ($(جـ)^{٢}$ – جـ) - ($(٠)^{٢}$ – ٠) = ٦

$جـ^{٢}$ – جـ = ٦ ومن $جـ^{٢}$ – جـ - ٦ =٠ ومنه (جـ - ٣)(جـ + ٢) =٠ إما جـ = ٣ أو جـ = -٢

---

٩) قيمة $\int_{٠}^{٢}$ ٩س ؤس تساوي :

أ) ١٨ ب) ٦ ج) ٣٦ د) صفر

$\int_{٢}^{٢}$ ٩ ؤس = صفر لأن مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر

---

١٠) إذا كان $\int_{-٢}^{٣}$ ق(س) ؤس = ٤ ، $\int_{-٢}^{٤}$ ق(س) ؤس= ٩ ، فإن $\int_{٤}^{٣}$ ٣ق(س) ؤس يساوي :

أ) ٦ ب) -٦ ج) -١٥ د) ١٨

$\int_{٤}^{٣}$ ق(س) ؤس = $\int_{٤}^{-٢}$ ق(س) ؤس + $\int_{-٢}^{٣}$ ق(س) ؤس = -٩ + ٤ = -٥

$\int_{٤}^{٣}$ ٣ق(س) ؤس = ٣ $\int_{٤}^{٣}$ ق(س) ؤس = ٣ × -٥ = -١٥

١١) إذا علمت أن $\int_{٠}^{٢} ق(س)ءس = ٤$ ، $\int_{٢}^{٣} ٦ق(س)ءس = ١٢$ ، فجد قيمة $\int_{٣}^{٠} ق(س)ءس$

$\int_{٣}^{٠} ق(س)ءس = \int_{٣}^{٢} ق(س)ءس + \int_{٢}^{٠} ق(س)ءس$ حسب خاصية الإضافة

ولكن $\int_{٢}^{٣} ٦ق(س)ءس = ١٢$ ومنه ٦ $\int_{٢}^{٣} ق(س)ءس = ١٢$ نقسم على ٦ $\int_{٢}^{٣} ق(س)ءس = ٢$

$\int_{٣}^{٠} ق(س)ءس = -٢ + -٤ = -٦$

---

١٢) إذا كان $\int_{-١}^{٢} ق(س)\ ءس = ٥$ فإن : $\int_{٢}^{-١} \frac{١}{٥} ق(س)\ ءس$ يساوي :

أ) ٥ ب) -٥ جـ) ١ د) -١

---

١٣) إذا كان : $\int_{-١}^{أ} ٣س^{٢}\ ءس = ٠$ فإن قيمة قيمة الثابت أ تساوي :

أ) -٢ ب) ٢ ج) -١ د) ١

الحل :

$\int_{-١}^{أ} ٣س^{٢}\ ءس = ٠$ بما أن قيمة التكامل المحدود تساوي صفر ، وقاعدة الاقتران معلومة فإن :

$\left[س^{٣} \right]_{-١}^{أ} = ٠$

$أ^{٣} - (-١)^{٣} = ٠ \longrightarrow أ^{٣} + ١ = ٠ \longrightarrow أ^{٣} = -١ \longrightarrow أ = -١$

---

١٤) إذا كان $\int_{٢}^{٢ب} ق(س)\ ءس = ٠$ فإن قيمة الثابت ب تساوي :

أ) ٢ ب) ٤ ب) ١ ب) -١

الحل : بما أن قيمة التكامل المحدود تساوي صفراً ، وقاعدة الاقتران غير معلومة ، فإن :

الحد العلوي للتكامل = الحد السفلي للتكامل

٢ب = ٢ ومنه ب = ١

---

١٥) إذا كان الاقتران ق معرفاً على الفترة [٠ ، ٢] ، وكان $ق'(س) = ٢س + ٥$ ، فجد قيمة ق(٢) – ق(٠)

$\int_{٠}^{٢} ق'(س)\ ءس = \int_{٠}^{٢} (٢س + ٥)\ ءس$

$\left[ق(س) \right]_{٠}^{٢} = \left[(س^{٢} + ٥س) \right]_{٠}^{٢}$

$ق(٢) - ق(٠) = ((٢)^{٢} + ٥\times٢) - ((٠)^{٢} + ٥\times٠) = ٤ + ١٠ - ٠ = ١٤$

١٦) إذا كان $\int_{١}^{٥}$(ق(س) - ٧) وس = ٢ ، $\int_{٥}^{١}$٣هـ (س) وس= ٩ ، فجد قيمة : $\int_{١}^{٥}$(ق(س) + هـ(س)) وس

$\int_{١}^{٥}$(ق(س) - ٧) وس = ٢ ⟵ $\int_{١}^{٥}$ق(س) وس - $\int_{١}^{٥}$٧ وس = ٢ ⟵ $\int_{١}^{٥}$ق(س) وس – $[٧س]_{١}^{٥}$ =٢

$\int_{١}^{٥}$ق(س) وس - ٧(٥ – ١) = ٢ ⟵ $\int_{١}^{٥}$ق(س) وس - ٢٨ = ٢ ⟵ $\int_{١}^{٥}$ ق(س) وس = ٣٠

وكذلك $\int_{٥}^{١}$٣هـ (س) وس= ٩ نقسم الطرفين على ٣ ⟵ $\int_{٥}^{١}$هـ(س) وس = ٣

$\int_{١}^{٥}$(ق(س) + هـ(س)) وس = $\int_{١}^{٥}$ق(س) وس + $\int_{١}^{٥}$هـ (س) وس = ٣٠ + - ٣ = ٢٧

١) إذا كان $\int_{٢}^{٣}$ق(س) وس = -٤ ، $\int_{٣}^{٦}$ق(س) وس = ٦ ، فإن قيمة $\int_{٢}^{٦}$ ق(س) وس تساوي :

أ) ٢ ب) -١٠ ج) -٢ د) ١٠

$\int_{٢}^{٦}$ق(س) وس = $\int_{٢}^{٣}$ق(س) وس + $\int_{٣}^{٦}$ق(س) وس = -٤ + ٦ = ٢

١٧) $\int_{-١}^{-١}$٣ وس تساوي :

أ) ٦ ب) -٦ ج) -٣ د) صفر

حسب الخاصية : $\int_{-١}^{١}$ق(س)ى س = صفر

١٨) إذا كان $\int_{١}^{٦}$٣ق(س) وس = ١٥ ، $\int_{٢}^{٦}$ق(س) وس = -١٠ ، فإن $\int_{١}^{٢}$ق(س) وس تساوي :

أ) ٥ ب) ١٣ ج) ١٥ د) ٢٥

$\int_{١}^{٢}$ق(س) وس = $\int_{١}^{٦}$ق(س) وس + $\int_{٦}^{٢}$ ق(س) وس ولكن $\int_{١}^{٦}$ق(س) وس = ٥

= ٥ + ١٠ = ١٥

التكامل بالتعويض

تستخدم هذه الطريقة عند وجود عملية ضرب داخل التكامل يصعب تبسيطها ، وهي تقوم على عملية التعويض أي كتابة التكامل بدلالة متغير آخر وبشكل يسهل إجراء عملية التكامل لها .

١) جد قيمة التكامل الآتي :

$$\int ٣س^{٢}(س^{٣}+١)^{٢}\ ءس$$

الخطوة الأولى : بما أن ما خارج القوس يساوي مشتقة ما داخل القوس لذلك نفرض ما داخل القوس = ص أي :

$ص = س^{٣} + ١$

الخطوة الثانية : نشتق ص كما يلي :

$$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} \quad \text{ثم نوجد } ءس \text{ كما يلي } \quad ءس = \frac{ءص}{٣س^{٢}}$$

الخطوة الثالثة : نعوض في التكامل ثم نختصر ثم نجري عملية التكامل :

$$\int ٣س^{٢}(س^{٣}+١)^{٢}\ ءس = \int \cancel{٣س^{٢}}\ ص^{٢}\ \frac{ءص}{\cancel{٣س^{٢}}} = \int ص^{٢}\ ءص = \frac{ص^{٣}}{٣} + جـ$$

الخطوة الرابعة : نعيد كتابة التكامل بدلالة س :

$$٣س^{٢}(س^{٣}+١)^{٢}\ ءس = \frac{(س^{٣}+١)^{٣}}{٣} + جـ$$

٢) جد قيمة التكامل الآتي :

$$\int ٢س\sqrt{س^{٢}+٣}\ ءس = \int ٢س\ (س^{٢}+٣)^{\frac{١}{٢}}\ ءس$$

$$\text{نفرض } ص = س^{٢}+٣ \quad \text{ومنه} \quad \frac{ءص}{ءس} = ٢س \quad \text{ومنه} \quad ءس = \frac{ءص}{٢س}$$

$$\int ٢س\ (س^{٢}+٣)^{\frac{١}{٢}}\ ءس = \int \cancel{٢س}\ ص^{\frac{١}{٢}}\ \frac{ءص}{\cancel{٢س}} = \int ص^{\frac{١}{٢}}\ ءص$$

$$= \frac{٢}{٣}\ ص^{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٣}(س^{٢}+٣)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

٣) جد قيمة التكامل الآتي :

$$\int \frac{٢س+١}{\sqrt{س^{٢}+س-١}}\ ءس = \int (٢س+١)(س^{٢}+س-١)^{-\frac{١}{٢}}\ ءس$$

$$\text{نفرض } ص = س^{٢}+س-١ \quad \text{ومنه} \quad \frac{ءص}{ءس} = ٢س+١ \quad \text{ومنه} \quad ءس = \frac{ءص}{٢س+١}$$

$$\int (\text{٢س}+١)(\text{س}^{٢}+\text{س}-١)^{-\frac{١}{٢}}\ \text{ءس ءس} = \int \cancel{(\text{٢س}+١)}\ \text{ص}^{-\frac{١}{٢}}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{٢س}+١}}$$

$$= \int \text{ص}^{-\frac{١}{٢}}\ \text{ءص} = ٢\ \text{ص}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$$

$$\int \frac{\text{٢س}+١}{\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{س}-١}}\ \text{ءس} = ٢(\text{س}^{٢}+\text{س}-١)^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ} = ٢\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{س}-١} + \text{جـ}$$

٤) جد قيمة التكامل الآتي :

$$\int \text{س جا}(\text{س}^{٢}+٧)\ \text{ءس}$$

نفرض $\text{ص}=\text{س}^{٢}+٧$ فيكون $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢س}$ ومنه $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢س}}$

$$\int \text{س جا}(\text{س}^{٢}+٧)\ \text{ءس} = \int \cancel{\text{س}}\ \text{جاص}\ \frac{\text{ءص}}{٢\cancel{\text{س}}}$$

$$\int \frac{١}{٢}\ \text{جاص ءص} = -\frac{١}{٢}\ \text{جتاص} + \text{جـ}$$

$$\int \text{س جا}(\text{س}^{٢}+٧)\ \text{ءس} = -\frac{١}{٢}\ \text{جتا}(\text{س}^{٢}+٧) + \text{جـ}$$

٥) $\int \text{٢س قا}^{٢}(١-\text{س}^{٢})\ \text{ءس}$

نفرض $\text{ص} = ١ - \text{س}^{٢}$ ومنه $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{٢س}$ ومنه $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{٢س}}$ نعوض

$$\int \text{٢س قا}^{٢}(١-\text{س}^{٢})\ \text{ءس} = \int ٢\cancel{\text{س}}\ \text{قا}^{٢}\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{٢س}}}$$

$$= \int -\text{قا}^{٢}\text{ص ءص} = -\text{ظا ص} + \text{جـ}$$

$$\int \text{٢س قا}^{٢}(١-\text{س}^{٢})\ \text{ءس} = -\text{ظا}(١-\text{س}^{٢}) + \text{جـ}$$

٦) جد قيمة التكامل الآتي :

$$\int \frac{\text{٣س}^{٢}+١}{(\text{س}^{٣}+\text{س}+٧)^{٥}}\ \text{ءس} = \int (\text{٣س}^{٢}+١)\ (\text{س}^{٣}+\text{س}+٧)^{-٥}\ \text{ءس}$$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^{٣}+\text{س}+٧$ ومنه $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣س}^{٢}+١$ ومنه $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٣س}^{٢}+١}$

$$\int (\text{٣س}^{٢}+١)\ (\text{س}^{٣}+\text{س}+٧)^{-٥}\ \text{ءس} = \int \cancel{(\text{٣س}^{٢}+١)}\ \text{ص}^{-٥}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{٣س}^{٢}+١}}$$

$$= \int \text{ص}^{-٥}\ \text{ءص} = \frac{\text{ص}^{-٤}}{-٤} + \text{جـ} = -\frac{١}{٤}(\text{س}^{٣}+\text{س}+٧)^{-٤} + \text{جـ}$$

قواعد التكامل :

إذا أ ، ب ثابتين ، أ $\neq$ ٠ ، ن $\neq$ -١ فإن :

١) $\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}\, \text{ءس} = \dfrac{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}\,(\text{ن} + ١)} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{جا}(\text{أس} + \text{ب})\, \text{ءس} = \dfrac{-\,\text{جتا}(\text{أس} + \text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$

٣) $\int \text{جتا}\,(\text{أس} + \text{ب})\, \text{ءس} = \dfrac{\text{جا}(\text{أس} + \text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$

٤) $\int \text{قا}^{٢}(\text{أس} + \text{ب})\, \text{ءس} = \dfrac{\text{ظا}(\text{أس} + \text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$

٧) جد قيمة التكامل الآتي : $\int_{٠}^{-١٣} \dfrac{١}{\sqrt[٣]{٢\text{س} - ١}}\, \text{ءس}$

$$\int_{٠}^{-١٣} \dfrac{١}{\sqrt[٣]{٢\text{س} - ١}}\, \text{ءس} = \int_{٠}^{-١٣} (٢\text{س} - ١)^{-\frac{١}{٣}}\, \text{ءس}$$

$$= \left[\dfrac{(٢\text{س} - ١)^{\frac{٢}{٣}}}{٢ \times \frac{٢}{٣}} \right]_{٠}^{-١٣} = \dfrac{٣}{٤} \left[\sqrt[٣]{(٢\text{س} - ١)^{٢}} \right]_{٠}^{-١٣}$$

$$= \dfrac{٣}{٤} \sqrt[٣]{(٢ \times -١٣ - ١)^{٢}} - \dfrac{٣}{٤} \sqrt[٣]{(٢ \times ٠ - ١)^{٢}} = \dfrac{٢٧}{٤} - \dfrac{٣}{٤} = \dfrac{٢٤}{٤} = ٦$$

٨) جد قيمة التكامل الآتي :

$\int \dfrac{٣}{(٢\text{س} + ١)^{٥}}\, \text{ءس} = \int ٣(٢\text{س} + ١)^{-٥}\text{ءس}$　　حسب القاعدة : $\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}\, \text{ءس} = \dfrac{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}\,(\text{ن} + ١)} + \text{جـ}$

$$= ٣ \times \dfrac{(٢\text{س} + ١)^{-٤}}{٢ \times -٤} + \text{جـ}$$

٩) جد قيمة التكامل الآتي :

$$\int \dfrac{٢\text{س} + ٣}{\text{جتا}^{٢}(\text{س}^{٢} + ٣\text{س})}\, \text{ءس}$$

نفرض ص = $\text{س}^{٢} + ٣\text{س}$ فيكون $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} + ٣$　　ومنه　$\text{ءس} = \dfrac{\text{ءص}}{٢\text{س} + ٣}$

$$\int \dfrac{٢\text{س} + ٣}{\text{جتا}^{٢}(\text{س}^{٢} + ٣\text{س})}\, \text{ءس} = \int \dfrac{\cancel{٢\text{س} + ٣}}{\text{جتا}^{٢}\text{ص}} \dfrac{\text{ءص}}{\cancel{٢\text{س} + ٣}}$$

$$\int \dfrac{\text{ءص}}{\text{جتا}^{٢}\text{ص}} = \int \text{قا}^{٢}\text{ص}\, \text{ءص} = \text{ظاص} + \text{جـ} = \text{ظا}(\text{س}^{٢} + ٣\text{س}) + \text{جـ}$$　　حيث قاص = $\dfrac{١}{\text{جتاص}}$

١٠) $\int$ قا^{٢}(٢س + ٣) ءس يساوي :

أ) ظا (٢س + ٣) + جـ ب) ٢ظا (٢س+٣)+ جـ

ج) ٢قا^{٢}(٢س +٣) + جـ د) $\frac{\text{ظا (٢س +٣)}}{٢}$ + جـ

الحل :

$\int$ قا^{٢}(٢س + ٣) ءس = $\frac{\text{ظا (٢س +٣)}}{٢}$ + جـ

١١) $\int$ جتا(٣س+١)ءس يساوي :

أ) $\frac{\text{- جا(٣س+١)}}{٣}$ + جـ ، ب)-٣جا(٣س+١) + جـ

ج) $\frac{\text{جا(٣س+١)}}{٣}$ + جـ ، د) ٣جا(٣س+١) + جـ

١٢) إذا علمت أن ق(-٨)= ٥ ، ق(٢٧) = -٦ ، فجد قيمة التكامل الآتي : $\int$ ٣س^{٢}قَ(س^{٣})ءس

الحل :

نفرض ص= س^{٣} ومنه $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} ومنه ءس = $\frac{\text{ءص}}{\text{٣س}^{٢}}$

$\int$ ٣س^{٢}قَ(س^{٣})ءس = $\int$ $\cancel{\text{٣س}^{٢}}$ قَ(ص) $\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{٣س}^{٢}}}$

$\int$ قَ(ص) ءص = ق(ص) + جـ = ق(س^{٣}) + جـ

$\int_{-٢}^{٣}$ ٣س^{٢}قَ(س^{٣})ءس = ق(س^{٣})$\Big]_{-٢}^{٣}$ = ق((٣)^{٣}) – ق((-٢)^{٣}) = ق(٢٧) - ق(-٨) = -٦ -٥ = -١١

١٣) إذا علمت أن $\int_{٥}^{٢}$ق(س)ءس= ٣ ، فجد قيمة التكامل الآتي : $\int_{-١}^{٢}$ ٨ س ق(س^{٢}+١)ءس

الحل : نفرض ص= س^{٢}+١ ومنه $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢س ومنه ءس = $\frac{\text{ءص}}{\text{٢س}}$

$\int$ ٨ س ق(س^{٢}+١)ءس = $\int$ $\overset{٤}{\cancel{\text{٨}}}$ $\cancel{\text{س}}$ ق(ص) $\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{٢س}}}$ = $\int$ ٤ ق(ص)ءص

لكن عندما س = -١ فإن ص = (-١)^{٢}+١= ٢ وعندما س =٢ فإن ص =(٢)^{٢}+١ = ٥

$\int_{-١}^{٢}$ ٨ س ق(س^{٢}+١)ءس = $\int_{٢}^{٥}$ ٤ ق(ص)ءص

= ٤ $\int_{٢}^{٥}$ق(ص)ء ص = ٤× -٣ = -١٢

١٤) $\int$(١ – س)^{٥} ٤س يساوي :

أ) ٥(١ – س)^{٦} + جـ   ب) –٥(١ – س)^{٦}+ جـ

جـ) – $\frac{(١ - س)^{٦}}{٦}$ + جـ   د) $\frac{(١ - س)^{٦}}{٦}$ + جـ

الحل : $\int$(١ – س)^{٥} ٤س = $\frac{(١ - س)^{٦}}{-١ \times ٦}$ + جـ = – $\frac{(١ - س)^{٦}}{٦}$ + جـ

تطبيقات التكامل

تطبيقات هندسية

بما ان التكامل عملية عكسية للتفاضل ، فإنه يمكننا إيجاد قاعدة الاقتران ق بمعرفة ميله قَ(س)عند أي نقطة على منحناه (س ، ص) وإحداثيي إحدى النقط على منحناه .

١) جد قاعدة الاقتران ق ، علما بأن ميل المماس لمنحناه عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة:

قَ(س) = ٣س^{٢} – ٨ س ، وأن منحناه يمر بالنقطة (-١ ، ٣)

<u>خطوات الحل</u> :

<u>الخطوة الأولى</u> : نقوم بإجراء التكامل بالنسبة إلى المتغير س لكل من الطرفين :

$\int$قَ(س) ٤س = $\int$(٣س^{٢}- ٨ س)٤س   ينتج :

ق(س) = س^{٣}-٤س^{٢} + جـ

<u>الخطوة الثانية</u> : نقوم بإيجاد قيمة (جـ) وذلك بتعويض النقطة (-١ ، ٣) في الاقتران

وذلك لأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (-١ ، ٣) أي أن ق(-١) = ٣

ق(-١) = (-١)^{٣}-٤(-١)^{٢} + جـ

٣ = -١ -٤ + جـ   ومنه   جـ = ٨

<u>الخطوة الثالثة</u> : نعوض قيمة جـ في قاعدة الاقتران ق فتكون قاعدة الاقتران على الشكل التالي :

ق(س) = س^{٣}- ٤س^{٢} + ٨

٢) جد قيمة ق(١) ، علما بأن ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة :

قَ(س) = (٦ – ٢س + ٩س^{٣}) ، وأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٥)

الحل :

قَ(س) = ٦ – ٢س + ٩س^{٣} بإجراء التكامل بالنسبة إلى المتغير س لكل من الطرفين ينتج :

$\int$ قَ(س) ٤س = $\int$(٦ – ٢س + ٩س^{٣}) ٤س

ق(س) = ٦س – س^{٢} + $\frac{٩}{٤}$س^{٤} + جـ   وبما أن ق(٠) = ٥

ق(٠) = ٦(٠) – (٠)^{٢} + $\frac{٩}{٤}$ (٠)^{٤} + جـ

٥ = جـ ومنه قاعدة الاقتران : ق(س) = ٦س – س^{٢} + $\frac{٩}{٤}$ س^{٤} + ٥

ق(١) = ٦×١ – (١)^{٢} + $\frac{٩}{٤}$ (١)^{٤} + ٥ = ٦ – ١ + $\frac{٩}{٤}$ + ٥ = ١٠ + $\frac{٩}{٤}$ = $\frac{٤٩}{٤}$

---

٣) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ل عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة :

لَ(س) = ٢س(٤ – ٣س) ، فجد قاعدة الاقتران ل ، علما بأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٣)

الحل :

لَ(س) = ٢س(٤ – ٣س) بإجراء التكامل بالنسبة إلى المتغير س لكل من الطرفين ينتج :

$\int$ لَ(س) ءس = $\int$ ٢س(٤ – ٣س) ء س = $\int$ (٨س – ٦س^{٢}) ءس

ل(س) = ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + جـ ولكن ل(٠) = ٣

ل(٠) = ٤(٠)^{٢} - ٢(٠)^{٣} + جـ

٣ = جـ ومنه قاعدة الاقتران هي : ل(س) = ٤س^{٢} – ٢س^{٣} + ٣

---

٤) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) هو قَ(س) = ٣س^{٢} فإن ق(س) تساوي :

أ) ٣س^{٣} + جـ ب) ٣س^{٢} + جـ ج) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + جـ د) س^{٣} + جـ

الحل : $\int$ قَ(س) ء س = $\int$ ٣س^{٢} ءس

ق(س) = س^{٣} + جـ

---

٥) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س ،ص) هو قَ(س) = ٢س وكان ق (٠) = ٢

فإن ق(١) يساوي :

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

الحل :

$\int$ قَ(س) ءس = $\int$ ٢س ءس

ق(س) = س^{٢} + جـ ولكن ق(٠) = ٢

ق(٠) = (٠)^{٢} + جـ

٢ = جـ ومنه ق(س) = س^{٢} + ٢ ومنه ق(١) = (١)^{٢} + ٢ = ٣

٦) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي $(٣س - ١)^{٤}$ ،
فجد قاعدة الاقتران ق ، علما بأن منحناه يمر بالنقطة (١ ، ٥)

الحل :

قَ(س) = $(٣س - ١)^{٤}$ بإجراء التكامل بالنسبة إلى المتغير س لكل من الطرفين ينتج :

$\int$ قَ(س) ءس = $\int (٣س - ١)^{٤}$ ءس

ق(س) = $\frac{(٣س - ١)^{٥}}{٣ \times ٥}$ + جـ = $\frac{(٣س - ١)^{٥}}{١٥}$ + جـ

ولكن المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٥) أي أن ق(١) = ٥

ق(١) = $\frac{(٣\times١ - ١)^{٥}}{١٥}$ + جـ

٥ = $\frac{٣٢}{١٥}$ + جـ ومنه ٥ - $\frac{٣٢}{١٥}$ = جـ ومنه جـ = $\frac{٤٣}{١٥}$ نعوض

ق(س) = $\frac{(٣س - ١)^{٥}}{١٥}$ + $\frac{٤٣}{١٥}$

٧) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س ، ص) هو (٢ – $\frac{١}{س^{٢}}$) وكان منحنى الاقتران يمر
بالنقطة ($\frac{١}{٢}$ ، ١) فجد قاعدة الاقتران

الحل :

قَ(س) = ٢ - $\frac{١}{س^{٢}}$ بإجراء عملية التكامل للطرفين بدلالة المتغير س يكون :

$\int$ قَ(س) ءس = $\int$ (٢ - $\frac{١}{س^{٢}}$) ءس = $\int$ (٢ – $س^{-٢}$) ءس

ق(س) = ٢س + $\frac{١}{س}$ + جـ ولكن ق ($\frac{١}{٢}$) = ١

ق($\frac{١}{٢}$) = ٢($\frac{١}{٢}$) + $\frac{١}{\frac{١}{٢}}$ + جـ

١ = ١ + ٢ + جـ ومنه جـ = -٢

قاعدة الاقتران هي : ق(س) = ٢س + $\frac{١}{س}$ -٢

٨) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) يعطى بالقاعدة $\text{قَ(س)} = \frac{٢س^٣ - س^٢}{س^٢}$ س $\neq$ ٠ ، فجد ق(١)

، علماً بان المنحنى يمر بالنقطة (-١ ، ٦) .

الحل :

$\text{قَ(س)} = \frac{٢س^٣ - س^٢}{س^٢} = (٢س^٣ - س^٢)\, س^{-٢} = ٢س - ١$ نكامل الطرفين

$\text{ق(س)} = \int (٢س - ١)\, ءس = س^٢ - س + جـ$ ولكن ق(-١) = ٦ إذن $\text{ق(-١)} = (-١)^٢ - (-١) + جـ$

٦ = ١ + ١ + جـ ومنه جـ = ٤

$\text{ق(س)} = س^٢ - س + ٤$ ومنه $\text{ق(١)} = (١)^٢ - (١) + ٤ = ١ - ١ + ٤ = ٤$

٩) جد قاعدة الاقتران ق ، إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة :

$\text{قَ(س)} = \frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^٢ + ٨}}$ ، وكان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٠ ، ٤)

الحل :

$\text{قَ(س)} = \frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^٢ + ٨}}$ بإجراء التكامل بالنسبة إلى المتغير س لكل من الطرفين ينتج :

$\int \text{قَ(س)}\, ءس = \int \frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^٢ + ٨}}\, ءس$

$\text{ق(س)} = \int ٢س(س^٢ + ٨)^{-\frac{١}{٣}}\, ءس$ نفرض $ص = س^٢ + ٨$ ومنه $\frac{ءص}{ءس} = ٢س$

ومنه $ءس = \frac{ءص}{٢س}$ نعوض

$\text{ق(س)} = \int ٢س(س^٢ + ٨)^{-\frac{١}{٣}}\, ءس = \int \cancel{٢س}\, ص^{-\frac{١}{٣}}\, \frac{ءص}{\cancel{٢س}}$

$= \int ص^{-\frac{١}{٣}}\, ءص = \frac{٣}{٢} ص^{\frac{٢}{٣}} + جـ$

$\text{ق(س)} = \int ٢س(س^٢ + ٨)^{-\frac{١}{٣}}\, ءس = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(س^٢ + ٨)^٢} + جـ$ ولكن ق(٠) = ٤

$\text{ق(٠)} = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{((٠)^٢ + ٨)^٢} + جـ = \frac{٣}{٢} \times ٤ + جـ$

٤ = ٦ + جـ ومنه جـ = -٢

قاعدة الاقتران هي : $\text{ق(س)} = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(س^٢ + ٨)^٢} - ٢$

تطبيقات فيزيائية

بما أن ع(ن) = فَ(ن) = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ فإنه يمكننا معرفة المسافة بمعرفة السرعة ، أو بمعرفة السرعة والتسارع

وبما أن التسارع هو ت(ن) = عَ(ن) = $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ فإنه يمكننا معرفة السرعة بمعرفة مقدار التسارع .

١) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث انطلق من الموقع الابتدائي ف(٠) =٤م ، إذا كانت سرعته بعد مرور ن ثانية تعطى بالعلاقة ع(ن)= (٦ – ٢ن + ٦ن^{٢}) م/ث ، فجد موقعه بعد مرور ثلاث ثوان من بدء الحركة

الحل :

ع(ن) = ٦ – ٢ن + ٦ن^{٢} ، ولكن ع(ن) = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٦ – ٢ن + ٦ن

$\int$ د ف = $\int$ (٦ – ٢ن + ٦ن^{٢}) دن

ف = ٦ن – ن^{٢} + ٢ن^{٣} + جـ ولكن ف(٠) = ٤

ف(٠) = ٦(٠) – (٠)^{٢} + ٢(٠)^{٣} + جـ

٤ = جـ ومنه ف(ن) = ٦ن – ن^{٢} + ٢ن^{٣} + ٤

ف(٣) = ٦(٣) – (٣)^{٢} + ٢(٣)^{٣} + ٤ = ٦٧

∴ موقع الجسيم بعد مرور ثلاث ثوان من بدء الحركة = ٦٧ م

٢) تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بتسارع ثابت ت مقداره ت(ن) = ١٤ م/ث^{٢} ، جد سرعتها بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ، علما بأن سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٥ م/ث

الحل :

ت(ن) = ١٤

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ١٤ ومنه دع = ١٤ دن نكامل الطرفين

$\int$ دع = $\int$ ١٤ دن ومنه

ع = ١٤ن + جـ ولكن ع (٠) = ٥

ع(٠) = ١٤(٠) + جـ

٥ = جـ بالتعويض : ع(ن) = ١٤ن + ٥

ع(٢) = ١٤(٢) + ٥ = ٢٨ + ٥ = ٣٣ م/ث

٣) إذا كان تسارع جسيم بعد مرور (ن) من الثواني يعطى بالعلاقة ت(ن) = ٦ ن م/ث^{٢} ، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة علما بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٢ م/ث وموقعه الابتدائي ف(٠) = ١٢م

الحل :

ت(ن) = ٦ ن

$\frac{ﺀع}{ﺀن}$ = ٦ن   ومنه $\int$ ﺀع = $\int$ ٦ن ﺀن   ومنه   ع = ٣ن^{٢} + جـ   ولكن ع(٠) = ٢

ع (٠) = ٣(٠)^{٢} + جـ

٢ = جـ   بالتعويض : ع (ن) = ٣ن^{٢} + ٢

$\frac{ﺀف}{ﺀن}$ = ٣ن^{٢} + ٢ ومنه $\int$ ﺀف = $\int$ (٣ن^{٢} + ٢) ﺀن

ف = ن^{٣} + ٢ن + جـ   ولكن   ف(٠) = ١٢

ف(٠) = (٠)^{٣} + ٢(٠) + جـ

١٢ = جـ   بالتعويض : ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن + ١٢

٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالقاعدة :
ع(ن)= (٣ن-١)(٤ن+١)م/ث ، جد :

أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة

أ) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ، علما بأن موقعه الابتدائي ف(٠)=٧م

الحل :

أ) ع(ن)= (٣ن-١)(٤ن+١) = ١٢ن^{٢} +٣ن -٤ن -١ = ١٢ن^{٢} - ن -١

$\frac{ﺀف}{ﺀن}$ = ١٢ن^{٢} - ن -١

$\int$ ﺀف = $\int$ (١٢ن^{٢} - ن -١) ﺀن

ف = ٤ن^{٣} - $\frac{١}{٢}$ن^{٢} – ن + جـ

ب) عندما ف(٠) = ٧ فإن

ف(٠) = ٤(٠)^{٣} - $\frac{١}{٢}$ (٠)^{٢} – (٠) + جـ

٧ = جـ   بالتعويض تنتج قاعدة الاقتران : ف (ن)= ٤ن^{٣} - $\frac{١}{٢}$ن^{٢} – ن + ٧

ف(٢) = ٤(٢)^{٣} - $\frac{١}{٢}$ (٢)^{٢} - (٢) + ٧

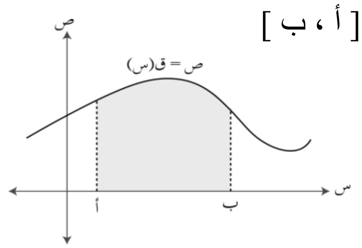
ف(٢) = ٣٢ - ٢ -٢ + ٧ = ٣٥ م

المســاحة

<u>ونميز أربع حالات :</u>

الحالة الأولى : عندما تكون المنطقة المغلقة فوق محور السينات (ق(س) $\geqslant$ ٠) في الفترة [أ ، ب]

المساحة المطلوبة = $\int_{أ}^{ب}$ | ق(س) | ءس = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س)ء س



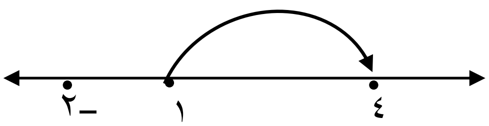
١) جد مساحة المنطقة المغلقة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢س + ٤ ، ومحور السينات والمستقيمين : س = ١ ، س = ٤

<u>خطوات الحل:</u>

<u>الخطوة الأولى :</u> نجعل ق(س) = صفر ونوجد نقاط تقاطع ق مع محور السينات (إن وجدت)

٢س + ٤ =٠　　ومنه　٢س = -٤ ومنه　س = -٢

نلاحظ أن هذه القيمة لا تقع ضمن الفترة المطلوبة [١ ، ٤]



<u>الخطوة الثانية :</u> نوجد التكامل التالي ضمن الفترة [١ ، ٤] :

$\int_{١}^{٤}$ (٢س + ٤) ءس = (س^{٢} + ٤س) $\Big|_{١}^{٤}$

= (١٦ + ١٦) – (١ + ٤) = ٣٢ – ٥ = ٢٧ (قيمة التكامل الموجبة تدل على أن المنحنى فوق محور السينات)

<u>الخطوة الثالثة :</u> نوجد المساحة

م = $\int_{١}^{٤}$ | ق(س) | ءس = ٢٧ وحدة مربعة

---

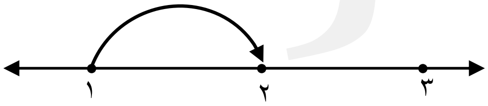
٢) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ١٢ – ٤ س ، ومحور السينات على الفترة [١ ، ٢] .

الحل :

ق(س) = ١٢ – ٤ س

ق(س) = ٠　ومنه　١٢ -٤س = ٠　ومنه ٤س = ١٢　ومنه　س = ٣

نلاحظ أن س= ٣ لا تقع ضمن الفترة [١ ، ٢]



$\int_{١}^{٢}$ (١٢– ٤س)ء س = (١٢س -٢س^{٢}) $\Big|_{١}^{٢}$

= (١٢(٢) -٢(٢)^{٢}) - (١٢(١) -٢(١)^{٢}) = ٢٤ – ٨ – ١٢ +٢ = ٦

المساحة المطلوبة = $\int_{١}^{٢}$ ق(س)ء س = ٦ وحدة مربعة

---

٣) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣س + ٦ ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٣]

الحل :

ق(س) = صفر

٣س + ٦ = ٠ ومنه ٣س = -٦ ومنه س = - ٢ لا تقع ضمن الفترة [٠ ، ٣]

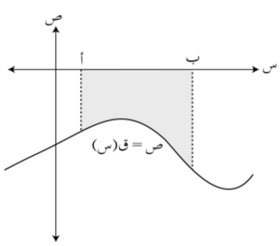
نوجد التكامل في الفترة [٠ ، ٣]

$$\int_{٠}^{٣} (٣\text{س} + ٦)\,\text{ءس} = \left[\tfrac{٣}{٢}\text{س}^{٢} + ٦\text{س}\right]_{٠}^{٣} = \left(\tfrac{٣}{٢}(٣)^{٢} + ٦(٣)\right) - \left(\tfrac{٣}{٢}(٠)^{٢} + ٦(٠)\right)$$

$$= \frac{٢٧}{٢} + ١٨ = \frac{٦٣}{٢}$$

المساحة المطلوبة = $\int_{٠}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = \frac{٦٣}{٢}$ وحدة مربعة

الحالة الثانية : عندما تكون المنطقة المغلقة تحت محور السينات (ق(س) $\leqslant$ ٠) في الفترة [أ ، ب]



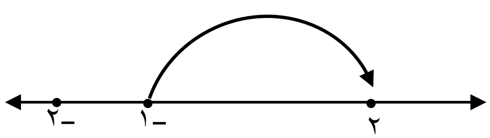
فإن التكامل $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)ءس}$ يكون سالباً وبالتالي تكون :

المساحة المطلوبة: م = $\left| \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس} \right|$

٤) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = ٣س^{٢} – ١٢

ومحور السينات ، والمستقيمين : س = -١ ، س = ٢

الحل :



الخطوة الأولى : ق(س) = صفر ومنه ٣س^{٢} – ١٢ = صفر ومنه

ومنه ٣س^{٢} = ١٢ نقسم على ٣ ومنه س^{٢} = ٤ ومنه س = -٢ ، س = ٢

وهي قيم س التي يتقاطع منحنى الاقتران ق عندها مع محور السينات نلاحظ أن هذه القيم لا تقع ضمن الفترة المطلوبة

الخطوة الثانية :

$$\int_{-١}^{٢} (٣\text{س}^{٢} - ١٢)\,\text{ءس} = \left[\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}\right]_{-١}^{٢}$$

$$= (٢)^{٣} - ١٢(٢) - \left((-١)^{٣} - ١٢(-١)\right) = ٨ - ٢٤ - ١١ = -٢٧$$

الخطوة الثالثة : نلاحظ أن قيمة التكامل سالب مما يدل على أن المنطقة المغلقة تحت محور السينات لذلك عندما نحسب المساحة نضع التكامل داخل القيمة المطلقة :

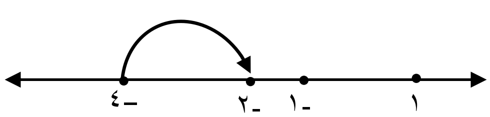
م = $\left| \int_{-١}^{٢} \text{ق(س)ءس} \right| = \left| -٢٧ \right| = ٢٧$ وحدة مربعة

٥) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣ – ٣ س^{٢} والمستقيمين ، س= -٢ ، س = -٤

الحل :

ق(س) = صفر ومنه ٣ – ٣ س^{٢}= ٠ ومنه ٣س^{٢}=٣ ومنه س^{٢} = ١ ، ومنه س = -١ ، س = ١

نلاحظ أن س = -١ ، س = ١ لا تقع ضمن الفترة [-٤ ، -٢]

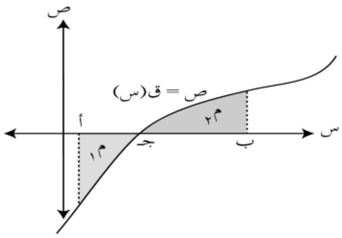


نجري التكامل المحدد للاقتران في الفترة [-٤ ، -٢]

$\int_{-٤}^{-٢}(٣ - ٣\,س^{٢})\,ء\,س = (٣س - س^{٣})\Big]_{-٤}^{-٢} = (٣(-٢) - (-٢)^{٣}) - (٣(-٤) - (-٤)^{٣})$

= -٦ + ٨ +١٢ -٦٤ = -٥٠ ، المساحة المطلوبة = |-٥٠| = ٥٠ وحدة مربعة

الحالة الثالثة : جزء من المنطقة المغلقة تحت محور السينات (ق(س) ⩽ ٠) في الفترة [أ ، جـ] ، والجزء الآخر فوق محور السينات (ق(س) ⩾ ٠) في الفترة [جـ ، ب] فإن :



المساحة المطلوبة : م = المساحة $م_{١}$ + المساحة $م_{٢}$

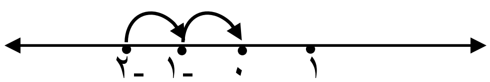
المساحة المطلوبة = $\left|\int_{أ}^{جـ} ق(س)ء\,س\right| + \int_{جـ}^{ب} ق(س)ء\,س$

٦) جد مساحة المنطقة المغلقة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٦ – ٦$س^{٢}$ ، ومحور السينات على الفترة [-٢ ، ٠] .

الحل :

ق(س) = صفر ومنه ٦ – ٦$س^{٢}$ = ٠ ومنه ٦$س^{٢}$ = ٦ ومنه $س^{٢}$ = ١

ومنه س = -١ ، س = ١



نلاحظ أن س = ١ لا تقع ضمن الفترة [-٢ ، ٠]

وأن س = -١ تقع ضمن الفترة [-٢ ، ٠] لذلك نجري التكامل المحدد للاقتران في الفترة [-٢ ، -١] ثم نجري التكامل في الفترة [-١ ، ٠]

الحل :

$\int_{-٢}^{-١}(٦ - ٦س^{٢})ءس = (٦س - ٢س^{٣})\Big]_{-٢}^{-١} = (٦(-١) - ٢(-١)^{٣}) - (٦(-٢) - ٢(-٢)^{٣})$

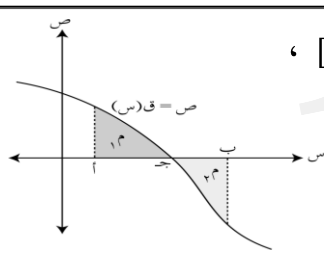
= -٦+ ٢ + ١٢ -١٦= -٨ ومنه $م_{١}$ = |-٨| = ٨ وحدة مربعة

$\int_{-١}^{٠}(٦ - ٦س^{٢})ءس = (٦س - ٢س^{٣})\Big]_{-١}^{٠} = (٦(٠) - ٢(٠)^{٣}) - (٦(-١) - ٢(-١)^{٣})$

= ٦ -٢ = ٤ ومنه $م_{٢}$ = ٤ وحدة مربعة

المساحة المطلوبة : م = $م_{١}$ + $م_{٢}$ = ٨ + ٤ = ١٢ وحدة مربعة

الحالة الرابعة : جزء من المنطقة المغلقة فوق محور السينات (ق(س) ⩾ ٠) في الفترة [أ ، جـ] ، والجزء الآخر تحت محور السينات (ق(س) ⩽ ٠) في الفترة [جـ ، ب] فإن :



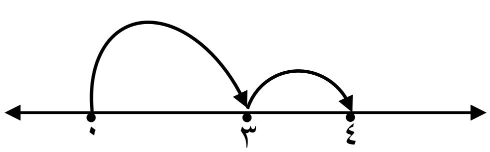
المساحة المطلوبة = المساحة $م_{١}$ + المساحة $م_{٢}$

المساحة المطلوبة = $\int_{أ}^{جـ} ق(س)ء\,س + \left|\int_{جـ}^{ب} ق(س)ء\,س\right|$

٧) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٦ – ٢س ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٤]

الحل :

ق(س) = ٠ ومنه ٦ – ٢س = ٠ ومنه ٦ – ٢س = ٠ ومنه س = ٣



نلاحظ أن س = ٣ تقع ضمن الفترة [٠ ، ٤]

نجري التكامل في الفترة [٠ ، ٣] ثم نجري التكامل في الفترة [٣ ، ٤]

$$\int_{٠}^{٣} (٦ - ٢س)\,ءس = \left[(٦س - س^{٢})\right]_{٠}^{٣} = (٦(٣) - (٣)^{٢}) - (٦(٠) - (٠)^{٢})$$

$= ١٨ - ٩ = ٩$ ومنه $م_{١} = ٩$ وحدة مربعة

$$\int_{٣}^{٤} (٦ - ٢س)\,ءس = \left[(٦س - س^{٢})\right]_{٣}^{٤} = (٦(٤) - (٤)^{٢}) - (٦(٣) - (٣)^{٢})$$

$= ٢٤ - ١٦ - ١٨ + ٩ = -١$ ومنه $م_{٢} = |-١| = ١$ وحدة مربعة

المساحة المطلوبة = $م_{١} + م_{٢} = ٩ + ١ = ١٠$ وحدة مربعة

ملاحظة هامة : في بعض المسائل يُطلب إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات دون إعطاء فترة محددة في هذه الحالة تعتبر نقاط تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات هي الفترة التي نُجري فيها التكامل كما في المسألة التالية :

٨) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = $س^{٢} - ٢س - ٣$ ومحور السينات

ق(س) = صفر

$س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠$ ومنه $(س - ٣)(س + ١) = ٠$

إما س = ٣ أو س = -١ هذه نقاط تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات وتمثل حدود التكامل

المساحة المطلوبة محصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات على الفترة [-١، ٣]

$$\int_{-١}^{٣} (س^{٢} - ٢س - ٣)\,ءس = \left[\left(\frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢} - ٣س\right)\right]_{-١}^{٣}$$

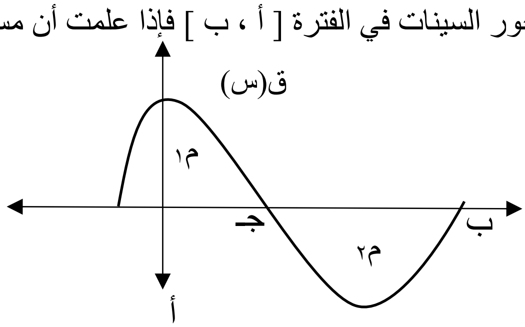
$$= \left(\frac{(٣)^{٣}}{٣} - (٣)^{٢} - ٣(٣)\right) - \left(\frac{(-١)^{٣}}{٣} - (-١)^{٢} - ٣(-١)\right)$$

$$= ٩ - ٩ - ٩ + \frac{١}{٣} + ١ - ٣ = -\frac{٣٢}{٣}$$

المساحة المطلوبة = $\left|\int_{-١}^{٣} ق(س)\,ءس\right| = \left|-\frac{٣٢}{٣}\right| = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

٩) يمثل الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات في الفترة [أ ، ب] فإذا علمت أن مساحة ($م_{١}$) تساوي ٦ وحدات مربعة ،

$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس = -٤$ ، فجد مساحة ($م_{٢}$)



الحل : لحساب المساحة $م_{٢}$ نوجد أولاً التكامل $\int_{جـ}^{ب} ق(س)\,ءس$

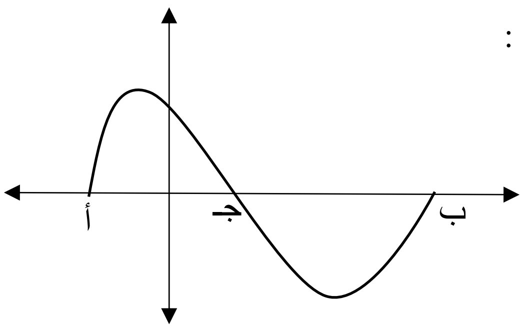
$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,ءس + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\,ءس$$

$-٤ = ٦ + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} ق(س)\,ءس$ حيث $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} ق(س)\,ءس = م_١ = ٦$

$\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} ق(س)\,ءس = -١٠$ نلا حظ ان التكامل سالب لأن المنطقة المغلقة تحت محور السينات

المساحة $م_٢ = \left| \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} ق(س)\,ءس \right| = \left|-١٠\right| = ١٠$ وحدة مربعة

١٠) معتمدا الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف في الفترة [أ ، ب] ، إذا علمت أن مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات تساوي (١٤) وحدة مربعة وكان :



$\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} ق(س)\,ءس = ٦$ فما قيمة $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} ق(س)\,ءس$

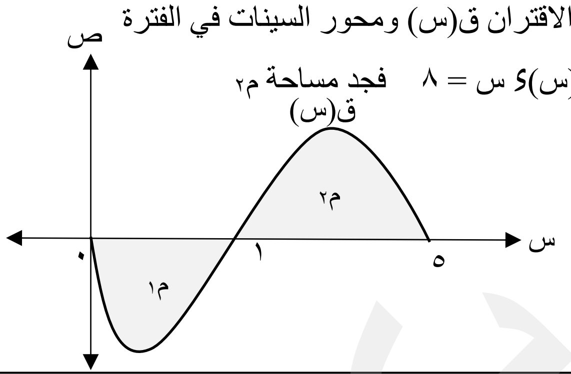
الحل :

$م = م_١ + م_٢ = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} ق(س)\,ءس + \left| \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} ق(س)\,ءس \right|$

$١٤ = ٦ + \left| \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} ق(س)\,ءس \right|$ ومنه $\left| \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} ق(س)\,ءس \right| = ١٤ - ٦ = ٨$ وحدة مربعة

$\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} ق(س)\,ءس = -٨$ لأن المنحنى تحت محور السينات في الفترة [جـ ، ب]

١١) اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٥] علمت إذا أن مساحة المنطقة $م_١$ تساوي (٤) وحدة مربعة وان $\int_{٠}^{٥} ق(س)\,ءس = ٨$ فجد مساحة $م_٢$



الحل : $\int_{٠}^{٥} ق(س)\,ءس = \int_{٠}^{١} ق(س)\,ءس + \int_{١}^{٥} ق(س)\,ءس$

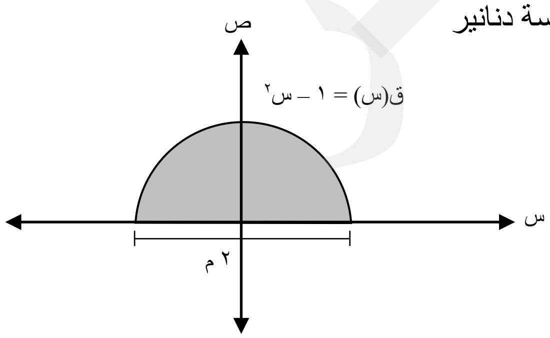
$٨ = -٤ + \int_{١}^{٥} ق(س)\,ءس$ ومنه $\int_{١}^{٥} ق(س)\,ءس = ١٢$

$م_٢ = \int_{١}^{٥} ق(س)\,ءس = ١٢$ وحدة مربعة

١) يمثل الشكل نافذة طول قاعدتها ٢ م ، محصورة بمنحنى الاقتران ص = ق(س) = ١ – $س^٢$

إذا أردنا وضع زجاج على النافذة ، وكانت تكلفة المتر المربع الواحد منه خمسة دنانير

فما التكلفة الكلية لزجاج النافذة :



التكلفة الكلية = المساحة × ٥

المساحة = $\int_{-١}^{١} (١ - س^٢)\,ءس$

$\int_{-١}^{١} (١ - س^٢)\,ءس = \left[(س - \frac{س^٣}{٣}) \right]_{-١}^{١} = (١ - \frac{(١)^٣}{٣}) - (-١ - \frac{(-١)^٣}{٣})$

$= ١ - \frac{١}{٣} + ١ - \frac{١}{٣} = ٢ - \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة ومنه التكلفة الكلية $= \frac{٤}{٣} \times ٥ = \frac{٢٠}{٣}$ دينار