الشامل
في
أساسيات الرياضيات

أسس نفسك بنفسك وتعلم الرياضيات بدون معلم

* لطلبة المدارس (من الأول وحتى التوجيهي)

تأليف

محمد مصطفى أحمد القضاه

الشامل في أساسيات الرياضيات

محمد مصطفى أحمد القضاه

الشامل
في
أساسيات الرياضيات

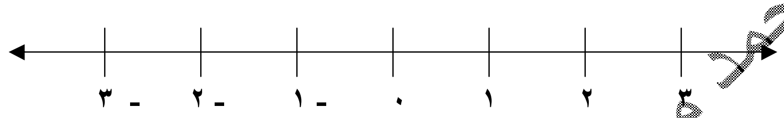
٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

أ.محمد القضاه

① الأعداد الطبيعية ورمزها (ط) ، وهي : { ١، ٢، ٣ ، .... }

② الأعداد الصحيحة ورمزها (ص) ، وهي :
{ ... ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، -١ ، -٢ ، -٣ ، ...}
وتقسم إلى ص$^{+}$ { ١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ،....}

ص$^{-}$ = { -١ ، -٢ ، -٣ ، -٤ ، -٥ ، -٦،....}



③ الأعداد النسبية :
وهي الأعداد التي تكتب على صورة : $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ ورمزها (ك) { ك: ك= $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، ب ≠ ٠}

④ الأعداد غير النسبية :
هي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة : $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ ، مثل :

Π ، $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ ، ....

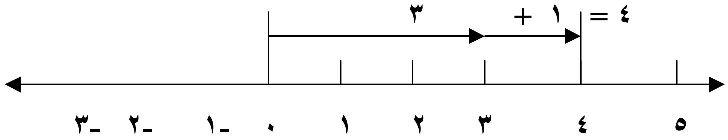
✍أي الجذور التربيعية للأعداد غير المربعات الكاملة والكسور العشرية غير المنتهية .

⑤ الأعداد الحقيقية : وهي مجموعة الأعداد الطبيعية والأعداد الصحيحة والأعداد النسبية وغير النسبية . ورمزها ح .

✍ كل عدد صحيح هو عدد نسبي ⇐ ٥ عدد نسبي يمكن أن يصبح له مقام يساوي ١ ⇐ = $\frac{٥}{١}$

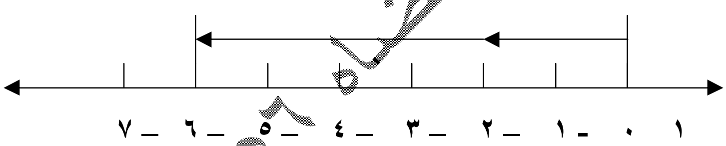
جمـع الأعــداد الـصحيحــة

<u>مثال :</u>
أوجد ناتج جمع العـددين ٣ + ١ باستخدام خط الأعـداد.
① نبدأ من الصفر و نتحرك باتجاه اليمين مقدار ٣ وحدات (العدد الأول)
② نبدأ من العدد ٣ و نتحرك باتجاه اليمين بمقدار ١ وحده واحده (العدد الثاني)
٣ + ١ = ٤



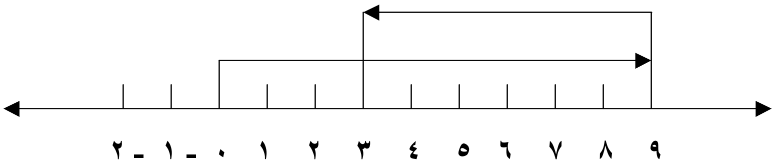
✍ ناتج جمع عددين صحيحين موجبين هو عـدد صحـيح مـوجب

<u>مثال:</u> أوجد ناتج (- ٢) + (- ٤) باستخدام خط الأعداد
① نبدأ من الصفر و نتحرك باتجاه اليسار بمقدار وحدتين (العدد الأول) (- ٢)
② نبدأ من العدد (- ٢) و نتحرك إلى اليسار (- ٤) وحدات (العدد الثاني) (- ٤)
فإنك تصل إلى العدد (- ٦) و هو ناتج جمع العددين .



✍ ناتج جمـع عددين صحيحـين سـالبين هو عدد صحيح سـالب

<u>مثال :</u> أوجد ٩ + (- ٦) باستخدام خط الأعداد
الحل :
أبدأ من الصفر و تحرك لليمين ٩ وحدات أي للعدد ٩ ثم ابدأ من العدد ٩ ، وتحرك لليسار ٦ وحدات أي للعدد ٣ و هو الناتج ٩ + - ٦ = ٩ – ٦ = ٣ .

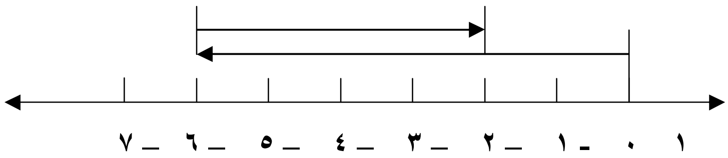


جمـع الأعـــداد الـصحيحـــة

<u>مثال :</u>

- ٦ + ٤ = - ٢ أوجد ناتج الجمع على خط الأعداد .

ابدأ من الصفر و تحرك باتجاه اليسار ٦ وحدات لتصل إلى العدد – ٦ ثم ابدأ من العدد –٦ و تحرك لليمين بمقدار ٤ وحدات لتصل إلى العدد – ٢ و هو ناتج جمع العددين .



✍ لجمـع عدديـن مختـلفيـن في الإشـارة خـذ الـفرق بيـن العدديـن دون إشـارات و أعطِ الـنـاتـج إشـارة العـدد الأكبـر.

✍<u>الخلاصة :</u>

لجمع عـدديـن متـشـابـهيـن في الإشـارة نجمـع العـددين جمـعـاً عـاديـاً ثم نـضـع الإشـــارة الـمـشـــتركـة .

٥ + ٦ = ١١ ، - ٥ + - ٦ = - ١١ ، - ٧ – ٨ = - ١٥

① (- أ + (- ب))= - (أ + ب) ② - أ – ب = - (أ + ب)

✍ لجمع عددين مختلفين في الإشارة .

① - أ + - ب = - (أ + ب) ⇐ - ٥ + - ٦ = - (٥ + ٦) = - ١١

② - أ – ب = - (أ + ب) ⇐ - ٧ – ٨ = - (٧ + ٨) = - ١٥

③ أ > ب ⇐ ب – أ = - (أ – ب) ⇐ ٥ – ١٠ = - (١٠ – ٥) = - ٥

④ أ > ب ⇐ - ب + أ = أ – ب ⇐ - ٥ + ١٠ = ١٠ – ٥ = ٥

⑤ أ – (- ب) = أ + ب ⇐ ٨ – (- ٥) ٨ + ٥ = ١٣

أ - - ب = أ + ب ⇐ ٧ - - ٦ = ٧ + ٦ = ١٣

✍ ما ينطبق هنا ينطبق على الكسور العادية من حيث الإشارات .

في <u>عملية جمع و طرح</u> الكسور العادية يجب أن تكون المقامات موحدة ، إذا لم تكن موحدة يجب توحيدها و ذلك بضرب بسط ومقام الكسر العادي الأول بمقام الكسر العادي الثاني ونضرب أيضاً بسط ومقام الكسر العادي الثاني بمقام الكسر العادي الأول .

وفي <u>عملية ضرب الكسور</u> العادية نضرب البسط في البسط و المقام في المقام.

و في <u>عملية قسمة كسر عادي</u> على كسر عادي تتحول العملية إلى ضرب الكسر العادي الأول بمقلوب الكسر العادي الثاني .

جمـع الأعـــداد الـصحيحـــة

<u>عملية الجمع و الطرح :</u>

+ ٢ + ٢ = ٤ ، ٣ + ٥ = ٨ ، ٥ – ٤ = ١ ، ٨ – ٣ = ٥

(٥) – (- ٤) = ٥ + ٤ = ٩ ⇐

٧ – (- ٣)= ٧ + ٣ = ١٠ ⇐

٨ –(- ١٧) = ٨ + ١٧ = ٢٥ .

> **<u>وجود إشارتين سالبتين جنباً إلى جنب تصبح موجبة</u> .**
> **- - = + ⇐ - (- أ) = + أ ⇐ أ - - ب = أ + ب .**

٨ – ٩ = - ١ ، ٧ – ١٣ = - ٦ ، ٢٤ – ٣٠ = - ٦ ، ٣٥ – ٥٠ = - ١٥

> **✍ إذا كـان العدد الـثـاني أكبـــر مـن الـعـدد الأول و إشـــارة العــدد الـثــانــي ســـــالبـــة ⇐ نـضـع العدد الأكبر أولاً ونطـرح منه العـدد الثـاني و نضـع إشـــارة النـاتج ســـالب .**

٧ – ١١ ⇐ ١١ أكبر من ٧ و إشارة (١١) سالبة لذلك نضع ١١ أولاً و نطرح منه ٧ ونضع إشارة الناتج سالبة ⇐ ١١ – ٧ = - ٤ . ⇐ أ > ب ⇐ ب – أ = - (أ – ب) .

- ٣ + ٤ = ٤ – ٣ = ١ ، - ٧ + ١٠ = ١٠ – ٧ = ٣

<u>✍ إذا كان العدد الأكبر إشارته موجبة يمكن وضعه في البداية ومن ثم إجراء عملية الطرح .</u>

- ٨ + ١٥ = ١٥ – ٨ = ٧ ، - ٢٠ + ٢٨ = ٢٨ – ٢٠ = ٨

<u>⇐ ب > أ ⇐ - أ + ب = ب - أ</u>

> **✍إذا كان العدد الثاني أكبر من العدد الأول و إشارة العدد الثاني موجبة لذلك نضع العدد الثاني أولاً ونطرح منه العدد الأول وتكون إشارة الناتج موجبة.**

⇐ - ٨ + ٢٠ ⇐ لاحظ ٢٠ موجبة و أكبر من – ٨ لذلك نضعها أولاً ونطرح بصورة طبيعية .
٢٠ – ٨ = ١٢

> **✍ العدد الأول سالب و العدد الثاني سالب و الإشارة بين العددين موجبة هنا نجمع العددين ونضع إشارة الناتج سالب ⇐ - أ – ب = - (أ + ب) .**

- ٧ – ١٥ = - ٧ + - ١٥ = - ٢٢

-٧ – ١٥ = - (٧ + ١٥) = - ٢٢

- ٨ – ١٠ = - (٨ + ١٠) = - ١٨ ، - ٢٧ – ٩ = - (٢٧ + ٩) = - ٣٦

- ٥٤ – ٦ = - (٥٤ + ٦) = - ٦٠ ، - ٧ – ٨ = - (٧ + ٨) = - ١٥

- ٦ – ١٣ = - (٦ + ١٣) = - ١٩ ، - ٨ – ٢٤ = - (٨ + ٢٤) = - ٣٢

<u>مثال :</u>

- ٧ + (- ١٤) = - ٧ + - ١٤ = - ٢١

- ٨ + - ٤ = - ١٢ ، - ٨ – ٤ = - ١٢ ، - ١٦ + - ١٠ = - ٢٦ ،

- ١٧ + - (- ٨) = - ١٧ + ٨ = - ٩ ، - ٤ + ١١ = ١١ – ٤ = ٧

٤ – ١١ = - (١١ – ٤) = - ٧ ، - ١١ + ٧ = – (١١ – ٧) = - ٤

- ٨ + ٢ = - ٦ ، - ٢٣ + ٥ = - ١٨ ، - ٦٤ + ٥ = - ٥٩ .

عمليتا الجمع و الطرح :

١١١١١	١ ١	١١١	
٨٨٨٨٢٥	٨٥٢٦٣	٩٩٩٩	٣٥٦٧٥١٢٨٦٣
٣٥٥٥٧٦ +	٥٨٣٧٦ +	١ +	٣٤٦٥٣١١٥١٢ −
١٢٤٤٤٠١	١٤٣٦٣٩	١٠٠٠٠	٠١٠٢٢٠١٣٥١

✍ انتبه إلى طريقة تدوين الأرقام في حالة الاستلاف .

٦ ١٤ ١٤ ٥ ١٤	١١ ١٢ ١٤ ٤ ١٣	٦ ١٤ ١٥ ١٧ ٥ ١١ ١٣
٥ ٧ ٥ ٤ ٦ ٤	١ ٢ ٣ ٤ ٦ ٨ ٥ ٣	٧ ٥ ٦ ٧ ٨ ٦ ٢ ٣
٥ ٥ ٥ ٥ ٣ ٦ -	٥ ٦ ٧ ٦ ٥ ٣ ٦ -	٦ ٦ ٧ ٨ ٥ ٥ ٦ ٧ -
٠ ١ ٩ ٩ ٢ ٨	٦ ٦ ٧ ٠ ٣ ١ ٧	٠ ٨ ٨ ٩ ٣ ٠ ٥ ٦

جمع الكسور العشرية وطرحها :

مثال :

٢.٣٦٧ + ١.٢٥٣ = ٣.٦٢٠ ⟵

١ ١
٢ , ٣ ٦ ٧
١ , ٢ ٥ ٣ +
٣ , ٦ ٢ ٠

٢.٣٦٧ − ١.٢٥٣ = ١.١١٤ ⟵

٢ , ٣ ٦ ٧
١ , ٢ ٥ ٣ -
١ , ١ ١ ٤

✍ لاحظ انه في عملية جمع وطرح الكسور العشـرية نقوم بترتيب الخانات أولاً بحيث تكون الفاصلة العشـرية تحت الفاصلة العشـرية و من ثم بقية الأرقام علي يسـار ويمين الفاصلة العشـرية بالترتيب و إذا احتجنا إلى خانات عشـرية جديدة على يـمـيـن الفـاصلــة يمكـن وضــع أصفـــار .

مثال :

٥.٣١٦ – ٣.٢ = ٢.١١٦

٥ , ٣ ١ ٦
٣ , ٢ ٠ ٠ -
٢ , ١ ١ ٦

٧.٢٣٥ – ٦.٣٢٤ = ٠.٩١١

٦ ١٢
~~٧~~ , ٢ ٣ ٥
٦ , ٣ ٢ ٤ -
٠ , ٩ ١ ١

٩.٣٥٧٢ – ٣.٦٧٨١٥ = ٥.٦٧٩٠٥

٨ ١٢ ١٤ ١٧ ١ ١٠
~~٩~~ , ~~٣~~ ~~٥~~ ~~٧~~ ~~٢~~ ٠
٣ , ٦ ٧ ٨ ١ ٥ -
٥ , ٦ ٧ ٩ ٠ ٥

خصائص عمليتى الجمع و الطرح :

مثال :

٣ ٦ ٥ ٠
٢ ٣ ١ ١ +
٥ ٩ ٦ ١

٢ ٣ ١ ١
٣ ٦ ٥ ٠ +
٥ ٩ ٦ ١

⇐ ٣١٦ + ٤١١ = ٧٢٧
⇐ ٤١١ + ٣١٦ = ٧٢٧

عمليـة الجمـع تـبديـليـة .

⇐ (١٣ + ٢٤) + ٣١ = ٦٨
⇐ ١٣ + (٢٤ + ٣١) = ٦٨

عمليـــة الـجمــع تـجـميـعيـة

٤ ٦ ١
٢ ٥ ١ -
٢ ١ ٠

٢ ٥ ١
٤ ٦ ١ -
غير جائزة

عمـليــة الـطـرح غيـر تبـديـلـيــة

⇐ (٩٣ – ٣٢) – ٢١ = ٦١ – ٢١ = ٤٠
⇐ ٩٣ – (٣٢ – ٢١) = ٩٣ – ١١ = ٨٢

عمليــة الـطـرح غيــر تـجـميـعيـة

٢ (٥ + ٣) = ٢ × ٥ + ٢ × ٣ = ١٦
٢ (٨) = ١٦
٢ (٥ – ٣) = ٢ × ٢ = ٤
٢ × ٥ – ٢ × ٣ = ١٠ – ٤ = ٤

---

٧ (٧ ـ ٣) = ٧ × ٤ = ٢٨

٧ × ٧ ـ ٧ × ٣ = ٤٩ ـ ٢١ = ٢٨

<u>**يـجوز تـوزيـع الـضـرب علـى عـمـليـتـي الـجـمـع و الـطـرح**</u>

<u>تمـــــــــــــــــارين</u>

جد ناتج ما يلي :

① ـ ٣ + ٩ باستخدام خط الأعداد

② ٧ + ٣

③ ٨ ـ ٣

④ ـ ٥ + ٤

⑤ ـ ٦ ـ ٦

⑥ ـ ٨ + ١٣

⑦ ـ ٣ - - ٩

⑧ ٢.٣ + ٧.٦

⑨ ٢ + ٧.٠٠٢

⑩ - ٧.٢٣٦ + ٤.١

①① ٨.٩٣٢ ـ ٤.٦

①② ٧.٩٩٩ + ٠.٠٠١

①③ ٢٣٥٦٧ + ٢٩٨٧٦٤

①④ ٥٤١٢٣ ـ ٥٦٨٩

٦ × ٣ = ١٨ ، ٣ × ٦ = ١٨ ، ٤ × ٨ = ٣٢ ، ٨ × ٤ = ٣٢ .....

- ٩ + - ٩ + - ٩ = - ٢٧ ، ٣ × - ٩ = - ٢٧

✍ **حاصـل ضـرب عـددين صحيحين مختلفين في الإشـارة هو عـدد صحيح سـالب .**

- ٦ × - ٢ = ١٢ ، (- ٣ × - ٢) × - ٤ = - ٢٤

١٣ × - ٣ = - ٣٩ ، - ٧ × - ٨ = ٥٦ ، - ٣ × (- ٢ × - ٤) = - ٣ × ٨ = - ٢٤

✍ **حاصل ضرب عددين صحيحين لهما نفس الإشـارة هو عدد صحيح موجب .**
✍ **عمليـة الضرب عمليـة تبادليـة .**

ملخص :

① - أ × - ب = + (أ × ب) ⇐ - × - = +
② - أ × ب = - (أ × ب) ⇐ - × + = -
③ أ × - ب = - (أ × ب) ⇐ + × - = -
④ أ × ب = أ × ب ⇐ + × + = +

✍ **ويعني ذلك أنه في عمليـة الضرب إذا تشـابهت الإشـارات يكـون النـاتج موجب .**

مثال :

① - ٤ × - ٥ = + ٢٠ ، - ٣ × - ٥ = + ١٥ ، - ٧ × - ٨ = + ٥٦ ⇐ - × - = +
② - ٤ × ٥ = - ٢٠ ، - ٣ × ٧ = - ٢١ ، - ٦ × ٦ = - ٣٦ ⇐ - × + = -
③ ٣ × - ٦ = - ١٨ ، ٢ × - ٥ = - ١٠ ، ٩ × - ٩ = - ٨١ ⇐ + × - = -
④ ٣ × ٣ = ٩ ، ٨ × ١٠ = ٨٠ ، ٤ × ٧ = ٢٨ ⇐ + × + = +

```
    ١ ٢ ٤
  ٦ ٣ ٢ ١
×       ٧
---------
  ٢ ٥ ٦ ٨
```

```
        ١ ٢
      ٣ ٢ ١ ٤
×         ٨ ٣
-------------
      ١ ١
  ٤ ٨ ٩ ٢ ٣
+ ٠ ٩ ٦ ٣ ٢ ١
-------------
  ٤ ٧ ٦ ٦ ٥ ١
```

```
        ١ ٢
      ٣ ٢ ١ ٦
×         ٨ ٥
-------------
    ١ ١ ١
  ٤ ٨ ٩ ٨ ٤
+ ٠ ٥ ١ ٦ ٠ ٣
-------------
  ٤ ٣ ١ ٥ ٥ ٣
```

ضـرب الأعـــداد الصحيحــة

خصائص عملية الضرب :

① **عملـــية الضـرب تجميعـيـة :**

مثال :

٣ × (٢ + ٣) = ٣ × ٥ = ١٥

٣ × ٢ + ٣ × ٣ = ٦ + ٩ = ١٥

يجـوز توزيـع الضـرب على الجمـــع

② **عملـية الضـرب تبـديلــية و تجميعــية:**

مثال :

(٣ × ٥) × ٦ = ٩٠ = ١٥ × ٦ = ٩٠

٣ × (٥ × ٦) = ٣ × ٣٠ = ٩٠

٣ × ٨ = ٢٤ ، ٨ × ٣ = ٢٤

٥ × ٩ = ٤٥ ، ٩ × ٥ = ٤٥

١

٣ ٤ ٢ ١

× ٢ ١ ٣

١ ٠ ٢ ٦ ٣

٣ ٤ ٢ ١ ٠

٦ ٨ ٤ ٢ ٠ ٠

٧ ٢ ٨ ٦ ٧ ٣

٥ ٤ ٢

٤ ٣ ٢

٣ ٣ ١

١ ٦ ٥ ٣

× ٨ ٧ ٦

٩ ٩ ١ ٨

١ ١ ٥ ٧ ١ ٠

١ ٣ ٢ ٢ ٤ ٠ ٠

١ ٤ ٤ ٨ ٠ ٢ ٨

٣ × (٣ – ٢) = ٣ × ١ = ٣

٣ × ٣ – ٣ × ٢ = ٩ – ٦ = ٣

٧ (٧ – ٣) = ٧ × ٤ = ٢٨

٧ × ٧ – ٧ × ٣ = ٤٩ – ٢١ = ٢٨

يجـوز توزيـع الضـرب على الجمـع

تدريـــــب : جد نـاتـج مـا يـلـي

① ٨ × ٢٥٦ ② ٢٧ × ٨٣ ③ ١٣٢ × ٣٢١ ④ ٧٠ × ٧٧

الجمع و الطرح :

تعريف :
إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ عددين نسبيين ، فإن

١) $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أ} \times \text{د} + \text{ب} \times \text{جـ}}{\text{ب} \times \text{د}}$

٢) $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} - \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أ} \times \text{د} - \text{ب} \times \text{جـ}}{\text{ب} \times \text{د}}$

$\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4+2}{3} = \frac{6}{3} = 2$ ، $\frac{8}{5} + \frac{6}{5} = \frac{8+6}{5} = \frac{14}{5}$

$\frac{7}{2} - \frac{3}{2} = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ ، $\frac{28}{7} - \frac{32}{7} = \frac{28-32}{7} = \frac{-4}{7}$

✍ إذا كانت المقامات موحدة (جاهزة) نقوم بجمع البسط مع البسط و المقام يبقى كما هو دون تغيير .

$\frac{3}{2} + \frac{5}{3} =$ ⇐ كون المقامات مختلفة إذاً يجب علينا توحيد المقامات ويتم ذلك بضرب بسط ومقام الأول بمقام الثاني و ضرب بسط ومقام الثاني بمقام الأول .

$\frac{3 \times 3}{2 \times 3} + \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{9}{6} + \frac{10}{6} = \frac{9+10}{6} = \frac{19}{6}$

$\frac{2}{9} + \frac{4}{5} = \frac{2 \times 5}{9 \times 5} + \frac{4 \times 9}{5 \times 9} = \frac{10}{45} + \frac{36}{45} = \frac{10+36}{45} = \frac{46}{45}$

✍لاحظ انه في الكسور العادية كلما كان العدد الموجود في المقام أكبر كلما كانت قيمة الكسر أقل.

$\Leftarrow \frac{٢}{٥} > \frac{٢}{١٥}$ ، $\frac{٧}{١٣} > \frac{٧}{٥٤} \Leftarrow$ البسـط ثابت ومقام الثانية أكبر فهي أصغـر

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ عددين نسـبيين ، فإن

١) $\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{د} = \frac{أ \times د + ب \times جـ}{ب \times د}$

٢) $\frac{أ}{ب} - \frac{جـ}{د} = \frac{(أ \times د) + (-\ ب \times جـ)}{ب \times د} = \frac{أ \times د\ -\ جـ \times ب}{ب \times د}$

<u>مثال :</u>

① $\frac{٥}{٤} + \frac{٨}{٣} = \frac{٥ \times ٣}{٤ \times ٣} + \frac{٨ \times ٤}{٣ \times ٤} = \frac{١٥ + ٣٢}{١٢} = \frac{٤٧}{١٢}$

② $\frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٢} = \frac{٢ \times ٢ + ٣ \times ٣}{٣ \times ٢} = \frac{٤ + ٩}{٦} = \frac{١٣}{٦}$

③ $\frac{٣}{٤} + \frac{٢}{٣} = \frac{٣ \times ٣ + ٢ \times ٤}{٤ \times ٣} = \frac{٩ + ٨}{١٢} = \frac{١٧}{١٢}$

④ $\frac{٣}{٨} + \frac{٥}{٢} = \frac{٣ \times ٢ + ٥ \times ٨}{٨ \times ٢} = \frac{٦ + ٤٠}{١٦} = \frac{٤٦}{١٦}$

مثال :

① $\frac{-٤}{٥}+\frac{١}{٤}=\frac{(-٤\times٤)+(١\times٥)}{٥\times٤}=\frac{-١٦+٥}{٢٠}=\frac{-١١}{٢٠}$

② $\frac{٣}{٢}-\frac{٥}{٤}=\frac{٣\times٤+(-٥\times٥)}{٢\times٤}=\frac{١٢-١٠}{٨}=\frac{٢}{٨}$

③ $\frac{٣}{٥}+\frac{-٤}{١٠}=\frac{٣\times١٠+(-٤\times٥)}{٥\times١٠}=\frac{٣٠+(-٢٠)}{٥٠}=\frac{١٠}{٥٠}$

④ $\frac{٣}{٨}-\frac{٥}{٢}=\frac{٣\times٢+(-٥\times٨)}{٨\times٢}=\frac{٦+(-٤٠)}{١٦}=\frac{٦-٤٠}{١٦}=\frac{-٣٤}{١٦}$

✍ **في عملية جمـع و طرح الأعـــداد الكسرية يجـب تحـويلـهـا أولاً إلى كســـور عــادية ثم إجـراء عمـلـيـة الجمـع .**

مثال :

$٢\frac{١}{٣}+٥\frac{١}{٣}\Leftarrow$ **يجب تحـويلـهـا إلى كســور عـاديـة**

$٢\frac{١}{٣}=\frac{٣\times٢+١}{٣}=\frac{٧}{٣}$

$٥\frac{١}{٣}=\frac{٣\times٥+١}{٣}=\frac{١٦}{٣}\Leftarrow\frac{٧}{٣}+\frac{١٦}{٣}=\frac{٢٣}{٣}$

مثال :

$٤\frac{١}{٧} + ٣\frac{٥}{٢}$ ⇐ **يجب تحويلها إلى كسور عادية**

$$\frac{٧\times٤+١}{٧} + \frac{٢\times٣+٥}{٢} = \frac{٢٩}{٧} + \frac{١١}{٢} = \frac{٢٩\times٢+١١\times٧}{٧\times٢} = \frac{٥٨+٧٧}{١٤} = \frac{١٣٥}{١٤}$$

مثال :

$٧\frac{٣}{٢} - ٢\frac{١}{٣}$ ⇐ **يجب تحويلها إلى كسور عادية**

$$\frac{٢\times٧+٣}{٢} - \frac{٣\times٢+١}{٣} = \frac{١٧}{٢} - \frac{٧}{٣} = \frac{١٧\times٣-٧\times٢}{٢\times٣} = \frac{٥١-١٤}{٦} = \frac{٣٧}{٦}$$

مثال :

$٨\frac{٢}{٣} + ٤\frac{١}{٧}$ ⇐ **يجب تحويلها إلى كسور عادية**

$$\frac{٣\times٨+٢}{٣} + \frac{٧\times٤+١}{٧} = \frac{٢٦}{٣} + \frac{٢٩}{٧} = \frac{٢٦\times٧+٢٩\times٣}{٢١} = \frac{١٨٢+٨٧}{٢١} = \frac{٢٦٩}{٢١}$$

ضـرب عـدد صحيـح في كســـر :

$$3 \times \frac{7}{5} = \frac{3}{1} \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{1 \times 5} = \frac{21}{5}$$

> ✍عند ضرب عدد صحيح في كسر نكتب العدد الصحيح بصورة كسر مقامه (١) ، ثم نضرب البسط فى البسط و المقام فى المقام .

مثال :

① $7 \times \frac{6}{5} = \frac{7}{1} \times \frac{6}{5} = \frac{7 \times 6}{1 \times 5} = \frac{42}{5}$

② $4 \times \frac{5}{9} = \frac{4}{1} \times \frac{5}{9} = \frac{4 \times 5}{1 \times 9} = \frac{20}{9}$

> **تدريب : جد ناتج مايلي :**
>
> ① $8 \times \frac{7}{5}$
>
> ② $3 \times \frac{2}{9}$

ضرب كسر فى كسر :

تعريف : لإيجاد حاصل ضرب عددين نسبيين $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ **نستخدم القاعدة التالية :** (أ/ب ، جـ/د)

$$\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أ \times جـ}{ب \times د}$$

> ✍عند ضرب كسر في كسر :
> نضرب بسط الكسر الأول في بسط الكسر الثاني ومقام الكسر الأول في مقام الكسر الثاني

مثال :

① $\frac{-7}{8} \times \frac{-6}{5} = \frac{42}{40}$

② $\frac{1}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{7 \times 3} = \frac{1}{21}$

③ $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{3 \times 4}{5 \times 7} = \frac{12}{35}$

> ✍ يكون حاصل ضرب عددين نسبيين موجبا إذا كان لهما الإشارة نفسها

تدريب : جد ناتج ما يلي

١) $\frac{13}{11} \times \frac{8}{9}$ ٢) $\frac{9}{17} \times \frac{3}{2}$

ضـــرب الـكـســـور

$\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$ ، في عملية ضرب الكسور العادية نقوم بضرب $\frac{\text{البسط} \times \text{البسط}}{\text{المقام} \times \text{المقام}}$

أمثلة :

① $\frac{٣}{٢} \times \frac{٧}{٦} = \frac{٣ \times ٧}{٢ \times ٦} = \frac{٢١}{١٢}$ ② $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢}{٦} = \frac{٤ \times ٢}{٣ \times ٦} = \frac{٨}{١٨}$

③ $\frac{-٣}{٢} \times \frac{٣}{٢} = \frac{-٩}{٤}$ ④ $\frac{٤}{٥} \times \frac{-٣}{٧} = \frac{٤ \times -٣}{٥ \times ٧} = \frac{-١٢}{٣٥}$

⑤ $\frac{-٣}{٧} \times \frac{-٤}{٨} = \frac{+١٢}{٥٦}$

تدريب : جد ما يلي

① $\frac{-٣}{٢} \times \frac{-٦}{٣}$ ② $\frac{٧}{٤} \times \frac{-٥}{٦}$

لإيجاد حاصل ضرب عددين نسبيين $\frac{أ}{ب} \times \frac{ج}{د}$ نستخدم القاعدة التالية :

$$\frac{أ}{ب} \times \frac{ج}{د} = \frac{أ \times ج}{ب \times د}$$

اضرب بسطي العددين وضع الناتج في البسط اضرب مقامي العددين وضع الناتج في المقام

مثال :

① $\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} = \frac{١ \times ٣}{٢ \times ٢} = \frac{٣}{٤}$ ② $\frac{٥}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٥ \times ٢}{٣ \times ٣} = \frac{١٠}{٩}$

③ $\frac{-٣}{٢} \times \frac{٣}{٥} = \frac{-٣ \times ٣}{٢ \times ٥} = \frac{-٩}{١٠}$ ④ $\frac{-٣}{٤} \times \frac{-٥}{٣} = \frac{-٣ \times -٥}{٤ \times ٣} = \frac{١٥}{١٢}$

⑤ $\frac{-٣}{٧} \times \frac{٤}{٢} = \frac{-١٢}{١٤}$

يكون حاصل ضرب عددين نسبيين موجباً إذا كان لهما نفس الإشارة
يكون حاصل ضرب عددين نسبيين سالباً إذا كانا مختلفين في الإشارة

قابلـــية القســمـة

مثال :

① ٨ ÷ ٢ = ٤   ② ١٢ ÷ ٢ = ٦   ③ ٢٦ ÷ ٢ = ١٣   ④ ١٥٠ ÷ ٢ = ٧٥

⑤ ١٠٠٠ ÷ ٢ = ٥٠٠   ⑥ ١٢٠٢ ÷ ٢ = ٦٠١

> ✍**لاحظ أن أي عدد يقبل القسمة على (٢) إذا كانت منزلة الآحاد فيه زوجية (٠ ، ٢ ، ٤ ، ، ٨،٦)**

مثال :

① ٦ ÷ ٣ = ٢   ② ١٢ ÷ ٣ = ٤   ③ ٢١ ÷ ٣ = ٧   ④ ٣٣ ÷ ٣ = ١١

⑤ ٥١ ÷ ٣ = ١٧   ⑥ ١٠٢ ÷ ٣ = ٣٤   ⑦ ١٢٠٦ ÷ ٣ = ٤٠٢   ⑧ ٧٣٦٢ ÷ ٣ = ٢٤٥٤

> ✍ **لاحظ أنه أي عدد يقبل القسمة على (٣) إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات العدد (٣) أي يقبل القسمة على ٣.**

مثال :

① ١٢ = ٢ + ١ = ٣   ② ٢١ = ١ + ٢ = ٣   ③ ٣٣ = ٣ + ٣ = ٦   ④ ٥١ = ١ + ٥ = ٦

⑤ ١٠٢ = ٢ + ٠ + ١ = ٣   ⑥ ١٢٠٦ = ٦ + ٠ + ٢ + ١ = ٩

⑦ ٧٣٦٢ = ٢ + ٦ + ٣ + ٧ = ١٨

مثال :

① ٥ ÷ ٥ = ١   ② ١٠ ÷ ٥ = ٢   ③ ١٥ ÷ ٥ = ٣   ④ ٢٥ ÷ ٥ = ٥   ⑤ ٥٥ ÷ ٥ = ١١

⑥ ١٠٥ ÷ ٥ = ٢١   ⑦ ١٠٠ ÷ ٥ = ٢٠

> ✍ **لاحظ انه أي عدد يقبل القسمة على (٥) إذا كان الرقم في منزلة الآحاد فيه صفراً أو خمسة**
> **و لاحظ انه أي عدد يقبل القسمة على (١٠) إذا كان العدد فيه في منزلة الآحاد يساوي صفراً**

مثال :

① ٨٠٠ ÷ ١٠ = ٨٠   ② ٧٠ ÷ ١٠ = ٧

قسمة الأعداد الصحيحة :

① $\frac{١٢٠}{١٠}$ = ١٢   ② $\frac{-٧}{-١}$ = ٧   ③ $\frac{-٣٢}{-٤}$ = ٨   ④ $\frac{-٤٠}{-٥}$ = ٨   ⑤ $\frac{٦٠}{-٥}$ = -١٢

مثال : أوجد ناتج

$\frac{-٦٠ \div ٥}{-٣٦ \div (-٩)}$ = $\frac{-١٢}{٤}$ = -٣

- ناتج قسمة عددين صحيحين لهما نفس الإشارة يكون موجباً
- ناتج قسمة عددين صحيحين مختلفين في الإشارة يكون سالباً

مثال :

① ـ ٢٧ ÷ ٣ = ـ ٩ ② ٣٥ ÷ ـ ٧ = ـ ٥

③ ٤٥ ÷ ٩ = ٥ ④ ـ ٤٥ ÷ ـ ٥ = ٩ .

ـ أ ÷ ـ ب = أ ÷ ب ـ أ ÷ ب = ـ (أ ÷ ب) أ ÷ ـ ب = ـ (أ ÷ ب)

٣ ٨ ٢ ٧ ١ ٦ ١

٢ | ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ٢

ـ ٦

١ ٦

ـ ١ ٦

٠ ٥

ـ ٤

١ ٤

ـ ١ ٤

٠ ٠ ٣

ـ ٢

١ ٢

ـ ١ ٢

٠ ٠ ٢

ـ ٢

٠

٢ ١ ٧

٢ ١ ٣ | ٤ ٦ ٣ ٢ ١

ـ ٤ ٢ ٦

٠ ٣ ٧ ٢

ـ ٢ ١ ٣

١ ٥ ٩ ١

ـ ١ ٤ ٩ ١

٠ ١ ٠ ٠

ناتج قسمة ٤٦٣٢١ على ٢١٣ هو ٢١٧ و الباقي ١٠٠

تدريب : جد ناتج ما يلي : ① ٦٢٥ ÷ ٥ ② ١٢٢٦ ÷ ٢ ③ ١٢٥٠ ÷ ١٠ ④ ٦٧٨٥٢ ÷ ٢ ⑤ ـ ٢٤٥٦٢٢ ÷ ٣ ⑥ ١٥٣٦٥ ÷ ٥ ⑦ ٥٦٧٦٢٣ ÷ ٣

$$\frac{١}{٣} \div ٢ = \frac{١}{٣} \div \frac{٢}{١} = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٦}$$

$$\frac{٧}{٣} \div ٤ = \frac{٧}{٣} \div \frac{٤}{١} = \frac{٧}{٣} \times \frac{١}{٤} = \frac{٧}{١٢}$$

لتقسيم كسر على عدد صحيح نقوم أولاً بتحويل العدد الصحيح إلى كسر وذلك بوضع مقام له يساوي (١) و من ثم نجري عملية القسمة التي تتحول إلى ضرب الكسر الأول بمقلوب الكسر الثاني .

إذا كان $\frac{أ}{ب} \div جـ$ عددين نسبيين جـ $\neq$ ٠ فإن :

$$\frac{أ}{ب} \div جـ = \frac{أ}{ب} \times \frac{١}{جـ} = \frac{أ \times ١}{ب \times جـ}$$

مثال :

$\frac{٧}{٥} \div ٥$ ⟸ أولاً نحول العدد ٥ إلى كسر و ذلك بوضع مقام له يساوي ١ ⟸ $\frac{٥}{١}$
ثم نقوم بترتيب العملية من جديد .

$\frac{٧}{٥} \div \frac{٥}{١}$ ⟸ هنا عملية القسمة تتحول عملية ضرب الكسر الأول بمقلوب الكسر الثاني

$$\frac{٧}{٥} \times \frac{١}{٥} = \frac{٧ \times ١}{٥ \times ٥} = \frac{٧}{٢٥}$$

مثال :

① $\frac{٣}{٤} \div ٨ = \frac{٣}{٤} \div \frac{٨}{١} \Leftarrow \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٨} = \frac{٣ \times ١}{٤ \times ٨} = \frac{٣}{٣٢}$

② $\frac{٧}{٩} \div ٦ = \frac{٧}{٩} \div \frac{٦}{١} \Leftarrow \frac{٧}{٩} \times \frac{١}{٦} = \frac{٧ \times ١}{٩ \times ٦} = \frac{٧}{٥٤}$

③ $\frac{٦}{٧} \div -٦ = \frac{٦}{٧} \times \frac{١}{-٦} = \frac{-١}{٧}$ ④ $\frac{-٨}{٥} \div ٣ = \frac{-٨}{٥} \times \frac{١}{٣} = \frac{-٨}{١٥}$

✍ باختصار : لتقسيم كسر على عدد صحيح نضرب الكسر بمقلوب العدد الصحيح

مثال :

① $\frac{٧}{٨} \div ٥ = \frac{٧}{٨} \times \frac{١}{٥} = \frac{٧}{٤٠}$ ② $\frac{٣}{١٣} \div ٢ = \frac{٣}{١٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢٦}$

قسمة عدد صحيح على كسر :

مثال :

$٨ \div \frac{١}{٢} = ٨ \times \frac{٢}{١} = ١٦$

لتقسيم عدد صحيح على كسر نضرب العدد الصحيح بمقلوب الكسر

مثال :

① $٣ \div \frac{٢}{٧} = ٣ \times \frac{٧}{٢} = \frac{٢١}{٢}$ ، أو $\frac{٣}{١} \div \frac{٢}{٧} = \frac{٣}{١} \times \frac{٧}{٢} = \frac{٣ \times ٧}{١ \times ٢} = \frac{٢١}{٢}$

② $٧ \div \frac{٦}{٥} = ٧ \times \frac{٥}{٦} = \frac{٣٥}{٦}$ ③ $٢٥ \div \frac{١}{٣} = ٢٥ \times \frac{٣}{١} = ٧٥$

قسمة كسر على كسر :

مثال :

$$\frac{١}{٣} \div \frac{٢}{٥} = \frac{١}{٣} \times \frac{٥}{٢} = \frac{١ \times ٥}{٣ \times ٢} = \frac{٥}{٦}$$

> ✍ لقسمة كسر على كسر يضرب الكسر الأول بمقلوب الكسر الثاني
> ✍ عملية القسمة تتحول إلى الضرب بمقلوب الكسر الثاني

مثال :

① $\frac{٣}{٧} \div \frac{٢}{٣} = \frac{٣}{٧} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٩}{١٤}$ ② $\frac{٥}{٢} \div \frac{٧}{٨} = \frac{٥}{٢} \times \frac{٨}{٧} = \frac{٤٠}{١٤}$

القسمة:

① $\frac{٤}{٥} \div \frac{٣}{٢} = \frac{٤}{٥} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٨}{١٥}$ ② $\frac{٧}{٨} \div \frac{٣}{٦} = \frac{٧}{٨} \times \frac{٦}{٣} = \frac{٤٢}{٢٤} = \frac{٧}{٤}$

> ✍ في عملية قسمة كسر عادي على كسر عادي تتحول العملية إلى ضرب الكسر الأول × مقلوب الكسر الثاني .

> ✍
> إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ عددين نسبيين جـ ≠ ٠ فإن :
>
> $$\frac{أ}{ب} \div \frac{جـ}{د} = \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{جـ} = \frac{أ \times د}{ب \times جـ}$$

انظر إلى المقسوم عليه ← جد مقلوب المقسوم عليه ← اضرب المقسوم بمقلوب المقسوم عليه

مثال :

أوجد ناتج : $\frac{٧}{١٠} \div \frac{٥}{١٦}$

① $\frac{٧}{١٠} \div \frac{٥}{١٦} = \frac{٧}{١٠} \times \frac{١٦}{٥} = \frac{١١٢}{٥٠} = \frac{٥٦}{٢٥}$ **التبسيط بالقسمة على ٢**

② $\frac{-١٠}{٧} \div \frac{-٥}{١٤} = \frac{-١٠}{٧} \times \frac{-١٤}{٥} = \frac{+١٤٠}{٣٥} = ٤$

> ✍ **في عملية القسمة (قسمة الكسور العادية) تتحول إلى الضرب في المقلوب**

أمثلة :

① $\frac{٣}{٩} \div \frac{٢}{٣} = \frac{٣}{٩} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٩}{١٨}$ ② $\frac{٢}{٣} \div \frac{-٤}{٥} = \frac{٢}{٣} \times \frac{-٥}{٤} = \frac{-١٠}{١٢}$

③ $\frac{-٤}{١٣} \div \frac{٣}{٢} = \frac{-٤}{١٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{-٨}{٣٩}$ ④ $\frac{-٣}{٧} \div \frac{-٢}{٥} = \frac{-٣}{٧} \times \frac{-٥}{٢} = \frac{١٥}{١٤}$

$- \div - = +$

$- \div + = -$

$+ \div - = -$

$+ \div + = +$

$\frac{-}{-} = +$ ، $\frac{-}{+} = -$ ، $\frac{+}{-} = -$ ، $\frac{+}{+} = +$

> ✍ **في حالة الكسور العادية إذا تشابهت الإشارات يكون الناتج موجب**
> ✍ **في حالة الكسور العادية إذا اختلفت الإشارات يكون الناتج سالباً**

أمثلة :

① $\frac{-٣}{٥} \div \frac{-٦}{٧} = \frac{-٣}{٥} \times \frac{٧}{-٦} = \frac{٢١}{٣٠}$ ② $\frac{-٢}{٥} \div \frac{٧}{٣} = \frac{-٢}{٥} \times \frac{٣}{٧} = \frac{-٦}{٣٥}$

✍ يكون ناتج قسمة عددين نسبيين موجباً إذا كان لهما الإشارة نفسها .

✍ يكون ناتج قسمة عددين نسبيين سالباً إذا كانا مختلفين في الإشارة .

✍ **خصائص العمليات على الأعداد النسبية :**

❶ الخاصية التبديلية : لأي عددين نسبيين $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ج}{د}$

$$\frac{أ}{ب} + \frac{ج}{د} = \frac{ج}{د} + \frac{أ}{ب} \quad ، \quad \frac{أ}{ب} \times \frac{ج}{د} = \frac{ج}{د} \times \frac{أ}{ب}$$

مثال :

① $\frac{٢}{١٥} + \frac{٩}{٣} = \frac{٢ + ٤٥}{١٥} = \frac{٤٧}{١٥}$ ② $\frac{٩}{٣} + \frac{٢}{١٥} = \frac{٤٥ + ٢}{١٥} = \frac{٤٧}{١٥}$

③ $\frac{-٣}{٨} \times \frac{٤}{٦} = \frac{-٣ \times ٤}{٨ \times ٦} = \frac{-١٢}{٤٨}$ ④ $\frac{٤}{٨} \times \frac{-٣}{٦} = \frac{٤ \times -٣}{٨ \times ٦} = \frac{-١٢}{٤٨}$

❷ الخاصية التجميعية : لأي ثلاث أعداد نسبية $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ج}{د}$ ، $\frac{هـ}{و}$

$$\left(\frac{أ}{ب} + \frac{ج}{د}\right) + \frac{هـ}{و} = \frac{أ}{ب} + \left(\frac{ج}{د} + \frac{هـ}{و}\right)$$

$$\left(\frac{أ}{ب} \times \frac{ج}{د}\right) \times \frac{هـ}{و} = \frac{أ}{ب} \times \left(\frac{ج}{د} \times \frac{هـ}{و}\right)$$

مثال :

$$\left(\frac{٢}{٣}+\frac{١}{٢}\right)+\frac{٣}{٤}=\frac{٢\times٢+١\times٣}{٣\times٢}+\frac{٣}{٤}=\frac{٧}{٦}+\frac{٣}{٤}=\frac{٧\times٤+٣\times٦}{٦\times٤}=\frac{٤٦}{٢٤}$$

توحيد مقامات

$$\frac{٢}{٣}+\left(\frac{١}{٢}+\frac{٣}{٤}\right)=\frac{٢}{٣}+\left(\frac{١\times٤+٢\times٣}{٢\times٤}\right)=\frac{٢}{٣}+\frac{١٠}{٨}$$

$$=\frac{٢\times٨+٣\times١٠}{٣\times٨}=\frac{٤٦}{٢٤}=\frac{٢٣}{١٢}$$

تمـــــــــــارين : جد ناتج ما يلي :

١) $\frac{١}{٦}+\frac{٣}{٧}$

٢) $٣\frac{١}{٧}-٢\frac{١}{٤}$

٣) $-٦\div\frac{٣}{٢}$

٤) $\frac{-١}{٨}\div١٧$

٥) $\frac{-٨}{١٤}\div\frac{-٢}{٨}$

٦) $\frac{٦}{٥}\div\frac{-٨}{٣}$

٧) $\frac{٥}{٣}\times\left(\frac{٢}{٥}+\frac{٦}{٧}\right)$

٨) $\frac{٢}{٣}+\left(\frac{٣}{٨}+\frac{٧}{٢}\right)$

ضرب الكسر العشري في ١٠ و ١٠٠ و ١٠٠٠:

مثال :

٠.٣٢٧ × ١٠ = ٣.٢٧ ، ٠.٣٧٢ × ١٠٠ = ٣٢.٧ ، ٠.٣٢٧ × ١٠٠٠ = ٣٢٧

① **عند ضرب كسر عشري في (١٠) تتحرك الفاصلة العشرية في الكسر العشري منزلة واحدة إلى جهة اليمين .**

② **عند ضرب كسر عشري في (١٠٠) تتحرك الفاصلة العشرية في الكسر العشري منزلتين إلى جهة اليمين .**

③ **عند ضرب كسر عشري في (١٠٠٠) تتحرك الفاصلة العشرية في الكسر العشري ثلاث منازل إلى جهة اليمين .**

> **بشكل عام :**
> **عند ضرب كسر عشري في ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، .....فإن الفاصلة العشرية تتحرك إلى اليمين بقدر عدد الأصفار المضروب فيه .**

مثال :

① ٠.٤٧٥ × ١٠ = ٤.٧٥
② ٠.٨٦٤ × ١٠٠ = ٨٦.٤
③ ٠.٣٥٤١ × ١٠٠٠ = ٣٥٤.١
④ ٥.٣٢٦ × ١٠ = ٥٣.٢٦
⑤ ٧.٣٤٥ × ١٠٠ = ٧٣٤.٥
⑥ ٩.٣٤٨٦ × ١٠٠٠ = ٩٣٤٨.٦

> **تدريب جد ناتج ما يلي :**
> ① ٠.٣٧ × ١٠
> ② ٢.٦٥٧ × ١٠٠
> ③ ٨.٦٣٢ × ١٠٠٠

ضرب الكسور العشرية بأعداد صحيحة:

$$٠.٧ \times ٣ = ٣ \times \frac{٧}{١٠} = \frac{٢١}{١٠} = ٢.١$$

$$٠.٣٢٠ \times ٤ = ٤ \times \frac{٣٢}{١٠٠} = \frac{١٢٨}{١٠٠} = ١.٢٨$$

$$٠.٤٦٥ \times ٢ = ٢ \times \frac{٤٦٥}{١٠٠٠} = \frac{٩٣٠}{١٠٠٠} = ٠.٩٣٠$$

> **تدريب : جد ناتج ما يلي :**
> ① ٠.٣ × ٢٩
> ② ٠.١٨ × ٨
> ③ ٠.١٩ × ٠.٠٣
> ④ ٠.٠٧ × ٠.٠٠٥

> **✍ يمكن تحويل الكسر العشري الى كسر عادي ثم اجراء عملية الضرب**

$$٢.٣٦٧ \times ٥ = \frac{٢٣٦٧}{١٠٠٠} \times ٥ = \frac{١١٨٣٥}{١٠٠٠} = ١١.٨٣٥$$

> ✍ لاحظ أنه لإجراء عملية ضرب كسر عشري في عدد صحيح نقوم بإجراء عملية الضرب بين عددين صحيحين (بدون فواصل عشرية) ويكون عدد المنازل العشرية في ناتج الضرب مساويا لعدد المنازل العشرية في الكسر العشري قبل الضرب .

مثال :

① $$٠.٦ \times ١٢ = \frac{٦}{١٠} \times ١٢ = \frac{٧٢}{١٠} = ٧.٢$$

② $$٠.٢٨ \times ٢ = \frac{٢٨}{١٠٠} \times \frac{٢}{١} = \frac{٥٦}{١٠٠} = ٠.٥٦$$

③ $$٠.٣٥٢ \times ٥ = \frac{٣٥٢}{١٠٠٠} \times \frac{٥}{١} = \frac{١٧٦٠}{١٠٠٠} = ١.٧٦$$

ضرب كسر عشرى فى كسر عشرى :

مثال :

① $$١.٣ \times ٠.٢ = \frac{١٣}{١٠} \times \frac{٢}{١٠} = \frac{٢٦}{١٠٠} = ٠.٢٦$$

② $$٣.٤ \times ٠.٣ = \frac{٣٤}{١٠} \times \frac{٣}{١٠} = \frac{١٠٢}{١٠٠} = ١.٠٢$$

③ $$١.٢٥ \times ٢.١ = \frac{١٢٥}{١٠٠} \times \frac{٢١}{١٠} = \frac{٢٦٢٥}{١٠٠٠} = ٢.٦٢٥$$

✍ لضرب كسرين عشريين في بعضهما نجري عملية الضرب بدون فواصل عشرية ونضع الفاصلة العشرية في الناتج بحيث يكون عدد المنازل العشريةفي الناتج مساويا لمجموع المنازل العشرية في العددين المضروبين قبل الضرب .

مثال :

① ١.١ × ٠.٢ = ١١/١٠ × ٢/١٠ = ٢٢/١٠٠ = ٠.٢٢

② ٤.٢٥ × ٠.٣ = ٤٢٥/١٠٠ × ٣/١٠ = ١٢٧٥/١٠٠٠ = ١.٢٧٥

③ ١.٣٢١ × ٠.٢ = ١٣٢١/١٠٠٠ × ٢/١٠ = ٢٦٤٢/١٠٠٠٠ = ٠.٢٦٤٢

④ ٠.٥ × ٠.٢ = ٥ × ٢ = ٠.١٠

لاحظ أن ناتج الضرب بدون فواصل = ٥ × ٢ = ١٠
ولاحظ أن هناك خانتان عشريتان على يمين الفاصلة قبل الضرب لذلك نضع الفاصلة في الناتج

⑤ ٠.١٢ × ٠.٠٤ = ١٢ × ٤ = ٠.٠٠٤٨

هنا خانتان على يمين الفاصلة

وهنا خانتان على يمين الفاصلة

مجموع الخانات على يمين الفاصلة هو ٤ خانات
٠.١٢ × ٠.٠٤ = ٠.٠٠٤٨

قسمة الكسور العشرية على ١٠ و ١٠٠ و ١٠٠٠

مثال :

① ٧٥.٦ ÷ ١٠ = ٧.٥٦ ② ٣٧٦.٨ ÷ ١٠٠ = ٣.٧٦٨

③ ٤٦٨٢١.٥ ÷ ١٠٠٠ = ٤٦.٨٢١٥

① عند قسمة كسر عشري على (١٠) تتحرك الفاصلة العشرية في الكسر العشري منزلة واحدة إلى جهة اليسار .

② عند قسمة كسر عشري على (١٠٠) تتحرك الفاصلة العشرية في الكسر العشري منزلتين إلى جهة اليسار .

③ عند قسمة كسر عشري على (١٠٠٠) تتحرك الفاصلة العشرية في الكسر العشري ثلاث منازل إلى جهة اليسار .

مثال :

١.٣٢ ÷ ١٠ = ٠.١٣٢ ، ٤.٣٢٥ ÷ ١٠٠ = ٠.٠٤٣٢٥

، ٠.٣٧٦ ÷ ١٠٠٠ = ٠.٠٠٠٣٧٦

✍ لاحظ في حالة عدم كفاية المنازل أثناء تحريك الفاصلة العشرية نضيف أصفاراً .

قسمة كسر عشري على عدد صحيح

$$4.2 \div 7 = \frac{42}{10} \div \frac{7}{1} = \frac{42}{10} \times \frac{1}{7} = \frac{42}{70} = 0.60$$

٧٢.٦ ÷ ٦ = ١٢.١

```
 ٦ | ٧ ٢ , ٦
     ٦ ٠
    ------
     ١ ٢
     ١ ٢ -
    ------
     ٠ ٠ ٦
         ٦ -
    ------
         ٠
```

✍ نجري عملية القسمة الطويلة ، وعند الوصول إلى الفاصلة العشرية ترفع إلى الناتج ونكمل عملية القسمة.

<u>قسمة عدد صحيح على كسر عشري :</u>

<u>مثال :</u>

٢٨ ÷ ٠.٤ = ٢٨٠ ÷ ٤ = ٧٠ ، ٣٢٠ ÷ ٠.١٢ = ٣٢٠٠٠ ÷ ٨ = ٤٠٠٠

٧٢٠ ÷ ٠.١٢ = ٧٢٠٠٠ ÷ ١٢ = ٦٠٠٠

> ✍ **عند قسمة عدد صحيح على كسر عشري ، نضرب المقسوم و المقسوم عليه في (١٠) (١٠٠) (١٠٠٠) بحيث يتحول المقسوم عليه إلى عدد صحيح ونجري عملية القسمة كما في الأعداد الصحيحة.**

<u>مثال :</u>

٣٤ ÷ ٠.١٧ = ٣٤٠٠ ÷ ١٧ = ٢٠٠

٣٦ ÷ ٠.١٨ = ٣٦٠٠ ÷ ١٨ = ٢٠٠

٤٠٠ ÷ ٠.٠٠٢ = ٤٠٠٠٠٠ ÷ ٢ = ٢٠٠٠٠٠

> ✍ **لا يجوز أن يكون المقسوم عليه كسر عشري لذلك يجب تحويله إلى عدد صحيح ثم إكمال عملية القسمة .**

<u>قسمة كسر عشري على كسر عشري :</u>

① ٣.٤ ÷ ٠.٢ = ٣٤ ÷ ٢ = ١٧ ② ٠.١٢٥ ÷ ٠.٠٥ = ١٢.٥ ÷ ٥ = ٢.٥

③ ٠.٠٦٢٥ ÷ ٠.٠٠٥ = ٦٢.٥ ÷ ٥ = ١٢.٥ .

> ✍ **عند قسمة كسر عشري على كسر عشري يجب تحويل المقسوم عليه إلى كسر عادي وذلك بتحريك الفاصلة إلى اليمين ليصبح المقسوم عليه عدد صحيح و انتبه أيضاً الى تحرك الفاصلة في البسط بعدد المنازل التي حركت في المقام .**

<u>مثال :</u>

٣.٦ ÷ ٠.٢ ⇐ ٣.٦ تسمى المقسوم ، ٠.٢ تسمى المقسوم عليه

① لذلك يتوجب تحريك الفاصلة العشرية في المقسوم عليه منزلة واحدة إلى اليمين ليصبح العدد صحيحاً وأيضاً تحريكها من البسط خانة واحدة . ⇐ ٣٦ ÷ ٢ = ١٨ .

② ٠.١٢٥ ÷ ٠.٠٥ ⇐ نحرك الفاصلة من المقسوم علية منزلتين إلى اليمين ليصبح صحيحاً وكذلك نحركها منزلتين من البسط .⇐ ١٢.٥ ÷ ٥ = ٢.٥ .

<u>تمارين إضافية :</u>

جد ناتج العمليات التالية .

① $\frac{٦}{١٧} \times \frac{٣}{٨} \times \frac{٢}{٧}$ ② $٥ \times \frac{٣}{٧} \times \frac{١}{٥} \times ٥$ ③ $٦ \div \frac{١٣}{٥}$

④ $\frac{٢٣}{٢١} \div \frac{٢}{٧}$ ⑤ $٥\frac{٦}{١١} \div ٣\frac{١}{٢}$ ⑥ $\frac{١٠١}{٢} \div ٥٥$

⑦ ٢٤.٦٣٢ + ١.٣٦٧ + ٧.٦٥١ ⑧ ١٠٠.٦٣٦ − ٧.٢١٤ − ٣.٠٠٢

⑨ ٧.٣٥٨ × ٦.٦٠٥ ⑩ ٣.٦٣٨ × ٤.٦٥٣

⓫ ١.٣٨٩١ ÷ ٠.٦٥٣٢

⓬ ٢٤.٢٢ ÷ ٠.٠٠٢

⓭ ٤٦٢٣٥.٦٣١٥ ÷ ٠.٠٠٠٠٠٥٠

① **<u>تحويل الكسور العادية إلى كسور عشرية</u> :**

<u>مثال</u> : حول الكسر العادي $\frac{٣}{٤}$ إلى كسر عشري

الحل : تقسم البسط ٣ على المقام ٤ فينتج $\frac{٣}{٤} = ٠.٧٥$

<u>مثال</u>:حول الكسر العادي $\frac{١}{٣}$ إلى كسر عشري

نستخدم القسمة الطويلة فينتج أن $\frac{١}{٣} = ٠.٣٣٣ \Leftarrow ٠.\overline{٣}$

يسمى كسر عشري دوري .

> ✍ **نلاحظ من المثالين السابقين أنه عند تحويل كسر عادي إلى كسر عشري باستخدام عملية القسمة فإما أن تنتهي عملية القسمة بأن يصبح الباقي صفرا وهنا يسمى الكسر العشري الناتج كسرا عشريا منتهيا ، و إما أن تستمر عملية القسمة بحيث يتكرر في ناتج القسمة رقم أو أكثر بصورة دورية غير منتهية وفي هذه الحالة يسمى الكسر العشري الناتج كسرا عشريا دوريا .**

② **<u>تحويل الكسر العشري إلى كسر عادي</u> :**

<u>مثال</u> : حول الكسر العشري ٢.٤ إلى كسر عادي

الحل: $٢.٤ = ٢\frac{٤}{١٠} = \frac{٢٤}{١٠} = \frac{١٢}{٥}$

<u>مثال</u>: حول الكسر العشري ٣.٣٢ إلى كسر عادي

الحل : $٣.٣٢ = ٣\frac{٣٢}{١٠٠} = \frac{٣٣٢}{١٠٠}$

<u>مثال</u> : حول الكسر العشري الدوري $٠.\overline{٥}$ إلى كسر عادي

الحل : نفرض أن س = $٠.\overline{٥}$ = ٠.٥٥٥٥٥٥٥٥٥ .... (١)
نلاحظ أن عدد الأرقام الدورية في الكسر العشري الدوري رقم واحد لذلك نضرب طرفي المعادلة في ١٠ فنحصل على :
١٠ س = ٥.٥٥٥٥.................. (٢)
نطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية فنحصل على :

٩ س = ٥ ⇐ س = $\frac{٥}{٩}$

<u>مثال</u> : حول الكسر العشري الدوري $٠.\overline{٢٣}$ إلى كسر عادي :

الحل : نفرض أن س = $٠.\overline{٢٣}$ = ٠.٢٣٢٣٢٣٢٣٠٠٠٠٠ .... (١)
نضرب طرفي المعادلة في ١٠٠ فنحصل على ⇐ ١٠٠ س = ٢٣.٢٣٢٣٢٣٠٠٠٠٠.......... (٢)
نطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية فنحصل على :

٩٩ س = ٢٣ ⇐ س = $\frac{٢٣}{٩٩}$

<u>مثال</u> : حول الكسر العشري $٢.١\overline{٦}$ إلى كسر عادي :

الحل : نفرض س = $٢.١\overline{٦}$ = ٢.١٦٦٦٦ .... (١)
لاحظ أن عدد الأرقام الدورية في الكسر العشري الدوري رقم واحد لذلك نضرب طرفي المعادلة في ١٠ فنحصل على :
١٠ س = ٢١.٦٦٦٦٦ .... (٢)
نطرح المعادلة الأولى من الثانية فنحصل على :

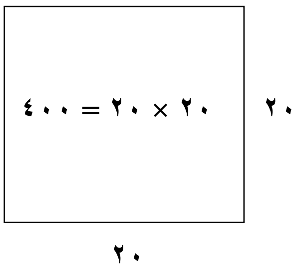
٩ س = ١٩.٥ أي أن س = $\frac{١٩.٥}{٩}$ ⇐ = $\frac{١٩٥}{٩٠}$ ⇐ = $\frac{١٣}{٦}$

> ✍ نلاحظ أنه لتحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر عادي نتبع الخطوات التالية:
> ① نفرض أن العدد المراد تحويله = س لنحصل على معادلة .
> ② نضرب طرفي المعادلة في ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، (قوى العدد) حسب عدد الأرقام الدورية في العدد العشري المفروض فنحصل على معادلة ثانية .
> ③ نطرح المعادلتين من بعضهما فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى في س ومنها نجد قيمة س التي تمثل الكسر العشري ، بصورة كسر عادي

③ **<u>الجذر التربيعي</u> :**

تعلم أن مساحة المربع تساوي مربع ضلعه .
فكيف نجد طول ضلع المربع إذا عرفت مساحته ؟

<u>مثال</u> :
إذا كانت لديك قطعة أرض مربعة الشكل مساحتها ٤٠٠ م^{٢} ، كما في الشكل المجاور فكم طول ضلعها ؟



الحل : إن طول ضلع قطعة الأرض يساوي ٢٠ م
ويسمى العدد ٢٠ الجذر التربيعي للعدد ٤٠٠

ويكتب $\sqrt{٤٠٠}$ = ٢٠ .

<u>بصورة عامة</u> :
إذا كانت س = ص^{٢} فإن ص = $\sqrt{س}$

<u>مثال</u> : س = ٦٤ ⇐ $\sqrt{س}$ = ٨

<u>مثال</u> : س^{٢} = ٩٦١ ⇐ س = ٣١ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين .

<u>العمليات على الأعداد الحقيقية و الجذور التربيعية</u>

$\sqrt{١}$ = ١ ، $\sqrt{٤}$ = ٢ ، $\sqrt{٩}$ = ٣ ، ......

ولحساب $\sqrt{٢٥ \times ١٦}$ = $\sqrt{٥^{٢} \times ٤^{٢}}$ = ٥ × ٤

و كذلك $\sqrt{٢٥}$ × $\sqrt{١٦}$ = ٥ × ٤

أي أن $\sqrt{٢٥ \times ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ × $\sqrt{١٦}$

<u>بصورة عامة</u> :
إذا كانت س ، ص عددين صحيحين موجبين فإن :

$\sqrt{س \times ص}$ = $\sqrt{س}$ × $\sqrt{ص}$

<u>مثال</u> : اكتب ناتج $\sqrt{٦٢٥ \times ١٠٠}$ في ابسط صورة

الحل :

$\sqrt{٦٢٥ \times ١٠٠} = \sqrt{٦٢٥} \times \sqrt{١٠٠} = ٢٥ \times ١٠ = ٢٥٠$.

<u>مثال</u> : جد قيمة $\sqrt{٨} \times \sqrt{٢}$ و اكتبها في ابسط صورة .

الحل:

$\sqrt{٨} \times \sqrt{٢} = \sqrt{٨ \times ٢} = \sqrt{١٦} = ٤$

<u>مثال</u> : جد قيمة $\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}$ و اكتبها في ابسط صورة .

$\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = \sqrt{٣ \times ٣} = \sqrt{٩} = ٣$.

> ✍
>
> **إذا كان س > ٠ ، فإن $\sqrt{س} \times \sqrt{س} = (\sqrt{س})^{٢} =$ س**
>
> **أي أن مربع الجذر التربيعي للعدد الموجب يساوي العدد نفسه .**

<u>مثال</u> : اكتب ناتج $\sqrt{٨} + \sqrt{٢}$ في ابسط صورة .

الحل :

$= \sqrt{٤ \times ٢} + \sqrt{٢} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٢} + \sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢} + \sqrt{٢}$

$= ٣\sqrt{٢}$

<u>مثال</u> : جد قيمة $\sqrt{١٨} - \sqrt{٨}$ و اكتبها في ابسط صورة .

الحل :

$= \sqrt{٩ \times ٢} - \sqrt{٤ \times ٢} = ٣\sqrt{٢} - ٢\sqrt{٢} = \sqrt{٢}$

<u>خصائص العمليات على الأعداد الحقيقية :</u>

٧ + ٥ = ١٢ كذلك ٥ + ٧ = ١٢ أي أن ٧ + ٥ = ٥ + ٧

✍ **بصورة عامة إذا كان س ، ص عددين حقيقيين فإن س+ ص = ص + س**
وتسمى هذه بخاصية التبديل بالنسبة إلى عملية الجمع

٦ + (٤ + ٥) = ٦ + ٩ = ١٥ و كذلك (٦ + ٤) + ٥ = ١٠ + ٥ = ١٥

✍ بصورة عامة إذا كان س ، ص ، ع ثلاث أعداد حقيقية فإن

(س + ص) + ع = س + (ص + ع)

وتسمى هذه الخاصية خاصية التجميع بالنسبة إلى عملية الجمع .

✍ ٥ × ٦ = ٣٠ كذلك ٦ × ٥ = ٣٠ أي أن ٥ × ٦ = ٦ × ٥

√٣ × √٦ = √١٨ = ٣ √٢

√٦ × √٣ = √١٨ = ٣ √٢

أي أن

√٣ × √٦ = √٦ × √٣

> ✍ بصورة عامة :
> لأي عددين حقيقيين س ، ص فإن س × ص = ص × س وتسمى خاصية التبديل بالنسبة إلى عملية الضرب

مثال : ٣ × (٥ × -٢) = ٣ × -١٠ = -٣٠

(٣ × ٥) × -٢ = ١٥ × -٢ = -٣٠

أي أن ٣ × (٥ × -٢) = (٣ × ٥) × -٢

> ✍ بصورة عامة :
> إذا كان أ ، ب ، جـ أي ثلاثة أعداد حقيقية فإن
> (أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ) و تسمى خاصية التجميع بالنسبة إلى عملية الضرب

<u>مثال</u> : تعلم انه لأي عدد صحيح مثل ٢ يوجد عدد نسبي $\frac{١}{٢}$ يسمى مقلوب العدد ٢ بحيث أن

$٢ \times \frac{١}{٢} = ١$ وكذلك علمت أن مقلوب $\frac{-٣}{٥}$ هو $\frac{-٥}{٣}$ لأن $\frac{-٣}{٥} \times \frac{-٥}{٣} = ١$

> ✍ **بصورة عامة : لأي عدد حقيقي ع يختلف عن الصفر يوجد عدد حقيقي**
> **$\frac{١}{ع}$ يسمى مقلوب العدد ع و يحقق العلاقة $ع \times \frac{١}{ع} = ١$**

تعلم أنه $\sqrt{٣}\,(\sqrt{٣} + \sqrt{١٢})$

$= \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} + \sqrt{٣} \times \sqrt{١٢}$

$= ٣ + \sqrt{٣} \times \sqrt{٤ \times ٣}$

$= ٣ + \sqrt{٣} \times ٢\sqrt{٣} = ٣ + ٢ \times ٣ = ٣ + ٦ = ٩$.

> ✍ **بصورة عامة :**
> **لأي ثلاث أعداد حقيقية س ، ص ، ع فإن**
> **س (ص + ع) = س × ص + س × ع ويسمى قانون توزيع الضرب على الجمع**

<u>تمـــــــــــــــــارين :</u>

١) حول الكسور العادية التالية إلى كسور عشرية

أ) $\frac{٥١}{١٠}$ ب) $\frac{٢٥}{٣}$ جـ) $\frac{٦}{٥}$ د) $\frac{٣٣}{٩٩}$

٢) حول الكسور العشرية التالية إلى كسور عادية :

أ) ٢.٦ ب) $٠.\overline{١}$ جـ) $٢.\overline{٨}$ د) $٠.\overline{٣٨}$

٣) جد الجذر التربيعي لكل من الأعداد التالية :

أ) ٠.٣٦ ب) ١٦٠ جـ) ٤٤١ د) ٠.٤٩

٤) جد قيمة كل مما يلي :

أ) $\frac{٣}{٧} \times ٠.٤٩$ ب) $\sqrt{١٢} + \sqrt{٣}$ جـ) $\sqrt{١٤} \times \sqrt{٥٢}$

د) $\frac{\sqrt{٣٦٣}}{\sqrt{٣}} = ١١$ هـ) $\frac{\sqrt{٢٠٠}}{\sqrt{٢}} = ١٠$

٥) جد قيمة كل مما يلي و اكتبها في ابسط صورة .

أ) $(\sqrt{٧} - \sqrt{٥})(\sqrt{٧} + \sqrt{٥})$ ب) $\sqrt{١٤} \times \frac{١}{\sqrt{٧}}$

د) $\sqrt{٢٤٢} - ١٠\sqrt{٢}$

✍ لاحظ أن $٢^{٣} = ٢ \times ٢ \times ٢$ وهو حاصل ضرب العدد ٢ في نفسه ثلاث مرات
نسمي ٢ الأساس و نسمي ٣ الأس ويقرأ
$٢^{٣}$: ٢ أس ٣ أو القوة الثالثة للعدد ٢ ⇐ $٢^{٣} = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$.

> ✍ **بصورة عامة :**
>
> إذا كان أ عدداً حقيقياً وكان ن عدداً صحيحا موجبا فإن :
> $أ^{ن} = أ \times أ \times أ$ .... أ (ن من المرات) ويقرأ (أ أس ن)

مثال: بين أن $٢^{٣} \times ٢^{٤} = ٢^{٧}$

الحل : $٢^{٣} = ٢ \times ٢ \times ٢$ ، $٢^{٤} = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢$

⇐ $٢^{٣} \times ٢^{٤} = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^{٧}$.

> ✍ **بصورة عامة :**
> إذا كان أ عدداً حقيقياً وكان ن ، م أي عددين صحيحين موجبين فإن:
>
> $أ^{ن} \times أ^{م} = أ^{ن+م}$
>
> الأسس في حالة الضرب تجمع

مثال : بين أن $(٥^{٢})^{٣} = ٥^{٢ \times ٣}$

الحل:

$(٥^{٢})^{٣} = (٥ \times ٥)^{٣} \Leftarrow = (٥ \times ٥) \times (٥ \times ٥) \times (٥ \times ٥)$

⇐ $٥^{٦} = ٥^{٢ \times ٣}$ ⇐ لاحظ أن $(٥^{٢})^{٣} = ٥^{٢ \times ٣}$

مثال : بين أن $(٢ \times ٣)^{٤} = ٢^{٤} \times ٣^{٤}$

الحل :

$(٢ \times ٣)^{٤} = (٢ \times ٣) \times (٢ \times ٣) \times (٢ \times ٣) \times (٢ \times ٣)$

⇐ $= (٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢) \times (٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣) \Leftarrow = ٢^{٤} \times ٣^{٣}$

لاحظ أن $(٢ \times ٣)^{٤} = ٢^{٤} \times ٣^{٣}$

> ✍ **قاعـــدة:**
> إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين و كان ن عدداً صحيحا موجبا فإن :
>
> $(أ \times ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$

<u>مثال</u> : جد قيمة س التي تحقق المعادلة $٣^{س} = ٨١$

الحل : $٣^{س} = ٨١ \Leftarrow ٣^{س} = ٣^{٤} \Leftarrow س = ٤$

> ✍ **<u>قاعـدة:</u>**
> **لأي عدد حقيقي موجب أ (باستثناء العدد ١) إذا كان**
> $أ^{س} = أ^{ن}$ **فإن س = ن**
> **إذا كانت الأساسات متساوية فإن الأسس متساوية**

<u>مثال</u> : بين أن $\frac{٣^{٦}}{٣^{٢}} = ٣^{٤}$

الحل : $\frac{٣^{٦}}{٣^{٢}} = \frac{\cancel{٣} \times \cancel{٣} \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣}{\cancel{٣} \times \cancel{٣}} = ٣^{٤}$

لاحظ أن $٤ = ٦ - ٢ \Leftarrow \frac{٢^{٧}}{٢^{٤}} = ٢^{٧-٤} = ٢^{٣}$

> ✍ **<u>قاعـدة:</u>**
> **إذا كان أ عددا حقيقيا (غير الصفر) فإن** $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$
> **الأسس في حالة القسمة تطرح**

<u>مثال</u> : بسط المقدار $\frac{٢^{٤}}{٢^{٧}}$

$\Leftarrow \frac{٢^{٤}}{٢^{٧}} = \frac{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢}{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢} = \frac{١}{٢^{٣}}$

قاعدة : لأي عدد أ $\neq$ ٠ فإن $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$

$٢^{-٥} = \frac{١}{٢^{٥}}$ ، $٨^{-٣} = \frac{١}{٨^{٣}}$

<u>مثال</u> : ماذا يحصل للمقدار $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}}$ **، عندما م = ن ؟**

لتدرس $\frac{٢^{٣}}{٢^{٣}} = \frac{٢ \times ٢ \times ٢}{٢ \times ٢ \times ٢} = \Leftarrow ٢^{٣-٣} = ٢^{٠} = ١$

قاعدة إذا كان أ $\neq$ ٠ فإن $أ^{٠} = ١$ (أي عدد مرفوع للأس (القوة) صفر = ١

<u>ملخص للقوانين التي دُرِست حول الأسس الصحيحة :</u>

① $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$ ② $(أ^{ن})^{م} = أ^{ن \times م}$ ③ $(أ \times ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$

④ $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$ ، أ $\neq$ ٠ ، **حيث م ، ن عددان صحيحان**

⑤ $(أ^{-ن}) = \frac{١}{أ^{ن}}$ ، أ $\neq$ ٠

<u>مثال</u> : حول العدد $\sqrt{٢}$ إلى صورة آسية

الحل :

لإجراء ذلك نتبع القاعدة

مقام الأس ⟵ $\sqrt[ن]{س^{م}}$ ⟵ بسط الأس = $س^{\frac{م}{ن}}$

⟸ $\sqrt{٢} = ٢^{\frac{١}{٢}}$ = ٢ ، $\sqrt[٤]{٥^{٩}} = ٥^{\frac{٩}{٤}}$

أيضاً $(٣)^{\frac{٣}{٢}} = \sqrt{٣^{٣}} = \sqrt{٢٧}$

$س^{\frac{م}{ن}}$ ⟵ أس ما داخل الجذر
⟵ دليل الجذر = $\sqrt[ن]{س^{م}}$

✍ قاعدة : إذا كان س عدداً حقيقيا موجبا و (ن) عددا صحيحا أكبر من ١ فإن

$س^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{س}$ ، ن ≠ ٠

⟸ مجال الجذور الزوجية هو الأعداد الموجبة فقط ن يعني يجب أن يكون ما داخل الجذر الزوجي عدد موجب أكبر من صفر

عدد زوجي ⟵ ن $\sqrt{}$ يجب أن يكون عددا موجبا أكبر أو يساوي صفر

✍إذا كانت (ن) عددا فرديا فإنه يمكن إيجاد $\sqrt[ن]{أ}$ لأي عدد حقيقي بينما مجال الجذور الفردية هو جميع الأعداد الحقيقية السالبة و الموجبة

$\sqrt[٣]{٨} = ٢$ ، $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$

<u>تمــارين :</u>

① **جد قيمة كل مما يلي :**

أ) $٦^{٢+٣}$ ب) $(\sqrt{٧})^{٢}$ ج) $(\sqrt{٥^{-٢}})^{٢}$ د) $(٢ \times ٣)^{٣}$

② **حلّ المعادلة التالية** $٤^{س} = ٦٤$

③ **حل المعادلة التالية** $٣^{س} \times ٣^{٣س} = ٨١$

④ **جد قيمة كل مما يلي :**

أ) $٥^{-٤}$ ب) $(٣^{-٢})^{-٤}$ ج) $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}}$ د) $١٢٥^{\frac{١}{٣}}$

مثال :

حلل الأعداد ٨ ، ٢٤ إلي عواملها الأولية

$٨ = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^{٣}$

$٢٤ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٣ = ٢^{٣} \times ٣^{١}$

٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

٢٤	٢
١٢	٢
٦	٢
٣	٣
١	

مثال : اكتب حاصل ضرب العددين ١٦ ، ٧٢ كحاصل ضرب عواملهما الأولية

٧٢	٢
٣٦	٢
١٨	٣
٩	٣
٣	٣
١	

$١٦ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^{٤}$

$٧٢ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٣ \times ٣ = ٢^{٣} \times ٣^{٢}$

$\Leftarrow ١٦ \times ٧٢ = ٢^{٤} \times ٢^{٣} \times ٣^{٢}$

$\Leftarrow ٢^{٤+٣} \times ٣^{٢} = ٢^{٧} \times ٣^{٢}$

إذن حاصل الضرب هو $= ٢^{٧} \times ٣^{٢}$.

✍ **لضرب أي عددين صحيحين كتبا على صورة قوى ولهما الأساس نفسه فإننا نجمع الأسس أي $\Leftarrow أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$**

✍ **عوامل العدد هي : أعداد صحيحة تقسم على ذلك العدد .**

مثال :

① **جد عوامل العدد ١٢ .**

نريد إيجاد الأعداد التي إذا قمنا بقسمة ١٢ على تلك الأعداد يكون الباقي صفرا

⇐ ١٢ ÷ العدد = صفر

⇐ عوامل العدد ١٢ هي (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٢) .

② **جد عومل العدد ٢٧ .**

⇐ عوامل العدد ٢٧ هي (١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧)

③ **جد عوامل العدد ٢٤ .**

⇐ عوامل العدد ٢٤ هي (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٢ ، ٢٤)

مضاعفات العدد هي : أعداد صحيحة تقبل القسمة على ذلك العدد و هي أيضا ناتج ضرب العدد فى الأعداد الطبيعية .

مثال : جد مضاعفات الأعداد التالية :

٢×١ ٢×٢ ٢×٣ ٢×٤ ٢×٥ ٢×٦ .....

① ٢ = (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ....

٣×١ ٣×٢ ٣×٣ ٣×٤ ٣×٥ ٣×٦

② ٣ = (٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨ ....

③ ٤ = (٤ ، ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ٢٠ ، ٢٤ ....

④ ٥ = (٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ....

⑤ ٦ = (٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٤ ، ٣٠ ، ٣٦ ، ٤٢ ....

الأعداد الأولية : هي الأعداد التي لا تقبل القسمة إلا على نفسها و الواحد .

مثال : (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٣١ ، ٣٧ ، ٤١ ، ٤٣)

الأعداد غير الأولية هي الأعداد التي يكون لهما قواسم غير الواحد ونفسها .

مثال : ٤ تقبل القسمة على ١ ، ٢ ، ٤ ....

١٨ تقبل القسمة على ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٨ ....

القاسم المشترك الأكبر

القاسم المشترك الأكبر هو أصغر قوى العامل (العوامل) المشترك بين العددين .

مثال :

جد القاسم المشترك الأكبر للعددين ٤٠ ، ٣٢

الحل : يمكن إيجاد القاسم المشترك الأكبر (ق .م.أ) للعددين ٤٠ ، ٣٢ بتحليل كل منهما إلى عوامله الأولية :

٤٠ = ٢ × ٢ × ٢ × ٥ = $٢^{٣}$ × ٥

٣٢ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = $٢^{٥}$

نأخذ العوامل المشتركة فقط

⇐ ق . م . أ (٤٠ ، ٣٢) = ٢ × ٢ × ٢ = $٢^{٣}$ = ٨

مثال : جد القاسم المشترك الأكبر للعددين ١٠ ، ٢١ .

١٠ = $٢^{١}$ × $٥^{١}$ } ، بما انه لا يوجد عامل مشترك أكبر من واحد (١)

٢١ = $٣^{١}$ × $٧^{١}$ } في تحليل العددين فإن القاسم المشترك الأكبر = ١

<u>مثال</u> : جد القاسم المشترك الأكبر للعددين ٢٥ ، ٣٠

٢٥ = ٥ × ٥

٣٠ = ٥ × ٢ × ٣ ، القاسم المشترك الأكبر (ق . م . أ) = ٥

> **<u>المضاعف المشترك الأصغر</u>**
> **المضاعف المشترك الأصغر : هو أكبر قوى العامل (العوامل) المشترك مضروبا في القوى غير المشتركة.**

<u>مثال</u> : جد المضاعف المشترك الأصغر للعددين ٢٤ ، ٦٠

الحل :

٢٤ = ٢ × ٢ × ٢ × ٣ = ٢^{٣} × ٣^{١}

٦٠ = ٢ × ٢ × ٣ × ٥ = ٢^{٢} × ٣^{١} × ٥^{١} = م.م.أ = ٢^{٣} × ٣^{١} × ٥^{١}

✍ كل عنصرين مشتركين تأخذ منهم واحد فقط و العناصر غير المشتركة تؤخذ كاملة .

<u>مثال</u> : جد المضاعف المشترك الأصغر للعددين ٣٠ ، ٢٥

٣٠ = ٥ × ٢ × ٣ ، ٢٥ = ٥ × ٥

م . م . أ = ٥ × ٢ × ٣ × ٥ = ١٥٠

مثال : جد المضاعف المشترك الأصغر للأعداد ٣٠ ، ٧٥ ، ١٢٠ .

٣٠ = ٢ × ٣ × ٥ ، ٧٥ = ٣ × ٥ × ٥ ، ١٢٠ = ٢ × ٢ × ٢ × ٣ × ٥

م . م . أ = ٢^{٣} × ٥^{٢} × ٣^{١} = ٨ × ٢٥ × ٣ = ٦٠٠ .

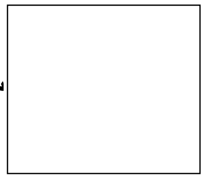
<u>مربع العدد و الجذر التربيعي لمربع كامل</u>

×	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
١	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
٢	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨	٢٠	٢٢	٢٤
٣	٣	٦	٩	١٢	١٥	١٨	٢١	٢٤	٢٧	٣٠	٣٣	٣٦
٤	٤	٨	١٢	١٦	٢٠	٢٤	٢٨	٣٢	٣٦	٤٠	٤٤	٤٨
٥	٥	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	٤٠	٤٥	٥٠	٥٥	٦٠
٦	٦	١٢	١٨	٢٤	٣٠	٣٦	٤٢	٤٨	٥٤	٦٠	٦٦	٧٢
٧	٧	١٤	٢١	٢٨	٣٥	٤٢	٤٩	٥٦	٦٣	٧٠	٧٧	٨٤
٨	٨	١٦	٢٤	٣٢	٤٠	٤٨	٥٦	٦٤	٧٢	٨٠	٨٨	٩٦
٩	٩	١٨	٢٧	٣٦	٤٥	٥٤	٦٣	٧٢	٨١	٩٠	٩٩	١٠٨
١٠	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠	١٠٠	١١٠	١٢٠
١١	١١	٢٢	٣٣	٤٤	٥٥	٦٦	٧٧	٨٨	٩٩	١١٠	١٢١	١٣٢
١٢	١٢	٢٤	٣٦	٤٨	٦٠	٧٢	٨٤	٩٦	١٠٨	١٢٠	١٣٢	١٤٤

✍ ١ × ١ = ١	٣ × ٣ = ٩	٥ × ٥ = ٢٥	٧ × ٧ = ٤٩
٢ × ٢ = ٤	٤ × ٤ = ١٦	٦ × ٦ = ٣٦	٨ × ٨ = ٦٤

⇐ لاحظ أن مربع العدد الناتج من حاصل ضرب العدد في نفسه .

<u>مثال</u> : إذا علمت أن مساحة المربع التالي = ٦٤ سم^{٢} ، أوجد طول ضلعه س


س

⇐ مساحة المربع = مربع ضلعه
لو فرضنا طول ضلع المربع = س
⇐ س ^{٢} = ٦٤ لإيجاد طول الضلع ناخذ الجذر التربيعي للطرفين
⇐ س = $\sqrt{٦٤}$ ⇐ س = ٨ سم

✍ الجذر التربيعي للعدد هو ذلك العدد الذي إذا ضرب بنفسه يكون ناتج الضرب العدد الأصلي .

⇐ إن الأعداد ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٦٤ ، ٨١ ، ١٠٠ ، ١٢١ ، ١٤٤ ، ١٦٩ ، ١٩٦ ، ٢٢٥ ، ٢٥٦ ، ٢٨٩ ، ٣٢٤ ، ٣٦١ ، ٤٠٠

تسمى مربعات كاملة لأن الجذر التربيعي لكل منها عدد صحيح ، أما العدد الذي لا يكون جذره التربيعي عددا صحيحا مثل : ١٠ ، ٥ ، ٧ ، .... فإنه لا يكون مربعاً كاملا .
و لإيجاد الجذر التربيعي للأعداد المربعة نحللها إلى عواملها الأولية .

<u>مثال</u> : أوجد الجذر التربيعي للعدد ٢٥٦

⇐ نحلل العدد ٢٥٦ إلى عوامله الأولية فنجد أن

٢٥٦	٢
١٢٨	٢
٦٤	٢
٣٢	٢
١٦	٢
٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

⇐ $\sqrt{٢٥٦}$ = $\sqrt{٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢}$

ونقوم بأخذ عامل واحد من كل عاملين متشابهين ونضربهم في بعض

⇐ $\sqrt{٢٥٦}$ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = ١٦

$\sqrt{٢٥٦}$ = ١٦

<u>مثال</u>: أوجد الجذر التربيعي للعدد ١٩٦

١٩٦	٢
٩٨	٢
٤٩	٧
٧	٧
١	

$\sqrt{١٩٦}$ = $\sqrt{٢ × ٢ × ٧ × ٧}$ ⇐ ٢ × ٧ = ١٤

$\sqrt{١٩٦}$ = ١٤

> ✍ جوهر عملية إيجاد الجذر التربيعي تتمثل في أخذ عاملا واحدا من كل عاملين متساويين و من ثم ضربهم ببعض. ١ – نكتب العدد على صورة حاصل ضرب عوامله الأولية
> ٢ – نأخذ من كل عاملين متساويين أحدهما ، ونجد حاصل الضرب .

مكعب العدد و الجذر التكعيبي لمكعب كامل :

⇐ **لاحظ أن ٢ × ٢ × ٢ = ٨ يعني ذلك أن العدد ٢ مضروبا في نفسه ثلاث مرات يساوي ٨ ويمكن كتابة العدد ٨ على الصورة $٢^{٣}$ = ٨ ⇐ حيث تشير ٢ إلى الأساس و ٣ إلى الأس**

الأس هو : عدد مرات ضرب الأساس في نفسه .

$٢^{٣}$: الأس ٣ يعني ذلك أن يتوجب علينا ضرب الأساس ٢ في نفسه ٣ مرات .

مكعب العدد يساوي ناتج ضرب العدد في نفسه ثلاث مرات متتالية .

مثال : ما مكعب الأعداد التالية : ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠

الحل :

مكعب ٣ = ٣ × ٣ × ٣ = ٢٧ = $٣^{٣}$

مكعب ٤ = ٤ × ٤ × ٤ = ٦٤ = $٤^{٣}$

مكعب ٥ = ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥ = $٥^{٣}$

مكعب ٦ = ٦ × ٦ × ٦ = ٢١٦ = $٦^{٣}$

مكعب ٧ = ٧ × ٧ × ٧ = ٣٤٣ = $٧^{٣}$

مكعب ٨ = ٨ × ٨ × ٨ = ٥١٢ = $٨^{٣}$

مكعب ٩ = ٩ × ٩ × ٩ = ٧٢٩ = $٩^{٣}$

مكعب ١٠ = ١٠ × ١٠ × ١٠ = ١٠٠٠ = $١٠^{٣}$

لا حظ أن الأعداد ٨ ، ٧ ، ٦٤ ، ١٢٥ ، ..... هي مكعبات كاملة لأن الجذر التكعيبي يعطي عدد صحيح ونعبر عن الجذر التكعيبي بالصورة .

$\sqrt[٣]{٨} = \sqrt[٣]{٢ \times ٢ \times ٢} = ٢$

$\sqrt[٣]{٢٧} = \sqrt[٣]{٣ \times ٣ \times ٣} = ٣$ ، $\sqrt[٣]{٦٤} = \sqrt[٣]{٤ \times ٤ \times ٤} = ٤$

لإيجاد الجذر التكعيبي : ١ ـ نكتب العدد على صورة حاصل ضرب عوامله الأولية ٢ ـ نأخذ من كل ثلاثة عوامل متساوية أحدها ثم نجد حاصل الضرب .

مثال :

أوجد $\sqrt[٣]{٢١٦}$

٢١٦	٢
١٠٨	٢
٥٤	٢
٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	

⇐ $\sqrt[٣]{٢١٦} = \sqrt[٣]{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٣ \times ٣ \times ٣}$ ⇐ ٢ × ٣ = ٦

$\sqrt[٣]{٦٤} = \sqrt[٣]{٤ \times ٤ \times ٤} = ٤$ ، $\sqrt[٣]{١٢٥} = \sqrt[٣]{٥ \times ٥ \times ٥} = ٥$

---

① س + ٢ : تعبير جبري يعني ناتج جمع العدد ٢ إلى العدد س
② س − ٤ : تعبير جبري يعني ناتج طرح العدد ٤ من العدد س
③ ٧ × س : تعبير جبري يعني حاصل ضرب العدد ٧ في العدد س
④ س ÷ ٣ : تعبير جبري يعني خارج قسمة العدد س على العدد ٣

ويمكن كتابته على الصورة $\frac{\text{س}}{\text{٣}}$

✍ التعابير السابقة كلها تضمنت متغيراً واحداً و يمكن أن يتضمن التعبير الجبري أكثر من متغير مثل (س + ص) و الذي يدل على ناتج جمع العدد س إلى العدد ص

✍ الحد الجبري يتكون من حاصل ضرب ثابت بمتغير أو أكثر ، ٤س حد جبري يسمى الثابت ٤ معامل الحد الجبري ويسمى العدد س المتغير ، س : يتكون من العدد ١ و يسمى معامل الحد الجبري ، س : يسمى المتغير ⇐ الذي لا يوجد له مقابل يكون مقابله العدد ١ .

<u>حساب القيمة العددية للمتغير الجبري :</u>

<u>مثال</u> : إذا كانت س = ٢ ، ص = ٤ ، احسب القيمة العددية للتعابير الجبرية التالية :

① ٢ س + ٣ ص = ٢ × ٢ + ٣ × ٤ = ٤ + ١٢ = ١٦
② ٤ س − ٢ ص = ٤ × ٢ − ٢ × ٤ = ٨ − ٨ = ٠
③ ٣ س + ٢ص = ٣ × ٢ + ٢ × ٤ = ٦ + ٨ = ١٤
④ $\frac{\text{٤ س}}{\text{٢ ص}} = \frac{\text{٤ × ٢}}{\text{٢ × ٤}} = \frac{\text{٨}}{\text{٨}} = \text{١}$ ⑤ ٤ س ص = ٤ × ٢ × ٤ = ٣٢

<u>مثال</u> : إذا كانت س = ٤ ، ص = ٢ ، ع = - ١ ، أوجد القيمة العددية للتعابير الجبرية التالية :

① س + ص + ع = ٤ + ٢ − ١ = ٦ − ١ = ٥
② س + ٢ ص − ٣ ع = ٤ + ٢ × ٢ − ٣ × - ١ = ٤ + ٤ + ٣ = ١١
③ ٣س − ٢ ص + ٤ ع = ٣ × ٤ − ٢ × ٢ + ٤ × - ١ = ١٢ − ٤ − ٤ = ٨ − ٤ = ٤
④ $\frac{\text{٧ س + ٤ ع}}{\text{ص − ٢ ع}} = \frac{\text{٧ × ٤ + ٤ × - ١}}{\text{٢ − ٢ × - ١}} = \frac{\text{٢٨ − ٤}}{\text{٢ + ٢}} = \frac{\text{٢٤}}{\text{٤}} = \text{٦}$

⑤ س + ص + ٨ ع = ٤ + ٢ + ٨ × - ١ = ٦ − ٨ = - ٢ .

<u>المعادلات بمتغير واحد :</u>

أوجد قيمة س في المعادلات التالية :

① س + ٢ = ٨ ⇐ المطلوب إيجاد قيمة س و ذلك بجعل س لوحدها على يمين المساواة وبقية الثوابت على يسار المساواة .

⇐ لذلك نقوم بنقل + ٢ من اليمين إلى اليسار مع تغيير في الإشارة ⇐ س = ٨ – ٢ ⇐ س = ٦

② س – ٨ = ١٠ ⇐ س = ١٠ + ٨ ⇐ س = ١٨

③ س + ٤ = ٢ ⇐ س = ٢ – ٤ ⇐ س = - ٢

④ س + ١٤٢٠ = ٢٥٣٤ ⇐ س = ٢٥٣٤ – ١٤٢٠ = ١١١٤

⑤ ٢س = ٨ ⇐ يتم إيجاد قيمة س بقسمة طرفي المعادلة على معامل س

$\frac{\text{٢}}{\text{٢}}$ س = $\frac{\text{٨}}{\text{٢}}$ ⇐ س = ٤

⑥ ٣ س = ١٢ ⇐ $\frac{\text{٣ س}}{\text{٣}} = \frac{\text{١٢}}{\text{٣}}$ ⇐ س = ٤

⑦ س ÷ ٣ = ٤ ⇐ $\frac{\text{س}}{\text{٣}} = \frac{\text{٤}}{\text{١}}$ ⇐ بالضرب التبادلي ⇐ س = ١٢

⑧ س ÷ ٤ = ٨ ⇐ $\frac{\text{س}}{\text{٤}} = \frac{\text{٨}}{\text{١}}$ ⇐ بالضرب التبادلي ⇐ س = ٣٢

⑨ ٢ س + ٨ = ٢٠ ⇐ ننقل +٨ إلى الطرف الأيسر من المساواة مع تغيير في الإشارة

ثم نقسم على معامل س ⇐ ٢س = ٢٠ – ٨ ⇐ ٢ س = ١٢ ⇐ $\frac{\text{٢}}{\text{٢}}$ س = $\frac{\text{١٢}}{\text{٢}}$ ⇐ س =٦

⑩ ٣ س ÷ ٢ = ٦ ⇐ $\frac{\text{٣ س}}{\text{٢}} = \frac{\text{٦}}{\text{١}}$ بالضرب التبادلي ⇐ ٣ س = ١٢

بالقسمة على معامل س ⇐ $\frac{\text{٣}}{\text{٣}}$ س = $\frac{\text{١٢}}{\text{٣}}$ ⇐ س = ٤

---

①① ٤ س – ٢ = ١٠ ⇐ ٤ س = ١٠ + ٢ ⇐ ٤س = ١٢ بالقسمة على ٤ معامل س

⇐ $\frac{٤}{٤}$ س = $\frac{١٢}{٤}$ ⇐ س = ٣

<u>جمع المقادير الجبرية وطرحها :</u>

① ٢ س + ٣ س = (٢ + ٣) س = ٥ س ② ١٣ س – ٢ س = (١٣ – ٢) س = ١١ س

✍ الحدود الجبرية المتشابهة تتكون من المتغيرات نفسها و بالأسس نفسها و إن اختلفت المعاملات .

③ ٣ س^{٢} + ٤ س^{٢} = (٣ + ٤) س^{٢} = ٧س^{٢} .

④ ١٥ س^{٣} – ٢س^{٣} = (١٥ – ٢) س^{٣} = ١٣ س^{٣} .

<u>مثال</u> : أوجد ناتج جمع المقدارين الجبريين التاليين : ٢ س + ٧ ص ، ٣ س – ٢ص

⇐ ٢ س + ٧ص + ٣س – ٢ ص ⇐ في المتغيرات نضع الحدود المتشابهة جنبا إلى جنب (تجميع الحدود)

٢ س + ٣س + ٧ ص – ٢ ص ⇐ (٢ + ٣) س + (٧ – ٢) ص = ٥ س + ٥ ص .

<u>مثال</u> : أوجد ناتج طرح المقدارين الجبريين التاليين : ٣س + ٤ص ، ٢ س - ص

⇐ ٣س + ٤ص – (٢س – ص) ⇐ ندخل إشارة السالب على كامل حدود القوس الثاني .

٣ س + ٤ص – ٢س + ص ⇐ نقوم بعملية تجميع الحدود المتشابهة .

٣س – ٢س + ٤ص + ص = (٣ – ٢) س + (٤ + ١) ص ⇐ س + ٥ص .

<u>مثال</u> : أوجد ناتج جمع المقدارين الجبريين التاليين : ٣س ص + ٢ ع ل ، ٢ ع ل – ٤ س ص

⇐ ٣ س ص + ٢ ع ل + ٢ ع ل – ٤ س ص ⇐ ٣ س ص – ٤ س ص + ٢ ع ل + ٢ ع ل

(٣ – ٤) س ص + (٢ + ٢) ع ل = - س ص + ٤ ع ل

✍ يجوز توزيع عملية الضرب على عملية الجمع .

① ٧ (٢ س + ٣ص – ٤ ع) = ٧ × ٢ س + ٧ × ٣ ص - ٧ × ٤ ع

= ١٤ س + ٢١ ص – ٢٨ ع

② (٣ س + ٢ص – ع) × - ٢ = - ٢ × ٣ س - ٢× ٢ص – ٢ × - ع

= - ٦ س – ٤ ص + ٢ع

مثال :

جد العامل المشترك الأعلى للعددين ١٢ ، ٢٤

نحلل كلا العددين إلى عوامله الأولية .

١٢ = ٢ × ٢ × ٣

٢٤ = ٢ × ٢ × ٢ × ٣

لاحظ أن العامل المشترك الأعلى للعددين ١٢ ، ٢٤ هو ٢ × ٢ × ٣ = ١٢ .

مثال :

جد العامل المشترك الأكبر للعددين ٢٠ ، ٣٦

٢٠ = ٢ × ٢ × ٥

٣٦ = ٢ × ٢ × ٣ × ٣

العامل المشترك الأكبر للعددين ٢٠ ، ٣٦ هو ٢ × ٢ = ٤

مثال : جد العامل المشترك الأكبر للعددين ٨ س ص^{٢} ، ٢٠ س^{٢} ص^{٢}

٨ س ص^{٢} = ٢ × ٢ × ٢ × س × ص × ص

٢٠ س^{٢} ص^{٢} = ٢ × ٢ × ٥ × س × س × ص × ص

ع . م . أ = ٢ × ٢ × س × ص × ص = ٤ س ص^{٢} .

مثال :

جد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) للمقدارين

٦ (س + ص)^{٣} ، ١٥ (س + ص)^{٢}

٦ (س + ص)^{٣} = ٢ × ٣ × (س + ص) (س + ص) (س + ص)

١٥(س + ص)^{٢} = ٣ × ٥ × (س + ص) (س + ص)

ع . م . أ = ٣ × (س + ص) (س + ص) = ٣ (س + ص)^{٢} .

لاحظ ان العامل المشترك الأكبر لعددين أو أكثر هو أكبر عدد يقسمة العددين دون باقي .

<u>التحليل إلى العوامل :</u>

مثال :

① **أ س + أ ص = أ (س + ص)**

② **٢ س + ٢ ص = ٢ (س + ص)**

③ **٣ س + ٣ س^{٢} = ٣ (س + س^{٢}) = ٣ س (١ + س)**

④ **٣ س + ٦ص = ٣ (س + ٢ ص) .**

✍ **لاحظ عند وضع مقدار جبري على صورة حاصل ضرب عاملين أو أكثر فإننا نقول أننا حللنا المقدار الجبري إلى عوامله .**

مثال :

① ٤ س + ٨ ص = ٤ (س + ٢ ص)

② ٢ س^{٢} ص^{٢} + ٤ س ص = ٢ س ص (س ص + ٢)

③ ١٥ س^{٣} + ٤٥ س^{٢} ص = ١٥ س^{٢} (س + ٣ص)

✍ لاحظ أنه من خلال الأمثلة السابقة كانت تتم عملية التحليل إلى العوامل بإخراج عامل مشترك بين الحدين الجبريين .

مثال :

إذا كانت ق (س) = س^{٢} + ٣س أوجد جذور الاقتران أو أصفار الاقتران .

الحل:

يتم ذلك من خلال مساواة الاقتران بالصفر

ق (س) = ٠ ⇐ س^{٢} + ٣س = ٠ ⇐ هذا يتطلب تحليل المقدار إلى عوامله ويتم ذلك بإخراج س عامل مشترك ⇐ س (س + ٣) = ٠ ، إما س = ٠ أو س + ٣ = ٠

ننقل ٣ إلى الطرف الثاني ⇐ س = - ٣ . الجذور إما س= ٠ أو س = - ٣

مثال : أوجد جذور الاقترانات التالية :

① ص = ٢ س ^{٢} + ٦ س ⇐ نخرج س عامل مشترك ⇐ س (٢ س + ٦) = ٠

إما س = ٠ أو ٢ س + ٦ = ٠ ⇐ ٢س = - ٦ نقسم على معامل س ⇐ س = - ٣

الجذور إما س= ٠ أو س= - ٣ .

② ق (س) = ٣ س^{٣} – ٩س^{٢} ⇐ ق (س) = ٠ ⇐ ٣س^{٣} – ٩ س^{٢} = ٠

إخراج س عامل مشترك ⇐ س^{٢} (٣ س – ٩) = ٠ إما س^{٢} = ٠ أو ٣ س – ٩ = ٠

⇐ ٣س = ٩ ⇐ س = ٣ الجذور إما س = ٠ أو س = ٣ .

③ ق (س) = س^{٣} – ١٦ س ⇐ ق (س) = ٠ ⇐ س^{٣} – ١٦س = ٠ نخرج س عامل مشترك

س (س^{٢} – ١٦) = ٠ إما س= ٠ أو س^{٢} – ١٦ =٠ ⇐ س^{٢} = ١٦ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين ⇐ س = + ٤ أو س = - ٤ الجذور { – ٤ ، ٠ ، ٤ }

تدريـــب :

① جد العامل المشترك الأعلى للعددين ١٣ ، ٣٩

② جد العامل المشترك الأعلى للعددين ٢٦ ،١٠٢

③ جد العامل المشترك الأعلى لما يلي :

❶ ص ، ص^{٦} ❷ ٧ س^{٦} ص ، ٤٩ س^{٢} ص^{٢} ❸ ٨ س ^{٢} ، ٢ س ص ، ٤ ص .

<u>مثال :</u>

① ٣س × ٢س = (٣ × ٢) × (س × س) = ٦ س^{٢}

② ٣ س^{٢} × ٣ س = (٣ × ٣) × (س^{٢} × س) = ٩ س^{٣}

✍ **لاحظ أن المتغير الذي لا يوجد له أس يكون الأس له يساوي ١ و بالتالي س × س هي عبارة عن س^{١} × س^{١} = س^{٢} و بما أن الأساسات متساوية فإن الأسس تجمع (فقط في الضرب)**

<u>قاعـدة :</u>

أ^{م} × أ^{ن} = أ$^{م+ن}$

س^{م} × س^{ن} = س$^{م+ن}$

① س × س = س^{١} × س^{١} = س$^{١+١}$ = س^{٢}

② س^{٢} × س = س^{٢} × س^{١} = س$^{٢+١}$ س^{٣}

③ س^{٣} × س^{٢} = س^{٣} × س^{٢} = س$^{٣+٢}$ = س^{٥}

④ ٣ س^{٢} × ٢س^{٣} = (٣ × ٢) (س^{٢} × س^{٣}) = ٦ س$^{٢+٣}$ = ٦ س^{٥}

⑤ س$^{-٢}$ × س^{٥} = س$^{-٢+٥}$ = س^{٣}

⑥ س^{٤} × س$^{-٣}$ = س$^{٤+-٣}$ = س^{١} = س

⑦ ٨ س^{٣} × ٢ س^{٨} = (٨ × ٢) × (س^{٣} × س^{٨}) = ١٦ س$^{٨+٣}$ = ١٦ س^{١١}

✍ **لاحظ انه لإيجاد حاصل ضرب حد جبري بآخر نضرب معامل الحد الأول بمعامل الحد الثاني و متغيرات الحد الأول بمتغيرات الحد الثاني .**

<u>مثال :</u>

أوجد ناتج :

① ٥ س × (٢س^{٣} + ٧س) ⇐ نستخدم قانون توزيع الضرب على الجمع

⇐ ٥ س × ٢ س^{٣} + ٥س × ٧ س

⇐ (٥ × ٢) × (س × س^{٣}) + (٥ × ٧) × (س × س)

⇐ ١٠ س$^{١+٣}$ + ٣٥ س$^{١+١}$ ⇐ ١٠ س^{٤} + ٣٥ س^{٢}

② (٧ س + ٣ ص + ع) × ٨ س ص

⇐ ٧ س × ٨ س ص + ٣ ص × ٨ س ص + ع × ٨ س ص

(٧ × ٨) × (س × س ص) + (٣ × ٨) × (ص × س ص) + (١ ×٨)×(ع × س ص)

= ٥٦ س^{٢} ص + ٢٤ س ص^{٢} + ٨ س ص ع .

أوجد ناتج (٢س + ص) × (س + ٢ص)

يتم ضرب كل حد من القوس الأول بكل حد في القوس الثاني ويعني ذلك ⇐ أننا نضرب ٢ س من القوس الأول في س من القوس الثاني ونضرب ٢ س من القوس الأول في ٢ ص من القوس الثاني ثم نضرب ص من القوس الأول في س من القوس الثاني ونضرب ص من القوس الأول في ٢ ص من القوس الثاني .

(٢ س + ص) × (س + ٢ ص) = ٢ س × س + ٢ س × ٢ص + ص × س + ص × ٢ ص

= ٢ س^{٢} + ٤س ص + س ص + ٢ص^{٢} ⇐ = ٢ س ^{٢} + ٢ص^{٢} + ٥ س ص .

<u>مثال</u>: أوجد ناتج :

① (س + ٢) (س + ٣)

⇐ س × س + س × ٣ + ٢ × س + ٢ × ٣ ⇐ = س^{٢} + ٣س + ٢ س + ٦

⇐ = س^{٢} + ٥ س + ٦

② (س + ٣) (س – ٢)

⇐ س × س + س × - ٢ + ٣ × س + ٣ × - ٢ ⇐ س^{٢} – ٢ س + ٣س – ٦

⇐ س^{٢} + س – ٦ .

<u>مثال</u>: أوجد ناتج :

① (س^{٢} + ٣س) (س^{٢} – ٤س)

⇐ س^{٢} × س^{٢} + س^{٢} × -٤ س + ٣س × س^{٢} + ٣س × - ٤س

⇐ س^{٤} – ٤س^{٣} + ٣س^{٣} – ١٢ س^{٢} ⇐ س^{٤} – س^{٣} – ١٢ س^{٢} .

② س (س^{٢} + ٢س) (س + ٤)

⇐ (س^{٣} + ٢س^{٢}) (س + ٤) = س^{٣} × س + س^{٣} × ٤ + ٢س^{٢} × س + ٢س^{٢} × ٤

⇐ س^{٤} + ٤س^{٣} + ٢س^{٣} + ٨س^{٢} ⇐ = س^{٤} + ٦س^{٣} + ٨س^{٢}

> ✍ **<u>قاعـــــدة :</u>**
> **عملية ضرب المقادير الجبرية**
> **(أ + ب) (جـ + د) = (أ × جـ) + (أ × د) + (ب × جـ) + (ب × د)**
> **نقوم بضرب المقدار الأول بكل حد في المقدار الثاني**

مثال : (٣ س – ١) (٥س ^{٢} + ٧) نقوم بضرب (٣س) في (٥س^{٢}) و (٧) ثم نقوم بضرب (- ١) في (٥س^{٢}) و (٧) .

= ٣ س × ٥ س^{٢} + ٣س × ٧ - ١ × ٥ س^{٥} – ١ × ٧

=١٥ س^{٣} + ٢١ س – ٥س^{٢} – ٧ .

①

س + ٥
×
٣س + ٢

---

٣ س^{٢} + ١٥ س
+ ٢ س + ١٠

---

٣ س^{٢} + ١٧ س + ١٠

②

٧ س + ٨
×
٢ س – ٦

---

١٤ س^{٢} + ١٦ س
– ٤٢ س – ٤٨

---

١٤ س^{٢} – ٢٦ س – ٤٨

③

س + ص
×
س – ص

س^{٢} + س ص
– س ص – ص ^{٢}

س^{٢} – ص^{٢}

④

٧ س^{٢} + س
×
٢ س^{٣} – ٣ س

١٤س^{٥} + ٢ س^{٤}
– ٢١ س ^{٣} – ٣ س^{٢}

---

١٤ س^{٥} + ٢س^{٤} – ٢١ س^{٣} – ٣ س^{٢}

تدريب جد ناتج كل مما يلي :

① ٣ س (٢ س^{٢} + ٧س)

② (٨ س + ١) (٢ س – ٥)

③ (س ^{٢} + ٢س) (س – ٣ س^{٢})

④ (س + ١) (٢س + ١) (٣ س – ٢)

المقدار الجبري س^{٢} – ص^{٢} = (مربع س) – (مربع ص) و يسمى هذا فرقاً بين مربعين و قد نتج من ضرب (س + ص) في (س – ص)

$$\boxed{\text{أي أن : س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = (\text{س} + \text{ص}) \times (\text{س} - \text{ص})}$$

وبذلك تكون قد حللت المقدار الجبري (س^{٢} – ص^{٢}) إلى عاملين هما (س + ص) (س – ص)
إذن الفرق بين مربعي حدين يساوي حاصل ضرب مجموع هذين الحدين في الفرق بينهما بالترتيب نفسه .

$$\boxed{\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} = (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})}$$

مثال : حلل المقدار الجبري س^{٢} – ١
الحل : المقدار س^{٢} – ١ = (مربع س) – (مربع ١)
(س)^{٢} – (١)^{٢} = (س + ١) (س – ١) .

مثال : حلل المقدار س^{٢} – ٩
الحل : ⇐ س^{٢} - ٣^{٢} = (س – ٣) (س + ٣)

مثال : حلل المقدار س^{٢} – ١٦
الحل : ⇐ س^{٢} – ٤^{٢} = (س + ٤) (س – ٤)

مثال : حلل المقدار س^{٢} – ٢٥
الحل : ⇐ س^{٢} – ٥^{٢} = (س – ٥) (س + ٥)

مثال : حلل المقدار س^{٢} – ٣٦
الحل : ⇐ س^{٢} – ٦^{٢} = (س – ٦) (س + ٦)

مثال : حلل المقدار ٤س^{٢} – ٩ ص^{٢}
الحل : ⇐ ٤س^{٢} – ٩ ص^{٢} = (مربع ٢ س) – (مربع ٣ ص)
⇐ (٢س)^{٢} – (٣ ص)^{٣} = (٢ س + ٣ص) (٢ س – ٣ ص) .

مثال : حلل المقدار ٨س^{٢} – ١٨ ص^{٢}
الحل : ⇐ ٨ س^{٢} – ١٨ ص^{٢} = ٢ (٤س^{٢} – ٩ ص^{٢})
⇐ ٢ ((٢س)^{٢} – (٣ ص)^{٢}) = ٢ (٢ س + ٣ص) (٢ س – ٣ ص)

مثال : حلل المقدار ١٦ س^{٢} – (ص + ع)^{٢}

الحل : ⇐ (٤ س)^{٢} – (ص + ع)^{٢} = (٤ س + (ص + ع)) (٤ س - (ص + ع))

⇐ = (٤س + ص + ع) (٤ س – ص – ع)

مثال : حلل المقدار ٤٩ س^{٢} – ٦٤ ص^{٢}

الحل : ⇐ (٧س)^{٢} - (٨ص)^{٢} = (٧س+ ٨ص) (٧س - ٨ ص)

مثال : حلل المقدار ٣ س^{٢} – $\frac{٣}{٤}$

الحل :

٣ (س^{٢} – $\frac{١}{٤}$) = ٣ (س)^{٢} – ($\frac{١}{٢}$)^{٢}) = ٣ (س + ($\frac{١}{٢}$)) (س – ($\frac{١}{٢}$))

مثال : حلل المقدار ٦ (س – ص)^{٣} – ٦ (س – ص)

الحل : ⇐ ٦ س – ص ((س – ص)^{٢} – ١)

⇐ (٦س – ص) ((س – ص)^{٢} – (١)^{٢})

⇐ (٦ س – ص) ((س – ص) + ١) (س – ص – ١)

مثال : حلل المقدار ٤٨ س ص^{٢} – ٢٧ س^{٣}

الحل : ⇐ ٣ س (١٦ ص^{٢} – ٩ س^{٢}) ⇐ ٣ س (٤ ص + ٣س) (٤ ص – ٣س) .

<u>تحليل العبارة التربيعية الثلاثية :</u>

مثال :

① (س + ١)^{٢} = (س + ١) (س + ١) = س^{٢} + ٢س + ١

② (س + ٢)^{٢} = (س + ٢) (س + ٢) = س^{٢} + ٤س + ٤

③ (س + ٣)^{٢} = (س + ٣) (س + ٣) = س^{٢} + ٦س + ٩

لاحظ أن س^{٢} + ٦س + ٩ هو مقدار ثلاثي يسمى عبارة تربيعية ثلاثية لأن أعلى أس فيها للمتغير س هو اثنان ، وثلاثة لأنها مكونة من ثلاثة حدود و لأنها ناتجة عن مربع المقدار س + ٣ فتسمى مربعاً كاملاً و بملاحظة حدود هذه العبارة التربيعية نجد أن :

الحد الأول + س^{٢} مربع جذره س و الحد الثالث + ٩ مربع جذره ٣ .

بينما الحد الأوسط ٦س و بمقارنته بالحدين الأول و الثالث نجد أنه ناتج من مثلي حاصل ضرب جذر س^{٢} و هو س في جذر ٩ و هو ٣ أي أن ٦س = ٢ × س × ٣ .

مثال : تحقق فيما إذا كانت العبارة التربيعية ٩س^{٢} – ٢٤ س + ١٦ مربعاً كاملاً .

الحل :⇐ الحد الأول ٩س^{٢} ، الحد الثالث ١٦ ، <u>الحد الأوسط</u> – ٢٤ س

وبما أن الحد الأوسط – ٢٤ س = - ٢ $\sqrt{\text{٩ س}^{٢} \times \text{١٦}}$ = - ٢ × ٣س × ٤

* العبارة التربيعية ٩س^{٢} – ٢٤ س + ١٦مربعاً كاملاً

تحليل العبارة التربيعيه

بشكل عام :
تكون العبارة التربيعية الثلاثية مربعاً كاملاً إذا كان الحد الأوسط فيها =

= ± ٢ √(الحد الأول × الحد الثالث)

مثال : حلل العبارة التربيعية س^{٢} – ٨ س + ١٦

الحل : بما أن – ٢ √(س^{٢} × ١٦) = - ٢ × س × ٤ = - ٨ س = الحد الأوسط
*** العبارة التربيعية س^{٢} – ٨ س + ١٦ مربع كامل ومنه :**
س^{٢} – ٨س + ١٦ = (√(س^{٢}) – √(١٦))^{٢} = (س – ٤)^{٢}

مثال : حلل العبارة التربيعية س^{٢} + ٥س + ٦
الحل : (س + ٣) (س + ٢) .
 # لاحظ أن العدد ٦ الحد الثابت هو حاصل ضرب العددين ٢ ، و العدد ٥ معامل س هو مجموعهما .
أي أن : س^{٢} + (أ + ب) س + أ ب = (س + أ) (س + ب)
هذه الصورة يمكن استخدامها لتحليل أي عبارة تربيعية معامل س^{٢} = ١
الحد الثابت فيها هو حاصل ضرب عددين ، معامل س فيها هو ناتج جمعهما .

مثال : حلل العبارة س^{٢} + ٧س + ١٠
الحل : ينتج عن عددين حاصل ضربهما = ١٠ و حاصل جمعهما = ٧
(س + ٥) (س + ٢)

المعاملات	١٠ ، ١	-١٠ ، ١	٢ ، ٥	-٢ ، -٥
المجموع	١١	- ١١	٧	-٧

مثال : حلل ما يلي :
① س^{٢} + ٨س + ١٥ = (س + ٥) (س + ٣)
② س^{٢} – ١٠ س + ٢٤ = (س – ٦) (س + ٤)

المعاملات	١ ، ١٥	-١٥، ١	١، -١٥	٣، ٥	-٣، -٥	٣ ، -٥	٣ ، -٥	-٣ ، -٥
المجموع	١٦	١٤	-١٤	٨	-٨	٢	-٢	٨٠

المعاملات	١ ، ٢٤	-٢٤، ١	٤ ، ٦	-٤، -٦	٦، ٤	٣ ، ٨	-٣ ، ٨	٨، -٣
المجموع	٢٥	٢٣	-٢٣	١٠	١٠	١١	٥	٥

تحليل العبارة التربيعيه

مثال : حلل ما يلي :

① ٢ س + س^{٢} – ٨ = س^{٢} + ٢س – ٨ = (س + ٤) (س – ٨)

② س^{٢} – ٣س + ٢ = (س – ٢) (س – ١)

③ - س – ٢ + س^{٢} = س^{٢} – س- ٢ = (س – ٢) (س + ١)

④ ٥ س + س^{٢} – ١٤ = س^{٢} + ٥س – ١٤ = (س + ٧) (س – ٢)

⑤ س^{٢} + ٤س – ٢١ = (س + ٧) (س – ٣)

⑥ س^{٢} – ٥س – ٢٤ = (س – ٨) (س + ٣)

⑦ س^{٢} + ٣س – ٤٠ = (س + ٨) (س – ٥)

⑧ س^{٢} – ١٠ س– ١١ = (س – ١١) (س + ١)

 # لاحظ العبارات التربيعية التالية :

٢س^{٢} + ٨س + ٦ ، ٣س^{٢} – ١١ س – ٤ ، ٥ س^{٢} – ٨ س + ٤

فمعامل س^{٢} فيها ٢ ، ٣ ، ٥ على الترتيب .

<u>بصورة عامة :</u>
تسمى العبارة التربيعية أس^{٢} + ب س + جـ ، حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية أ ≠ ٠ بالصورة العامة للمعادلة التربيعية .

مثال : (٣ س + ٥) (٢س + ٣) = ٦س^{٢} + ٩س + ١٠س+ ١٥
= ٦ س^{٢} + (٩ + ١٠) س + ١٥

 # لاحظ أن حاصل ضرب ٦ في ١٥ يساوي حاصل ضرب ٩ في ١٠ و يمكنك استخدام هذا النمط لتحليل عبارات تربيعية مهما كانت قيمة معامل س^{٢} فيها .

مثال : حلل العبارة التربيعية ٣ س^{٢} + ١٠ س + ٨

<u>مهم :</u>
نبحث عن عاملين للعدد ٢٤، حاصل ضرب معامل س^{٢} في الحد الثابت بحيث يكون حاصل ضربهما يساوي ٢٤ و مجموع العددين = ١٠ ، معامل س في العبارة التربيعية.

المعاملات	١،٢٤	-١،-٢٤	٨،٣	-٣،-٨	٦،٤	١٢،٢
المجموع	٢٥	-٢٥	١١	-١١	١٠	١٤

إذن المعاملات هي ٤ ، ٦

الآن نكتب العبارة التربيعية ٣ س^{٢} + ١٠ س+ ٨ كما يلي :

= ٣ س^{٢} + ١٠س + ٨ = ٣ س^{٢} (٤ + ٦) س + ٨

= ٣س^{٢} + ٤ س + ٦ س + ٨

= س (٣ س + ٤) + ٢ (٣ س + ٤) = (٣ س+ ٤) (س + ٢)

٣س^{٢} + ١٠س + ٨ = (٣ س+ ٤) (س + ٢)

مثال : حلل المقدار ٢ س^{٢} – ٨ س+ ٦ ⇐ ٢ × ٦ = ١٢

نبحث عن عاملين للعدد ١٢ بحيث يكون حاصل ضربهما = ١٢ و حاصل جمعهما = ـ ٨

المعاملات	١,١٢	ـ١،ـ١٢	ـ٦ ، ـ٢	٢،٦
المجموع	١٣	ـ١٣	٨	ـ٨

المعاملات هي (ـ ٢ ، ـ ٦)

وتكتب ٢ س^{٢} – ٨س + ٦ = ٢ س^{٢} + (ـ ٦ – ٢) س + ٦

= ٢س^{٢} – ٦ س – ٢س + ٦ ⇐ ٢ س (س – ٣) – ٢ (س – ٣)

⇐ (٢س – ٢) (س – ٣) ⇐ ٢ س^{٢} – ٨ س+ ٦ = (٢س – ٢) (س – ٣)

مثال : حلل المقدار ٢س – ٥ + ٣س^{٢}

الحل : رتب العبارة التربيعية تنازليا حسب قوى س كما يلي :

٣س^{٢} + ٢س – ٥

ابحث عن عاملين للعدد (ـ ١٥) بحيث يكون حاصل ضربهما= ـ ١٥

و مجموعهما=٢ معامل س

المعاملات	ـ١ ، ١٥	١ ، ـ ١٥	٣،ـ ١٥	ـ٣ ، ٥
المجموع	١٤	ـ١٤	ـ٢	٢

المعاملات هي (ـ ٣ ، ٥)

وتكتب ٣س^{٢} + ٢س – ٥ = ٣س^{٢} + (٥ – ٣) س – ٥

⇐٣س^{٢} + ٥س – ٣س – ٥ ⇐ س (٣ س + ٥) – ١ (٣ س+ ٥)

⇐ (٣س + ٥) (س – ١)

مثال : حلل ما يلي :

١) س^{٢} – س – ٢ = (س – ٢) (س + ١)

٢) س^{٢} + ٣س – ٤ = (س + ٤) (س – ١)

٣) س^{٢} – ٥س + ٦ = (س – ٣) (س – ٢)

٤) س^{٢} + ٥س + ٦ = (س + ٣) (س + ٢)

٥) س^{٢} – س – ٦ = (س – ٣) (س + ٢)

٦) س^{٢} +٧ س+ ٦ = (س + ٦) (س + ١)

٧) س^{٢} – ٥س – ٦ = (س – ٦) (س + ١)

العبارة التربيعية $\text{أ س}^{\text{٢}} + \text{ب س} + \text{جـ} = \text{٠}$

القانون العام $\text{س} = \dfrac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{\text{٢}} - \text{٤ أ جـ}}}{\text{٢ أ}}$

حيث : أ : معامل $\text{س}^{\text{٢}}$

ب : معامل س

جـ : الحد الثابت

مثال : حلل العبارة التربيعية $\text{٢ س}^{\text{٢}} + \text{٤س} - \text{٨}$

الحل :

المميز $\text{ب}^{\text{٢}} - \text{٤ أ جـ} \Leftarrow \text{أ} = \text{٢}$ ، $\text{ب} = \text{٤}$ ، $\text{جـ} = -\text{٨}$

$\Leftarrow \text{١٦} - \text{٤} \times \text{٢} \times -\text{٨} \Leftarrow \text{١٦} + \text{٦٤} = \text{٨٠} > \text{٠}$ تحلل

$\Leftarrow \text{س} = \dfrac{-\text{٤} \pm \sqrt{\text{٨٠}}}{\text{٢} \times \text{٢}} \Leftarrow \text{س} = \dfrac{-\text{٤} \pm \sqrt{\text{١٦} \times \text{٥}}}{\text{٤}}$

$\Leftarrow \text{س} = \dfrac{-\text{٤} \pm \text{٤}\sqrt{\text{٥}}}{\text{٤}} \Leftarrow \text{س} = -\text{١} \pm \sqrt{\text{٥}}$

$\Leftarrow \text{س} = -\text{١} - \sqrt{\text{٥}}$

أي عبارة تربيعية يمكن تحليلها باستخدام القانون العام .

تمــــــــــــارين :

حلل كلا مما يلي :

١) ٢٥ – س^{٢}

٢) ٩ س^{٢} – ٨١

٣) ٢٧ س^{٢} – ٤٨ ص^{٢}

٤) ٣٦ س^{٢} + ٢٥ ص^{٢}

٥) س^{٢} + ٢س + ١

٦) س^{٢} – ٣س + ٢

٧) ٥ س + س^{٢} – ١٤

٨) س^{٢} + ٥٦ + ١٥ س

٩) س^{٢} + ٤س – ٢١

١٠) ص^{٢} – ٥ص – ٢٤

١١) ٣س^{٢} – ٢س – ٨

١٢) ٣س^{٢} – ٤س – ١٥

١٣) ٦ س^{٢} – ٥س + ١

١٤) ١٣ س + ٥س^{٢} – ٦

١٥) س^{٢} + س – ٣٠

١٦) س^{٢} – ٤س – ٢١

١٧) س^{٢} + ١٠ س+ ١٦

١٨) س^{٢} – ٢س – ٢٤ .

✍ **الصورة العامة للمعادلة الخطية بمتغيرين هي أ س + ب ص + جـ = ٠**
حيث أ، ب ليس كلاهما صفرا ، أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية .

<u>مثال</u> : اكتب الصورة العامة للمعادلة الخطية ص = - ٤س + ٨ ، ثم جد القيم المناظرة لكل من أ ، ب ، جـ فيها .

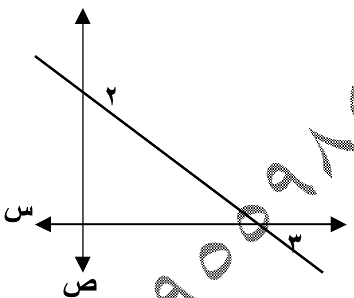
الحل :

ننقل – س + ٨ من يسار المساواة إلى يمينها مع تغيير في الإشارة فينتج:
ص + ٤س – ٨ = ٠ ثم نرتب المعادلة ٤س + ص – ٨ = ٠
أ = ٤ ، ب = ١ ، جـ = - ٨ .

<u>تدريب :</u>
اكتب الصورة العامة للمعادلات الخطية التالية :
① ٣ ص = ٨ – ٦ س ② ٧ = ٨ س – ٤ ص
③ ٥ س = ٨ + ٣ ص ④ ٨ – س = ٤ ص

مثال : مثل المعادلة ٢س + ٣ص = ٦ بيانيا

س	٠	٣
ص	٢	٠



افرض س = ٠ و أوجد قيمة ص ⇐ ٢ × ٠ + ٣ص = ٦
⇐ ٣ ص = ٦ ⇐ ص = ٢

افرض ص = ٠ و أوجد قيمة س ⇐ ٢س + ٣ × ٠ = ٦
⇐ ٢س = ٦ ⇐ س = ٣

<u>تدريب :</u>
مثل المعادلات التالية بيانيا :
١) س + ص = ١ ٢) ٣ س + ص = ٦
٣) س – ص = -٤ ٤) ٢س = ٣ص + ١٢

✍ يتكون نظام المعادلات الخطية بمتغيرين من معادلتين خطيتين على الصورة

أ س + ب ص = جـ
د س + هـ ص = و

✍ نظام المعادلات الخطية بمتغيرين ، يمكن حله و أن مجموعة حل هذا النظام الخطي زوج مرتب (س، ، ص ،) يحقق احداثياته معادلتي هذا النظام الخطي للمعادلات معا وفي آن واحد

✍ وتتلخص طريقة الحل بالتعويض بجعل أحد المتغيرين موضوعا للقانون في إحدى معادلتي النظام الخطي ، ثم التعويض عنه في المعادلة الأخرى للنظام الخطي لتنتج معادلة خطية بمتغير واحد ، يسهل حلها عادة وتعويض الحل في أي من المعادلات السابقة بحسب الأنسب و الأسهل للتعرف إلى قيمة المتغير الآخر و بالتالي الحصول على مجموعة حل هذا النظام الخطي للمعادلات

<u>مثال</u> : استخدم طريقة التعويض في حل النظام التالي :

٢س – ص = ٥ .... ❶

س + ٣ص = - ١ .... ❷

الحل :

① اجعل ص موضوعا للقانون في إحدى المعادلتين و لتكن المعادلة الأولى❶ وذلك للسهولة .

٢ س – ص = ٥

- ص = ٥ – ٢ س الضرب بـ - ١ للتخلص من الإشارة السالبة

ص = - ٥ + ٢س .... ❸

② عوض قيمة ص في المعادلة الثانية ❷:

س + ٣ (- ٥ + ٢س) = - ١ ⇐ س – ١٥ + ٦س = - ١

⇐ ٧س – ١٥ = - ١⇐ ٧س = ١٤ ⇐ س = ٢ .

---

③ **عوض قيمة س في المعادلة الثالثة ......❸ لإيجاد قيمة ص**
ص = ـ ٥ + ٢ × ٢ ⇐ ص = ـ ٥ + ٤ ⇐ ص = ـ ١
⇐ الزوج المرتب (٢ ، ـ ١) يمثل حل النظام .

④ **وللتحقق من صحة الحل عوض الزوج المرتب في إحدى المعادلتين الأصليتين**
٢ س – ص = ٥ ⇐ ٢ × ٢ – ١ × ـ ١ = ٥

⇐ ٤ + ١ = ٥ ⇐ ٥ = ٥ ، إذن الحل صحيح .

<u>تدريب :</u>
حل النظام التالي بالتعويض :

١) س + ٢ ص = ٤
٢س + ص = ٢

٢) ٦س – ص = ١ ،
٤ س = ٢ ص ـ ٦

٣) ٣ س + ٢ ص = ٩
س + س = ٠

٤) ص + س = ٤
٤ س = ٣ ص ـ ٥

<u>مثال</u>: حل النظام التالي بالتعويض :
س = ص .... ❶
٢ س + ٣ص = ١٥ .... ❷

لاحظ أن س موضوعا للقانون في (١) و هنا عوضها مباشرة في المعادلة الثانية

⇐ ٢ (ص) + ٣ص = ١٥ ⇐ ٢ ص + ٣ص = ١٥ ⇐ ٥ ص = ١٥ ⇐ ص = ٣

نعوض قيمة ص في المعادلة الأولى ⇐ س = ص ⇐ س = ٣
الزوج المرتب (٣ ، ٣)

> ✍ تتلخص هذه الطريقة بحذف أحد المتغيرين من خلال (جمع أو طرح) المعادلتين وتوظيف الضرب أحيانا للوصول إلى وضع يفيد فيه الجمع أو الطرح في ذلك

<u>مثال</u> : حل النظام التالي بالحذف :

س + ٢ص = ٧

س – ٢ص = ٥

الحل : بالجمع ينتج أن ⇐ ٢س = ١٢ ⇐ س = ٦

عوض قيمة س في إحدى المعادلتين ولتكن الأولى

⇐ ٦ + ٢ص = ٧ ⇐ ٢ص = ٧ – ٦ ⇐ ٢ص = + ١ ⇐ ص = + ١/٢

للتأكد عوض في إحدى المعادلتين الزوج المرتب الناتج (٦ ، ١/٢)

س – ٢ص = ٥ ⇐ ٦ – ٢ × ١/٢ = ٥ ⇐ ٦ – ١ = ٥ ⇐ ٥ = ٥ إذن الحل صحيح

<u>مثال</u> : استخدم طريقة الحذف في حل المعادلتين :

٣ ص + ٥س = ١١

٢ س – ٧ ص = ٢٩

الحل : رتب المتغيرين في المعادلتين بالشكل التالي :

٥ س + ٣ص = ١١ .... ①

٢س – ٧ص = ٢٩ .... ②

لحذف ص أضرب طرفي المعادلة رقم ① في العدد ٧ ينتج أن :

٣٥ س + ٢١ ص = ٧٧ .... ③

أضرب طرفي المعادلة رقم ② في العدد ٣ فينتج أن :

٦ س – ٢١ ص = ٨٧ .... ④

اجمع المعادلتين ٣ ، ٤ فينتج أن

٣٥ س + ٢١ ص = ٧٧

+ ٦ س – ٢١ ص = ٨٧

---

٤١ س = ١٦٤ ⇐ س = ٤

لإيجاد قيمة المتغير ص ضع ٤ بدلا من س في المعادلة (١) فنجد أن
٥ × ٤ + ٣ص = ١١ ⇐ ٢٠ + ٣ص = ١١ ⇐ ٣ص = - ٩ ⇐ ص = ٣
الزوج المرتب (٤ ، - ٣) يمثل حل النظام .

تدريب :
استخدم طريقة الحذف لحل كل من أنظمة المعادلات الخطية التالية ثم تحقق من صحة الحل .

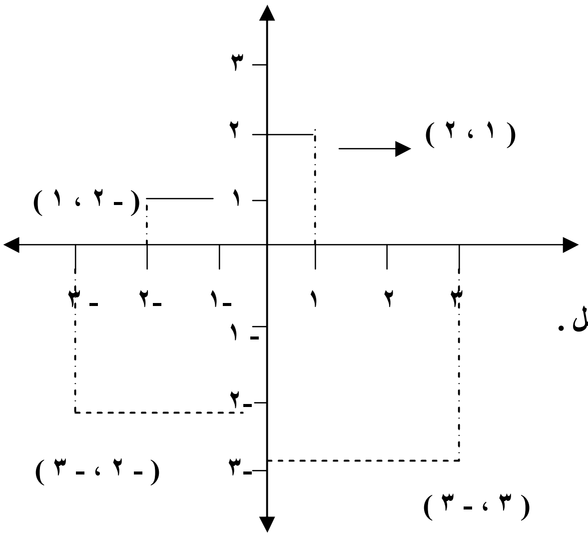
١) س – ص = ١
س + ٥ص = ٧

٢) س + ٢ص = ٧
س – ٢ص = ١٠

٣) ٢س + ٣ص = - ٥
٤س – ص = ١١

٤) ٣ س = - ٤ص + ٩
٥ س – ٢ص = ٢٨

المستوى الديكارتي :



- كل نقطة في المستوى الديكارتي تمثل زوج مرتب مسقطه الأول يسمى الإحداث السيني للنقطة ، ومسقطه الثاني الإحداث الصادي للنقطة .
- لاحظ أن النقطة م في المستوى الديكارتي تمثل الزوج المرتب (٠ ، ٠) و تسمى نقطة الأصل .
- إذا كان الزوج المرتب (س ، ص) ينتمي إلى علاقة ما فإن المسقط الثاني ص صورة للمسقط الأول س .

تعريـــف :
أي مجموعة من الأزواج المرتبة تسمى علاقة ونسمي مجموعة كل المساقط الأولى للأزواج المرتبة في العلاقة مجال تلك العلاقة . ونسمي مجموعة كل المساقط الثانية مدى العلاقة

مثال : جد المجال و المدى للعلاقة ع = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٦) }.

الحل : مجال ع = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ } ، مدى ع = { ٢ ، ٤ ، ٦ } .

الاقترانـــــــــــات :

تعريف: الاقترانات علاقة يكون لكل عنصر في مجالها صورة واحدة فقط في المدى .

مثال : أي من العلاقات التالية تفيد اقترانا و أيها لا تفيد اقترانا؟

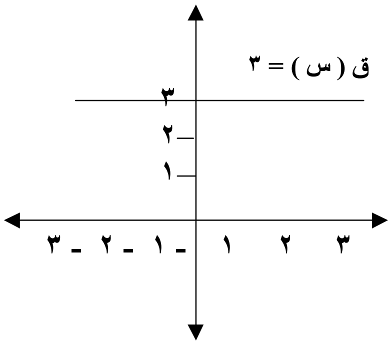
ق = { (١ ، أ) ، (٢ ، ب) ، (٣ ، ب) ، (٤ ، ب) }
هـ = { (١ ، أ) ، (٢ ، ب) ، (٢ ، جـ) ، (٣ ، د) ، (٤ ، د) }
ل = { (١ ، أ) ، (٢ ، أ) ، (٣ ، جـ) ، (٤ ، ب) }

الحل :
العلاقة ق اقترانا لأن لكل عنصر في المجال صورة واحدة فقط في المدى ،
العلاقة ل اقترانأ لأن لكل عنصر في المجال صورة واحدة فقط في المدى ،
العلاقة هـ ليست اقترانا لأن العنصر ٢ في مجالها ارتبط بعنصرين في مداها هما ب ، جـ

الاقتران الخطي :

كل اقتران على الصورة ق (س) = أ س + ب حيث أ ، ب أعداد حقيقية يسمى اقترانا خطيا

و إذا كانت أ = صفر فيصبح ق (س) = ب يسمى اقترانا ثابتا ، والاقتران الثابت هو حالة خاصة من الاقتران الخطي (ق (س) = ب) .
و الصورة العامة للاقتران الثابت هي ق (س) = ب ، حيث ب تنتمي إلى ح
مثال: ق (س) = - ١ ، ق (س) = ٣ ، ق (س) = ٧



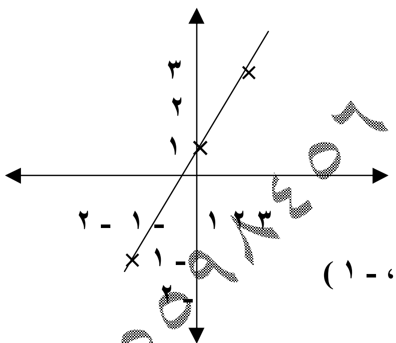
مثال : مثل الاقتران ق (س) = ٣ بيانياً

الحل :

س	١-	٠	١	٢
ص	٣	٣	٣	٣

الصورة العامة للاقتران الخطي هي :
ق (س) = أ س + ب ، أ ≠ ٠ أ ، ب تنتمي لـِ ح

مثال : ق (س) = س ، ق (س) = س + ١ ، ق (س) = ٢ س + ١



مثال : مثل الاقتران ق (س) = ٢س + ١ .

الحل :

س	١-	٠	١
ص	١-	١	٣

ق (- ١) = ٢ × - ١ + ١ = - ٢ + ١ = - ١ ، (- ١ ، - ١)
ق (٠) = ٢ × ٠ + ١ = ٠ + ١ = ١ ، (٠ ، ١)
ق (١) = ٢ × ١ + ١ = ٢ + ١ = ٣ ، (١ ، ٣)

✍ **ميل منحنى الاقتران ق (س) = أ س + ب يساوي أ (معامل س)**

مثال : جد ميل منحنى كل من الاقترانات التالية :

① ق : ق (س) = ٧ س + ٣ ② ل : ل (س) = ٦ – ٣س ③ م : م(س) = ٥ – $\frac{٥}{٢}$ س

الحل :

① **ميل منحنى الاقتران ق = معامل س = ٧**

② **ميل منحنى الاقتران ل = معامل س = ـ ٣**

③ **ميل منحنى الاقتران م = معامل س = - $\frac{٥}{٢}$**

> ✍ **منحنى الاقتران ق : ق (س) = أ س + ب يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ب) و يسمى الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع الخط المستقيم مع محور الصادات بمقطع منحنى الاقتران من محور الصادات ويساوي ب**

✍ **مقطع الخط المستقيم الذي قاعدته ق (س) = أ س + ب من محور الصادات يساوي ب (الحد الثابت)**

<u>مثال :</u>

جد مقطع الخط المستقيم من محور الصادات في كل من الاقترانات التالية .

① ق (س) = ٤س + ٨ ② هـ (س) = - ٧ – ٨ س

الحل :

① **مقطع منحنى الاقتران من محور الصادات = ٨**

② **مقطع منحنى الاقتران من محور الصادات = ـ ٧**

يكون الاقتران (ق) اقترانا متزايدا إذا كانت ق (س) تزداد بازدياد قيم (س) .

> ✍ **<u>الاقتران الخطي المتزايد :</u>**
>
> **يكون الاقتران الخطي ق : ق (س) = أ س + ب متزايدا إذا كان أ > صفر**

✍ **يكون الاقتران (ق) متناقص إذا كانت قيم ق (س) تتناقص بازدياد قيم (س)**

> ✍ **<u>الاقتران الخطي المتناقص :</u>**
>
> **يكون الاقتران الخطي ق : ق (س) = أ س + ب متناقصا إذا كان أ < صفر**

الخلاصـــة :

① الصيغة العامة للاقتران الخطي ق (س) = أ س + ب ، أ ≠ ٠
② الميل = أ ، للاقتران الخطي ق (س) = أ س + ب .
③ أ > صفر إذا الاقتران متزايد
④ أ < صفر إذا الاقتران متناقص
⑤ أ = صفر إذن ق (س) ثابـــــت
⑥ مقطع الخط المستقيم من محور الصادات = ب (الحد الثابت) .

الصورة العامة للمعادلة التربيعية :

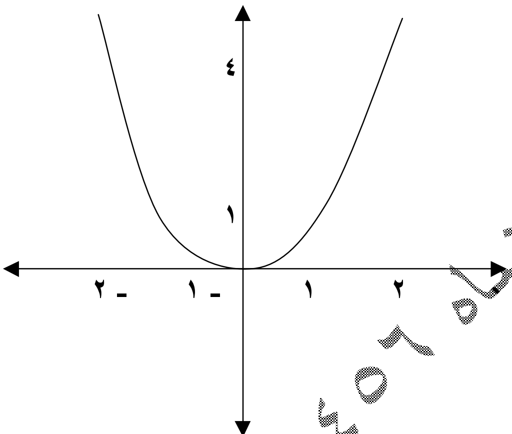
ص = أس^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ٠ ، أ ، ب ، جـ تنتمي إلى ح

مثال :

① ص = س^{٢} ② ص = ٢ س^{٢} + ٥ ③ ٥س^{٢} + ٧س + ٨

مثال : مثل المعادلة التالية ص = س^{٢} بيانيا .

س	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٤	١	٠	١	٤



ق (- ٢) = (- ٢) ^{٢} = ٤
ق (- ١٩ = (- ١) ^{٢} = ١
ق (٠) = (٠) ^{٢} = ٠
ق (١) = ١ ، ق (٢) = ٤

الصورة العامة للمعادلة من الدرجة الثالثة :

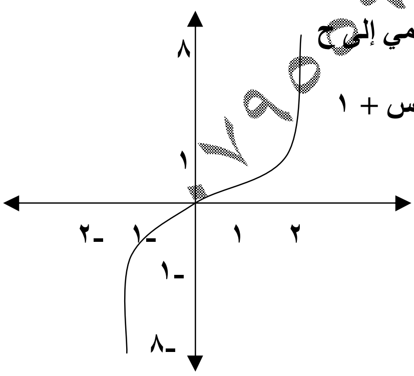
ص = أس ^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د ، أ ≠ ٠ ، أ ، ب ، جـ ، د تنتمي إلى ح

مثال :

① ص = س^{٣} ② ص = ٣ س^{٣} - ٨١ ③ س ^{٣} – س ^{٢} + س + ١

مثال : مثل المعادلة ص = س^{٣} بيانيا

س	-٢	-١	٠	١	٢
ص	- ٨	-١	٠	١	٨



ق (- ١) = (- ١) ^{٢} = - ١
ق (٠) = ٠ ، ق (١) = ١ ....

تمـــــــارين :

① جد المجال و المدى للعلاقة ع = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٦) }

② مثل الاقتران ق (س) = ٣س + ١ بيانيا

③ مثل الاقتران ق (س) = ٥ بيانيا

④ ارسم منحنى الاقتران ق (س) = س^{٢} – ١ بيانيا

⑤ ارسم منحنى ق (س) = - س^{٣}

⑥ ارسم منحنى ق (س) = - س^{٢}

⑦ جد ميل الاقترانات الخطية التالية :
أ) ٢س – ٨ ب) ٧ – ٣س ج) ٢ + ٦س

⑧ جد مقطع الخط المستقيم من محور الصادات في كل من الاقترانات الخطية التالية :
أ) ق (س) = ٣ – ٢س ب) ق (س) = ٦ – ٢س
جـ) ق (س) = ٧ + ٣ س د) ق (س) = ٢س + ٧

⑨ اعتمادا على السؤال رقم ⑧ أي الاقترانات السابقة متزايد و أيها متناقص .

|س| : تقرأ القيمة المطلقة لـِ س

الغرض من القيمة المطلقة هو جعل الأعداد السالبة موجبة .
|٢| = ٢ ، |ـ ٣| = ٣ ، |ـ ٢| = ٢ ، |ـ ٥| = ٥

تعريف |س| = { +س ، س ≥ صفر
ـ س ، س < صفر }

أو

|س| : ـ س ← ٠ → س

✍ **لإعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة نتبع ما يلي :**

① نجد جذور ما داخل القيمة المطلقة
② نعينه على خط الأعداد ، ثم ندرس الإشارة قبل وبعد الأصفار (الجذور)
③ الإشارة الموجبة تعني ما داخل القيمة المطلقة .
④ الإشارة السالبة تعني سالب ما داخل القيمة المطلقة .

مثال : أعد تعريف الاقتران ق (س) = |٢ س + ٢| ، س ∋ ح
الحل :
① ٢ س+ ٢ = ٠ ⇐ ٢س = ـ ٢ ⇐ س = ـ ١

②
|ق(س)| : ـ (٢س + ٢) ← ـ ١ → ٢س+ ٢

لدراسة الإشارة نأخذ عدد أكبر من الجذر وليكن (١) ⇐ ق (١) = ٢ × ١ + ٢ = ٤
الناتج موجب يعني ما داخل القيمة المطلقة ، ثم نأخذ عدد أقل من الجذر وليكن ـ ٢
⇐ ق (ـ ٢) = ٢ × ـ ٢ + ٢ ⇐ ـ ٤ + ٢ = ـ ٢ سالب
يعني سالب ما داخل القيمة المطلقة ، فيصبح الاقتران كما يلي :

|٢ س + ٢| = { ٢ س + ٢ ، س ≥ ـ١
ـ ٢ س ـ ٢ ، س < ـ ١ }

<u>مثال :</u>

أعد تعريف الاقتران ق (س) = | س^{٢} + ٤ س + ٣ |

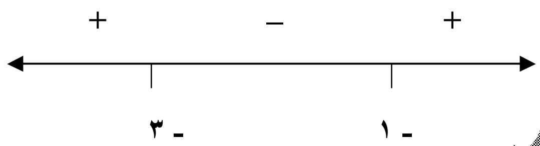
الحل :

① س^{٢} + ٤ س + ٣ = ٠ لإيجاد الجذور

نحلل العبارة التربيعية بالأقواس ⇐ (س + ١) (س + ٣) = ٠

⇐ س = - ١ ، س = - ٣

② لدراسة الإشارة في العبارة التربيعية بين الجذرين تكون الإشارة عكس إشارة معامل س^{٢} وخارج الجذرين نفس إشارة معامل س^{٢}

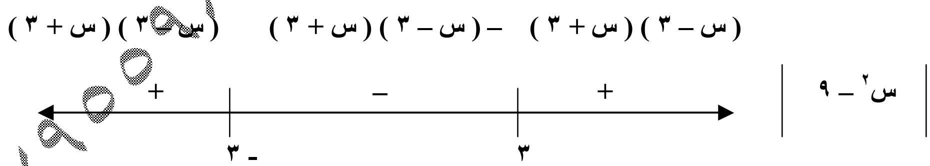


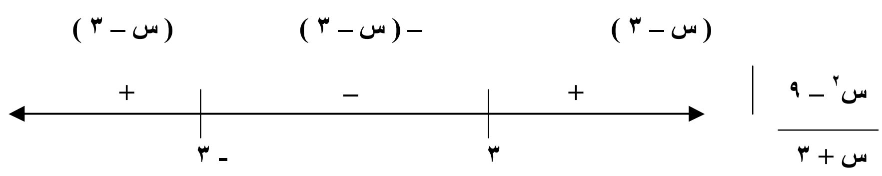
| س^{٢} + ٤ س + ٣ | =
$\begin{cases} \text{س}^{٢} + ٤\,\text{س} + ٣ \text{ ، س} \le -١ \text{ ، س} \ge -٣ \\ -(\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س} + ٣) \text{ ، } -٣ \ge \text{س} \ge -١ \end{cases}$

<u>مثال :</u>

أعد تعريف الاقتران ق (س) = $\dfrac{|\text{س}^{٢} - ٩|}{\text{س} + ٣}$ ، س ≠ - ٣

الحل : س^{٢} – ٩ = ٠ ⇐ (س – ٣) (س + ٣) ⇐ س = ± ٣





ق (س) = { س – ٣ ، س ≤ ٣ ، س < - ٣
٣ – س ، - ٣ < س ≤ ٣

<u>تدريب :</u> أعد تعريف الاقترانات التالية :

① ق (س) = | ٢ س – ٦ |

② ق (س) = | س^٢ – ٥س + ٦ |

③ ق (س) = | س^٢ – ٤ | / (س – ٢)

[س] : تقرأ أكبر عدد صحيح يقل عن أو يساوي س ، أو باختصار صف س

ق (س) = [س] هو اقتران يقرن كل عدد حقيقي مثل س بأكبر عدد صحيح يقل عن أو يساوي س

<u>ملاحظة:</u> [س] = ن ، ن ≤ س < ن + ١

<u>أمثله :</u>

[٣.٥] = ٣ ، [٠.٣٥] = ٠ ، [٣.٢] = ٣ ، [٠.٧] = ٠ ، [٣.٦] = ٣
[–٠.٢] = – ١ ، [٥] = ٥ ، [– ٣.٢] = – ٣ ، [– ٢] = – ٢ .

صف العدد الصحيح يبقى نفسه
صف العدد غير الصحيح نأخذ الأقل منه مباشرة كعدد صحيح .

<u>لإعادة تعريف اقتران أكبر عدد صحيح نتبع ما يلي :</u>

① نجد طول الدرجة = ١ / | معامل س |

② نجد جذر ما داخل الصف ③ نبدأ من الجذر ثم نضيف طول الدرجة .

<u>مثال</u> : اعد تعريف الاقتران ق (س) = [س – ٢] ، س ∈ [٠ ، ٥ [.
الحل :

① طول الدرجة = ١ / | ١ | = ١

② الجذر س – ٢ = ٠ ⇐ س = ٢

③ [س – ٢] =

- ٢	٠ ≤ س < ١
- ١	١ ≤ س < ٢
٠	٢ ≤ س < ٣
١	٣ ≤ س < ٤
٢	٤ ≤ س < ٥

عوض القيمة التي عندها مساواة في الاقتران الأصلي [س – ٢]

ملاحظة : إذا كان معامل س موجب تكون المساواة من جهة اليمين
إذا كان معامل س سالب تكون المساواة من جهة اليسار .

ملاحظة : يجوز أن نبدأ من بداية الفترة المعرف عليها الاقتران إذا عوضنا البداية في الاقتران و كان الناتج عدد صحيح .

<u>مثال</u> : أعد تعريف الاقتران ق (س) [س + ٠.٤] ، س ∋ [– ٠.٤ ، ٢]

الحل :

طول الدرجة = ١ ، الجذر س = - ٠.٤

$$[\text{س} + ٠.٤] = \begin{cases} ٠ & ٠.٦ > \text{س} \ge -٠.٤ \\ ١ & ١.٦ > \text{س} \ge ٠.٦ \\ ٢ & ٢ > \text{س} \ge ١.٦ \end{cases}$$

<u>مثال</u> : أعد تعريف الاقتران ق (س) = [٣ – س] ، س ∋ [– ١ ، ٣]

الحل :

طول الدرجة = ١ الجذر س = ٣

$$[٣ - \text{س}] = \begin{cases} ٤ & -١ \ge \text{س} > -٢ \\ ٣ & ٠ \ge \text{س} > -١ \\ ٢ & ١ \ge \text{س} > ٠ \\ ١ & ٢ \ge \text{س} > ١ \\ ٠ & ٣ \ge \text{س} > ٢ \end{cases}$$

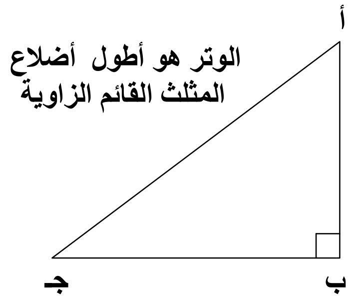
<u>تدريب:</u>

① أعد كتابة قاعدة الاقتران ق (س) = [س] ، س ∋ [– ٢ ، ٢]

② أعد كتابة قاعدة الاقتران ق (س) = [٢س] ، س ∋ [– ١ ، ١]

③ أعد كتابة قاعدة الاقتران ق (س) = [٢ – س] ، س ∋ [– ٢ ، ٤]

أ) <u>نظرية فيثاغورس</u> : في المثلث القائم الزاوية مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين .



(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

مثال : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه
أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٣ سم ، أحسب طول أ جـ .

الحل :

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} ⇐ = ٤ ^{٢} + ٣ ^{٢} = ٢٥

(أ جـ)^{٢} = ٢٥ ⇐ أ جـ = ٥ سم .

مثال : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه
أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ٦ سم ، أحسب طول أ ب .

الحل :

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} ⇐ ١٠٠ = (أ ب) ^{٢} + ٣٦

(أ ب) ^{٢} = ١٠٠ – ٣٦ ⇐ (أ ب) ^{٢} = ٦٤ ⇐ أ ب = ٨ سم

<u>نظرية فيثاغورس:</u>

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

(أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} – (ب جـ)^{٢}

(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} – (أ ب)^{٢}

ب) <u>عكس نظرية فيثاغورس :</u> صحيح أيضا أي أنه في أي مثلث إذا كان مربع طول أحد الأضلاع يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإن المثلث يكون قائم الزاوية .

<u>مثال :</u> هل المثلث الذي أطوال أضلاعه ١٢ سم ، ٥ سم ، ١٣ سم قائم الزاوية .
<u>الحل :</u>

نحسب مربعات الأطوال و هي ١٤٤ ، ٢٥ ، ١٦٩

☜ بما أن ١٦٩ = ١٤٤ + ٢٥ فإن المثلث قائم الزاوية

<u>تمارين :</u>

① أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أحسب طول الضلع المجهول في كل مما يلي :

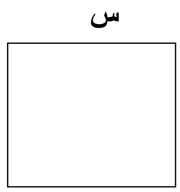
أ) أ ب = √٥ سم ، ب جـ = √١١ سم .
ب) أ ب = ١٢ سم ، ب جـ = ٥ سم
جـ) أ جـ = ٢٦ سم ، ب جـ = ٢٥ سم
د) أ جـ = ٨ سم ، أ ب = ٣ سم

② الأعداد المعطاة فيما يلي ، تمثل أطوال أضلاع مثلث أي من هذه المثلثات قائم الزاوية .

أ) ٨ ، ١٥ ، ١٨ ب) ٢٥ ، ١٥ ، ٢٠

المساحات :

① **المربع :**



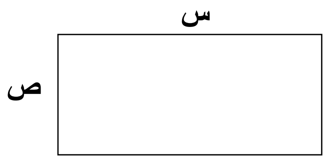
مساحة المربع = مربع ضلعه

م = س^{٢}

مثال : أوجد مساحة المربع الذي طول ضلعه ٤ سم

م = س^{٢} ⇐ م = (٤)^{٢} ⇐ م = ١٦ سم^{٢}

② **المستطيل :**



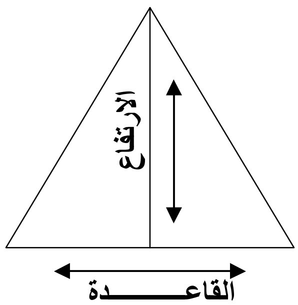
مساحة المستطيل = الطول × العرض

م = س × ص

مثال: أوجد مساحة المستطيل إذا كان طول ضلعه ٥ سم و عرضه ٨ سم

م = س × ص ⇐ م = ٥ × ٨ ⇐ م = ٤٠ سم^{٢} .

③ **المثلث :**

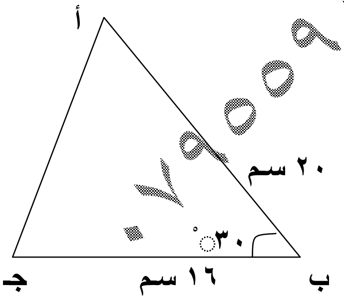


مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

مثال: أوجد مساحة المثلث إذا كانت طول القاعدة= ٨ سم
و ارتفاع المثلث = ٤ سم

م = $\frac{١}{٢}$ × الطول × الارتفاع ⇐ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٤ = ١٦ سم^{٢}

✍ **مساحة أي مثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولي أي ضلعين فيه ، مضروبا بجيب الزاوية المحصورة بينهما .**



مثال : جد مساحة المثلث أ ، ب ، جـ إذا كان
أ ، ب = ٢٠ سم ، ب ، ج، = ١٦ سم
زاوية ب = ٣٠°

الحل :

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ (أ ب) (ب جـ) جـا ب

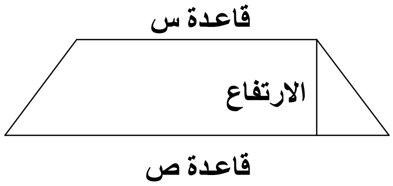
⇐ = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ٢٠ × جـا ٣٠ ⇐ = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ٢٠ × $\frac{١}{٢}$ = ٨٠ سم^{٢}

④ شبه المنحرف :

مساحة شبه المنحرف = نصف حاصل ضرب مجموع طولي القاعدتين في الارتفاع

م = $\frac{١}{٢}$ مجموع قاعدتين × الارتفاع

م = $\frac{١}{٢}$ (س + ص) × الارتفاع



مثال : أوجد مساحة شبه المنحرف في الشكل المجاور

الحل :

م = $\frac{١}{٢}$ (٦ + ١٠) × ٤

م = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ٤ ⟸ م = ٣٢ سم^{٢}

⑤ الدائرة :

مساحة الدائرة = ∏ نق ^{٢} : حيث نق : نصف قطر الدائرة

محيط الدائرة = ٢ ∏ نق

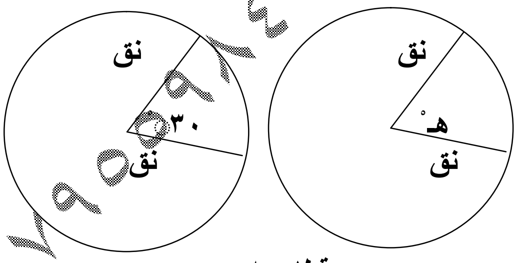
مثال : احسب مساحة و محيط الدائرة التي نصف قطرها = ٤ سم

الحل :

م = ∏ (٤) ^{٢} = ١٦ ∏ سم^{٢} ⟸ محيط الدائرة = ٢∏ × ٤ = ٨ ∏ سم

⑥ القطاع الدائري :

شكل هندسي يتكون من نصفي قطرين و القوس المحصور بينهما .



قطاع دائري

مساحة القطاع الدائري = $\frac{هـ^{\circ}}{٣٦٠^{\circ}}$ × مساحة الدائرة ، حيث هـ زاوية القطع الدائري المركزية .

مثال : احسب مساحة قطاع دائري في دائرة نصف قطرها ٦ سم وزاويته المركزية ٣٠°

الحل :

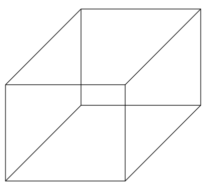
$$\text{مساحة القطع الدائري} = \frac{\text{زاويته المركزية}}{360^\circ} \times \text{مساحة الدائرة}$$

$$\Leftarrow = \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \prod \times 6^2 = 113 \text{ سم}^2$$

$$\prod = \frac{22}{7} \text{ ، } \prod = 3.14$$

⑦ المنشور القائم ومساحته الجانبية :

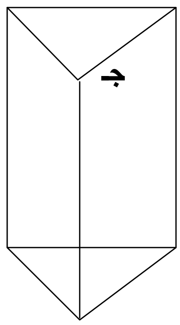
المنشور القائم : هو مجسم له قاعدتان مستويتان ومتطابقتان وأسطحه الجانبية مستطيلات



مساحة المنشور القائم الجانبية = محيط القاعدة × ارتفاع المنشور

مثال : منشور ثلاثي قائم أطوال أضلاع قاعدته أ جـ ، ب جـ ، أ ب هي ٣ سم ، ٢ سم ، ٤ سم على الترتيب ، و ارتفاعه أ ص = ٥ سم ، أوجد مساحته الجانبية

الحل :



قاعدة المنشور مثلث

محيطه = ٣ + ٢ + ٤ = ٩ سم

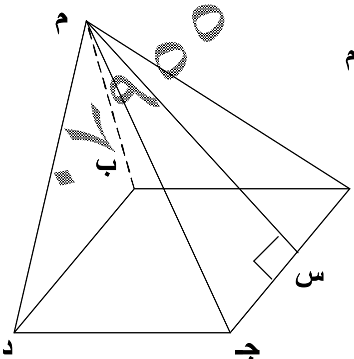
ارتفاع المنشور = ٥ سم

م = محيط القاعدة × الارتفاع = ٩ × ٥ = ٤٥ سم²

✍ مساحة سطح الموشور = مجموع مساحات اوجهه + مجموع مساحتي القاعدتين

⑧ الهرم القائم ومساحته الجانبية :

الهرم القائم تكون قاعدته منتظمة كما تكون أوجهه الجانبية عبارة عن مثلثات متساوية الساقين و متطابقة ويسمى ارتفاع المثلث المتساوي الساقين الارتفاع الجانبي للهرم



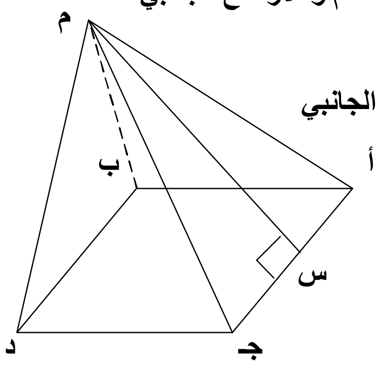
✍ المساحة الجانبية للهرم

= مجموع مساحات المثلثات المتساوية الساقين

$= \frac{1}{2}$ قاعدة المثلث × ارتفاع المثلث × عدد المثلثات

$= \frac{1}{2}$ محيط قاعدة الهرم × الارتفاع الجانبي له

<u>مثال</u> : هرم رباعي قائم كما في الشكل المرفق فيه أ ب = ٤ سم و الارتفاع الجانبي له م س = ٦ سم أوجد مساحته الجانبية .

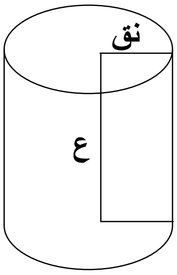


الحل :

المساحة الجانبية للهرم = $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤ × ٦ = ٤٨ سم ٢

⑨ الأسطوانـــة :



المساحة الجانبية للأسطوانة

م = ٢ ∏ نق ع ، حيث نق = نصف قطر القاعدة

ع = ارتفاع الاسطوانة

= محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الكلية للأسطوانة = مساحتها الجانبية + مساحتي القاعدتين

= ٢ ∏ نق ع + ٢ ∏ نق ٢

<u>مثال</u> : أوجد المساحة الجانبية للأسطوانة التي نصف قطرها = ٢سم و ارتفاعها = ٣ سم

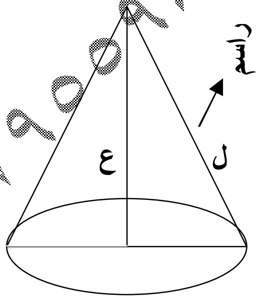
الحل :

م = ٢ ∏ × ٢ × ٣ = ١٢ ∏ سم٢

المساحة الكلية = ٢ ∏ نق ع + ٢ ∏ نق ٢

= ١٢ ∏ + ٢∏ × ٢ × ٢ = ١٢ ∏ + ٨ ∏ = ٢٠ ∏ سم ٢ .

⑩ المخروط :



المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم = ∏ نق ل

حيث : نق = نصف قطر قاعدة المخروط

ل = طول راسم المخروط

<u>مثال</u> : جد المساحة الجانبية لمخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته = ٥ سم وطول راسمه = ١٢ سم .

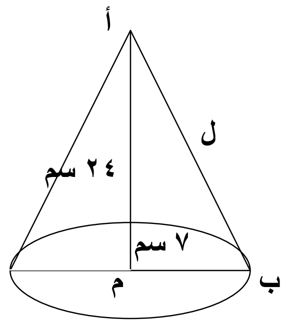
الحل : المساحة الجانبية للمخروط = ∏ نق ل

⇐ ٣.١٤ × ٥ × ١٣ = ٢٠٤.١ سم٢

المساحة الكلية للمخروط = ∏ نق ل + ∏ نق ٢

حيث : نق = نصف قطر قاعدة المخروط ، ل = طول راسم المخروط

<u>مثال</u> : مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته = ٧ سم و ارتفاعه ٢٤ سم جد مساحته الكلية ($\prod = \frac{٢٢}{٧}$)



الحل :

المساحة الكلية للمخروط = ∏ نق ل + ∏ نق ^{٢}

⇐ = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ل + $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٧

ولحساب ذلك يلزم إيجاد ل باستخدام نظرية فيثاغورس

ل^{٢} = (أ م) ^{٢} + (ب م) ^{٢} ⇐ ل ^{٢} = (٢٤) ^{٢} + (٧) ^{٢} ⇐ ل ^{٢} = ٥٧٦ + ٤٩ = ٦٢٥

⇐ ل ^{٢} = ٦٢٥ ⇐ ل = ٢٥ سم

المساحة الكلية للمخروط = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٢٥ + $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٧ = ٧٠٤ سم^{٢}

① الكرة :

مساحة سطح الكرة = ٤∏ نق ^{٢} : حيث نق = نصف قطر الكرة.

<u>مثال</u> :

جد مساحة سطح الكرة التي نصف قطرها = ١٤ سم ، ∏ = ٣.١٤

الحل : مساحة الكرة = ٤∏ نق ^{٢} = ٤ × ٣.١٤ × ١٤ × ١٤ = ٢٤٦٤ سم^{٢} .

<u>الحجـوم :</u>

① حجم المكعب :

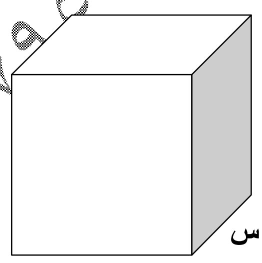
مكعب طول ضلعه س ⇐ فيكون حجم المكعب = س ^{٣} ⇐ ح = س^{٣}

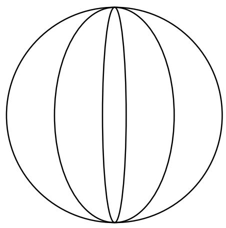
<u>مثال</u> : أوجد حجم المكعب الذي طول ضلعه ٣ سم

الحل :

ح = س^{٣} ⇐ = (٣) ^{٣}

⇐ ح = ٢٧ سم^{٣}





② حجم الكرة :

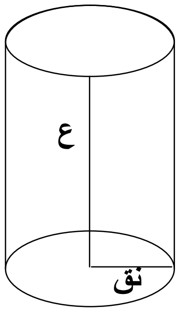
حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\prod$ نق ^{٣}

مثال : أوجد حجم الكرة التي نصف قطرها = ٣ سم

الحل :

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\prod$ نق ^{٣} $\Leftarrow$ = $\frac{٤}{٣}\prod$ (٣) ^{٣}

$\Leftarrow$ = ٣٦ $\prod$ سم^{٣}



③ حجم الأسطوانة :

حجم الأسطوانة هو مساحة القاعدة × الارتفاع

ح = $\prod$ نق^{٢} ع : حيث نق = نصف قطر القاعدة

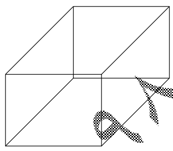
ع = ارتفاع الاسطوانة

مثال : أوجد حجم الأسطوانة التي نصف قطر قاعدتها = ٢ سم و ارتفاع الأسطوانة ٤ سم

ح = $\prod$ (٢) ^{٢} × ٤ = ١٦ $\prod$ سم^{٣} .

④ حجم المنشور القائم

حجم المنشور القائم = مساحة القاعدة × الارتفاع



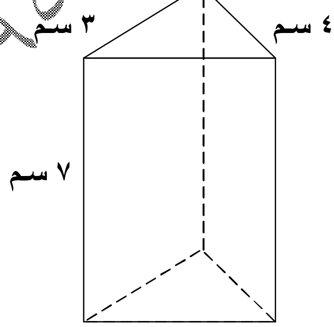
مثال :

منشور ثلاثي قائم ارتفاعه ٧ سم ، قاعدته مثلث قائم الزاوية طول ضلعي القائمة ٣ سم ، ٤ سم احسب حجمه

الحل :

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٤ × ٧ = ٤٢ سم^{٣}

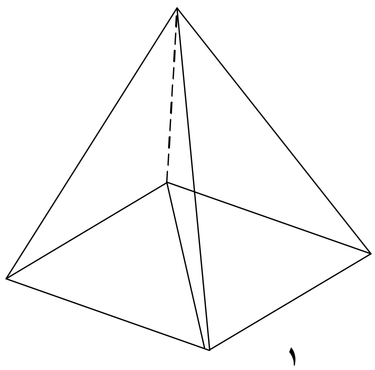


⑤ حجم الهرم القائم :

حجم الهرم القائم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

مثال : أوجد حجم هرم رباعي قائم ارتفاعه ٣٠ سم و مساحة قاعدته = ٤٤٠ سم^{٣}

الحل :



حجم الهرم القائم = $\frac{١}{٢}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

⇐ = $\frac{١}{٤}$ × ٤٤٠ × ٣٠ = ٤٤٠٠ سم^{٣}

⑥ المخروط :

حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ ∏ نق^{٢} ع

مثال : جد بدلالة ∏ حجم مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم و ارتفاعه ٨ سم .

الحل :

حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ ∏ نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ ∏ × ٦ × ٦ × ٨ = ٩٦ ∏ سم^{٣}

تمـــارين :

① جد مساحة المربع الذي طول ضلعه ٥ سم

② جد مساحة المستطيل الذي طوله ٦ سم و عرضه ٨ سم ، ثم جد طول قطره .

③ جد مساحة المثلث أ ب جـ إذا كان طول أب = ٥ سم و طول ب جـ = ٨ سم و ارتفاع المثلث = ١٢ سم

④ جد مساحة شبه المنحرف إذا كان طول القاعدة الكبرى فيه ٨ سم و القاعدة الصغرى = ٦ سم وارتفاعه ٤ سم.

⑤ إذا كانت مساحة شبه المنحرف = ٦٨ سم^{٢} و مجموع طولي القاعدتين = ١٢ سم ، أوجد ارتفاعه .

---

⑥ احسب مساحة قطاع دائري في دائرة نصف قطرها ٨ سم و زاويته المركزية = ٦٠° .

⑦ احسب مساحة الدائرة إذا كان نصف قطرها = ٦سم ثم احسب محيط تلك الدائرة .

⑧ منشور خماسي قائم محيط قاعدته ٣٠ سم و ارتفاعه ٨ سم أحسب مساحته الجانبية .

⑨ منشور سداسي قائم مساحة قاعدته ٢٠٠٠٠ سم^{٢} وحجمه ٨ م^{٣} احسب ارتفاع العمود .

⑩ هرم سداسي ارتفاعه الجانبي ٦ سم ، وطول ضلع قاعدته ٤ سم ، ما مساحته الجانبية

①① هرم رباعي مساحة قاعدته ٦٠ سم^{٢} و ارتفاعه ٩ سم احسب حجمه

①② جد حجم مخروط دائري قائم ، نصف قطر قاعدته ٥ سم و ارتفاعه ١٢ سم (∏ = ٣.١٤)

①③ جد طول نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم طول راسمه ٧ سم
و مساحته الجانبية = ١٠٩.٩ سم^{٢}

①④ اسطوانة دائرية قائمة حجمها ١٢٥.٦ سم^{٣} و ارتفاعها ١٠ سم جد طول قطر قاعدتها

①⑤ جد المساحة الكلية لأسطوانة قائمة ، حجمها ٢٠٧٩ سم^{٢} وارتفاعها ٦سم ،
(∏ = ٣.١٤)

①⑥ جد حجم كرة نصف قطرها ٢٥ سم (∏ = ٣.١٤)

①⑦ كرة مساحة سطحها ١٢٥٦ سم^{٢} ، جد طول نصف قطرها (∏ = ٣.١٤)

①⑧ ما مساحة قاعدة خزان ماء ، شكله مخروطي قائم ، إذا كان ارتفاعه ٤ م ، و سعته ٤٨٠٠٠ لتر ؟ .

المسـافة بين نقطتين

اذا كانت أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) نقطتين في المستوى فإن طول

$$\overline{\text{أب}} = \sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$$

احداثيات منتصف القطعة المستقيمة التي تمر بالنقطتين أ ب هي

$$\left(\frac{\text{س}_{١} + \text{س}_{٢}}{٢} \text{ ، } \frac{\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢}}{٢} \right)$$

ميل المستقيم المار بالنقطتين أ ب هو

$$\text{م} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} \text{ ، } \text{س}_{٢} \neq \text{س}_{١}$$

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢)
هي ص – ص١ = م (س – س١) حيث م : الميل

مثـال: اذا كانت أ (٢ ، ٦) ، ب (٥ ، ١٠) نقطتين في المستوى أوجد

① المسـافة بين النقطتين أ ب .

$$\overline{\text{أ ب}} = \sqrt{(٥ - ٢)^{٢} + (١٠ - ٦)^{٢}} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥ \text{ وحدات}$$

② احداثيات منتصف القطعة المستقيمة التي تمر بالنقطتين أ ب.

$$= \left(\frac{٢ + ٥}{٢} \text{ ، } \frac{٦ + ١٠}{٢} \right) = \left(\frac{٧}{٢} \text{ ، } \frac{١٦}{٢} \right) = \left(\frac{٧}{٢} \text{ ، } ٨ \right)$$

③ ميل المستقيم المار بالنقطتين أ ب .

$$\text{م} = \frac{١٠ - ٦}{٥ - ٢} = \frac{٤}{٣}$$

④ معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين أ ب .

المعادلة هي ص – ص١ = م (س – س١) ، س ، ص لا نعوض مكانـها شيء
س١ ، ص١ نعوض مكانـهما احدى النقطتين أ أو ب ولنختار النقطة أ

$$ص - ٦ = \frac{٤}{٣} (س - ٢)$$

$$= ص - ٦ = \frac{٤}{٣} س - \frac{٨}{٣} \quad ☜ \quad ص = \frac{٤}{٣} س - \frac{٨}{٣} + ٦$$

$$☜ ص = \frac{٤}{٣} س + \frac{١٠}{٣}$$

تمــارين

① إذا كانت أ (٢ ، ٥) ، ب (٥ ، ٣) ، جـ (٠ ، ٤) تمثـل رؤوس المثلث أ ب جـ ، ما أطوال أضلاعـــه .

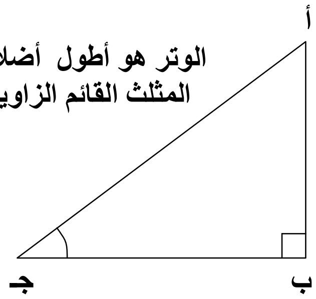
② في السـؤال السـابق أوجـد منصفات اضلاع المثلث أ ب ، ب جـ ، أ جـ .

③ ما معـادلة الخط المستقيم الذي ميلـه ٢ ويمر بالنقطة (١ ، ٧) .

④ ما معـادلـة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين جـ (- ٣ ، ٥) ، (- ٢ ، - ١) .

✍ جيب الزاويةالحـــادة = <u>طول الضلع المقابل للزاوية</u>
طول وتر المثلث قائمِ الزاويةِ

الوتر هو أطول أضلاع المثلث القائم الزاوية



✍ جـــا جـ = أ ب / ب جـ

✍ جيب تمام الزاوية الحـــادة = <u>طول الضلع المجاور لهـا</u>
طول الوتر

✍ جتـــا جـ = ب جـ / أ جـ

✍ ظـل الزاويـة = <u>طول الضلع المقابل</u>
طول الضلع المجــاور

✍ ظـــا جـ = أ ب / ب جـ ، ✍ ظـــا جـ = جـــا جـ / جتـــا جـ

<u>مـثــال</u> :

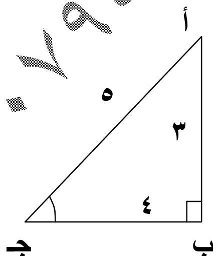
أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم ، أ جـ = ٥ سم .

أوجـد:

① جـــا جـ = ٣ / ٥

② جتـــا جـ = ٤ / ٥

③ ظـــا جـ = ٣ / ٤



✍ **قاعدة :** ① جا (٩٠ ° - س) = جتا س

② جتا (٩٠ ° - س) = جا س

③ جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١

مثال :
إذا كان جا س = ٠.٥٧٣٦ ، فما قيمة جتا (٩٠ ° - س) ؟

الحل :
بما أن جتا (٩٠ ° - س) = جا س

إذن جتا (٩٠ ° - س) = ٠.٥٧٣٦

مثال :
إذا كان جا س = جتا ٢ س ، فما قيمة س بالدرجات إذا علمت أن ٢ س هو قياس زاوية حادة .

الحل :
بما أن جتا ٢ س = جا س (٩٠ ° - ٢ س)
إذن جا س = جا (٩٠ ° - ٢ س)

أي أن س = ٩٠ ° - ٢ س ☜ س = ٣٠ °

طريقة أخرى
إذا كان جا س = جتا س فإن
س + ٢ س = ٩٠ ° وعليه :
٣ س = ٩٠ ° ☜ س = ٣٠ °

مثال :
إذا كانت س قياس زاوية حادة ، وكان جا س = ٠.٦ ، جد جتا س .
الحل : باستخدام العلاقة :

جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١

(٠.٦)^{٢} + جتا^{٢}س = ١

جتا^{٢}س = ١ - ٠.٣٦ = ٠.٦٤

إذن جتا س = ± ٠.٨ ☜ جتا س = ٠.٨ لأن جتا س > ٠

متطابقات مثلثيه

- جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١، جا^{٢}س = ١ ـ جتا^{٢}س ، جتا^{٢}س= ١ ـ جا^{٢}س
- ظا^{٢}س = قا^{٢}س – ١، قا^{٢}س = ظا^{٢}س + ١ ، قا^{٢}س ـ ظا^{٢}س = ١
- قتا^{٢}س = ظتا^{٢}س + ١ ، ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س – ١ ، قتا^{٢}س ـ ظتا^{٢}س = ١
- جا (س + ص) = جا س جتا ص + جتا س جا ص
- جتا (س + ص) = جتا س جتا ص – جا س جا ص
- جا (س ـ ص) = جا س جتا ص ـ جتا س جا ص
- جتا (س + ص) = جتا س جتا ص+ جا س جا ص
- ظا (س + ص) = $\dfrac{\text{ظا س + ظا ص}}{\text{١ـ ظا س ظا ص}}$
- ظا (س ـ ص) = $\dfrac{\text{ظا س ـ ظا ص}}{\text{١+ ظا س ظا ص}}$
- جا س + جا ص = ٢ جا $\left(\dfrac{\text{س + ص}}{\text{٢}}\right)$ × جتا $\left(\dfrac{\text{س ـ ص}}{\text{٢}}\right)$
- جا س ـ جا ص = ٢ جتا $\left(\dfrac{\text{س + ص}}{\text{٢}}\right)$ × جا $\left(\dfrac{\text{س ـ ص}}{\text{٢}}\right)$
- جتا س + جتا ص = ٢ جتا $\left(\dfrac{\text{س + ص}}{\text{٢}}\right)$ × جتا $\left(\dfrac{\text{س ـ ص}}{\text{٢}}\right)$

- $\text{جتا س} - \text{جتا ص} = -2\ \text{جا}\left(\frac{\text{س} + \text{ص}}{2}\right) \times \text{جا}\left(\frac{\text{س} - \text{ص}}{2}\right)$
- $\text{جا}2\text{س} = 2\ \text{جا س جتا س}$
- $\text{جتا}\ 2\text{س} = \text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}$
  $= 2\text{جتا}^2\text{س} - 1$
  $= 1 - 2\ \text{جا}^2\text{س}$
- $\text{جا}^2\text{س} = \frac{1}{2}\left(1 - \text{جتا}\ 2\text{س}\right)$ ، $2\ \text{جا}^2\text{س} = 1 - \text{جتا}\ 2\text{س}$
- $\text{جا}^2\left(\frac{\text{س}}{2}\right) = \frac{1 - \text{جتا س}}{2}$ ، $\text{جا}\left(\frac{\text{س}}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \text{جتا س}}{2}}$
- $\text{جتا}^2\text{س} = \frac{1}{2}\left(1 + \text{جتا}\ 2\text{س}\right)$ ، $2\ \text{جتا}^2\text{س} = 1 + \text{جتا}\ 2\text{س}$
- $\text{جتا}^2\left(\frac{\text{س}}{2}\right) = \frac{1 + \text{جتا س}}{2}$ ، $\text{جتا}\left(\frac{\text{س}}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \text{جتا س}}{2}}$
- $\text{جا س جتا ص} = \frac{1}{2}\left(\text{جا}(\text{س} + \text{ص}) + \text{جا}(\text{س} - \text{ص})\right)$
- $\text{جتا س جا ص} = \frac{1}{2}\left(\text{جا}(\text{س} + \text{ص}) - \text{جا}(\text{س} - \text{ص})\right)$
- $\text{جا س جا ص} = -\frac{1}{2}\left(\text{جتا}(\text{س} + \text{ص}) - \text{جتا}(\text{س} - \text{ص})\right)$
- $\text{جتا س جتا ص} = \frac{1}{2}\left(\text{جتا}(\text{س} + \text{ص}) + \text{جتا}(\text{س} - \text{ص})\right)$
- $\text{ظا}\ 2\text{س} = \frac{2\ \text{ظا س}}{1 - \text{ظا}^2\text{س}}$
- $\text{ظا}^2\left(\frac{\text{س}}{2}\right) = \frac{1 - \text{جتا س}}{1 + \text{جتا س}}$

تم بحمدالله

تم بحمدالله

اعداد الاستاذ :

اعداد الاستاذ :

محمد مصطفي القضاه

محمد مصطفي القضاه

٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦

٠٧٩٥٥٩٨٤٥٦